Matematyka stosowana

Matematyka w ubezpieczeniach na życie

Mariusz Skalba
skalba@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski, 2011

Streszczenie. Ze skryptu tego możesz się nauczyć jak obliczać składki i rezerwy w ubezpieczeniach na życie.

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=muz

(może zawierać dodatkowe materiały)

Niniejsze materiały są dostępne na licencji Creative Commons 3.0 Polska: *Uznanie autorstwa — Użycie niekomercyjne — Bez utworów zależnych.*

Copyright © Mariusz Skałba, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011. Niniejszy plik PDF został utworzony 13 kwietnia 2011.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

1. WSTĘP

Jest to skrypt do wykładu fakultatywnego *Matematyka w ubezpieczeniach życiowych*, który od szeregu lat prowadzę na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego. Przede wszystkim (ale nie wyłącznie!) wybierają go studenci zainteresowani zastosowaniami matematyki w finansach i ubezpieczeniach.

Ogół zastosowań matematyki w ubezpieczeniach określa się tradycyjnie mianem *aktuariatu*. Zatem *aktuariusz* to matematyk ubezpieczeniowy (na ogół licencjonowany przez państwo lub samorząd zawodowy), który czuwa nad tym, aby kalkulacje składek i rezerw w firmie ubezpieczeniowej były przeprowadzane poprawnie, według jego najlepszej wiedzy i doświadczenia.

W Polsce istnieje system egzaminów państwowych, których zdanie uprawnia do wykonywania zawodu aktuariusza. Ten wykład i towarzyszące mu ćwiczenia mogą być dla Państwa dużą pomocą w przygotowaniu się do drugiej części egzaminu państwowego *Matematyka ubezpieczeń życiowych*. Cały egzamin składa się z czterach części (więcej o tym na stronie Komisji Nadzoru Finansowego).

Układ skryptu jest dość typowy i nie odbiega od klasycznych opracowań przedmiotu. Myślę, że mocną stroną tego skryptu jest duża liczba zadań i przykładów. Większość z nich jest kompletnie rozwiązana, a do wszystkich podano liczbowe odpowiedzi. Wykład bazuje w dużej mierze na mojej książce *Ubezpieczenia na życie* (WNT, wyd.1, 1999).

Życzę studentom przyjemnej pracy ze skryptem. Zapraszam na wykłady i ćwiczenia!

Mariusz Skałba

Matematyka w ubezpieczeniach na życie © Mariusz Skałba, Uniwersytet Warszawski, 2011.

2. Podstawy teorii oprocentowania

Treść tego rozdziału jest punktem wyjścia dla samodzielnej dyscypliny zwanej często matematyką finansową. Podamy tutaj niezbędne w dalszym ciągu wykładu podstawowe wiadomości , natomiast pełniejsze opracowanie omawianych zagadnień można znaleźć w [6] lub [1]. Załóżmy , że inwestujemy dzisiaj kwotę k_0, która po roku wzrasta do k_1 (zdarza się, że $k_1 < k_0$ – wtedy wzrost jest ujemny). Liczbę r określoną wzorem

$$r = \frac{k_1}{k_0} - 1 \tag{2.1}$$

nazywamy *stopą zwrotu* z tej inwestycji. Po przekształceniu wzoru (2.1) otrzymujemy

$$k_1 = k_0(1 + r) \tag{2.2}$$

Liczbę $1+r$ nazywamy *czynnikiem akumulującym.* W ciągu roku u różnych podmiotów gospodarczych zrealizują się, oczywiście, różne stopy zwrotu. W celu uporządkowania i uproszczenia dalszych rozważań przyjmujemy, że dominująca stopa zwrotu na przestrzeni kilku okresów, jest równa i. Będziemy ją nazywać *efektywną stopą procentową.*

Jeśli więc dziś założę lokatę bankową w wysokości k_0, to po roku otrzymam

$$k_1 = k_0(1 + i)$$

Jeśli jednak nie podejmę tych pieniędzy, ale przedłużę lokatę na rok następny, to na koniec drugiego roku trwania lokaty otrzymam

$$k_2 = k_1(1 + i) = k_0(1 + i)^2$$

Kapitał rośnie zatem tak jak ciąg geometryczny, po n latach będę miał w banku

$$k_n = k_0(1 + i)^n$$

Kwotę i_n, która przyrosła w n-tym roku, nazywamy *bieżącymi odsetkami*; wynosi ona

$$i_n = k_n - k_{n-1} = ik_{n-1}$$

Spójrzmy teraz na rozważany problem z innej strony. Chcę dysponować kapitałem k_1 za rok od dziś. Ile powinienem teraz zainwestować ($k_0 =?$), jeśli efektywna stopa procentowa wynosi i ? Odpowiedź uzyskujemy przekształcając wzór (2.2)

$$k_0 = \frac{k_1}{1 + i} \tag{2.3}$$

Liczbę

$$v = \frac{1}{1 + i} \tag{2.4}$$

nazywamy *czynnikiem dyskontującym.* Poglądowo można powiedzieć, że a kumuluje on wstecz (rys.1). Wzór (2.3) zapiszemy teraz w postaci bardziej przypominającej (2.2)

$$k_0 = k_1(1 - d) \tag{2.5}$$

Matematyka w ubezpieczeniach na życie © Mariusz Skałba, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Liczbę d występującą w tej zależności nazywamy *efektywną stopą dyskontową*. Ze wzorów (2.3),(2.4) i (2.5) wynika, że

$$d = 1 - v = \frac{i}{1+i} = iv \tag{2.6}$$

Liczba d jest miarą odsetek pobieranych z góry. Jeśli więc pożyczamy od kogoś 1 zł z efektywną stopą dyskonta d, to dostajemy tylko $(1-d)$ zł, a po roku oddajemy kapitał 1 zł. Pożyczkodawca osiągnął więc stopę zwrotu

$$\frac{1}{1-d} - 1 = \frac{1}{v} - 1 = i$$

Taką samą stopę zwrotu osiągnąłby pobierając odsetki po roku, w wysokości i zł.

Równanie typu

$$k_n = k_0(1+i)^n \tag{2.7}$$

nazywamy *równaniem wartości*. Jeśli trzy spośród czterech liczb k_0, k_n, i, n są dane, to czwartą można obliczyć z tego równania. Jeśli niewiadomą jest czas inwestycji n, to z równania (2.7) otrzymuje się na ogół niecałkowitą wartość n (najczęściej niewymierną). Dlatego wprowadza się tzw. *kapitalizację ciągłą*. Wyjaśnimy krótko jej sens.

Niech t będzie dowolną liczbą dodatnią (np. $t = 10\frac{1}{3}$). Chcę pobrać z banku początkowy depozyt k_0 po czasie t. Bank wypłaca mi

$$k_t = k_0(1+i)^t$$

Odsetki były tu naliczane cały czas (w sposób ciągły), a nie tylko dopisywane na koniec roku.

2.1. Nominalne stopy oprocentowania i dyskonta.Intensywność oprocentowania

Bank w którym mam swój ROR, kapitalizuje moje saldo (tzn. dopisuje odsetki) co miesiąc, *nominalna stopa oprocentowania* wynosi 13.5%. Co to znaczy w praktyce? Oznacza to , że po miesiącu stan mojego konta wyniesie

$$k_{1/12} = k_0\left(1 + \frac{0.135}{12}\right)$$

a po l miesiącach

$$k_{l/12} = k_0\left(1 + \frac{0.135}{12}\right)^l$$

(zakładamy , że w międzyczasie nic nie wpłacam i nic nie podejmuję); na przykład po roku mam na koncie

$$k_1 = k_0\left(1 + \frac{0.135}{12}\right)^{12} \approx 1.1438k_0$$

Powyższe rozważania streszczamy krótko:

Nominalnej stopie $i^{(12)} = 13.5\%$ *odpowiada efektywna stopa (roczna)* $i \approx 14.4\%$.

Ogólnie, jeśli dopisywanie odsetek odbywa się m razy w ciągu roku (oczywiście m jest całkowite!), to *nominalna stopa* $i^{(m)}$ jest powiązana z równoważną jej stopą efektywną i zależnością

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i \tag{2.8}$$

Po roku musi przyrosnąć taka sam kwota po obu stronach w zależności (2.8), chociaż po lewej przyrasta m razy, a po prawej tylko raz. Rozumowanie takie można powtórzyć dla *nominalnych stóp dyskontowych*; otrzymuje się wówczas zależność

$$\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m = 1 - d \tag{2.9}$$

W tym kontekście ciekawe uzasadnienie można podać dla kapitalizacji ciągłej.

Załóżmy, że w naszym mieście jest nieskończenie wiele banków . Każdy z nich oferuje taką samą nominalną stopę oprocentowania δ rachunków ROR, z tym że w banku nr m odsetki są kapitalizowane m razy w ciągu roku – np. bank nr 365 dopisuje odsetki codziennie. Niech teraz i_m oznacza efektywną roczną stopę oprocentowania, którą uzyskamy w banku nr m. Mamy więc

$$1 + i_m = \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^m$$

Ponieważ liczby te wzrastają wraz z m, więc im większy jest numer banku, tym korzystniejsza jest jego oferta. Czy można przebić tę nieskończoną mnogość coraz lepszych ofert? Okazuje się , że tak! Ponieważ

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^m = e^\delta \tag{2.10}$$

więc wystarczy założyć bank (nazwijmy go umownie bankiem granicznym) i zaproponować efektywną roczną stopę oprocentowania w wysokości

$$i = e^\delta - 1 \tag{2.11}$$

Odsetki wypłaca się raz do roku w powyższej wysokości.

Co to ma wspólnego z kapitalizacją ciągłą? Załóżmy, że chcemy wycofać pieniądze w chwili t, gdzie o t nic się nie zakłada. Dla większości banków t nie będzie całkowitą wielokrotnością ich okresu odsetkowego ($1/m$ roku), ale załóżmy, że taki bank zaliczy nam łaskawie ostatnią cząstkę okresu odsetkowego jako cały. Nasz początkowy kapitał k_0 wzrośnie więc po czasie t w banku nr m do

$$k(m) = k_0 \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{[tm]+1}$$

($[y]$ oznacza część całkowitą liczby y). Otrzymujemy stąd

$$\lim_{m\to\infty} k(m) = k_0 \lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^m\right)^{\frac{[tm]+1}{m}} = k_0 e^{\delta t} = k_0(1+i)^t$$

Skorzystaliśmy z (2.10) i (2.11). Wobec tego nasz bank graniczny w chwili t powinien wypłacić

$$k_t = k_0(1+i)^t$$

tzn. powinien kapitalizować odsetki w sposób ciągły. Liczbę

$$\delta = \ln(1+i) \tag{2.12}$$

nazywamy *intensywnością oprocentowania*. łatwo pokazać, że

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta$$

gdzie $i^{(m)}$, $d^{(m)}$ są stopami nominalnymi równoważnymi zadanej efektywnej stopie rocznej i.

2.2. Renty

Rent używa się w finansach i ubezpieczeniach przede wszystkim do ratalnej spłaty długów, do płacenia składek i do wypłaty emerytur.

Oto przykład wprowadzający. Od 1 stycznia 2000 r. przez następne dziesięć lat będę otrzymywać 1 zł na początku każdego roku. Jaka jest wartość tego ciągu wypłat na 1 stycznia 2000 r.? Każdą z 10 płatności trzeba zdyskontować na dziś, tak więc

$$PV = 1 + v + v^2 + \cdots + v^9$$

gdzie v jest czynnikiem dyskontującym. Skrót PV oznacza po angielsku *present value*, czyli *wartość obecną* tego strumienia wypłat. Nie jest to w zasadzie pojęcie dla nas nowe. Wzór (2.3) przedstawia, na przykład, *wartość obecną* pojedynczej wypłaty k_1, dokonywanej za rok. Ponieważ tego typu wielkości będą się pojawiać regularnie, wprowadzamy oznaczenie $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ na wartość obecną n złotówek otrzymywanych co rok, od dziś włącznie (tak więc ostatnia n–ta wpłata wpłynie po $n-1$ latach). Podobnie jak wyżej

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$$

Sytuację tę zilustrowano na rys.2. Ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego i ze wzoru (2.6) otrzymujemy

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} \tag{2.13}$$

Po przekształceniu uzyskujemy wzór

$$d\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = 1 \tag{2.14}$$

który ma piękną interpretację.

Prawa strona wzoru: pożyczamy komuś 1 zł (dziś). Strona lewa: nasz dłużnik spłaca nam na bieżąco odsetki – na początku każdego roku przez n lat, w ten sposób dług zasadniczy nie zwiększa się. Po n okresach zwraca nam pożyczone 1 zł, które zdyskontowane na dziś wynosi v^n.

Ponieważ płatności rat renty są na ogół częstsze niż raz do roku (np. miesięczne), potrzebne są dodatkowe oznaczenia. Załóżmy, że płatności będą dokonywane przez n lat m razy w ciągu roku, każda w wysokości $\frac{1}{m}$ zł. Wartość obecną renty oznaczamy symbolem

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{\frac{nm-1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\cdot\frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}$$

(nm to liczba wszystkich rat). Na podstawie (2.9) i (2.6) mamy

$$1 - v^{\frac{1}{m}} = 1 - (1-d)^{\frac{1}{m}} = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right) = \frac{d^{(m)}}{m}$$

tak więc ostatecznie

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} \tag{2.15}$$

Wzór ten równie łatwo zapamiętać jak (2.13).

Użyte powyżej symbole $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ dotyczą rent płatnych z góry (pierwsza rata od razu) – dwie kropki na górze oznaczają taką sytuację. Odpowiednie symbole bez kropek oznaczają wartości obecne strumieni płatności przesuniętych o 1 rok w przyszłość (płatnych z dołu). Otrzymujemy wzory

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}\ , \quad a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$$

Na zakończenie rozważmy możliwość (przynajmniej teoretyczną) ciągłego napływu gotówki na nasz rachunek bankowy. Załóżmy, że w ciągu roku wpływa nań 1 zł. Tak więc między 3 a 10 marca wpływa 7/365 zł. Gotówka, która wpływa w krótkim przedziale czasu między t a $t + \Delta t$, jest w przybliżeniu dyskontowana stałym czynnikiem v^t ($v^t \approx v^{t+\Delta t}$). Sumowanie wartości obecnych poszczególnych wpłat zastąpimy tu oczywiście całkowaniem

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, dt = \frac{1 - v^n}{\delta} \tag{2.16}$$

(skorzystaliśmy z (2.12)).

3. Zadania, I

1. Rozważamy polisę emerytalną dla (x). Polega ona na tym, że przez następne m lat będzie on płacił co rok składkę netto P. Po dożyciu wieku $x+m$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty dożywotniej w stałej wysokości 1 zł (na początku każdego roku). Gdy umrze przed osiągnięciem wieku $x+m$ nic nie będzie wypłacone. Niech L oznacza stratę ubezpieczyciela netto na moment wystawienia polisy. Wykazać, że zdarzenie $\{L<0\}$ opisuje wzór

$$v^{K+1} > 1-(P+1)(1-v^m)$$

Rozwiązanie. Strata L wyraża się wzorem

$$L = \begin{cases} -P(1+v+\ldots+v^K), & \text{dla} \quad K<m \\ (v^m+\ldots v^K)-P(1+v+\ldots+v^{m-1}), & \text{dla} \quad K\geqslant m \end{cases}$$

Jeśli $K<m$ to zawsze $L<0$. Jeśli natomiast $K\geqslant m$ to $L<0$ oznacza, że

$$\frac{v^m-v^{K+1}}{d} < P\frac{1-v^m}{d}$$

a to jest równoważne wzorowi z treści zadania.

2. Niech $\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)$ oznacza składkę $\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}$ obliczoną z użyciem technicznej intensywności oprocentowania $\delta>0$. Obliczyć $\Delta\delta$ które spełnia równanie

$$\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta) = \bar{A}^1_{x+\frac{1}{12}:\overline{m+\frac{1}{12}}|}(\delta+\Delta\delta)$$

jeżeli dane są wartości:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{m}|} = 0,131763, \bar{A}_{x:\overline{m}|}^{\ \ \ 1} = 0,0768021, (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{m}|} = 3,0173,$$

$$\mu_x = 0,002, \mu_{x+m} = 0,05, \delta = \ln(1,05) = 0,04879$$

(obliczone przy podanej wartości δ).

Rozwiązanie. Zastępując przyrost funkcji różniczką otrzymujemy następujące równanie na $\Delta\delta$

$$\frac{\partial\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)}{\partial x}\cdot\frac{1}{12}+\frac{\partial\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)}{\partial m}\cdot\frac{1}{12}+\frac{\partial\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)}{\partial\delta}\cdot\Delta\delta = 0.$$

Obliczymy najpierw potrzebne pochodne cząstkowe.

Tu prosze poprawic wzor

$$\frac{\partial\bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\int_0^m e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = e^{-\delta m}{}_mp_x\mu_{x+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ \ 1}\mu_{x+m},$$

$$\frac{\partial \bar{A}^1_{x:\overline{m}|}(\delta)}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta}\int_0^m e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = -\int_0^m te^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = -(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{m}|}.$$

Zatem $\Delta\delta$ spełnia równanie

$$\frac{1}{12}[0,131763(0,002+0,04879)+0,0768021\cdot 0,05-0,002]+\frac{1}{12}0,0768021\cdot 0,05-3,0173\Delta\delta = 0$$

skąd otrzymujemy ostatecznie $\Delta\delta =$???.

3. Niech P_x oznacza tradycyjnie regularną coroczną składkę płatną aż do śmierci za ubezpieczenie osoby w wieku x, które wypłaci 1 zł na koniec roku śmierci. Załóżmy, że x jest liczbą całkowitą a $u \in (0,1)$. Udowodnić, że przy założeniu UDD składka P_{x+u} wyraża się przez składki P_x oraz P_{x+1} następującym wzorem:

$$P_{x+u} = w_x \cdot P_x + w_{x+1}\cdot P_{x+1}$$

gdzie $w_{x+1} = 1 - w_x$ oraz

$$w_x = \frac{(1-u)(P_{x+1}+d)}{(1-u)(P_{x+1}+d)+(u-uq_x)(P_x+d)}$$

4. Rozważamy ubezpieczenie na życie ciągłe dla (35). Wypłaci ono 1 zł w chwili śmierci. Natomiast składka netto będzie płacona w postaci renty dożywotniej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością. Obliczyć $\pi^s(10)$ tzn. intensywność oszczędnościowej części składki po 10 latach. Dane są:

$$i = 5\%, M_{35} = 3776, D_{35} = 17236, M_{45} = 3181, D_{45} = 10091, p_{45} = 0,992.$$

Uwaga! Należy skorzystać z założenia UDD.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru

$$\pi^s(t) = V'(t) - \delta V(t).$$

Mamy

$$V(t) = \bar{A}_{35+t} - \bar{P}(\bar{A}_{35})\bar{a}_{35+t} \text{ oraz}$$

$$V'(t) = (\mu_{35+t}+\delta)\bar{A}_{35+t} - \mu_{35+t} - \bar{P}(\bar{A}_{35})[(\mu_{35+t}+\delta)\bar{a}_{35+t}-1].$$

Na mocy założenia UDD mamy następujące wzory przybliżone

$$\bar{A}_{45} = \frac{i}{\delta}\cdot\frac{M_{45}}{D_{45}} =?, \bar{a}_{45} = \frac{1-\bar{A}_{45}}{\delta} =?, \mu_{45} = q_{45} = 0,008.$$

Zatem $V(10) =?$, $V'(10) =?$ i stąd $\pi^s(10) =?$.

5. Rozważamy rodzinę polis emerytalnych dla (x) parametryzowaną długością okresu płacenia składek $m > 0$. Dokładniej: polisa Pol(m) polega na tym, że przez najbliższe m lat ubezpieczony (x) będzie płacił składkę netto w postaci renty życiowej m-letniej ciągłej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto; po dożyciu wieku $x+m$ zacznie otrzymywać emeryturę w postaci renty dożywotniej ciągłej z roczną intensywnością 1. Niech $0<t<m$ oraz niech $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach. Wykazać, że $\frac{\partial V(t)}{\partial m}$ wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -A_{x+t:\overset{1}{\overline{m-t}|}} \cdot \frac{\bar{a}_x \bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}}$$

Rozwiązanie. Z definicji rezerwy otrzymujemy jawny wzór na $V(t)$,

$$V(t) = {}_{m-t|}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \text{ dla } 0<t<m,$$

gdzie

$$\bar{P} = \frac{{}_{m|}\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}.$$

Obliczamy odpowiednie pochodne

$$\frac{\partial}{\partial m}({}_{m-t|}\bar{a}_{x+t}) = \frac{\partial}{\partial m}\int_{m-t}^{\infty} e^{-\delta s}{}_s p_{x+t}\, ds = -e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t},$$

$$\frac{\partial}{\partial m}(\bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) = \frac{\partial}{\partial m}\int_0^{m-t} e^{-\delta s}{}_s p_{x+t}\, ds = e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t},$$

$$\frac{\partial}{\partial m}({}_{m|}\bar{a}_x) = \frac{\partial}{\partial m}\int_m^{\infty} e^{-\delta s}{}_s p_x\, ds = -e^{-\delta m}{}_m p_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial m}(\bar{a}_{x:\overline{m}|}) = e^{-\delta m}{}_m p_x.$$

Dalej

$$\frac{\partial V(t)}{\partial m} = -e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t} - \left[\frac{-e^{-\delta m}{}_m p_x \bar{a}_{x:\overline{m}|} - e^{-\delta m}{}_m p_x {}_{m|}\bar{a}_x}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}}\right]\bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|} - \bar{P}(m)e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t} =$$

$$-e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t} + \frac{e^{-\delta m}{}_m p_x \bar{a}_x \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}} - \frac{e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t}\cdot {}_{m|}\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} = -\frac{e^{-\delta(m-t)}{}_{m-t}p_{x+t}\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} +$$

$$+\frac{e^{-\delta m}{}_m p_x \bar{a}_x \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}} = -A_{x+t:\overset{1}{\overline{m-t}|}}\left[\frac{\bar{a}_x\bar{a}_{x:\overline{m}|} - e^{-\delta t}{}_t p_x \bar{a}_x \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}\right] = -A_{x+t:\overset{1}{\overline{m-t}|}} \cdot \frac{\bar{a}_x \bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}^2_{x:\overline{m}|}}.$$

6. Rozważmy grupę 100 osób w wieku (50). Każda z tych osób ubezpieczyła się kilka lub kilkanaście lat temu na życie i płaci regularne coroczne składki netto aż do śmierci (bieżący staż każdej z tych osób w ubezpieczeniu jest liczbą całkowitą). Obliczyć przeciętną liczbę polis, które nie przyniosą ubezpieczycielowi straty netto. Zakładamy, że wszystkie te osoby należą do tej samej populacji i że ich życia są niezależne. Można skorzystać z następujących danych:

$$A_{50} = 0,37, i = 5\%,$$

$$l_{30} = 96172, l_{40} = 93348, l_{50} = 86752, l_{60} = 73602, l_{70} = 51989, l_{80} = 24644, l_{90} = 4568.$$

Rozwiązanie. Rozważmy jedną z osób z tej grupy ubezpieczonych. Jeśli ubezpieczyła się ona w wieku x i k lat temu to oczywiście $x+k=50$. Strata ubezpieczyciela związana z tą polisą ma postać

$$_kL = v^{K(50)+1} - P_x \cdot \frac{1-v^{K(50)+1}}{d}.$$

Zdarzenie, że ta polisa nie przyniesie straty można zapisać nierównością

$$_kL < {}_kV \text{ czyli}$$

$$v^{K(50)+1} - P_x \cdot \frac{1-v^{K(50)+1}}{d} < A_{50} - P_x\ddot{a}_{50}$$

która jest równoważna następującej

$$v^{K(50)+1} < A_{50}$$

i dalej

$$K(50)+1 > \frac{\ln A_{50}}{-\delta} = ?? \text{ czyli } K(50) \geqslant ??$$

Przeciętna liczba polis, które nie przyniosą straty wynosi więc ??.

7. Żona (20) jest wybrana z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 100; natomiast mąż (25) jest wybrany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 90. Rozpatrujemy następującą polisę emerytalną dla tej pary. Przez najbliższe 40 lat będą płacić składki w postaci renty życiowej ciągłej, przy czym płacenie składek ustaje po pierwszej śmierci (jeśli ktoś umrze w ciągu najbliższych 40 lat). Po 40 latach zaczyna się wypłata emerytury w postaci renty życiowej ciągłej płacącej do drugiej śmierci z roczną intensywnością 1. Obliczyć intensywność $\bar{P}$ renty składek przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0,02$.

8. On (y) jest wylosowany z populacji Gompertza a ona (x) z populacji Weibulla. Dane są:

$$e_{x:y} = 7, \mu_x = 0,02 \text{ oraz } Pr(T(x) < T(y)) = 0,25.$$

Obliczyć przybliżoną wartość

$$e_{x+\frac{1}{12}:y}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$e_{x+\frac{1}{12}:y} \approx e_{x:y} + \frac{1}{12}\frac{\partial}{\partial x}(e_{x:y}).$$

Ale

$$\frac{\partial}{\partial x}(e_{x:y}) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty {}_tp_x \cdot {}_tp_y\,dt = \int_0^\infty {}_tp_y \frac{\partial}{\partial x}({}_tp_x)\,dt = \int_0^\infty {}_tp_y[{}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})]\,dt =$$

$$= \mu_x e_{x:y} - \int_0^\infty {}_tp_x \cdot {}_tp_y \mu_{x+t}\,dt = \mu_x e_{x:y} - Pr(T(x) < T(y)),$$

więc ostatecznie

$$e_{x+\frac{1}{12}:y} \approx 7 + \frac{1}{12}(0,02\cdot 7 - 0,25) = 6,9908.$$

9. Rozważamy ubezpieczenie 30-letnie malejące dla (20) wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 100. Suma ubezpieczenia $c(t)$ wypłacana jest w chwili śmierci i wynosi:

$$c(t) = \begin{cases} (30 - t + ft)/30 & \text{dla} \quad t < 30 \\ 0 & \text{dla} \quad t \geqslant 30. \end{cases}$$

gdzie $f \in (0,1)$ jest parametrem. Składka opłacana jest w postaci renty życiowej ciągłej 30-letniej z odpowiednio dobraną intensywnością netto. Znaleźć najmniejsze f, które spełnia warunek: *dla każdego* $t \in (0,30)$ *zachodzi nierówność* $V(t) \geqslant 0$. Symbol $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach.

10. Rozważamy dwie populacje. Niech $g_j(x)$ oznacza gęstość rozkładu trwania życia noworodka wylosowanego z populacji j $(j = 1, 2.)$ Między funkcjami $g_1(x)$ oraz $g_2(x)$ zachodzi związek:

$$g_2(x) = \begin{cases} 0,9g_1(x) & \text{dla} \quad x < 50 \\ 1,1g_1(x) & \text{dla} \quad x > 50. \end{cases}$$

Niech dalej zmienna losowa X_j oznacza długość życia noworodka wylosowanego z populacji j. Udowodnić, że zachodzi wzór:

$$E(min(X_1, 50)) = 5,5E(X_1) - 5E(X_2) + 25.$$

11. Rozważamy dwie polisy bezterminowe na życie dla (x). Każda z nich wypłaca jako świadczenie 1 zł na koniec roku śmierci. Polisa 1. opłacona jest za pomocą jednorazowej składki netto w momencie zawarcia umowy. Niech L_1 oznacza stratę ubezpieczyciela na moment wystawienia tej polisy. Natomiast w przypadku polisy 2. składki regularne netto będą płacone w postaci renty życiowej na początku każdego roku aż do śmierci. Niech L_2 oznacza stratę ubezpieczyciela na moment wystawienia tej polisy. Wiadomo, że

$$\frac{Var(L_2)}{Var(L_1)} = 1,826$$

Obliczyć A_x.

Rozwiązanie. Jak wiadomo

$$Var(L_2) = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \cdot Var(v^{K+1}) = \left(\frac{1}{1 - A_x}\right)^2 Var(L_1)$$

Obliczamy stąd $A_x = 0,26$.

12. Rozważamy ubezpieczenie n-letnie na życie i dożycie ciągłe dla (x). Jeśli umrze on w ciągu najbliższych n lat to zostanie wypłacone świadczenie 1 zł w chwili śmierci, a jeżeli dożyje wieku $x+n$ to 1 zł zostanie wypłacone właśnie w tym momencie. Składki netto będzie płacił w formie renty życiowej ciągłej h-letniej, gdzie $0 < h < n$. Odpowiednią intensywność składki netto oznaczamy tradycyjnie symbolem ${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$. Załóżmy, że zwiększymy n o jeden miesiąc. O ile należy zmniejszyć h aby nie zmieniła się roczna intensywność składki netto. Dane są

$${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 0,03, \quad A_{x+h:\overset{\;1}{\overline{n-h}|}} = 0,55 \text{ oraz } \delta = 0,049.$$

13. Rozważamy ubezpieczenie ciągłe dla (x), które wypłaci t w chwili śmierci, jeśli ubezpieczony umrze w wieku (x+t). Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Załóżmy, że ubezpieczony został wylosowany z populacji wykładniczej o średniej trwania życia 80. Techniczną intensywność oprocentowania δ wybrano na poziomie, który minimalizuje wartość współczynnika zmienności:

$$\sqrt{Var(Z))}/E(Z)$$

Obliczyć ten poziom δ.

14. Rozważamy polisę emerytalną, która polega na tym, że (x) płaci składki przez najbliższe m lat w postaci renty życiowej ciągłej, a po dożyciu wieku $x + m$ zaczyna pobierać emeryturę z intensywnością 1 na rok. W przypadku śmierci przed osiągnięciem wieku $x + m$ uposażeni otrzymują jednorazowe świadczenie w wysokości α razy suma wpłaconych dotychczas składek (w chwili śmierci). Niech $\bar{P}(\alpha)$ oznacza odpowiednią intensywność roczną składek netto. Wykazać, że zachodzi wzór:

$$\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha} = \bar{P}(\alpha)^2 \frac{(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{m}|}}{{}_{m|}\bar{a}_x}$$

Rozwiązanie. Intensywność składki obliczamy z równania

$$E(P.V.(\text{składek } \bar{P}(\alpha))) = E(P.V.(\text{świadczeń})).$$

W systuacji z zadania równanie to ma postać

$$\bar{P}(\alpha) \cdot \bar{a}_{x:\overline{m}|} = 1 \cdot {}_{m|}\bar{a}_x + \alpha(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{m}|}\bar{P}(\alpha).$$

Mamy stąd

$$\bar{P} = \frac{{}_{m|}\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{m}|} - \alpha(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{m}|}}.$$

Otrzymujemy stąd natychmiast wzór na $\frac{d\bar{P}(\alpha)}{d\alpha}$.

4. Zadania,II

15. Rozważamy ubezpieczenie pary osób (x), (y), które wypłaca $T(x:y)$ zł w chwili pierwszej śmierci oraz $4T(\overline{x:y})$ zł w momencie drugiej śmierci. Zakładamy, że (x) jest wylosowany z populacji wykładniczej o średniej 100, natomiast (y) jest wylosowany z populacji wykładniczej o średniej 80. Obliczyć składkę jednorazową netto SJN za to ubezpieczenie przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0,02$. Zakładamy, że zmienne losowe $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne.

Rozwiązanie. Szukana składka SJN wynosi

$$SJN = (\bar{I}\bar{A})_{x:y} + 4(\bar{I}\bar{A})_{\overline{x:y}}.$$

Ponieważ

$$(\bar{I}\bar{A})_x + (\bar{I}\bar{A})_y = (\bar{I}\bar{A})_{x:y} + (\bar{I}\bar{A})_{\overline{x:y}}$$

więc

$$SJN = 4(\bar{I}\bar{A})_x + 4(\bar{I}\bar{A})_y - 3(\bar{I}\bar{A})_{x:y}.$$

Obliczamy potrzebne symbole

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty te^{-0,02t}e^{-0,01t}0,01\,dt = 11,1111$$

$$(\bar{I}\bar{A})_y = \int_0^\infty te^{-0,02t}e^{-0,0125t}0,0125\,dt = 11,8343$$

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:y} = \int_0^\infty te^{-0,02t}e^{-0,0225t}0,0225\,dt = 12,4567.$$

Ostatecznie otrzymujemy $SJN = 54,4115$.

16. Rozpatrujemy model szkodowości dwojakiej:

$$\mu_{1,x+t} = \frac{1}{100-t}, \quad \mu_{2,x+t} = \frac{2}{120-t} \text{ dla } 0 \leqslant t < 100.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że (x) ulegnie jako pierwszej szkodzie tej, która w danej chwili mniej mu zagrażała niż druga "współzawodnicząca".

Rozwiązanie. Rozwiązujemy najpierw równanie

$$\mu_{1,x+t} = \mu_{2,x+t}$$

i otrzymujemy $t = 80$. Zatem dla $t < 80$ bardziej zagraża mu szkoda druga $(J = 2)$ a dla $t > 80$ szkoda pierwsza $(J = 1.)$ Szukane prawdopodobieństwo wynosi więc

$$\int_0^{80}\left(1-\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t}{200}\right)^2\frac{1}{100-t}\,dt + \int_{80}^{100}\left(1-\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t}{200}\right)^2\frac{2}{120-t}\,dt \approx 0,394$$

17. Rozważamy grupę 10 osób w wiekach $21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$. Zakładamy, że ich życia są niezależne oraz, że wszystkie te osoby pochodzą z populacji Gompertza z funkcją natężenia śmiertelności daną wzorem:

$$\mu_x = B(1,23)^x$$

gdzie $B > 0$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwszy umrze parzystolatek?

Rozwiązanie. Niech $n = 21 : 23 : \ldots : 29$ oraz $p = 22 : 24 : \ldots : 30$. Mamy obliczyć prawdopodobieństwo, że $T(p) < T(n)$. Niech dalej $c = 1,23$. Mamy

$$\mu_{n+t} = Bc^{21+t} + Bc^{23+t} + \ldots + Bc^{29+t} = Bc^{w_n+t}$$

gdzie w_n spełnia równanie

$$c^{w_n} = c^{21} + c^{23} + \cdots c^{29}.$$

Podobnie

$$\mu_{p+t} = Bc^{w_p+t}$$

gdzie w_p spełnia równanie

$$c^{w_p} = c^{22} + c^{24} + \cdots c^{30}.$$

Zatem

$$w_p = w_n + 1$$

i dalej

$$Pr(T(p) < T(n)) = \int_0^\infty {}_tp_n \cdot {}_tp_p \cdot \mu_{p+t} = \int_0^\infty {}_tp_{w_n} \cdot {}_tp_{w_p}(\mu_{w_p+t} + \mu_{w_n+t}) \frac{\mu_{w_p+t}}{\mu_{w_p+t} + \mu_{w_n+t}} =$$

$$= \frac{c^{w_p}}{c^{w_p} + c^{w_n}} \cdot 1 = \frac{c}{c+1} \approx 0,55.$$

18. Rozważamy ubezpieczenie n-letnie na życie dla (x), ciągłe, które wypłaci 1 zł w chwili śmierci, jeżeli ubezpieczony umrze w ciągu n lat. Składki są płacone w postaci renty życiowej ciągłej n-letniej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto $\bar{P}$. Niech $W(t) = e^{-\delta t}\bar{V}(t)$ oznacza wartość obecną rezerwy po t latach, obliczoną na moment wystawienia polisy. Załóżmy, że funkcja $W(t)$ osiąga maksimum w pewnym punkcie $t^* \in (0, n)$. Obliczyć $\bar{P}$, jeśli wiadomo, że

$$\bar{V}(t^*) = 0,1 \text{ oraz } \mu_{x+t^*} = 0,01.$$

Rozwiązanie. Ponieważ

$$W'(t) = -\delta e^{-\delta t}V(t) + e^{-\delta t}V'(t) = e^{-\delta t}[V'(t) - \delta V(t)]$$

więc t^* spełnia równanie

$$V'(t^*) - \delta V(t^*) = 0.$$

Uwzględniając równanie Thielego otrzymujemy stąd

$$\bar{P} = (1 - V(t^*))\mu_{x+t^*} = 0,009.$$

19. Rozważamy ubezpieczenie emerytalne dla (x), wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega > x$. Polega ono na tym, że przez najbliższe m lat $(m < \omega - x)$, będzie on płacił składkę w postaci renty życiowej ciągłej z intensywnością netto 1. Po dożyciu wieku $x+m$ zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią z intensywnością E. Do rachunków netto użyto technicznej intensywności oprocentowania $\delta = 0$. Intensywność emerytury E jest więc funkcją x, m oraz ω. Udowodnić, że elastyczność E względem wieku granicznego ω wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega} \cdot \frac{\omega}{E} = \frac{2\omega(x - \omega)}{(\omega - x - m)(2\omega - 2x - m)}$$

20. Niech $\overset{\circ}{e}_x = E(T(x)) = \frac{(100-x)(175-x)}{3(150-x)}$ (dla $0 \leqslant x < 100$) oznacza przeciętne dalsze trwanie życia (x) wylosowanego z populacji z wiekiem nieprzekraczalnym 100. Obliczyć

$$_{24}p_{46}$$

Rozwiązanie. Łatwo sprawdzić, że funkcja $\overset{\circ}{e}_x$ spełnia równanie różniczkowe

$$\overset{\circ}{e}{}'_x = \mu_x \overset{\circ}{e}_x - 1$$

(porównaj z równaniem różniczkowym na $\bar{a}_x$!) więc

$$\mu_x = \frac{\overset{\circ}{e}{}'_x + 1}{\overset{\circ}{e}_x} = \frac{250 - 2x}{15000 - 250x + x^2}$$

Otrzymujemy stąd, że

$$[\ln s(x)]' = [\ln(x^2 - 250x + 15000)]'$$

i uwzględniając warunek początkowy $s(0) = 1$ dostajemy

$$s(x) = \frac{(100-x)(150-x)}{15000} \text{ dla } 0 < x < 100.$$

W szczególności

$$_{24}p_{46} = \frac{s(70}{s(46)} = \frac{50}{117} \approx 0,427$$

21. Rozważamy wyjściowy symbol $A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1}$ oznaczający składkę jednorazową netto za m-letnie ubezpieczenie na dożycie dla (x). Załóżmy, że małe liczby Δx oraz Δm zostały tak dobrane, że

$$A_{x+\Delta x:\overline{m+\Delta m}|}^{\;\;\;\;1} = A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1}.$$

Obliczyć wartość przybliżoną $\Delta m/\Delta x$.

Dane są:

$$\delta = 0.03, \mu_x = 0,01, \mu_{x+m} = 0,015.$$

22. Rozważamy populację wykładniczą z natężeniem umierania:

$$\mu_x = const = \mu > 0.$$

Wybrany z niej (x) kupuje ubezpieczenie ciągłe na życie odroczone o $m > 0$ lat. Płaci do końca życia ciągłą rentę życiową składek netto z odpowiednio dobraną stałą intensywnością $\bar{P}$. Jeśli umrze w ciągu najbliższych m lat to żadne świadczenie nie będzie wypłacone. Natomiast, gdy umrze później to zostanie wypłacone 1 zł w chwili jego śmierci. Niech $\delta > 0$ oznacza poziom technicznej intensywności oprocentowania użytej do obliczenia składek i rezerw. Wykazać, że intensywność składki oszczędnościowej po $2m$ latach $\pi^s(2m)$ wyraża się wzorem:

$$\pi^s(2m) = -\frac{\mu\delta}{\mu+\delta}(1 - e^{-m(\mu+\delta)}).$$

Rozwiązanie. Ponieważ

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t}\, dt = \frac{1}{\mu+\delta}$$

oraz

$$_{m|}\bar{A}_x = v^m e^{-\mu m} \bar{A}_{x+m} = e^{-(\mu+\delta)m} \frac{\mu}{\mu+\delta}$$

więc

$$\bar{P} = \frac{{}_{m|}\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \mu e^{-(\mu+\delta)m}.$$

Dla $t > m$ mamy

$$V(t) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}\bar{a}_{x+t} = const \text{ a zatem } V'(t) = 0.$$

W szczególności

$$\pi^s(2m) = V'(2m) - \delta V(2m) = -\delta\left(\frac{\mu}{\mu+\delta} - \mu e^{-(\mu+\delta)m}\frac{1}{\mu+\delta}\right)$$

czego należało dowieść.

23. Rozważamy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu, które ma tę własność, że dla każdego $t > 0$ zachodzi równość

$$\pi^s(t) = \pi^r(t).$$

Po lewej stronie mamy intensywność składki oszczędnościowej a po prawej stronie mamy intensywność składki na ryzyko. Wykazać, że bieżące poziomy: rezerwy $V(t)$, świadczenia śmiertelnego $c(t)$ oraz intensywności składki netto $\pi(t)$ powiązane są zależnością:

$$V(t) = c(t) - \frac{\pi(t)}{2\mu_{x+t}}$$

Rozwiązanie. Z treści zadania mamy

$$V'(t) - \delta V(t) = \mu_{x+t}(c(t) - V(t))$$

Równanie Thielego głosi natomiast, że

$$V'(t) = \delta V(t) + \pi(t) - (c(t) - V(t))\mu_{x+t}$$

Jeśli z powyższych równań wyrugujemy $V'(t)$ i otrzymane równanie rozwiążemy ze względu na $V(t)$ to dostaniemy pożądany wzór.

24. Rozważamy ubezpieczenie bezterminowe na życie ciągłe dla (30), wybranego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 110$. Wypłaci ono 1 zł w chwili jego śmierci. Składka jednorazowa SJ, którą zapłaci ubezpieczony w momencie zawarcia umowy ubezpieczeniowej, została skalkulowana jako wartość oczekiwana wartości obecnej wypłaty pod warunkiem, że ubezpieczony umrze wcześniej niż przeciętnie. Obliczyć prawdopodobieństwo:

$$Pr(v^{T(30)} < SJ).$$

W powyższym wzorze v oznacza techniczny roczny czynnik dyskontujący, odpowiadający technicznej intensywności oprocentowania $\delta = 0,02$.

25. Rozważamy ubezpieczenie bezterminowe dla (x), które wypłaci 1 zł na koniec roku śmierci. Składki opłacane są za pomocą renty życiowej składek corocznych w stałej wysokości netto P_x. Wiadomo, że dla pewnego całkowitego $k > 0$ zachodzi:

$${}_kV = 0,60, \quad {}_{k+2}V = 0,64, \quad p_{x+k} = 0,92, \quad p_{x+k+1} = 0,88, \quad i = 4\%.$$

Obliczyć P_x .

26. Mąż (30) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 100$, natomiast żona (25) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_k = 120$. Rozpatrujemy ubezpieczenie bezterminowe ciągłe dla tej pary, które wypłaci 1 zł w chwili pierwszej śmierci. Składka za to ubezpieczenie będzie płacona aż do pierwszej śmierci za pomocą renty życiowej

ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto $\bar{P}$. Obliczyć rezerwę składek netto $V(50)$ po 50 latach od momentu wystawienia polisy. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0,05$. Zakładamy ponadto, że $T(30)$ oraz $T(25)$ są niezależne.

Rozwiązanie. Intensywność $\bar{P}$ składki netto spełnia bilans aktuarialny

$$\bar{P}\bar{a}_{30:25} = \bar{A}_{30:25} = 1 - \delta\bar{a}_{30:25} \text{ a zatem } \bar{P} = \bar{a}_{30:25}^{-1} - \delta.$$

Obliczamy potrzebny symbol rentowy

$$\bar{a}_{30:25} = \int_0^{70} e^{-0,05t}\left(1 - \frac{t}{70}\right)\left(1 - \frac{t}{95}\right) dt = 12,454$$

Otrzymujemy więc $\bar{P} = 0,0302958$. Dalej

$$V(50) = \bar{A}_{80:75} - \bar{P}\bar{a}_{80:75} = 1 - (\delta + \bar{P})\bar{a}_{80:75} = 0,483188.$$

27. (x) wybrano z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega > 0$. Natomiast (y) wybrano niezależnie z populacji wykładniczej z funkcją natężenia wymierania $\mu_{y+t} = const = \mu > 0$. Wybrane osoby mają przed sobą przeciętnie tyle samo życia. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że

$$T(x) > T(y).$$

Zakładamy, że $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne.

Rozwiązanie. Mamy

$$T(x) \sim \mathrm{U}(0, \omega - x) \text{ gdzie } 0 < x < \omega$$

oraz

$$T(y) \sim \mathrm{Exp}(\mu) \text{ gdzie } \mu > 0.$$

Z treści zadania mamy

$$E(T(x)) = E(T(y)) \text{ tzn.}$$

$$\frac{\omega - x}{2} = \frac{1}{\mu}.$$

Obliczamy szukane prawdopodobieństwo

$$\Pr(T(x) > T(y)) = \int_0^{\omega - x} {}_tp_x \cdot {}_tp_y \mu_{y+t} = \int_0^{\omega - x} \left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right) \mu e^{-\mu t}\, dt = \frac{e^{-\mu(\omega - x)} - 1 + \mu(\omega - x)}{\mu(\omega - x)}$$

Uwzględniając powyższą zależność pomiędzy ω, x oraz μ otrzymujemy ostatecznie

$$\Pr(T(x) > T(y)) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2}) \approx 0,5677.$$

28. Rozważamy model dwuopcyjny (multiple decrement model), przy czym

$$\mu_{1,x+t} = \frac{1}{\omega_1 - t} \text{ dla } 0 < t < \omega_1 \text{ oraz } \mu_{2,x+t} = \frac{1}{\omega_2 - t} \text{ dla } 0 < t < \omega_2,$$

przy czym zakładamy, że $\omega_1 < \omega_2$. Obliczyć stosunek ω_1/ω_2 dla którego największe jest prawdopodobieństwo

$$Pr(T > E(T)|J = 1).$$

29. Rozważamy ubezpieczenie emerytalne dla (25). Polega ono na tym, że w ciągu najbliższych 35 lat będzie on płacił regularną coroczną składkę netto w wysokości P. Po dożyciu wieku

60 lat zacznie on otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości 1 zł na początku każdego roku. Niech L oznacza wartość obecną straty ubezpieczyciela na moment wystawienia polisy. Obliczyć $Var(L)$. Dane są:

$i = 6\%, {}_{35}p_{25} = 0,856044,\ \ A_{25} = 0,0816496,\ \ A_{60} = 0,3691310,\ \ {}^2A_{25} = 0,0187472,\ \ {}^2A_{60} = 0,1774113.$

30. Niech $m(x)$ oznacza medianę dalszego trwania życia (x) tzn. medianę zmiennej losowej $T(x)$. Dana jest funkcja natężenia umierania :

$$\mu_x = 0,01 \cdot 1,02^x \text{ dla } x > 0.$$

Obliczyć $m(33)$.

31. Rozważamy grupę 100 noworodków wybranych z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Obliczyć wariancję czasu oczekiwania do pierwszej śmierci w grupie. Zakładamy, że ich życia są niezależne.

Rozwiązanie. Mamy obliczyć wariancję zmiennej losowej $T(u)$ gdzie $u = x_1 : x_2 : \ldots : x_{100}$ oraz $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 0$. Ponieważ $T(u) = \min_j T(x_j)$ więc

$$ {}_tp_u = \prod_{j=1}^{100} {}_tp_{x_j} = \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{100}.$$

Mamy teraz

$$E(T(u)) = \int_0^{100} {}_tp_u\, dt = \frac{100}{101} \text{ oraz}$$

$$E(T(u)^2) = 2\int_0^{100} t\left(1 - \frac{t}{100}\right)^{100} dt = \frac{10000}{5151} = 1,94137.$$

Ostatecznie $Var(T(u)) = 0,961075$

32. Rozważamy zmianę śmiertelności w wyjściowej populacji zadaną wzorem:

$$\mu_{x+t}^{(M)} = \mu_{x+t} + M,$$

dla wszystkich $x, t \geqslant 0$. Zakładamy, że nieznany współczynnik przesunięcia M ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,01; 0,02]$. Wiadomo, że dla wyjściowej populacji

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{35|}} = 0,195276.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną składki $A_{\overset{1}{x}:\overline{35|}}$ względem rozkładu zmiennej M.

5. Zadania,III

33. Za składkę jednorazową netto (x) kupuje rentę życiową ciągłą, która przez najbliższe n lat będzie mu wypłacać z intensywnością a na rok, a po dożyciu wieku (x+n) z intensywnością b na rok, aż do śmierci. Niech Y oznacza wartość obecną tych świadczeń emerytalnych na moment wystawienia polisy. Dane są:

$$\delta = 0,04, \quad n = 10, \quad {}_np_x = 0,332871,$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 6,09967, \quad {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 5,25444, \quad \bar{a}_{x+n} = 3,25975, \quad {}^2\bar{a}_{x+n} = 2,9242.$$

Wykazać, że:

$$Var(Y) = 5,05565a^2 + 3,11643ab + 1,98029b^2$$

34. Niech $P((IA)_x)$ oznacza regularną składkę netto, którą będzie płacić ubezpieczony (x) na początku każdego roku aż do śmierci za ubezpieczenie rosnące, które wypłaci uposażonym $k+1$, jeżeli umrze on w $k+1$. roku ważności polisy. Udowodnić wzór:

$$P((IA)_{x+1}) = \frac{P((IA)_x) - P_x}{v - P_x}.$$

Rozwiązanie. Z wzoru

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(k+1)_kp_xq_{x+k}$$

łatwo uzyskujemy zależność rekurencyjną

$$(IA)_x = A_x + vp_x(IA)_{x+1}.$$

Mamy zatem

$$P((IA)_x) = \frac{(IA)_x}{\ddot{a}_x} = P_x + vp_x \cdot \frac{(IA)_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x} = P_x + vp_xP((IA)_{x+1})\frac{\ddot{a}_x - 1}{vp_x\ddot{a}_x} = P_x + P((IA)_{x+1})(v - P_x)$$

skąd wynika teza.

35. Rozważamy kontrakt ubezpieczeniowy ciągły ogólnego typu dla osoby w wieku (x). Wiadomo, że dla każdego $t \geqslant 0$ mamy zależność:

$$\pi(t) = c(t)\mu_{x+t} + s,$$

gdzie s jest stałą dodatnią. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0$. Wykazać, że rezerwa składek netto $V(t)$ po t latach wynosi:

$$V(t) = \frac{s\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tp_x}$$

36. Ubezpieczenie emerytalne dla (x), wziętego z populacji o wykładniczym rozkładzie trwania życia:

$$\mu_{x+t} = const = 0,01,$$

polega na tym, że przez najbliższe m lat będzie płacił coroczną regularną składkę w odpowiednio dobranej wysokości netto P a po dożyciu wieku $x+m$ zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości 1 na początku roku. Obliczyć π^s_{m+7} . Techniczna stopa oprocentowania użyta do obliczenia składki i rezerw wynosi $i = 4\%$. (zakładamy, że obie liczby x oraz m są całkowite dodatnie).

37. Mąż (30) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 100$, natomiast żona (25) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_k = 110$. Obliczyć średni czas przebywania we wdowieństwie owdowiałej osoby. Zakładamy, że $T(30)$ oraz $T(25)$ są niezależne oraz, że owdowiała osoba nie wstępuje w związek małżeński.

38. Rozpatrujemy rentę wdowią dla niej (x) i dla niego (y):
(a) w przypadku, gdy ona umrze jako pierwsza on zacznie otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 2 na rok (począwszy od jej śmierci);
(b) natomiast, gdy on umrze jako pierwszy ona zacznie otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 1 na rok (począwszy od jego śmierci).

Niech Y oznacza wartość obecną świadczeń z tej polisy na moment jej wystawienia. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że ona umrze jako pierwsza pod warunkiem, że $Y \leqslant 10$. Wiadomo, że:

$$\mu^{(k)}_{x+t} = const = 0,02, \quad \mu^{(m)}_{y+t} = const = 0,04, \quad \delta = 0,02.$$

Zakładamy, że $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne.

39. Rozważamy polisę ciągłą ogólnego typu wystawioną osobie w wieku $x = \omega - n$ wybranej z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω, gdzie $\omega > n > 0$. Gdy ubezpieczony umrze w wieku $x + t$ będzie wypłacone świadczenie w wysokości $c(t) = n - t$. Wiadomo ponadto, że rezerwy składek netto po czasie $t \in [0, n)$ wynoszą:

$$V(t) = nt - t^2.$$

Obliczyć

$$\sup_{t\in[0,n)} \pi(t) - \inf_{t\in[0,n)} \pi(t).$$

Zakładamy, że techniczna intensywność oprocentowania δ spełnia warunek $0 < n\delta < 3$. Wybrać odpowiedź najbliższą.

40. Osoba w wieku (30) zaczyna płacić składki regularne w wysokości netto P_{30} na początku każdego roku, aż do śmierci. Na koniec roku śmierci uposażeni otrzymają sumę ubezpieczenia równą 1. Załóżmy, że po $k > 0$ latach ubezpieczony żyje i niech ${}_kL$ oznacza stratę ubezpieczyciela na ten moment. Obliczyć

$$Pr({}_kL < {}_kV).$$

Dane są:

$$A_{30+k} = 0,435, \quad i = 4\%.$$

41. Niech x będzie liczbą całkowitą nieujemną oraz $u \in (0, 1)$. Niech ponadto $p^{(UDD)}_{x+u}$ oznacza p_{x+u} obliczone przy założeniu UDD, natomiast $p^{(B)}_{x+u}$ niech oznacza p_{x+u} obliczone przy założeniu Balducciego. Udowodnić wzór:

$$p^{(UDD)}_{x+u} p^{(B)}_{x+u} = \frac{p_x p_{x+1}(1 - uq_{x+1})[1 - (1 - u)q_x]}{[1 - (1 - u)q_{x+1}](1 - uq_x)}$$

42. Niech

$$\Delta\bar{A}_x = \bar{A}_{x+\Delta x} - \bar{A}_x$$

oraz podobnie niech

$$\Delta\bar{a}_x = \bar{a}_{x+\Delta x} - \bar{a}_x.$$

Wyprowadzić następujący wzór przybliżony:

$$\frac{\Delta\bar{A}_x + {}_{\Delta x}q_x}{\Delta\bar{a}_x + \Delta x} \approx \bar{P}(\bar{A}_x).$$

43. Niech Y oznacza wartość obecną renty życiowej dla (x), która wypłaca 1 zł na początku roku, co rok, aż do śmierci, obliczoną przy technicznej intensywności oprocentowania $\delta > 0$. Podobnie niech ${}^2Y$ oznacza wartość obecną tego samego strumienia płatności, ale obliczoną przy intensywności oprocentowania 2δ. Oto realizacje zmiennych Y oraz ${}^2Y$:

$$Y = 11,4773, \quad {}^2Y = 7,97483.$$

Obliczyć realizację zmiennej $K(x)$.

44. Wykazać, że roczna intensywność składki $\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$ spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{\partial n} = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \delta)(\mu_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}))$$

45. W rozważanej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weibulla:

$$\mu_t = 7t \text{ dla } t > 0.$$

Rozpatrujemy ubezpieczenie ciągłe 30-letnie ogólnego typu dla (0), które będzie opłacane za pomocą ciągłej renty życiowej składek netto ze stałą roczną intensywnością:

$$\pi(t) = const = \bar{P}.$$

Natomiast wysokość świadczenia śmiertelnego $c(t)$ związana jest z poziomem rezerwy netto $V(t)$ wzorem:

$$c(t) - V(t) = const = s.$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0,05$. Udowodnić, że $\bar{P}$ oraz s powiązane są zależnością:

$$s = 0,0125\bar{P}$$

46. Rozważamy demografię Weibulla z funkcją natężenia wymierania

$$\mu_{x+t} = k(x+t),$$

gdzie $k > 0$ jest parametrem. Rozważmy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu dla (x). Wiadomo, że dla $t \in (10, 25)$ mamy

$$V(t) = const = V, \quad c(t) = const = c,$$

przy czym $c \neq V$. Dane są ponadto:

$$\pi(12) = 0,1; \pi(16) = 0,2.$$

Obliczyć $\pi(14)$.

47. Za składkę jednorazową brutto SJB osoba w wieku (65) kupuje ubezpieczenie emerytalne typu *Emer(n)*, które działa w następujący sposób:

— wypłacana jest emerytura dożywotnia w postaci renty życiowej ciągłej ze stałą roczną intensywnością $E(n)$,

— ponadto jeśli ubezpieczony umrze w wieku $65 + t$ gdzie $t \in (0, n)$ to wyznaczeni uposażeni otrzymają natychmiast jednorazowe świadczenie w wysokości $SJB(n - t)/n$.

Parametr n może być wybrany z przedziału $(0,5)$ w momencie zakupu polisy. Składka jednorazowa netto SJN jest o 7% mniejsza od składki brutto SJB. Udowodnić wzór:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n} = -\frac{SJB \cdot (\bar{I}\bar{A})_{65:\overline{n}|}}{n^2 \bar{a}_{65}}$$

48. Ubezpieczenie dla grupy 7 osób działa w ten sposób, że w momencie każdej śmierci wypłaca się po 1 zł każdej osobie przeżywającej (tak więc np. w momencie pierwszej śmierci w grupie ubezpieczyciel wypłaca 6 zł, a w momencie przedostatniej wypłaca 1 zł). Zakładamy, że jednoczesna śmierć dwóch lub więcej osób nie jest możliwa i że ich życia są niezależne. Cztery spośród tych osób należą do populacji wykładniczej ze średnią trwania życia 100. Pozostałe trzy osoby należą do populacji wykładniczej ze średnią trwania życia 60. Przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0,03$ obliczyć składkę jednorazową netto SJN za to ubezpieczenie.

Rozwiązanie. Łatwo widzieć, że

$$SJN = \sum_{i<j} \bar{A}_{x_i:x_j}$$

(porównaj z przykładem 6, str. 136,Sk). Rozpatrujemy trzy przypadki.
1. $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Wówczas

$$\bar{A}_{x_i:x_j} = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-0,02t} 0,02\, dt = \frac{2}{5},$$

2. gdy $i,j \in \{5,6,7\}$ to podobnie obliczamy

$$\bar{A}_{x_i:x_j} = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-2/60} \cdot \frac{2}{60}\, dt = \frac{10}{19},$$

3. gdy $i \in \{1,2,3,4\}$, $j \in \{5,6,7\}$ to

$$\bar{A}_{x_i:x_j} = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{(\frac{1}{100}+\frac{1}{60})t} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{60}\right) dt = \frac{16}{34}$$

Ostatecznie więc

$$SJN = 6 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{10}{19} + 12 \cdot \frac{16}{34} = \frac{15546}{1615} = 9,626.$$

49. Rozważamy emeryturę małżeńską dla męża (65) i żony (60), przy czym on jest wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 105 a ona jest wybrana z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 120. Emeryturę będą otrzymywać w formie renty życiowej ciągłej. Póki żyją oboje roczna intensywność renty wynosi 18000 zł; po pierwszej śmierci intensywność emerytury dla owdowiałej osoby wynosi 12000 zł. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0$. Obliczyć składkę jednorazową netto SJN.

Rozwiązanie. Mamy

$$SJN = 6000(2\bar{a}_{\overline{60:65}} + \bar{a}_{60:65}) = 6000(2\bar{a}_{60} + 2\bar{a}_{65} - \bar{a}_{60:65}).$$

Przede wszystkim

$$\bar{a}_{60} = E(T(60)) = 30, \bar{a}_{65} = E(T(65)) = 20.$$

Dalej

$$\bar{a}_{60:65} = E(\min(T(60), T(65))) = \frac{1}{60 \cdot 40}\left[\int_0^{40}\left(\int_x^{40} x\, dy\right) dx + \int_0^{40}\left(\int_y^{60} y\, dx\right) dy\right] = \frac{140}{9}$$

Ostatecznie

$$SJN = 6000 \cdot 84,444 = 506667.$$

50. x-latek , wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω, zaczyna odkładać na przyszłą emeryturę z intensywnością 1 na rok w formie renty życiowej ciągłej. Emeryturę zacznie pobierać w wieku $x+z$, również z intensywnością 1, aż do śmierci (o ile dożyje wieku $x+z$). Z aktuarialnej zasady równoważności (netto) wyprowadzić następujące równanie na z:

$$e^{\delta(x+z-\omega)} + e^{\delta z}(1 + \delta x - \delta\omega) = 2 + 2\delta(x + z - \omega)$$

Odpowiedzi do zadań rachunkowych.
2. $0,00034$
4. $0,007$
6. 60
7. $0,28$
8. $6,99$
9. $0,625$
11. $0,26$
12. $0,90$ miesiąca
13. $0,0125$
15. $54,4$ zł
16. $0,40$
17. $0,55$
18. $0,009$
20. $0,427$
21. $-0,11$
24. $Pr(v^{T(30)} < SJ) = 0,766579$
25. 3 gr
26. $0,48$ zł
27. $Pr(T(x) > T(y)) = 0,57$
28. $0,29$
29. $Var(L) = 0,38$
30. 27
31. $0,96$
32. $0,12$
36. $-0,80$
37. $26,7$
38. $Pr(T(x) < T(y)|Y \leqslant 10) = 0,30$ 39. $3n$ 40. $Pr({}_kL < {}_kV) = {}_{21}p_(x+k)$
43. 17
46. $\pi(14) = 0,1500$
48. $9,626$
49. 507000 zł

Literatura

Matematyka w ubezpieczeniach na życie © Mariusz Skałba, Uniwersytet Warszawski, 2011.