Matematyka stosowana

Teoria sterowania

Mirosław Andrzej LACHOWICZ
lachowic@mimuw.edu.pl
http://www.mimuw.edu.pl/~lachowic

Uniwersytet Warszawski, 2012

Streszczenie. Wykład jest wstępem do współczesnej teorii sterowania. Teoria jest ilustrowana licznymi przykładami z ekonomii, biologii, medycyny, fizyki i techniki. Wykład uzupełniają rozdziały z zadaniami (napisany przez T. Cieślaka) i z zastosowaniami w ekonomii (napisany przez A. Wiszniewską–Matyszkiel)

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=tst

(może zawierać dodatkowe materiały)

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

1. Wstęp

Teoria sterowania (z Wikipedii):

„Pożądaną wartość wyjścia układu nazywamy wartością zadaną. Kiedy od jednego lub więcej wyjść układu wymagamy specyficznego zachowania się w czasie, regulator próbuje manipulować wejściem układu tak, aby jego wyjście zachowywało się w pożądany sposób. Jako przykład posłuży nam sterowanie samochodem, przy czym zależy nam na utrzymaniu stałej jego prędkości. W tym przypadku układem jest samochód, wielkością wyjściową układu - prędkość, wielkością wejściową - przesunięcie pedału gazu, a wartością zadaną - pożądana prędkość."

„**Control theory is an interdisciplinary branch of engineering and mathematics, that deals with the behavior of dynamical systems. The desired output of a system is called the reference. When one or more output variables of a system need to follow a certain reference over time, a controller manipulates the inputs to a system to obtain the desired effect on the output of the system**."

„**Field of applied mathematics that is relevant to the control of certain physical processes and systems. Although control theory has deep connections with classical areas of mathematics, such as the calculus of variations and the theory of differential equations, it did not become a field in its own right until the late 1950s and early 1960s. At that time, problems arising in engineering and economics were recognized as variants of problems in differential equations and in the calculus of variations, though they were not covered by existing theories. At first, special modifications of classical techniques and theories were devised to solve individual problems. It was then recognized that these seemingly diverse problems all had the same mathematical structure, and control theory emerged**."

Z książki [37]**:**

„**Mathematical control theory is the area of application–oriented mathematics that deals with the basic principles underlying the analysis and design of control systems. To control an object means to influence its behavior so as to achieve a desired goal. In order to implement this influence, engineers build devices that incorporate various mathematical techniques. These devices range from Watt's steam engine governor, designed during the English Industrial Revolution, to the sophisticated microprocessor controllers found in consumer items — such as CD players and automobiles — or in industrial robots and airplane autopilots**."

Francuski: **Régulation**
Włoski: **Teoria del controllo**
Niemiecki: **Regelungstheorie (Kontrolltheorie)**
Czeski: **Teorie řizeni**
Hiszpański: **Teoria del control**

Informacje ogólne:

Kod przedmiotu: 1000-135TST Kod SOCRATES: 11103 Nazwa przedmiotu: Teoria sterowania

Punkty ECTS i inne: 6.00

Rodzaj przedmiotu: fakultatywne Założenia: Analiza matematyczna II, równania różniczkowe zwyczajne

Krótki opis: Wykład jest wstępem do współczesnej teorii sterowania. Teoria jest ilustrowana licznymi przykładami z ekonomii, biologii, medycyny, fizyki i techniki.

Plan wykładu:

1. Zagadnienie sterowania
2. Zagadnienie sterowania optymalnego
3. Klasy sterowania
4. Przykłady z ekonomii, biologii, medycyny, fizyki i techniki
5. Twierdzenia o lokalnej i globalnej (całkowitej) sterowalności dla układów liniowych i nieliniowych
6. Zasada „bang–bang" dla układów liniowych
7. Liniowe zagadnienie sterowania optymalnego, szczególny przypadek Zasady Maksimum Pontragina, istnienie sterowania czaso–optymalnego
8. Zasada Maksimum Pontragina

Notatki te są głównie oparte na podręcznikach

— Macki, Strauss [30],
— Evans [18],
— Pontryagin, Boltyansky, Gamkrelidze, Mishchenko [35],
— Bressan, Piccoli [13]

oraz w mniejszym stopniu na

— Knowles [26],
— Hocking [22].

Ponadto gorąco zachęcam czytelnika do przejrzenia następującej literatury: [1, 2, 7, 8, 10, 12, 17, 19, 23, 24, 27, 28, 32, 37, 38, 40, 41].

Niektóre dowody nie są przytoczone, a czytelnik jest odesłany do odpowiedniej literatury. Nie oznacza to jednak, że są to dowody w jakimś sensie „*mniej ważne*": stanowią one istotną część wykładu. Takie dowody będą oznaczane symbolem ♣. Koniec dowodu będzie oznaczany □.

Historia: por. [3]; [37], str. 22; [6], str. 4; [19], str. 2–3, 124–128.

— Christiaan Huygens (1629–1695), holenderski matematyk i fizyk, zajmował się zegarami wahadłowymi i badał sterowanie prędkością,
— James Clerk Maxwell (1831–1879), szkocki fizyk i matematyk, analiza dynamiki regulatora odśrodkowego obrotów (**centrifugal governor**),
— Edward John Routh (1831–1907), matematyk angielski, uogólnienie wyników Maxwella na ogólny układ liniowy,
— Adolf Hurwitz (1859–1919), matematyk niemiecki, badanie stabilności: twierdzenie Routha-Hurwitza,
— Alexander Lyapunov (1857–1918), matematyk rosyjski, teoria stabilności (**stability theory**),

— Harold S. Black (1898–1983), inżynier amerykański, wprowadził pojęcie ujemnego sprzężenia zwrotnego (**negative feedback**),
— Harry Nyquist (1889–1976), amerykański elektrotechnik (automatyk) pochodzenia szwedzkiego, twórca kryterium stabilności dla układów ze sprzężeniem zwrotnym,
— Richard Bellman (1920–1984), amerykański matematyk stosowany, rozwinął programowanie dynamiczne (**dynamic programming**),
— Andrey Kolmogorov (1903–1987), matematyk rosyjski, współtwórca filtra Wienera-Kolmogorova,
— Norbert Wiener (1894–1964), matematyk amerykański pochodzący z Polski, współtwórca filtra Wienera–Kolmogorova, twórca cybernetyki (**cybernetics**),
— Lev Pontryagin (1908–1988), matematyk rosyjski, wprowadził zasadę maksimum i zasadę bang-bang.

Przykład 1.1 (Ekonomia narodowa (por. [30]))**.** Ekonomia typowego kraju kapitalistycznego jest b. skomplikowanym układem utworzonym z populacji (konsumenci, producenci, ...), spółek, dóbr materialnych, produktów, dostępnych środków pieniężnych, kredytów, etc.

Stan układu określa zbiór danych: zarobków, zysków, strat, wyprzedaży dóbr i usług, inwestycji, bezrobocia, zasiłków społecznych, współczynników inflacji, wymiany zagranicznej środków pieniężnych.

Rząd może wpływać na stan układu stosując różnego typu sterowania (**controls**), n.p. politykę podatkową, kontrolowanie zarobków i cen.

Przykład 1.2 (Wagon odrzutowy (**rocket car**) — por. [26], str. 1, [30], str. 3, [18], str. 9, [13], str. 5–7)**.** Rozważamy „*wagon odrzutowy*" o masie $m = 1$ poruszający się po linii prostej bez tarcia. Oznaczamy przez $x = x(t)$ położenie środka masy w chwili $t > 0$. Równanie ruchu (prawo Newtona) ma postać równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\ddot{x} = u\,, \qquad t > 0\,, \tag{1.1}$$

gdzie $\ddot{x}$ oznacza drugą pochodną funkcji x, oraz $u = u(t)$ jest zewnętrzną siłą działającą na wagon (sterowaniem (**control**)). Początkowe położenie i prędkość określone są przez $x(0) = x_0$ oraz $\dot{x}(0) = y_0$. Celem jest dobranie u w taki sposób, by wagon dotarł do wybranego punktu, n.p. 0, i osiągnął wtedy prędkość 0 (zagadnienie sterowania (**control problem**)) w możliwie najkrótszym czasie (zagadnienie sterowania czaso–optymalne (**time optimal control problem**)). Naturalne jest założenie, że funkcja u jest ograniczona, n.p.

$$|u(t)| \leqslant 1\,.$$

Zagadnienie ma charakter dwuwymiarowy:

$$x^1 := x\,, \qquad x^2 := \dot{x}\,.$$

Mamy wiec układ RRZ 2×2:

$$\dot{x}^1 = x^2\,, \qquad \dot{x}^2 = u\,, \qquad u = u(t)\,,$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Zagadnienie sterowania sprowadza się do znalezienia takiej funkcji u, żeby dla pewnego $t_1 > 0$ zachodziło

$$\begin{bmatrix} x^1(t_1) \\ x^2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dla odpowiedniego rozwiązania, a zagadnienie sterowania czaso–optymalnego, by dodatkowo t_1 było możliwie najmniejsze.

Przykład 1.3 (Wymuszony oscylator harmoniczny (por. [26], str. 2, [18], str. 7))**.** Kontrolny element samolotu powinien być utrzymywany w ustalonym właściwym położeniu. zakładamy, że odbywa się to według wymuszonego oscylatora harmonicznego, tzn. dla y — odchylenia od właściwego położenia, odpowiednie RRZ ma postać

$$\ddot{y} = -l\dot{y} - h_0 y + u\,,$$

gdzie wyraz $-l\dot{y}$ jest siłą oporu ośrodka, $-h_0 y$ siłą sprężystości oraz u — zewnętrzną siła (sterowaniem). Ponieważ wychylenia kontrolnego elementu w samolocie są niedopuszczalne, celem jest doprowadzenie układu do stanu $y = 0$, $\dot{y} = 0$ w możliwie najkrótszym czasie. Zagadnienie ma postać macierzową

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h_0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Przykład 1.4 (Zysk firmy (por. [26], str. 3))**.** $x(t)$ określa zysk pewnej firmy w czasie t. Zysk może zostać przeznaczony na

— dalszą produkcję
— konsumpcję

$u = u(t)$ $(0 \leqslant u(t) \leqslant 1)$ określa część zysku przeznaczoną na dalszą produkcję. Odpowiednie RRZ ma postać

$$\dot{x} = kux\,,$$

gdzie k jest danym współczynnikiem.

Zagadnienie polega na znalezieniu $u = u(t)$ takiego, by całkowita konsumpcja na pewnym odcinku czasu $[0, t_1]$, czyli

$$\mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} \Big(1 - u(t)\Big)\, x(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

była największa.

Przykład 1.5 (Wzrost rośliny (por. [22], str. 2))**.** Ogrodnik chce wyhodować roślinę o zadanej wysokości. Naturalny proces wzrostu może być przyspieszony przez sztuczne oświetlanie rośliny, prowadząc do zredukowania godzin bez światła, gdy roślina nie rośnie. Niech $x = x(t)$ będzie wysokością rośliny w chwili t. RRZ opisujące wzrost rośliny ma postać

$$\dot{x} = 1 + u\,, \tag{1.2}$$

gdzie $u = u(t)$ opisuje dodatkowy przyrost rośliny spowodowany przez sztuczne oświetlenie. Załóżmy, że początkowa wysokość rośliny wynosi 0, a pożądana wysokość po jednostce czasu $t = 1$ powinna być dwie jednostki,

$$x(0) = 0\,, \qquad x(1) = 2\,. \tag{1.3}$$

„Koszt" sztucznego oświetlenia określa funkcja

$$\mathfrak{C}[u] = \int\limits_0^1 \frac{\big(u(t)\big)^2}{2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Zagadnienie polega na znalezieniu sterowania u, takiego że odpowiednie rozwiązanie (1.2) spełnia (1.3) oraz $\mathfrak{C}$ przyjmuje najmniejszą wartość (zagadnienie sterowania optymalnego).

Rozwiązanie (1.2) spełniające (1.3) ma postać

$$x(t) = \int\limits_0^t \Big(1 + u(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,,$$

gdzie u spełnia

$$\int\limits_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t = 1\,. \tag{1.4}$$

Z (1.4) możemy przekształcić

$$\mathfrak{C}[u] = \int\limits_0^1 \frac{(u(t)-1)^2}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}$$

Stąd widać, że minimum, to $\mathfrak{C}[u] = \frac{1}{2}$. Jest ono osiągane dla $u \equiv 1$ na $[0, 1]$. Optymalne rozwiązanie ma postać $x(t) = 2t$, $t \in [0, 1]$.

2. Sterowalność

Współrzędne wektora $x \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy x^1, x^2, ..., x^n, $n = 1, 2, \ldots$:

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Dla odróżnienia naturalne potęgi ϕ oznaczamy jako $(\phi)^p$, $p = 1, 2, \ldots$.

Dla uproszczenia notacji element zerowy w każdej $\mathbb{R}^n$, dla $n = 1, 2, \ldots$, oznaczamy przez 0.

Definicja 2.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \ldots$ będzie zadanym zbiorem. Zbiór ten będziemy nazywali **zbiorem parametrów sterujących**.

Przez większą część wykładu, będziemy przyjmować, że $\Omega = [-1, 1]^m$, choć omówimy kilkakrotnie sytuacje $\Omega = \mathbb{R}^m$. Jeżeli nie będzie podane inaczej, będziemy zakładali, że $\Omega = [-1, 1]^m$. Niech

$$\mathbb{U}_m[0, t_1] = \Big\{ u \,:\, u(t) \in \Omega \quad \text{oraz} \quad u \quad \text{mierzalna na} \quad [0, t_1] \Big\}$$

$$\mathbb{U}_m = \bigcup_{t_1 > 0} \mathbb{U}_m[0, t_1]$$

Każdy element $u \in \mathbb{U}_m$ będziemy nazywali **sterowaniem** (**control**) (lub **strategią**). Dla każdego sterowania u istnieje odpowiedni odcinek $[0, t_1(u)]$, na którym jest określone.

Definicja 2.2. Dla każdego $t \geqslant 0$ określamy rodzinę **zbiorów celu** (**target sets**) $\mathcal{T}(t) \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $\mathcal{T}(t)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^n$.

Jeżeli nie będzie podane inaczej, to $\mathcal{T}(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$, tak jak w przykładach 1.2 i 1.3.

Rozpatrujemy zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ oraz $u = u(t)$, $u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$, jest poszukiwanym **sterowaniem**.

Powyższe zagadnienie dotyczy **sterowania w pętli otwartej** (**control in open–loop form**), $u = u(t)$. Można też rozpatrywać **sterowanie w zamkniętej pętli** (**control in closed–loop form**), gdy poszukuje się odwzorowania (zwanego **sprzężeniem zwrotnym** (**feedback**) $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{U}_m$ dla RRZ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(x(t))), \qquad x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Sprowadzenie $u = u(t)$ do $u = \alpha(x(t))$ nazywa się zagadnieniem syntezy (**synthesis**) sterowania.

Możliwe jest podejście alternatywne w języku **inkluzji różniczkowej** (**differential inclusion**)

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{2.3}$$

gdzie

$$F(t, x) = \Big\{ y \,:\, y = f(t, x, u)\,, \quad \text{dla pewnego } u \in \Omega \Big\}\,.$$

Założenie 2.1. Funkcja

$$f \,:\, [0, \infty[\, \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

jest ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\frac{\partial f^i}{\partial u^k}$ dla $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$ na zbiorze $[0, \infty[\, \times \mathbb{R}^n \times \Omega$.

Założenie 2.1 gwarantuje lokalne istnienie i jednoznaczność rozwiązania dla $u \in \mathbb{U}_m$ — tw. Picarda–Lindelöfa — por. [13, 16, 21]. Ponieważ jednak funkcja u jest jedynie funkcją mierzalną i ograniczoną, więc prawa strona RRZ (2.1) jest tylko mierzalna i ograniczona jako funkcja t dla każdego x. Zatem rozwiązanie rozumiane jest jako absolutnie ciągła funkcja spełniająca RRZ (2.1) prawie wszędzie — por. [13, 16, 21].

Założenie 2.1 jest mocniejsze, niż jest to jest potrzebne w niektórych wynikach. Do istnienia i jednoznaczności wystarczy Lipschitz–owskość, ciągłość też można osłabić.

Definicja 2.3. Dla zadanego sterowania $u \in \mathbb{U}_m$ rozwiązanie RRZ (2.1) nazywa się **odpowiedzią na** (**response to**) u — oznaczamy $x(t) = x(t, x_0, u(\,.\,))$.

Problem 2.1. Zagadnienie sterowania (**control problem**): dla zadanego x_0 znaleźć $t_1 > 0$ oraz $u \in \mathbb{U}_m\,[\,0, t_1\,]$, t.ż. odpowiednia odpowiedź $x(t_1) \in \mathcal{T}(t_1)$.

Jeżeli takie u da się znaleźć, to mówimy, że sterowanie u **prowadzi** x_0 **do celu** $\mathcal{T}(t_1)$ (**control** u **steers** x_0 **to the target** $\mathcal{T}(t_1)$), lub że u jest **sterowaniem pomyślnym** (**successful control**).

Problem 2.2. Zagadnienie sterowalności (**controllability problem**): określić dane początkowe, które można doprowadzić do celu (tzn. dane początkowe, które są **sterowalne** (**controllable**)), czyli określić te dane początkowe, dla których istnieje pomyślne sterowanie $u \in \mathbb{U}_m$.

Definicja 2.4. Zbiór sterowalny (**controllable set**) $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{t_1 > 0} \mathcal{C}(t_1)$, gdzie

$$\mathcal{C}(t_1) = \Big\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \;:\; \text{istnieje } u \in \mathbb{U}_m\,, \quad \text{t.ż.} \quad x(t_1, x_0, u(\,.\,)) \in \mathcal{T}(t_1) \Big\}\,, \tag{2.4}$$

$\mathcal{C}(t_1)$ jest zbiorem tych stanów, które mogą być doprowadzone do celu w chwili t_1.

Będziemy badali zbiór $\mathcal{C}$, oraz określimy jak zmienia się $\mathcal{C}$ wraz z zawężeniem klasy sterowań.

Definicja 2.5. Jeżeli $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, to **sterowalność** jest **całkowita** (**completely controllable**). Natomiast przypadek $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$ nazywamy sterowalnością **lokalną** (**locally controllable**).

Można rozważać węższe klasy sterowań (por. [30]):

— **Klasa sterowań kawałkami stałych** (**piecewise constant controls**) $\mathbb{U}_{PC}$:
$u \in \mathbb{U}_{PC}[0, t_1]$, jeżeli u jest kawałkami stała na $[0, t_1]$, czyli istnieją $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_l = t_1$, t. ż, u jest stała na każdym przedziale $[s_{k-1}, s_k\,[$;

$$\mathbb{U}_{PC} = \bigcup_{t_1>0} \mathbb{U}_{PC}[0, t_1]\,.$$

— **Klasa sterowań gładkich i niezmieniających się nagle** (**smooth controls that do not change rapidly**) $\mathbb{U}_\varepsilon$:
$u \in \mathbb{U}_\varepsilon[0, t_1]$, jeżeli u jest absolutnie ciągła na $[0, t_1]$, $u(0) = u(1)$ oraz $|\dot{u}(t)| \leqslant \varepsilon$ p.w. na $[0, t_1]$;

$$\mathbb{U}_\varepsilon = \bigcup_{t_1>0} \mathbb{U}_\varepsilon[0, t_1]\,.$$

— **Klasa sterowań „bang–bang”** (**bang–bang controls**) $\mathbb{U}_{BB}$:
$u \in \mathbb{U}_{BB}[0, t_1]$, jeżeli $|u^j(t)| = 1$ dla p.k. $t \in [0, t_1]$ oraz każdego $j = 1, \ldots, m$;

$$\mathbb{U}_{BB} = \bigcup_{t_1>0} \mathbb{U}_{BB}[0, t_1]\,.$$

— **Klasa sterowań bang–bang kawałkami stałych** $\mathbb{U}_{BBPC}$:

$$\mathbb{U}_{BBPC}[0, t_1] = \mathbb{U}_{BB}[0, t_1] \bigcap \mathbb{U}_{PC}[0, t_1]\,;$$

$$\mathbb{U}_{BBPC} = \bigcup_{t_1>0} \mathbb{U}_{BBPC}[0, t_1]\,.$$

Analogicznie do $\mathcal{C}$ określamy zbiory sterowalne $\mathcal{C}_{PC}$, $\mathcal{C}_\varepsilon$, $\mathcal{C}_{BB}$, $\mathcal{C}_{BBPC}$ w odniesieniu do odpowiednich klas sterowań.

Problem 2.3. Rozpatrywać będziemy ogólne **autonomiczne** (**autonomous**) zagadnienie nieliniowe **(NLA)**

$$\dot{x} = f(x, u)\,, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n\,, \qquad u \in \mathbb{U}_m\,, \tag{2.5}$$

z warunkiem początkowym

$$x\Big|_{t=0} = x_0 \in \mathbb{R}^n\,,$$

i celem $\mathcal{T}(t) \equiv 0$.

Założenie 2.2. Zakładamy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 na $\mathbb{R}^n \times \Omega$ oraz $f(0, 0) = 0$.

Stąd dla zadanego warunku początkowego x_0 odpowiedź $x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,))$ istnieje (przynajmniej) lokalnie w czasie i jest jednoznaczna.

Będziemy również rozpatrywać zagadnienie liniowe **(LA)**

Problem 2.4.

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n\,, \qquad u \in \mathbb{U}_m\,, \tag{2.6}$$

gdzie A i B są stałymi macierzami, $n \times n$ i $n \times m$, odpowiednio,
z warunkiem początkowym

$$x\Big|_{t=0} = x_0 \in \mathbb{R}^n\,,$$

i celem $\mathcal{T}(t) \equiv 0$.

Macierz B ma więc postać:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Lemat 2.1. *Dla **(NLA)**:*

1. ***Jeżeli*** *$u = u(t)$ prowadzi x_0 do 0 na $[0, t_1]$ z odpowiedzią $x = x(t)$ (tzn. $x(t_1) = 0$),* ***to*** *$\bar{u}(t) = u(t - t_0)$ prowadzi x_0 do 0 na $[t_0, t_0 + t_1]$ z odpowiedzią $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$.*
2. ***Jeżeli*** *$x = x(t)$ jest odpowiedzią na $u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$ prowadzącą $x(0) = x_0$ do $x(t_1) = x_1$,* ***to*** *$z(t) = x(t_1 - t)$ jest odpowiedzią na $\bar{u}(t) = u(t_1 - t)$ dla równania (z odwróconym czasem)*

$$\dot{z} = -f(z(t), \bar{u}(t))\,, \tag{2.7}$$

prowadzącą $z(0) = x_1$ do $z(t_1) = x_0$.

Dowód.
1. Mamy

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x}(t - t_0) = f(x(t - t_0), u(t - t_0)) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

dla p.w. $t \in [t_0, t_0 + t_1]$. Ponadto

$$\bar{x}(t_0) = x(0) = x_0\,, \qquad \bar{x}(t_0 + t_1) = x(t_1) = 0\,.$$

2. Mamy

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t_1 - t) = -f(x(t_1 - t), u(t_1 - t)) = -f(z(t), \bar{u}(t))$$

dla p.w. $t \in [0, t_1]$. Ponadto

$$z(0) = x(t_1) = x_1\,, \qquad z(t_1) = x(0) = x_0\,.$$

□

Zagadnienie **(NLA)** jest **autonomiczne** w tym sensie, że punkt 1 lematu 2.1 jest spełniony.

Definicja 2.6. Zbiór jest **łukowo spójny** (**arcwise connected**), jeżeli każde dwa punkty zbioru mogą być połączone łukiem (homeomorficznym obrazem odcinka) całkowicie zawartym w zbiorze.

Twierdzenie 2.1. *Dla **(NLA)**:*

1. *jeżeli* $x_0 \in \mathcal{C}$ *oraz* y *jest punktem trajektorii łączącej* x_0 *z celem* 0, *to* $y \in \mathcal{C}$;
2. *zbiór* $\mathcal{C}$ *jest łukowo spójny;*
3. *jeżeli* $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2$, *to* $\mathcal{C}(\tau_1) \subset \mathcal{C}(\tau_2)$;
4. $\mathcal{C}$ *jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy* $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

Dowód: [30] *— str. 26–27,* [22] *— str. 31–32..*

1. Niech $x_0 \in \mathcal{C}$. Istnieje wówczas pomyślne sterowanie $u_1 \in \mathbb{U}_m$ oraz odpowiedź $x(t) = x(t; x_0, u_1(\,.\,))$, t.ż. $x(t_1) = 0$ dla pewnego $t_1 > 0$. Dla $\bar{t} \in [0, t_1]$ chcemy pokazać, że $y := x(\bar{t}) \in \mathcal{C}$. Sterowanie $u_2(t) := u(t + \bar{t})$, określone na $t \in [0, t_1 - \bar{t}]$ jest pomyślne z odpowiedzią $x_2(t) := x(t + \bar{t})$:

$$\dot{x}_2(t) = f(x_2(t), u_2(t))\,, \qquad x_2(0) = x(\bar{t}) = y\,, \qquad x_1(t_1 - \bar{t}) = 0\,,$$

a zatem $y \in \mathcal{C}(t_1 - \bar{t})$.

2. Jeżeli $\bar{x}_0$, $\hat{x}_0$ są w $\mathcal{C}$, to istnieją sterowania $\bar{u}$ i $\hat{u}$ oraz odpowiedzi $\bar{x}(t) = x(t; \bar{x}_0, \bar{u}(\,.\,))$, $\hat{x}(t) = x(t; \hat{x}_0, \hat{u}(\,.\,))$, t.ż.

$$\bar{x}(\bar{t}) = 0 = \hat{x}(\hat{t}) \qquad \text{dla pewnych} \quad \bar{t} > 0\,, \quad \hat{t} > 0\,.$$

Z 1. każdy punkt obu trajektorii jest w $\mathcal{C}$. Zatem istnieje łuk całkowicie zawarty w $\mathcal{C}$ łączący punkty $\bar{x}_0$, $\tilde{x}_0$.

3. Niech $x_0 \in \mathcal{C}(\tau_1)$. Zatem istnieje sterowanie $u \in \mathbb{U}_m$, t.ż. $x(\tau_1) = 0$ dla odpowiedzi $x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,))$. Dla $\tau_2 > \tau_1$ określmy sterowanie

$$u_2 \in \mathbb{U}_m \ : \qquad u_2(t) = \begin{cases} u(t) & \text{dla} \quad t \in [\,0, \tau_1\,] \\ 0 & \text{dla} \quad t \in]\,\tau_1, \tau_2\,] \end{cases}\,.$$

Z warunku $f(0, 0) = 0$ wynika, że odpowiedź $x_2(t) = x(t; x_0, u_2(\,.\,))$ spełnia

$$x_2(t) = 0\,, \qquad t \in [\tau_1, \tau_2]\,,$$

a zatem u_2 prowadzi x_0 do celu 0 w czasie τ_2, czyli $x_0 \in \mathcal{C}(\tau_2)$.

4. Implikacja „$\Rightarrow$” jest oczywista, gdyż $0 \in \mathcal{C}$.

Pokażemy implikację „$\Leftarrow$”. Jeżeli $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$, to istnieje otwarta kula $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}(0, \delta_0)$ o środku w 0 i promieniu $\delta_0 > 0$, t.ż. $\mathbb{B}_0 \subset \mathcal{C}$. Niech $x_1 \in \mathcal{C}$. Chcemy pokazać, że istnieje otwarta kula o środku w x_1 całkowicie zawarta w $\mathcal{C}$. Ponieważ $x_1 \in \mathcal{C}$, więc istnieje sterowanie $u_1 \in \mathbb{U}_m$ oraz odpowiedź $x(t) = x(t; x_1, u_1(\,.\,))$, t.ż. $x(t_1) = 0$ dla pewnego $t_1 > 0$. Funkcja f jest klasy C^1, więc z ciągłej zależności od danych początkowych wynika istnienie otwartej kuli $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}(x_1, \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, t.ż. dla każdego $y \in \mathbb{B}_1$:

$$x_2 := x(t_1; y, u_1(\,.\,)) \in \mathbb{B}_0 \,\Big(\subset \mathcal{C}\Big)\,.$$

Istnieje więc sterowanie $u_2 \in \mathbb{U}_m$, które prowadzi x_2 do 0 w czasie $t_2 > 0$.

Zatem dla każdego $y \in \mathbb{B}_1$ istnieje sterowanie $u \in \mathbb{U}_m$,

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{dla} \quad t \in [\,0, t_1\,] \\ u_2(t - t_1) & \text{dla} \quad t \in]\,t_1, t_1 + t_2\,] \end{cases}\,, \tag{2.8}$$

które prowadzi y do 0. Zatem $\mathbb{B}_1 \subset \mathcal{C}$. $\square$

Uwaga 2.1. Można pokazać, że są prawdziwe twierdzenia analogiczne do twierdzenia 2.1 dla klas $\mathcal{C}_{PC}$ oraz $\mathcal{C}_{\varepsilon}$. Dla $\mathcal{C}_{BB}$ oraz $\mathcal{C}_{BBPC}$ punkty 1, 2 i 4 wynikają bezpośrednio. Natomiast punkt 3 dla $\mathcal{C}_{BB}$ wynika z zasady bang–bang — por. twierdzenie 5.1.

Uwaga 2.2. Argumentu w dowodzie „$\Leftarrow$" punktu 4 twierdzenia 2.1 nie można przenieść na $\mathcal{C}(t_1)$ dla $t_1 > 0$, gdyż sterowanie (2.8) określone jest na $t_1 + t_2$. Najczęściej brzeg zbioru $\mathcal{C}(t_1)$ należy do tego zbioru, więc $\mathcal{C}(t_1)$ nie jest otwarty.

Rozważymy teraz zagadnienie liniowe **(LA)**. Rozwiązanie **(LA)** ma postać

$$x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,)) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{2.9}$$

Mamy:

$$x_0 \in \mathcal{C}(t_1) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u \in \mathbb{U}_m[0,t_1] \ : \quad x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As}Bu(s)\,\mathrm{d}s\,, \tag{2.10}$$

Definicja 2.7. Zbiór $\mathbb{S}$ jest symetryczny (**symmetric**), gdy $x \in \mathbb{S} \ \Leftrightarrow\ -x \in \mathbb{S}$.

Twierdzenie 2.2. *Dla* ***(LA)****: $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ jest symetryczny oraz wypukły.*

Dowód: [18] — str. 17, [30] — str. 29, [22] — str. 33..

Mamy (2.10). Jeżeli $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ dla $u \in \mathbb{U}_m[0,t_1]$, to $-x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ dla $-u \in \mathbb{U}_m[0,t_1]$. Zatem $\mathcal{C} = \bigcup_{t_1>0}\mathcal{C}(t_1)$ jest **symetryczny**.

Jeżeli $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ ze sterowaniem u_0 i $x_* \in \mathcal{C}(t_1)$ ze sterowaniem u_1, to $\alpha x_0 + (1-\alpha)x_* \in \mathcal{C}(t_1)$ ze sterowaniem $\alpha u_0 + (1-\alpha)u_*$. Zatem $\mathcal{C}(t_1)$ **jest wypukły**. Nie wynika z tego od razu, że $\mathcal{C} = \bigcup_{t_1>0}\mathcal{C}(t_1)$ jest wypukły (suma zbiorów wypukłych nie musi być wypukła). Jednakże stosując argument z dowodu punktu 3 twierdzenia 2.1 pokazujemy, że $\mathcal{C}$ jest **wypukły**. □

Twierdzenie 2.2 można uogólnić na sytuację, gdy $A = A(t)$, $B = B(t)$ są ciągłymi funkcjami. W dowodzie korzysta się z następujących własności klasy sterowań: symetryczności, wypukłości i możliwości przyjmowania wartości 0. Twierdzenie 2.2 zachodzi więc dla klas $\mathbb{U}_{PC}$ i $\mathbb{U}_{\varepsilon}$, ale nie zachodzi dla $\mathbb{U}_{BB}$ i $\mathbb{U}_{BBPC}$, które nie są wypukłe i nie zawierają 0. W rozdziale 5 (twierdzenie 5.1) pokażemy jednak zasadę „bang–bang" dla **(LA)**: $\mathcal{C}_{BB}(t_1) = \mathcal{C}(t_1)$. Z zasady „bang–bang" wynika, że

$$\mathcal{C}_{BB} = \bigcup_{t_1>0}\mathcal{C}_{BB}(t_1) = \bigcup_{t_1>0}\mathcal{C}(t_1) = \mathcal{C}\,,$$

a zatem z wypukłości $\mathcal{C}$ wynika wypukłość $\mathcal{C}_{BB}$.

Następujące przykłady pokazują, że $\mathcal{C}$ może nie zawierać pewnego otoczenia celu, czyli, że nie jest spełniona nawet lokalna sterowalność.

Przykład 2.1 ([18], str. 18)**.** Niech $n = 2$, $m = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & 0\,, \\ \dot{x}^2 & = & u\,. \end{array} \tag{2.11}$$

Zatem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie spełniające $x(0) = x_0$ ma postać

$$\begin{array}{rcl} x^1(t) & = & x_0^1 \\ x^2(t) & = & x_0^2 + \int\limits_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \end{array}. \tag{2.12}$$

Stąd

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \quad x^1 = 0\,, \quad x^2 \in \mathbb{R}^1 \right\},$$

czyli $\mathcal{C}$ jest osią x^2.

Przykład 2.2 ([30], str. 30; [22], str. 34)**.** Niech $n = 2$, $m = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & x^1 + u\,, \\ \dot{x}^2 & = & x^2 + u\,. \end{array} \tag{2.13}$$

Zatem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie spełniające $x(0) = x_0$ ma postać

$$\begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} + \left(e^t \int\limits_0^t e^{-s} u(s)\,\mathrm{d}s \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Jeżeli $x^1(t_1) = x^2(t_1) = 0$, to

$$x_0^1 = x_0^2 = -\int\limits_0^{t_1} e^{-s} u(s)\,\mathrm{d}s$$

oraz

$$-(1 - e^{-t_1}) \leqslant -x_0^1 = -x_0^2 \leqslant 1 - e^{-t_1}\,,$$

bo $u(s) \in [-1, 1]$.

Stąd

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \quad x^1 = x^2\,, \quad |x^1| < 1\,, \quad |x^2| < 1 \right\}.$$

Przykłady 2.1 i 2.2 pokazują, że potrzebne są pewne warunki na macierze A i B. Warunki te zostaną wyrażone przez macierz sterowalności.

Definicja 2.8. Dla **(LA)** wprowadzamy **macierz sterowalności** (**controllability matrix**):

$$M = \underbrace{\left[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B \right]}_{\text{macierz } n\times nm}$$

W dowodzie odpowiedniego twierdzenia (tw. 2.4) korzysta się z pojęcia hiperpłaszczyzny:

Definicja 2.9. $(n-1)$–wymiarową **hiperpłaszczyzną** (**hyperplane**) w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$\mathbb{H} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ a^T x = \alpha \right\},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, a^T oraz $\alpha \in \mathbb{R}^1$ są zadane, $a^T x$ oznacza iloczyn skalarny wektorów a i x.

Istotną rolę odgrywa tu wniosek z twierdzenia Mazura (geometrycznej wersji twierdzenia Hahna-Banacha) - twierdzenie o hiperpłaszczyźnie podpierającej — por. [29], str. 190.

Twierdzenie 2.3 (Twierdzenie o hiperpłaszczyźnie podpierającej)**.** *Jeżeli $y \notin \operatorname{Int} \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}$ jest wypukłym zbiorem, t.ż. $\operatorname{Int} \mathbb{K} \neq \emptyset$, to istnieje* ***hiperpłaszczyzna podpierająca*** *$\mathbb{H}$* ***w*** *y (**supporting hyperplane** $\mathbb{H}$ **through** y), tzn. $\mathbb{K}$ leży po jednej stronie $\mathbb{H}$:*

$$a^T y = \alpha\,, \qquad a^T x \leqslant \alpha \quad \forall\, x \in \mathbb{K}\,, \tag{2.15}$$

dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

♣

Twierdzenie 2.4. *Dla **(LA)**: Następujące trzy warunki są równoważne*

(a) $\operatorname{rank} M = n$
(b) $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$ *(lokalna sterowalność)*
(c) $\mathcal{C}$ *— otwarty w* $\mathbb{R}^n$

Dowód: [18], str. 18, [30], str. 31, [22], str. 35, [26], str. 108.
Zauważmy, że równoważność $(b) \Leftrightarrow (c)$ wynika z twierdzenia 2.1.

1. Dowód $(b) \Rightarrow (a)$, czyli $\sim (a) \Rightarrow \sim (b)$. Załóżmy więc $\sim (a)$, czyli $\operatorname{rank} M < n$. Wówczas istnieje wektor $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, prostopadły do każdej kolumny macierzy M, czyli

$$y^T M = 0 \left(\in \mathbb{R}^{nm} \right).$$

Stąd

$$y^T B = y^T AB = \ldots = y^T A^{n-1} B = 0 \left(\in \mathbb{R}^{m} \right).$$

Niech $\mathcal{P}$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A)\,,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową $n \times n$.

Mamy (twierdzenie Cayleya–Hamiltona)

$$\mathcal{P}(A) = 0\,.$$

Stąd

$$A^n = \beta_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \beta_0 I\,,$$

a zatem

$$y^T A^n B = \beta_{n-1} y^T A^{n-1} B + \ldots + \beta_0 y^T B = 0\,.$$

Podobnie

$$A^{n+1} = \beta_{n-1}A^n + \ldots + \beta_0 A$$

i

$$y^T A^{n+1} B = 0\,.$$

Powtarzając to postępowanie

$$y^T A^k B = 0\,, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots\,.$$

Stąd

$$y^T e^{-As} B = y^T \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^k s^k}{k!} B = 0\,,$$

dla każdego $s \in [0, t_1]$.

Mamy (2.10). Stąd

$$y^T x_0 = -\int_0^{t_1} y^T e^{-As} Bu(s)\, \mathrm{d}s = 0\,,$$

czyli istnieje niezerowy wektor $y \in \mathbb{R}^n$, który jest prostopadły do każdego $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$. Stąd wynika, że $\mathcal{C}(t_1)$ leży w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do y dla każdego $t_1 > 0$. Zatem $\mathcal{C} = \bigcup_{t_1 > 0} \mathcal{C}(t_1)$ leży w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do y i

$$\operatorname{Int} \mathcal{C} = \emptyset\,.$$

Otrzymujemy więc, że $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}$, czyli $\sim (b)$.

2. Dowód $(a) \;\Rightarrow\; (b)$, czyli $\sim (b) \;\Rightarrow\; \sim (a)$. Załóżmy więc $\sim (b)$, czyli $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}$. Stąd dla każdego $t_1 > 0$: $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}(t_1)$, gdyż $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}$ (nie istnieje kula $\mathbb{B}(0,\delta) \subset \mathcal{C} \;\Rightarrow\;$ nie istnieje kula $\mathbb{B}(0,\delta) \subset \mathcal{C}(t_1)$ dla każdego t_1).

Ale $0 \in \mathcal{C}(t_1)$ oraz $\mathcal{C}(t_1)$ jest zbiorem wypukłym dla każdego $t_1 > 0$ (por. dowód twierdzenia 2.2). Zatem istnieje hiperpłaszczyzna przechodząca przez 0, taka że $\mathcal{C}(t_1)$ leży po jednej stronie tej hiperpłaszczyzny (twierdzenie 2.3), tzn. istnieje wektor $b = b(t_1) \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, taki że

$$b^T x_0 \leqslant 0 \qquad \forall\, x_0 \in \mathcal{C}(t_1)\,.$$

Stąd

$$-b^T x_0 = \int_0^{t_1} b^T e^{-As} Bu(s)\, \mathrm{d}s \geqslant 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]\,.$$

Z lematu 2.2 poniżej wynika, że

$$b^T e^{-As} B = 0 \qquad \forall\, s \in [0, t_1]\,.$$

Wstawiając $s = 0$ otrzymujemy $b^T B = 0$. Następnie różniczkując względem s i wstawiając $s = 0$ otrzymujemy

$$b^T A^k B = 0 \qquad \forall\, k = 0, 1, \dots\,.$$

Zatem niezerowy wektor b jest prostopadły do każdej kolumny M i $\operatorname{rank} M < n$, czyli $\sim (a)$. □

Lemat 2.2 (Nierówność całkowa)**.** *Jeżeli*

$$\int_0^{t_1} b^T e^{-As} B u(s)\,\mathrm{d}s \geqslant 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]\,, \tag{2.16}$$

to

$$b^T e^{-As} B = 0 \qquad \forall\, s \in [0, t_1]\,.$$

Dowód: [30], str. 32; [18], str. 21.

Jeżeli $u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$, to $-u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$. Zatem z (2.16) wynika, że

$$\int_0^{t_1} b^T e^{-As} B u(s)\,\mathrm{d}s = 0 \qquad \forall\, u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]\,.$$

Niech $v(s) := \left(b^T e^{-As} B\right)^T$. Jeżeli $v \not\equiv 0$, to istnieje $s_0 \in [0, t_1]$, t.ż. $v(s_0) \neq 0$. Istnieje wtedy przedział $\mathbb{I} \subset [0, t_1]$, t.ż. $s_0 \in \mathbb{I}$ oraz $v \neq 0$ na $\mathbb{I}$. Określmy sterowanie

$$u(t) = \begin{cases} \frac{v(t)}{|v(t)|} & \text{dla} \quad t \in \mathbb{I} \\ 0 & \text{dla} \quad t \in [0, t_1] \setminus \mathbb{I} \end{cases}\,.$$

Wówczas mamy

$$0 = \int_0^{t_1} v^T(s) u(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{I}} v^T(s) \frac{v(s)}{|v(s)|}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{I}} |v(s)|\,\mathrm{d}s\,.$$

Otrzymujemy więc sprzeczność z założeniem $v \not\equiv 0$. □

Wniosek 2.1. *Twierdzenie 2.4 można powtórzyć dla klas $\mathbb{U}_{PC}$, $\mathbb{U}_\varepsilon$, gdyż dla tych klas „przechodzi" lemat 2.2.*

W dowodzie twierdzenia 2.4 pokazaliśmy, że

Wniosek 2.2. $\operatorname{rank} M < n \quad \Rightarrow \quad$ *istnieje hiperpłaszczyzna w $\mathbb{R}^n$, t.ż. $\mathcal{C} = \bigcup_{t_1 > 0} \mathcal{C}(t_1)$ leży w tej hiperpłaszczyźnie* $\quad \Rightarrow \quad 0 \notin \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

Ponadto

Wniosek 2.3. rank $M = n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, b \in \mathbb{R}^n\,,\ b \neq 0\ : \qquad b^T e^{-A\,t} B \not\equiv 0 \tag{2.17}$$

jako funkcja zmiennej t.

Dowód. Pokazaliśmy, że rank $M < n \quad \Rightarrow \quad \exists\, y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, t.ż.

$$y^T e^{-A\,t} B \equiv 0$$

$\Rightarrow \quad 0 \notin \operatorname{Int} \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad$ rank $M < n$. Zatem otrzymujemy (2.17). □

Definicja 2.10. Układ **(LA)** spełniający (2.17) nazywa się **właściwy** (**proper**).

(LA) jest właściwy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{rank} M = n\,.$$

W rozpatrywanym tutaj przypadku $\Omega = [-1,1]^m$ warunek rank $M = n$ nie gwarantuje całkowitej sterowalności $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, jak pokazuje prosty przykład

Przykład 2.3 ([30], str. 33)**.** Niech $n = m = 1$. Rozważmy

$$\dot{x} = x + u\,.$$

Jeżeli $x_0 > 1$ (lub $x_0 < -1$), to odpowiedź na dowolne sterowanie rośnie (maleje) wraz z t, a więc żadne sterowanie nie jest pomyślne. Mamy $\mathcal{C} =]-1,1[\neq \mathbb{R}^1$, choć $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

Jednakże przy dodatkowym warunku otrzymujemy:

Twierdzenie 2.5. *Dla **(LA)** następujące dwa warunki są równoważne:*

(a) rank $M = n$ *oraz* $\Re\lambda \leqslant 0$ *dla każdej wartości własnej* λ *macierzy* A
(b) $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.

Dowód: [30], str. 34; [22], str. 37–38; oraz $\Rightarrow$*: [26], str. 112, [18], str. 22.*

1. Dowód $(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy, że rank $M = n$ oraz $\Re\lambda \leqslant 0$ dla każdej wartości własnej λ macierzy A. Gdyby istniał $y \in \mathbb{R}^n$, t.ż. $y \notin \mathcal{C}$, to z wypukłości $\mathcal{C}$ (twierdzenie 2.2) oraz twierdzenia 2.3 wynikałoby, że y mógłby być odseparowany od $\mathcal{C}$ hiperpłaszczyzną, tzn. istniałby $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, t.ż.

$$b^T x_0 \leqslant \alpha \qquad \forall\, x_0 \in \mathcal{C}\,, \tag{2.18}$$

dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

Pokażemy, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}^1$ oraz każdego $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ istnieje $t_1 > 0$ oraz $u \in \mathbb{U}_m[0,t_1]$, t.ż.

$$-\int_0^{t_1} b^T e^{-As} B u(s)\,\mathrm{d}\,s > \alpha\,, \tag{2.19}$$

co oznacza sprzeczność z (2.18), a zatem sprzeczność z założeniem istnienia $y \in \mathbb{R}^n$, t.ż. $y \notin \mathcal{C}$, a więc dowodzi prawdziwości $(a) \Rightarrow (b)$.

Niech

$$v(s) := \left(b^T e^{-As} B\right)^T \in \mathbb{R}^m .$$

Z założenia, że $\operatorname{rank} M = n$ oraz uwagi 2.3 wynika, że **(LA)** jest właściwy, czyli

$$v \not\equiv 0 \qquad \text{na} \qquad [0, t_1] . \tag{2.20}$$

Określmy sterowanie

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{v(t)}{|v(t)|} & \text{dla} \quad v(t) \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad v(t) = 0 . \end{cases}$$

Wówczas mamy

$$-\int_0^{t_1} b^T e^{-As} B u(s) \, \mathrm{d}\, s = -\int_0^{t_1} v^T(s) u(s) \, \mathrm{d}\, s = \int_0^{t_1} |v(s)| \, \mathrm{d}s .$$

Pokażemy, że

$$\int_0^{\infty} |v(s)| \, \mathrm{d}s = \infty , \tag{2.21}$$

a zatem istnienie takiego t_1, że (2.19) jest spełniona.

Załóżmy, że (2.21) nie jest spełniona, czyli

$$\int_0^{\infty} |v(s)| \, \mathrm{d}s < \infty .$$

Wówczas $\phi(t) := \int\limits_t^{\infty} v(s) \, \mathrm{d}s$ spełnia

$$\dot{\phi}(t) = -v(t) , \qquad \lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0 , \qquad \phi \not\equiv 0 . \tag{2.22}$$

Jeżeli $\mathcal{P}$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A, to $\mathcal{P}(A) = 0$. Stąd

$$\mathcal{P}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big) v(t) = \mathcal{P}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big) \left(b^T e^{-At} B\right)^T = \left(b^T \mathcal{P}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big) e^{-At} B\right)^T = \left(b^T \mathcal{P}(A) e^{-At} B\right)^T \equiv 0 .$$

Zatem funkcja $\phi = \phi(t)$ spełnia liniowy układ równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{P}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big) \phi(t) = 0 .$$

Rozwiązaniem tego równania jest pewna liniowa kombinacja wyrazów postaci

$$\Big(P_1(t) \sin(\Im\gamma\, t) + P_2(t) \cos(\Im\gamma\, t)\Big) e^{\Re\gamma\, t} ,$$

gdzie γ jest pierwiastkiem równania

$$\gamma \mathcal{P}(-\gamma) = 0.$$

Zatem $\gamma = 0$, lub $-\gamma = \lambda$, gdzie λ jest wartością własną macierzy A. Z założenia wynika, że

$$\Re\gamma \geqslant 0$$

co jest sprzeczne z (2.22). To kończy dowód implikacji $(a) \Rightarrow (b)$.

2. Dowód $(b) \Rightarrow (a)$. Pokażemy, że

— $\operatorname{rank} M < n$,

lub

— $\Re\lambda > 0$ dla pewnej wartości własnej λ macierzy A

implikuje $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$.

Jeżeli $\operatorname{rank} M < n$, to z wniosku 2.2 wynika, że $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$.

Niech $\Re\lambda > 0$, dla pewnej wartości własnej λ macierzy A. Jeżeli $y \in \mathbb{C}^n$ jest (lewym) wektorem własnym (**eigenvector**), to

$$y^T A = \lambda y^T .$$

Stąd

$$y^T A^k = \lambda^k y^T \qquad \forall\, k = 1, 2, \dots ,$$

a zatem

$$y^T e^{-At} = e^{-\lambda t} y^T \qquad t > 0 .$$

Mamy

$$y^T = y_{\Re}^T + i y_{\Im}^T , \quad y_{\Re}, y_{\Im} \in \mathbb{R}^n , \quad y_{\Re} \neq 0 .$$

Wówczas

$$y_{\Re}^T e^{-At} = e^{-\Re\lambda\, t} \cos\Big(\Im\lambda\, t\Big) y_{\Re}^T - e^{-\Re\lambda\, t} \sin\Big(\Im\lambda\, t\Big) y_{\Im}^T . \tag{2.23}$$

Mamy

$$y_{\Re}^T x_0 = -\int_0^{t_1} y_{\Re}^T e^{-As} B u(s)\, \mathrm{d}\, s . \tag{2.24}$$

Z (2.23) wynika, że prawa strona (2.24) jest ograniczona jednostajnie względem $t_1 > 0$. Zatem

$$y_{\Re}^T x_0 < \alpha \qquad \forall\, x_0 \in \mathcal{C} ,$$

dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Czyli $\mathcal{C}$ leży po jednej stronie pewnej hiperpłaszczyzny, a więc $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$. To kończy dowód $(b) \Rightarrow (a)$. □

Ćwiczenie 2.1. Czy twierdzenie 2.5 jest **prawdziwe** dla klas $\mathcal{C}_{PC}$, $\mathcal{C}_{\varepsilon}$, $\mathcal{C}_{BB}$ oraz $\mathcal{C}_{BBPC}$? Dla $\mathcal{C}_{BB}$ można zastosować zasadę bang–bang — por. twierdzenie 5.1.

Z dowodu $(b) \Rightarrow (a)$ twierdzenia 2.5 wynika prawdziwość (por. [22], str. 38):

Wniosek 2.4. *Jeżeli* $\operatorname{rank} M = n$ *oraz* $\Re\lambda > 0$, *dla pewnej wartości własnej* λ *macierzy* A, *to* $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$.

Przykład 2.4 (Wagon odrzutowy — patrz przykład 1.2)**.**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + Bu(t) , \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Mamy

$$M = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$\operatorname{rank} M = 2$ i układ jest właściwy. Jedyną (podwójną) wartością własną macierzy A jest 0. Z twierdzenia 2.5 wynika, że $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$, czyli każdy stan początkowy może być doprowadzony do celu $0 \in \mathbb{R}^2$.

W przeciwieństwie do przypadku klasy sterowań $\mathbb{U}_m$ o wartościach w $\Omega = [-1, 1]^m$, rozważanego w twierdzeniu 2.5, w przypadku sterowań o wartościach w $\Omega = \mathbb{R}^m$ okazuje się, że warunek $\operatorname{rank} M = n$ jest równoważny całkowitej sterowalności. W przypadku $\Omega = \mathbb{R}^m$ klasę sterowań definiujemy jako

$$\mathbb{U}_m^\infty = \bigcup_{t_1>0} L^\infty\Big(0, t_1; \mathbb{R}^m\Big) .$$

Dla uproszczenia notacji odpowiedni zbiór sterowalny bedziemy oznaczali jako $\mathcal{C}$, czyli tak samo, jak w przypadku $\Omega = [-1, 1]^m$ (sens będzie wynikał z kontekstu).

Wówczas można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.6. *Dla* **(LA)** *i klasy sterowań* $\mathbb{U}_m^\infty$ *następujące dwa warunki są równoważne:*

(a) $\operatorname{rank} M = n\,,$
(b) $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.

Dowód: por. [13], str. 58; [26], str. 107..

1. Dowód $(b) \Rightarrow (a)$, czyli $\sim (a) \Rightarrow \sim (b)$ jest identyczny jak punkt 1 dowodu twierdzenia 2.4.

2. Dowód $(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy, że $\operatorname{rank} M = n$. Z twierdzenia 2.4 wynika, że istnieje otwarta kula $\mathbb{B} = \mathbb{B}(0, \delta)$ o środku w $0 \in \mathbb{R}^n$ i promieniu $\delta > 0$, t.ż. $\mathbb{B} \subset \mathcal{C}$. Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje stała $\eta \in]0, 1]$, t.ż.

$$\eta x_0 \in \mathbb{B}\,,$$

czyli istnieje $t_1 > 0$ oraz $u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$, t.ż.

$$\eta x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B u(s)\,\mathrm{d}\,s\,.$$

Stąd

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B \bar{u}(s)\,\mathrm{d}\,s\,,$$

gdzie $\bar{u} = \frac{u}{\eta} \in \mathbb{U}_m^\infty$, co kończy dowód. □

Okazuje się (por. [30], str. 37), że dla klasy sterowań $\mathbb{U}_m$ „prawie wszystkie" układy **(LA)** są lokalnie sterowalne (tzn. spełniają $0 \in \mathcal{C}$), a dla klasy sterowań $\mathbb{U}_m^\infty$ „prawie wszystkie" układy **(LA)** są całkowicie sterowalne (tzn. spełniają $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$).

Odległość między dwoma układami **(LA)**: (A_1, B_1) i (A_2, B_2), czyli $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$ i $\dot{x} = A_2 x + B_2 u$, odpowiednio, określamy jako

$$d\Big((A_1, B_1), (A_2, B_2)\Big) = |A_1 - A_2| + |B_1 - B_2|\,,$$

gdzie $|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}|$ i analogicznie $|B|$.

Zatem dwa układy są bliskie, jeżeli elementy odpowiednich macierzy są bliskie.

Twierdzenie 2.7. *Zbiór wszystkich sterowalnych* ***(LA)*** *jest otwarty i gęsty w przestrzeni metrycznej wszystkich* ***(LA)****, gdzie „sterowalność” rozumiemy w sensie*

— *całkowitej sterowalności dla* $\Omega = \mathbb{R}^m$,
— *lokalnej sterowalności dla* $\Omega = [-1, 1]^m$.

Dowód: [30], str. 37..

Z twierdzenia 2.4, lub twierdzenia 2.6, w obu rozważanych przypadkach, sterowalność jest równoważna warunkowi $\operatorname{rank} M = n$. Ten warunek oznacza, że istnieje $(n \times n)$–macierz N, będąca podmacierzą M, t.ż. $\det N \neq 0$.

Jeżeli układ $(\tilde{A}, \tilde{B})$ jest bliski (A, B), to odpowiednia $n \times n$ podmacierz $\tilde{N}$ macierzy $\tilde{M}$ jest bliska odpowiedniej podmacierzy N macierzy M. Jeżeli $\det N \neq 0$, to $\det \tilde{N} \neq 0$ dla $|N - \tilde{N}|$ — małego. Zatem układy sterowalne są zbiorem otwartym.

Załóżmy, że $\dot{x} = A_0 x + B_0 u$ nie jest sterowalny, tzn. $\operatorname{rank} M_0 < n$, gdzie $M_0 = [B_0, \ldots, A_0^{n-1} B_0]$. Chcemy pokazać istnienie układu $(\tilde{A}, \tilde{B})$ — bliskiego układowi (A_0, B_0) — t.ż. $\det \tilde{N} \neq 0$, dla pewnej $n \times n$ podmacierzy $\tilde{N}$ macierzy $\tilde{M} = [\tilde{B}, \ldots, \tilde{A}^{n-1} \tilde{B}]$.

$\det \tilde{N}$ może być traktowany jako wielomian $\mathcal{P}(y^1, \ldots, y^k)$ elementów macierzy $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, gdzie $k = n^2 + nm$. Mamy

$$\mathcal{P}(y_0^1, \ldots, y_0^k) = 0$$

dla $y_0^1, \ldots, y_0^k$ – elementów macierzy A_0, B_0.

Wystarczy pokazać, że: dla niezerowego wielomianu $\mathcal{P} = \mathcal{P}(y^1, \ldots, y^k)$, t.ż. $\mathcal{P}(y_0^1, \ldots, y_0^k) = 0$, istnieje $y_1 \in \mathbb{R}^k$ — dowolnie bliskie y_0, t.ż.

$$\mathcal{P}(y_1^1, \ldots, y_1^k) \neq 0\,.$$

Powyższe zdanie wynika z faktu, że niezerowy wielomian k zmiennych nie może znikać w żadnej k–wymiarowej kuli: gdyby znikał, to biorąc pochodne cząstkowe pokazalibyśmy, że wszystkie współczynniki się zerują. □

3. Obserwowalność

Rozpatrujemy następujący układ liniowy:

$$\dot{x} = Ax\,, \qquad x(0) = x_0\,, \qquad y = Cx\,, \quad t \geqslant 0\,, \tag{3.1}$$

gdzie $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y = y(t) \in \mathbb{R}^m$, A jest macierzą $n \times n$ oraz C jest macierzą $m \times n$.

Problem 3.1. Zagadnienie obserwowalności (**Observability question**): dla zadanego $y = y(t) \in \mathbb{R}^m$ odtworzyć $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, a w szczególności $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Sens tego zagadnienia widać dla $m < n$: y to pomiary (obserwacje), z których należy odtworzyć wielowymiarowe x.

Definicja 3.1. Układ (3.1) nazywa się **obserwowalny** (**observable**), jeżeli dla rozwiązań x_1, x_2, z faktu, że $Cx_1(t) = Cx_2(t)$, dla $t \in [0, t_1]$, wynika, że $x_1(0) = x_2(0)$.

Przykład 3.1. Jeżeli $C = 0$, to układ nie jest obserwowalny. Jeżeli $n = m$ i C jest nieosobliwa, to $x(t) = C^{-1}y(t)$ i układ jest obserwowalny.

Twierdzenie 3.1. *Dwa następujące warunki są równoważne*
(a) układ (3.1) jest obserwowalny;
(b) $\operatorname{rank}\left[C^T, A^TC^T, \ldots, (A^T)^{n-1}C^T\right] = n$, *czyli układ*

$$\dot{x} = A^Tx + C^Tu \tag{3.2}$$

jest lokalnie sterowalny.

Dowód: [18], *str. 25,* [26], *str. 117..*

1. Dowód $(b) \Rightarrow (a)$, czyli $\sim(a) \Rightarrow \sim(b)$. Załóżmy więc $\sim(a)$, czyli, że układ (3.1) nie jest obserwowalny. Istnieją wówczas punkty $x_{1,0}, x_{2,0} \in \mathbb{R}^n$, t.ż. $x_{1,0} \neq x_{2,0}$,

$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{x}_1 &=& Ax_1\,, & & x_1(0) &=& x_{1,0} \\ \dot{x}_2 &=& Ax_2\,, & & x_2(0) &=& x_{2,0} \end{array} \tag{3.3}$$

oraz $y(t) = Cx_1(t) = Cx_2(t)$ dla każdego $t \geqslant 0$. Niech

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)\,, \qquad x_0 = x_{1,0} - x_{2,0}\,. \tag{3.4}$$

Stąd

$$\dot{x} = Ax\,, \qquad x(0) = x_0 \neq 0\,, \tag{3.5}$$

czyli $x(t) = e^{tA}x_0$. Mamy $Cx(t) = 0$ dla $t \geqslant 0$. Zatem

$$Ce^{tA}x_0 = 0\,, \qquad t \geqslant 0\,. \tag{3.6}$$

Zatem dla $t = 0$ otrzymujemy $Cx_0 = 0$, następnie różniczkując względem t i wstawiając $t = 0$ otrzymujemy, że

$$CA^k x_0 = 0\,, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{3.7}$$

Stąd $(x_0)^T (A^k)^T C^T = 0$, a więc $(x_0)^T (A^T)^k C^T = 0$, czyli

$$(x_0)^T \Big[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T\Big] = 0\,. \tag{3.8}$$

Ponieważ $x_0 \neq 0$, więc $\operatorname{rank}\Big[C^T, A^T C^T, \dots, \Big(A^T\Big)^{n-1} C^T\Big] < n$, co kończy dowód $(b) \;\Rightarrow\; (a)$.

2. Dowód $(a) \;\Rightarrow\; (b)$, czyli $\sim (b) \;\Rightarrow\; \sim (a)$. Załóżmy więc $\sim (b)$, czyli, że

$$\operatorname{rank}\Big[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T\Big] < n\,.$$

Zatem istnieje $x_0 \neq 0$, t.ż.

$$(x_0)^T \Big[C^T, A^T C^T, \dots, \Big(A^T\Big)^{n-1} C^T\Big] = 0\,,$$

czyli $CA^k x_0 = 0$ dla każdego $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Z twierdzenia Cayleya–Hamiltona wynika, że

$$A^n = -\beta_{n-1}A^{n-1} - \ldots - \beta_0 I$$

dla odpowiednich stałych $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ (z wielomianu charakterystycznego).

Stąd $CA^n x_0 = 0$. Następnie

$$A^{n+1} = -\beta_{n-1}A^n - \ldots - \beta_0 A\,,$$

a więc $CA^{n+1}x_0 = 0$. Kontynuując otrzymujemy $CA^k x_0 = 0$ dla każdego $k = 0, 1, \ldots$. Mamy

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x_0\,,$$

skąd otrzymujemy $Cx(t) = 0$, a zatem układ (3.1) nie jest obserwowalny. To kończy dowód. □

4. Sterowalność dla układów nieliniowych

Rozważymy układ nieliniowy **(NLA)**

$$\dot{x} = f(x, u)\,, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n\,, \qquad u \in \mathbb{U}_m\,, \tag{4.1}$$

z celem $\mathcal{T}(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że $f(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ i f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Istotną rolę będzie pełniła linearyzacja (NLA) wokół $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$f(x, u) = A_f x + B_f u + o(|x| + |u|)\,, \tag{4.2}$$

gdzie

$$A_f = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0)\right]_{i,j=1,\dots,n}\,, \qquad B_f = \left[\frac{\partial f^i}{\partial u^k}(0,0)\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}\,.$$

Chcemy o sterowalności dla **(NLA)** w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$ wnioskować ze sterowalności linearyzacji wokół $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definicja 4.1. Dla **(NLA)** wprowadzamy **macierz sterowalności układu zlinearyzowanego**:

$$M_f = \underbrace{\left[B_f, A_f B_f, A_f^2 B_f, \dots, A_f^{n-1} B_f\right]}_{\text{macierz } n\times nm}$$

Twierdzenie 4.1. *Dla **(NLA)**:* $\operatorname{rank} M_f = n \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

Dowód: [30], str. 38. ♣

Wniosek 4.1. *Twierdzenie 4.1 zachodzi dla wszystkich sterowań, dla których można w danej klasie przedłużać sterowanie zerem.*

Jednakże odpowiednik twierdzenia 4.1 dla $\mathcal{C}_{BB}$ jest **fałszywy**, jak pokazuje następujący przykład:

Przykład 4.1 (([30], str. 45))**.** Niech $n = m = 1$ i

$$\dot{x}(t) = u(t) + \big(u(t)\big)^2$$

dla $-1 \leqslant u(t) \leqslant 1$. Mamy

$$A_f = f_x(0,0) = 0\,, \qquad B_f = f_u(0,0) = 1\,, \qquad M_f = 1\,.$$

Zatem $\operatorname{rank} M_f = 1 = n$ i 0 leży we wnętrzu $\mathcal{C}$ z twierdzenia 4.1 (a także dla $\mathcal{C}_{PC}$ oraz $\mathcal{C}_\varepsilon$). Ale $u \in \mathbb{U}_{BB}$ implikuje, że $u + (u)^2$ równa się 0, albo 2, a zatem $\dot{x} \geqslant 0$. Stąd $0 \notin \operatorname{Int} \mathcal{C}_{BB}$, gdyż żaden punkt $x_0 > 0$ nie może być doprowadzony do 0.

Ten sam przykład pokazuje, że zasada bang–bang (rozdział 5.1) nie zachodzi dla **(NLA)**.

Twierdzenie 4.2. *Dla* ***(NLA)****:* ***Jeżeli*** *układ z zerowym sterowaniem ($u = 0$) jest globalnie asymptotycznie stabilny i* $\operatorname{rank} M_f = n$, **to** $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.

Dowód: [30], str. 43..

Dla **(NLA)** twierdzenie 4.1 gwarantuje istnienie $\delta > 0$, t.ż. istnieje kula $\mathbb{B}(0;\delta) \subset \mathcal{C}$. Globalna asymptotyczna stabilność rozwiązania dla $u \equiv 0$ implikuje, że

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, 0) = 0$$

dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zatem każde rozwiązanie z $u \equiv 0$ wchodzi do $\mathbb{B}(0,\delta)$ w skończonym czasie. Następnie korzystamy z $\mathbb{B}(0;\delta) \subset \mathcal{C}$. $\square$

Twierdzenie 4.2 wskazuje na ścisły związek pomiędzy teorią stabilności a sterowalnością.

Ważnym pojęciem w badaniu stabilności jest funkcja Lapunova (por. [34], rozdział 7.2, [20], rozdział 26).

Definicja 4.2. Niech $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ będzie otoczeniem punktu równowagi $x_* \in \mathbb{R}^n$ układu $\dot{x} = f(x)$. Funkcję $V : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy **funkcją Lapunova**, jeżeli

1. jest ciągła w $\mathbb{G}$ i różniczkowalna w $\mathbb{G} \setminus \{x_*\}$,
2. $V(x) \geqslant 0 \ \forall\, x \in \mathbb{G}, \quad V(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = x_*$
3. $\dot{V}(x) \leqslant 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{G} \setminus \{x_*\}$, gdzie

$$\dot{V}(x) = \Big(\operatorname{grad} V(x)\Big)^T f(x)\,.$$

Definicja 4.3. Mocną funkcją Lapunova nazywamy $V : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, jeżeli

1. jest funkcją Lapunova w $\mathbb{G}$,
2. $\dot{V} < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{G} \setminus \{x_*\}$.

Twierdzenie 4.3.

1. *Jeżeli istnieje funkcja Lapunova, to punkt równowagi x_* jest stabilny w sensie Lapunova.*
2. *Jeżeli istnieje mocna funkcja Lapunova, to punkt równowagi x_* jest asymptotycznie stabilny.*

♣

Przykład 4.2 (por. [30], str. 43)**.** Punkt materialny, o jednostkowej masie, poruszający się pod wpływem zewnętrznej siły F można opisać zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$\ddot{y} = F\,.$$

Jeżeli punkt zawieszony jest na sprężynie i ruch odbywa się w ośrodku stawiającym opór, to można przyjąć, że

$$F = -l\dot{y} - h(y) + u\,,$$

gdzie $F_1 = -l\dot{y}$ jest siłą oporu środowiska, $l = l(y, \dot{y})$, $-h(y)$ jest siłą sprężystości oraz u jest siłą wymuszającą (lub tłumiącą). Na przykład dla prawa Hooke'a $h(y) = h_0 y$ — por. przykład 1.3.

Załóżmy, że l i h są funkcjami klasy C^1, $h(0) = 0$.

Przyjmując $x^1 = y$, $x^2 = \dot{y}$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -l(x^1, x^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -h(x^1) + u \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Układ zlinearyzowany ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h'(0) & -l(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Mamy

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -l(0,0) \end{bmatrix}, \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{rank} M_f = 2 = n\,. \tag{4.5}$$

Zatem, dla każdego warunku gwarantującego globalną asymptotyczną stabilność rozwiązania $x \equiv 0$ układu dla $u = 0$, otrzymamy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.

Jeżeli

— $l(x^1, x^2) > 0$ dla każdego $(x^1, x^2) \neq 0$,
— $yh(y) > 0$ dla każdego $y \neq 0$,
— $\lim\limits_{|y| \to \infty} \int\limits_0^y h(s)\mathrm{d}\,s = +\infty$,

to rozwiązanie $x \equiv 0$ jest globalnie asymptotycznie stabilne.

Rzeczywiście, niech:

$$V(x^1, x^2) := \frac{(x^2)^2}{2} + H(x^1)\,, \qquad H(y) = \int\limits_0^y h(s)\mathrm{d}s\,,$$

$$V(x^1, x^2) > 0 \qquad \forall\ (x^1, x^2) \neq 0\,,$$
$$\lim_{|x| \to \infty} V(x) = \infty \tag{4.6}$$

oraz wzdłuż rozwiązań układu z $u \equiv 0$:

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x^1, x^2) = x^2 \dot{x}^2 + h(x^1)\dot{x}^1 = \\ &x^2\Big(- l(x^1, x^2)x^2 - h(x^1)\Big) + h(x^1)x^2 = -(x^2)^2 l(x^1, x^2) \leqslant\ 0\,. \end{aligned}$$

Zatem V jest funkcją Lapunova i rozwiązanie $x \equiv 0$ dla $u \equiv 0$ jest stabilne (w sensie Lapunova). Argument ten nie wystarczy do pokazania asymptotycznej stabilności, gdyż $\dot{V}$ zeruje się nie tylko dla $(x^1, x^2) = (0, 0)$, ale również dla punktów (x^1, x^2), takich że $x^1 \neq 0$, $x^2 = 0$. Aby pokazać asymptotyczną stabilność wystarczy wykazać, że jeżeli trajektoria przechodzi przez taki punkt $(x^1, 0)$, $x^1 \neq 0$, to jest to punkt przegięcia (**flex point**) funkcji V i funkcja ta jest ściśle malejąca (por. [34], str. 211, przykład 7.4). Jeżeli $t_* > 0$ jest t.ż. $x^1(t_*) \neq 0$ i $x^2(t_*) = 0$, to $\dot{x}^2(t_*) = -h(x^1(t_*)) \neq 0$. Stąd $\dot{x}^2(t)$ ma ten sam znak i $x^2(t) \neq 0$ w sąsiedztwie t_*. Zatem $V(x^1(t), x^2(t))$ ma w t_* punkt przegięcia i jest ściśle malejąca. To gwarantuje asymptotyczną stabilność.

Globalność wynika z warunku 4.6 — por. [21], twierdzenia 26.2, 26.3, str. 108–109.

Istnieje związek pomiędzy $\mathcal{C}_{PC}$ i $\mathcal{C}$:

Twierdzenie 4.4. *Dla **(NLA)**: **jeżeli** $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}_{PC}$, **to** $\mathcal{C}_{PC} = \mathcal{C}$.*

Dowód: [30], str. 46–47. ♣

5. Zasada bang–bang

Twierdzenie 5.1 (**Zasada bang–bang** (**bang–bang principle**))**.** *Dla (LA): Niech $t_1 > 0$ oraz $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$. Wówczas istnieje sterowanie bang-bang u_*, które prowadzi x_0 do 0 w czasie t_1.*

Zatem

$$\mathcal{C}(t_1) = \mathcal{C}_{BB}(t_1) \qquad \forall\, t_1 > 0\,. \tag{5.1}$$

Dowód: [18], str. 27–30, [26], str. 171..

Dowód zostanie przeprowadzony w 3 krokach.

1. Niech

$$L^\infty(0,t) = \Big\{ u :]0,t[\to \mathbb{R}^m \quad : \quad \|u\|_\infty := \operatorname{ess}\sup_{0<s<t} |u(s)| < \infty \Big\}$$

dla $t > 0$.

Definicja 5.1. Niech $u_j \in L^\infty(0,t)$, dla $j = 1, \ldots,$ oraz $u \in L^\infty(0,t)$. Ciąg $\{u_j\}$ jest zbieżny do u słabo* (**weakly* convergent**) w $L^\infty(0,t)$ (zapis $u_j \rightharpoonup^* u$), jeżeli

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^t u_j(s)v(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s$$

dla każdego $v \in L^1(0,t)$.

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Mamy

$$X \subset X^{**}\ : \qquad J\ :\ X \to X^{**}\,, \quad J[x](x^*) = x^*(x) \quad \forall\, x^* \in X^*\,.$$

W X^* można zdefiniować następujące topologie (poprzez zdefiniowanie zbieżności ciągów)
— topologię mocną: $\lim_{j\to\infty} \|x_j^* - x^*\|_{X^*} = 0$,
— topologię słabą: $\lim_{j\to\infty} x^{**}(x_j^*) = x^{**}(x^*)$ dla każdego $x^{**} \in X^{**}$,
— topologię słabą*: $\lim_{j\to\infty} x_j^*(x) = x^*(x)$ dla każdego $x \in X$.
Słaba topologia w X^* jest najsłabszą topologią, w której każdy $x^{**} \in X^{**}$ pozostaje ciągły.
Słaba* topologia w X^* jest najsłabszą topologią, przy której funkcjonał $J[x]$, zdefiniowany na X^* jest ciągły dla każdego $x \in X$.
Kula jednostkowa w X^* jest zwarta w słabej* topologii (twierdzenie Banacha–Alaoglu–Bourbakiego).
Mamy $(L^1(0,t))^* = L^\infty(0,t)$, $L^1(0,t) \subset (L^\infty(0,t))^*$.

Ćwiczenie 5.1. Pokazać, że $(L^\infty(0,t))^* \setminus L^1(0,t) \neq \emptyset$.

Rozwiązanie ćwiczenia: Niech $m = 1$. Rozważmy ustalony przedział $[0,t]$, $0 < t$. Niech T będzie przekształceniem $C([0,t];\mathbb{R}^1) \ni f \mapsto f(0)$. Wówczas mamy

$$|Tf| \leqslant \|f\|_{L^\infty(0,t)} .$$

Z twierdzenia Hahna–Banacha (por. [33], §17) istnieje rozszerzenie tego funkcjonału liniowego (do $L^\infty(0,t)$) zachowujące normę (oznaczamy również przez T):

$$|Tg| \leqslant \|g\|_{L^\infty(0,t)} \qquad \forall\, g \in L^\infty(0,t) .$$

Jeżeli $(L^\infty(0,t))^* = L^1(0,t)$, to istnieje $h \in L^1(0,t)$, t.ż.

$$f(0) = \int\limits_0^t f(s)h(s)\,\mathrm{d}s ,$$

dla $f \in C([0,t];\mathbb{R}^1)$.
Stąd jeżeli $0 < a < b \leqslant t$, to

$$\int\limits_a^b h(s)\,\mathrm{d}s = 0 ,$$

a zatem $h = 0$ prawie wszędzie. Dla $f = 1$ otrzymujemy sprzeczność: $1 = 0$.

Twierdzenie 5.2 (Alaoglu). *Niech $t > 0$ oraz $\{u_j\}_{j=1,\ldots} \subset \mathbb{U}_m[0,t]$. Wówczas istnieje podciąg $\{u_{j_k}\}_{k=1,\ldots}$ oraz $u \in \mathbb{U}_m[0,t]$, t.ż*

$$u_{j_k} \rightharpoonup^* u \qquad k \to \infty$$

Dowód: [29], str. 181; [33], str. 219. ♣

Definicja 5.2. Punkt $z \in \mathbb{K}$ nazywa się **ekstremalny** (**extreme**) jeżeli

$$\Big(z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \text{ dla } 0 < \lambda < 1 \text{ oraz } x_1, x_2 \in \mathbb{K}\Big) \Rightarrow \big(z = x_1 = x_2\big) ,$$

czyli nie istnieją punkty x_1 , x_2 $\in \mathbb{K}$, $x_1 \neq x_2$ oraz $0 < \lambda < 1$, t.ż. $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Twierdzenie 5.3 (Kreina–Milmana). *Niech $t > 0$ oraz $\mathbb{K}$ będzie niepustym, wypukłym podzbiorem $L^\infty(0,t)$, zwartym w słabej* topologii. Wówczas $\mathbb{K}$ ma (przynajmniej jeden) punkt ekstremalny.*

Dowód: [33], str. 212. ♣

2. Rozważamy zagadnienie **(LA)**:

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad x(0) = x_0$$

Niech Δ_{t_1} będzie zbiorem sterowań, które prowadzą $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ do 0 w czasie t_1:

$$\Delta_{t_1} = \Big\{ u \in \mathbb{U}_m[0, t_1] : \quad u \text{ prowadzi } x_0 \text{ do } 0 \text{ w } t_1 \Big\}$$

Pokażemy, że Δ_{t_1} spełnia założenia tw. Kreina–Milmana, a następnie, że punkt ekstremalny jest sterowaniem bang–bang.

Lemat 5.1. *Zbiór Δ_{t_1} spełnia założenia tw. Kreina–Milmana.*

Dowód: [18], str. 27–30, [26], str. 171..
$x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$, więc $\Delta_{t_1} \neq \emptyset$. Pokażemy, ze Δ_{t_1} jest wypukły.
$u \in \Delta_{t_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} Bu(s)\,\mathrm{d}s$$

Niech $u\,,\ \bar{u} \in \Delta_{t_1}$ oraz $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Wówczas

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B\Big(\lambda u(s) + (1-\lambda)\bar{u}(s)\Big)\,\mathrm{d}s$$

Zatem $\lambda u + (1-\lambda)\bar{u} \in \Delta_{t_1}$.
Pokażemy zwartość w słabej* topologii. Niech $\{u_j\}_{j=1,2,\ldots} \subset \Delta_{t_1}$.
Z tw. Alaoglu: ist. $j_k \to \infty$ oraz $u \in \mathbb{U}_m[0,t_1]$, t.ż. $u_{j_k} \rightharpoonup^* u$ dla $k \to \infty$
Musimy pokazać, że $u \in \Delta_{t_1}$. Z $u_{j_k} \in \Delta_{t_1}$ wynika, że

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} Bu_{j_k}(s)\,\mathrm{d}s \quad \to \quad -\int_0^{t_1} e^{-As} Bu(s)\,\mathrm{d}s$$

z definicji słabej* zbieżności. Zatem $u \in \Delta_{t_1}$. □

Z **twierdzenia Kreina–Milmana** istnieje punkt ekstremalny u_* w Δ_{t_1}.

3. Pokażemy, że dla prawie każdego $t \in [0, t_1]$ i każdego $j = 1, \ldots, m$:

$$|u_*^j(t)| = 1$$

Załóżmy, że nie! Istnieje więc indeks i oraz podzbiór $\mathbb{G} \subset [0, t_1]$ o dodatniej mierze, t.ż. $|u_*^i(t)| < 1$ dla $t \in \mathbb{G}$. Istnieje $\varepsilon > 0$ oraz $G \subset \mathbb{G}$, t.ż.

$$|G| > 0\,, \qquad |u_*^i(t)| \leqslant 1 - \varepsilon\,, \qquad t \in G\,.$$

Niech $v = v(t) \in \mathbb{R}^m$ będzie t.ż. $v = (0, \ldots, 0, \underbrace{v^i}_{i}, 0, \ldots, 0)^T$, gdzie

— $v^i \neq 0$ na G,

— $|v^i| \leqslant 1$,

— $v\Big|_{[0,t_1]\setminus G} = 0$

oraz

— $\int\limits_G e^{-As} Bv(s)\,\mathrm{d}s = 0\,.$

Niech

$$u_1 = u_* + \varepsilon v\,, \qquad u_2 = u_* - \varepsilon v\,,$$

Mamy $u_1, u_2 \in \Delta_{t_1}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} & - \int\limits_0^{t_1} e^{-As} Bu_1(s)\mathrm{d}s = \\ & = - \int\limits_0^{t_1} e^{-As} Bu_*(s)\,\mathrm{d}s - \varepsilon \underbrace{\int_0^{t_1} e^{-As} Bv(s)\mathrm{d}s}_{=0} \;=\; x_0 \end{aligned}$$

Mamy $|u_1^i| \leqslant 1$:

$$u_1^i(t) = u_*^i(t) \quad \text{dla } t \notin G\,, \qquad u_1^i(t) = u_*(t) + \varepsilon v^i(t) \quad \text{dla } t \in G\,,$$

Na G mamy $|u_*^i| \leqslant 1 - \varepsilon$, a zatem

$$|u_1^i(t)| \leqslant |u_*^i(t)| + \varepsilon |v^i(t)| \leqslant 1 - \varepsilon + \varepsilon = 1$$

Podobnie u_2, zatem $u_1, u_2 \in \Delta_{t_1}$.

$$u_1 = u_* + \varepsilon v\,, \quad u_1 \neq u_*\,, \qquad u_2 = u_* - \varepsilon v\,, \quad u_2 \neq u_*\,,$$

$$\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = u_*$$

Sprzeczność: bo u_* jest punktem ekstremalnym Δ_{t_1}.

$\square$

Uwaga 5.1. Zasada bang–bang pozostaje bez zmiany w przypadku, gdy celem jest $y \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$. Rzeczywiście:

$$\begin{aligned} y &= e^{At_1}\Big(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-As} Bu(s)\mathrm{d}s\Big) \qquad \Longleftrightarrow \\ 0 &= e^{At_1}\Big(y_0 + \int_0^{t_1} e^{-As} Bu(s)\mathrm{d}s\Big)\,, \qquad y_0 = x_0 - e^{-At_1} y \end{aligned}$$

Z zasady bang–bang istnieje $v \in \mathbb{U}_{BB}[0, t_1]$, t.ż.

$$\begin{aligned} 0 &= e^{At_1}\Big(y_0 + \int_0^{t_1} e^{-As} Bv(s)\mathrm{d}s\Big) \qquad \Longleftrightarrow \\ y &= e^{At_1}\Big(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-As} Bv(s)\mathrm{d}s\Big) \end{aligned}$$

Uwaga 5.2. Analogicznie dla

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + c(t)\,.$$

Uwaga 5.3. Przykład 4.1 pokazuje, że zasada bang–bang nie zachodzi dla układów nieliniowych. Przykład 2.3 i twierdzenie 2.6 pokazują, że zasada bang–bang nie zachodzi dla sterowań nieograniczonych.

6. Zagadnienie optymalnego sterowania

Badanie sterowalności jest jednym z podstawowych aspektów teorii sterowania. Kolejnym jest badanie optymalności pomyślnych sterowań. Wprowadzamy **funkcjonał kosztu** (**cost functional**) (lub **funkcjonał wypłaty** (**payoff functional**))

$$\mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0\Big(t, x(t), u(t)\Big) \mathrm{d}\, t + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) \,, \tag{6.1}$$

gdzie $x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,))$ jest odpowiedzią na sterowanie $u \in \mathbb{U}_m$, $\mathfrak{f}^0$ i $\mathfrak{g}$ są zadanymi funkcjami rzeczywistymi. Pierwszy (całkowy) wyraz lewej strony (6.1) jest bieżącym kosztem (**running cost**) (lub bieżącą wypłatą (**running payoff**)), a drugi wyraz (tzn. $\mathfrak{g}$) jest końcowym kosztem (**terminal cost**) (lub końcową wypłatą (**terminal payoff**)). W przypadku interpretacji $\mathfrak{C}[u]$ jako kosztu naturalne jest poszukiwanie sterowań u minimalizujących $\mathfrak{C}[u]$, a w przypadku interpretacji jako wypłaty — maksymalizujących. Dalej będziemy mówili o koszcie i minimalizacji.

Rozpatrujemy więc zagadnienie:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \,, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n \,, \qquad u(t) \in \Omega \,,$$

z danymi początkowymi $x(0) = x_0$ oraz funkcjonałem kosztu zadanym jednym z poniższych wzorów

(L) $\quad \mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t \,,$ — **zagadnienie Lagrange'a**;

(M) $\quad \mathfrak{C}[u] = \mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) \,,$ — **zagadnienie Mayera**;

(B) $\quad \mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) \,,$ — **zagadnienie Bolzy**.

Problem 6.1. Zagadnienie **sterowania optymalnego** (**optimal control problem**) polega na tym, by doprowadzić do celu sterowaniem z odpowiedniej klasy, w taki sposób, by $\mathfrak{C}[u]$ było możliwie najmniejsze.

Definicja 6.1. Niech klasa **pomyślnych sterowań** (**successful controls**) będzie oznaczona przez

$$\Delta = \Big\{ u \in \mathbb{U}_m \;:\quad \exists\, t_1 \qquad x(t_1; x_0, u(\,.\,)) \in \mathcal{T}(t_1) \Big\}$$

Sterowanie $u_* \in \mathbb{U}_m$ jest **optymalne** (**optimal**), jeżeli

$$u_* \in \Delta \qquad \text{oraz} \qquad \mathfrak{C}[u_*] \leqslant \mathfrak{C}[u] \qquad \forall\, u \in \Delta \,. \tag{6.2}$$

Dla zagadnienia Bolzy (B) (lub zagadnienia Lagrange'a (L)), zadanego sterowania u i odpowiedzi x określamy

$$x^0(t) = \int_0^t \mathfrak{f}^0(s, x(s), u(s))\, \mathrm{d}s$$

Jeżeli u jest pomyślne, to $x(t_1) \in \mathcal{T}(t_1)$ (dla pewnego $t_1 \geqslant 0$) i odpowiedni koszt to $x^0(t_1) + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))$. Gdy u jest optymalne, to $x^0(t_1) + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))$ jest najmniejsze.

Określamy $(n+1)$–wymiarowy wektor $\mathbf{x}(t) = \left(x^0(t), x^T(t)\right)^T$ oraz

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \left(\mathfrak{f}^0, f^T\right)^T (t, x)\,.$$

W ten sposób zagadnienie Bolzy (B) (lub zagadnienie Lagrange'a (L)) można sprowadzić do zagadnienia Mayera (M) dla

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\,, \tag{6.3}$$

z

$$\mathfrak{C}[u] = x^0(t_1) + \mathfrak{g}(t_1, \mathbf{x}(t_1))\,. \tag{6.4}$$

Cel może być ustalony, lub nie:

(I) Gdy, tak jak w poprzednich rozdziałach, cel jest ustalony mamy do czynienia z **zagadnieniem ustalonego punktu końcowego**, $\mathcal{T}(t) \equiv x_1$, x_1 jest ustalonym punktem w $\mathbb{R}^n$, t_1 jest wówczas czasem dotarcia do celu x_1 i nie jest ustalone (**fixed–end–point (a target point is given) – free–time problem**);

(II) Można rozpatrywać zagadnienie, gdy cel $\mathcal{T}(t) = \mathbb{S}$, gdzie $\mathbb{S}$ jest l–wym. ($l < n$) gładką rozmaitością (**manifold**; por. [11], str. 64) w $\mathbb{R}^n$ — podobnie jak powyżej t_1 nie jest ustalone;

(III) Cel może nie być określony i wtedy mamy do czynienia z **zagadnieniem swobodnego punktu końcowego** (**free–end–point problem; a target point is not given**): wtedy $t_1 > 0$ jest ustalone, $\mathcal{T}(t_1) = \mathbb{R}^n$.

Definicja 6.2. Sterowanie u_* jest **czaso–optymalne** (**time–optimal**) (lub **optymalno-czasowe**), jeżeli jest optymalne dla funkcjonału kosztu

$$\mathfrak{C}[u] = t_1\,, \tag{6.5}$$

gdzie t_1 jest chwilą przybycia do celu $0 \in \mathbb{R}^n$.

7. Liniowe zagadnienie czaso–optymalne

Rozpatrujemy liniowe zagadnienie sterowania optymalnego **(LA)**:

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \tag{7.1}$$

gdzie A i B są stałymi macierzami $n\times n$ i $n\times m$, odpowiednio, a funkcjonał kosztu jest określony przez (6.5).

Definicja 7.1. Niech $\mathbb{K}(t;x_0)$ będzie **zbiorem osiągalnym** (**reachable set**) z x_0 w chwili $t>0$:

$$\mathbb{K}(t;x_0) = \Big\{x(t,x_0,u(\,.\,))\ :\ u\in\mathbb{U}_m[0,t]\Big\} \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{7.2}$$

$\mathbb{K}(t;x_0)$ może być zanurzony w odpowiedniej hiperpłaszczyźnie (**hyperplane**) w $\mathbb{R}^n$. Wówczas $\operatorname{Int}\mathbb{K}(t;x_0)$ i $\partial\,\mathbb{K}(t;x_0)$ będą rozumiane w sensie odpowiednich hiperpłaszczyzn.

Z zasady bang–bang 5.1 dla układu liniowego **(-LA)** (czyli $\dot{y} = -Ay - Bu$) wynika, że

$$\mathcal{C}^-(t_1;x_0) = \mathcal{C}^-_{BB}(t_1;x_0)$$

a zatem

$$\mathbb{K}(t_1;x_0) = \mathbb{K}_{BB}(t_1;x_0)\,. \tag{7.3}$$

Dla zwartych podzbiorów $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozważamy metrykę Hausdorffa

$$d_H(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \inf\Big\{\varepsilon>0\ :\quad \mathbb{A}\subset\mathbb{N}_\varepsilon(\mathbb{B})\,,\quad \mathbb{B}\subset\mathbb{N}_\varepsilon(\mathbb{A})\Big\}\,,$$

$\mathbb{N}_\varepsilon(\mathbb{A})$ jest ε–otoczką zbioru $\mathbb{A}$ (**ε–sack about $\mathbb{A}$**)

$$\mathbb{N}_\varepsilon(\mathbb{A}) = \Big\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ d(x,\mathbb{A})<\varepsilon\Big\}\,,\qquad d(x,\mathbb{A}) = \inf\Big\{|x-y|\ :\ y\in\mathbb{A}\Big\}\,.$$

Lemat 7.1. *Dla **(LA)**: Zbiór $\mathbb{K}(t;x_0)$ jest **wypukły i zwarty** (**convex and compact**). Ponadto odwzorowanie $t\ \longrightarrow\ \mathbb{K}(t;x_0)$, $0\leqslant t<\infty$, jest ciągłe z topologią w obrazie zdefiniowaną przez metrykę Hausdorffa.*

Dowód: [18], str. 32, [30], str. 60.. Mamy

$$y\in\mathbb{K}(t;x_0)\quad\Leftrightarrow\quad \exists\,u\in\mathbb{U}_m[0,t]\ :\quad y = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{7.4}$$

— *Wypukłość.*

$$x_i \in \mathbb{K}(t;x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u_i \in \mathbb{U}_m[0,t]\ : \quad x_i = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}Bu_i(s)\,\mathrm{d}s \quad i=1,2\,.$$

Wtedy dla $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}B\Big(\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s)\Big)\,\mathrm{d}s \quad i=1,2$$

i

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in \mathbb{U}_m[0,t]\,.$$

Zatem

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathbb{K}(t;x_0)\,.$$

— *Zwartość.* Pokażemy domkniętość. Niech

$$\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}(t;x_0) \qquad \text{oraz} \qquad x_j \to y \quad \text{w } \mathbb{R}^n\,.$$

Chcemy pokazać, że $y \in \mathbb{K}(t;x_0)$. Ponieważ $x_j \in \mathbb{K}(t;x_0)$, to istnieje $u_j \in \mathbb{U}_m[0,t]$, t.ż.

$$x_j = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}Bu_j(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Z twierdzenia Alaoglu istnieje podciąg $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j_k \to \infty$, dla $k \to \infty$ oraz istnieje $u \in \mathbb{U}_m[0,t]$, t. ż.

$$u_{j_k} \rightharpoonup^* u \quad \text{dla} \quad k \to \infty\,.$$

Stąd przechodząc do podciągu (por. rozdział 5)

$$y = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

a zatem $y \in \mathbb{K}(t;x_0)$ i $\mathbb{K}(t;x_0)$ jest domknięty, ponadto jest ograniczony, a więc zwarty.

— *Ciągłość.* Dla $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geqslant 0$ oraz $\varepsilon > 0$ pokażemy, że istnieje $\delta \in]\,0,1\,[$, t.ż. spełniony jest następujący warunek:

— jeżeli $|\tilde{t} - t_0| < \delta$, to $d_H\big(\mathbb{K}(\tilde{t};x_0), \mathbb{K}(t_0,x_0)\big) < \varepsilon$.

Chcemy więc pokazać, że jeżeli $|\tilde{t} - t_0| < \delta$, to

$$\mathbb{K}(\tilde{t};x_0) \subset \mathbb{N}_\varepsilon\Big(\mathbb{K}(t_0,x_0)\Big) \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{K}(t_0,x_0) \subset \mathbb{N}_\varepsilon\Big(\mathbb{K}(\tilde{t};x_0)\Big)\,.$$

Niech $T = t_0 + 1$, $C = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant T} |e^{-As}B|$.

$$\tilde{y} \in \mathbb{K}(\tilde{t};x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y} = e^{A\tilde{t}}x_0 + \int\limits_0^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-s)}B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s$$

dla pewnego $\tilde{u} \in \mathbb{U}_m[0,\tilde{t}]$.

Przedłużamy $\tilde{u}$ zerem na $[0,T]$ (czyli $\tilde{u}(s)=0$ dla $t\in]\tilde{t},T]$) oraz określamy

$$y_0 = e^{At_0}x_0 + \int\limits_0^{t_0} e^{A(t_0-s)}B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

zatem $y_0\in\mathbb{K}(t_0;x_0)$.
Mamy

$$\begin{aligned}|\tilde{y}-y_0| &= |e^{A\tilde{t}}x_0 - e^{At_0}x_0| + \Big|\int\limits_0^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-s)}B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t_0} e^{A(t_0-s)}B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s\Big| \\ &\leqslant |e^{A\tilde{t}}-e^{At_0}||x_0| + |e^{A\tilde{t}}-e^{At_0}|\Big|\int\limits_0^{\tilde{t}} e^{-As}B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s\Big| + |e^{At_0}|\Big|\int\limits_{t_0}^{\tilde{t}} e^{-As}B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s\Big|\,.\end{aligned}$$

Niech $\delta>0$ będzie t.ż. dla $|\tilde{t}-t_0|<\delta$ mamy $|e^{A\tilde{t}}-e^{At_0}|<\varepsilon_1$, gdzie $\varepsilon_1>0$ będzie wybrane później. Mamy

$$|\tilde{y}-y_0| \leqslant \varepsilon_1|x_0| + \varepsilon_1 TC\sqrt{m} + |e^{At_0}|\delta C\sqrt{m}\,.$$

δ i ε_1 wybieramy takie, aby

$$\varepsilon_1|x_0| + \varepsilon_1 TC\sqrt{m} + |e^{At_0}|C\sqrt{m}\delta < \varepsilon\,.$$

Stąd wynika, że $\tilde{y}\in\mathbb{N}_\varepsilon(\mathbb{K}(t_0;x_0))$, a z dowolności $\tilde{y}$, że

$$\mathbb{K}(\tilde{t};x_0)\subset\mathbb{N}_\varepsilon\Big(\mathbb{K}(t_0,x_0)\Big)\,.$$

Identycznie pokazujemy, że

$$\mathbb{K}(t_0,x_0)\subset\mathbb{N}_\varepsilon\Big(\mathbb{K}(\tilde{t};x_0)\Big)\,.$$

□

Warto zauważyć, że podobny wynik nie jest prawdziwy dla (NLA) — por. [13], str. 52.

Można teraz sformułować twierdzenie o istnieniu sterowania czaso–optymalnego

Twierdzenie 7.1. *Dla* ***(LA)****:* ***jeżeli*** *istnieje pomyślne sterowanie prowadzące $x_0\in\mathbb{R}^n$ do celu $0\in\mathbb{R}^n$,* ***to*** *istnieje sterowanie czaso–optymalne i jest ono bang-bang.*

Dowód: [18], str. 31; [30], str. 60; [35], str. 147; por. [26], str. 173..
Istnieje pomyślne sterowanie, a zatem $0\in\mathbb{K}(\tilde{t};x_0)$ dla pewnego $\tilde{t}\geqslant 0$. Niech

$$t_1 = \inf\Big\{t\geqslant 0\ :\quad 0\in\mathbb{K}(t;x_0)\Big\}\,. \tag{7.5}$$

Zbiór $\Big\{t\geqslant 0\ :\ 0\in\mathbb{K}(t;x_0)\Big\}$ jest więc niepusty i ograniczony z dołu. Istnieje więc inf. Chcemy pokazać, że

$$0\in\ \mathbb{K}(t_1;x_0)\,,$$

co oznacza, że istnieje sterowanie prowadzące do celu w najkrótszym czasie t_1.

Załóżmy, że $0 \notin \mathbb{K}(t_1; x_0)$. Ponieważ $\mathbb{K}(t_1; x_0)$ jest domknięty, to istnieje otwarta kula $\mathbb{B} = \mathbb{B}(0, \varrho)$, $\varrho > 0$, t.ż.

$$\mathbb{B}(0, \varrho) \cap \mathbb{K}(t_1, x_0) = \emptyset .$$

Korzystając z ciągłości przekształcenia $t \to \mathbb{K}(t; x_0)$ otrzymujemy

$$\mathbb{B}(0, \frac{\varrho}{2}) \cap \mathbb{K}(t, x_0) = \emptyset \qquad \text{dla} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \delta ,$$

dla pewnego $\delta > 0$.

To oznacza, że $0 \in \mathbb{R}^n$ nie jest osiągalny dla pewnych $t > t_1$, co jest sprzeczne z definicją t_1.

Z zasady bang–bang: jeżeli istnieje pomyślne sterowanie z $\mathbb{U}_m$ prowadzące $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do $0 \in \mathbb{R}^n$ w czasie t_1, to istnieje sterowanie bang–bang prowadzące $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do $0 \in \mathbb{R}^n$ w czasie t_1. To kończy dowód. □

Definicja 7.2. Sterowanie u określone na $[0, \tau]$ jest **ekstremalne** (**extremal**), jeżeli

$$x(t; x_0, u(\,.\,)) \in \partial\, \mathbb{K}(t; x_0) \qquad \forall\, t \in [0, \tau] , \tag{7.6}$$

gdzie ∂ oznacza brzeg zbioru.

Należy zauważyć, że sterowanie ekstremalne nie musi być ani optymalne, ani nawet pomyślne!

W momencie dotarcia do celu, odpowiedź na sterowanie czaso–optymalne leży na brzegu zbioru $\mathbb{K}(t_1; x_0)$:

Lemat 7.2. *Jeżeli sterowanie u_* jest czaso–optymalne, to w t_1 — momencie dotarcia do celu $0 \in \mathbb{R}^n$ — odpowiedź $x(t) = x(t; x_0, u_*(\,.\,))$ leży w $\partial\, \mathbb{K}(t_1; x_0)$ (czyli $0 \in \partial\, \mathbb{K}(t_1; x_0)$).*

Dowód. Załóżmy, że u_* jest czaso–optymalnym sterowaniem prowadzącym $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do $0 \in \mathbb{R}^n$ w czasie t_1, czyli

$$x(t_1) = x(t_1; x_0, u_*(\,.\,)) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

i $x(t_1) = 0$ **nie leży** w $\partial\, \mathbb{K}(t_1; x_0)$.

Wówczas istnieje (otwarta) kula $\mathbb{B}(0, \varrho) \subset \mathbb{K}(t_1; x_0)$. Z ciągłości przekształcenia $t \mapsto \mathbb{K}(t; x_0)$ istnieje $\delta > 0$, t.ż.

$$\mathbb{B}(0, \frac{\varrho}{2}) \subset \mathbb{K}(t; x_0) \qquad \text{dla} \qquad t_1 - \delta \leqslant t \leqslant t_1 .$$

zatem cel $0 \in \mathbb{R}^n$ byłby osiągalny w czasie $t < t_1$, co jest **sprzeczne** z minimalnością t_1. □

Odpowiedź na dowolne sterowanie nie może przechodzić z wnętrza zbioru osiągalnego na jego brzeg:

Lemat 7.3. *Załóżmy, że dla sterowania $u \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$*

$$\tilde{x} = x(\tilde{t}) \in \operatorname{Int} \mathbb{K}(\tilde{t}; x_0) \qquad \text{dla pewnego } 0 < \tilde{t} < t_1 ,$$

gdzie $x = x(t)$ jest odpowiedzią $x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,))$.

Wówczas

$$x(t) \in \operatorname{Int} \mathbb{K}(t; x_0) \qquad \forall\, t \in \,]\tilde{t}, t_1] . \tag{7.7}$$

Dowód. Jeżeli $\tilde{x} = x(\tilde{t}) \in \operatorname{Int} \mathbb{K}(\tilde{t}; x_0)$, to istnieje (otwarta) kula $\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}(\tilde{x}, \delta)$, t.ż. $\tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{K}(\tilde{t}; x_0)$.

Dla każdego $\tilde{x}_0 \in \tilde{\mathbb{B}}$ istnieje sterowanie $\tilde{u}$, które prowadzi x_0 do $\tilde{x}_0$ w czasie $\tilde{t}$ (punkt $\tilde{x}_0$ jest osiągalny z x_0).

Rozważmy zagadnienie z ustalonym sterowaniem u:

$$\dot{y} = Ay + Bu\,, \qquad y(\tilde{t}) = \tilde{x}_0\,, \qquad t > \tilde{t}\,.$$

Dla $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$ mamy $y(t) = x(t)$ dla $t \in [\tilde{t}, t_1]$. Rozwiązanie ma postać

$$y(t) = e^{A(t-\tilde{t})}\tilde{x}_0 + \int_{\tilde{t}}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

czyli

$$y(t) = \mathcal{F}(t)\tilde{x}_0 + \mathcal{G}(t)\,.$$

Dla ustalonego $t > \tilde{t}$ odwzorowanie $\mathcal{F}(t)$ jest liniowe ciągłe i przekształca $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$, bo $\det \mathcal{F}(t) \neq 0$. Z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym (por. [33], tw. 15.4, str. 147) wynika, że $\mathcal{F}(t)$ przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte. Stąd zbiór

$$\mathbb{F}_t := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n \; : \quad y = \mathcal{F}(t)\tilde{x}_0 + \mathcal{G}(t)\,, \quad \tilde{x}_0 \in \tilde{\mathbb{B}} \Big\}$$

jest otwarty w $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{F}_t \subset \mathbb{K}(t; x_0)$, a zatem

$$x(t) \in \mathbb{F}_t \subset \operatorname{Int} \mathbb{K}(t; x_0)\,,$$

czyli (7.7) jest spełnione, co kończy dowód lematu. □

Z lematów 7.2 i 7.3 wynika

Twierdzenie 7.2. *Dla **(LA)**: **jeżeli** sterowanie u_* jest czaso–optymalne, **to** u_* jest ekstremalne.*

Dowód: [30], str. 61.. Z lematu 7.2 wynika, że w t_1 — momencie przybycia do celu 0 — odpowiedź $x(t_1)$ leży na brzegu zbioru osiągalnego $\partial\,\mathbb{K}(t_1; x_0)$. Z lematu 7.3 wynika, że jeżeli odpowiedź $x(\bar{t})$ leży na brzegu zbioru osiągalnego $\partial\,\mathbb{K}(\bar{t}; x_0)$ dla pewnego $\bar{t} \in]0, t_1]$, to

$$x(t) \in \partial\,\mathbb{K}(t; x_0) \qquad \forall\, t \in [0, \bar{t}]\,.$$

To kończy dowód. □

Twierdzenie 7.3. *Dla **(LA)** i $u_e \in \mathbb{U}_m[0, t_e]$ następujące warunki są równoważne:*

- *u_e jest ekstremalne na $[0, t_e]$,*
- *istnieje $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, t.ż.*

$$h^T e^{-tA} Bu_e(t) = \max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-tA} Bv \right), \qquad \text{dla p.k. } t \in [0, t_e]\,. \tag{7.8}$$

Dowód: [30], str. 62; [18], str. 33..

1. Dowód „⇒": załóżmy, że $u_e \in \mathbb{U}_m[0, t_e]$ jest ekstremalne, czyli

$$x_e(t) := x(t; x_0, u_e(\,.\,)) \;\in\; \partial\,\mathbb{K}(t; x_0) \qquad \forall\, t \in [0, t_e]\,.$$

Ponieważ $\mathbb{K}(t_e; x_0)$ jest wypukły oraz $x_e(t_e) \in \partial\,\mathbb{K}(t_e; x_0)$, to istnieje hiperpłaszczyzna podpierająca $\mathbb{K}(t_e; x_0)$ w punkcie $x_e(t_e)$, tzn. istnieje $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, t.ż.

$$b^T x \leqslant b^T x_e(t_e) \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}(t_e; x_0)\,.$$

Mamy

$$x \in \mathbb{K}(t_e; x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{At_e} x_0 + \int_0^{t_e} e^{A(t_e - s)} Bu(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad u \in \mathbb{U}_m[0, t_e]\,.$$

Zatem

$$b^T e^{At_e} x_0 + b^T \int_0^{t_e} e^{A(t_e - s)} Bu(s)\,\mathrm{d}s \leqslant b^T e^{At_e} x_0 + b^T \int_0^{t_e} e^{A(t_e - s)} Bu_e(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, u \in \mathbb{U}_m[0, t_e]\,.$$

Wstawiając $h^T = b^T e^{At_e}$ mamy $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ (bo macierz e^{At_e} jest nieosobliwa) oraz

$$\int_0^{t_e} h^T e^{-As} Bu(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^{t_e} h^T e^{-As} Bu_e(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, u \in \mathbb{U}_m[0, t_e]\,. \tag{7.9}$$

Pokażemy, że stąd wynika

$$h^T e^{-As} Bu_e(s) = \max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-As} Bv \right) \qquad \text{dla p.k. } s \in [0, t_e]\,. \tag{7.10}$$

Załóżmy, że nie! Istnieje wtedy podzbiór $\mathbb{I} \subset [0, t_e]$, $|\mathbb{I}| > 0$, t.ż.

$$h^T e^{-As} Bu_e(s) < \max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-As} Bv \right) \qquad \text{dla } s \in \mathbb{I}\,.$$

Określamy sterowanie

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_e(t) & t \in \mathbb{I}' := [0, t_e] \setminus \mathbb{I} \\ u_*(t) & t \in \mathbb{I}\,, \end{cases}$$

gdzie u_* jest t.ż.

$$h^T e^{-As} Bu_*(s) = \max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-As} Bv \right) \qquad \text{dla } s \in \mathbb{I}\,.$$

Mamy wtedy

$$\int_0^{t_e} h^T e^{-As} B\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{I}} h^T e^{-As} Bu_*(s)\,\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{I}'} h^T e^{-As} Bu_e(s)\,\mathrm{d}s > \int_0^{t_e} h^T e^{-As} Bu_e(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Sprzeczność z (7.9)! Zatem (7.10) jest spełnione, co kończy dowód ⇒.

2. Dowód $\Leftarrow$. Załóżmy, że istnieje $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, t.ż.

$$h^T e^{-At} B u_e(t) = \max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-At} B v \right) \qquad \text{dla p.k. } t \in [0, t_e]\,.$$

Stąd

$$\int\limits_0^t h^T e^{-As} B u(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int\limits_0^t h^T e^{-As} B u_e(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, u \in \mathbb{U}_m[0, t_e]\,,$$

dla dowolnego, ale ustalonego $t \in [0, t_e]$. Wstawiając $b^T = h^T e^{-At}$ i postępując odwrotnie jak poprzednio otrzymujemy

$$b^T x(t) \leqslant b^T x_e(t) \qquad \forall\, x(t) \in \mathbb{K}(t; x_0)\,,$$

co oznacza, że $x_e(t)$ leży na brzegu $\mathbb{K}(t; x_0)$:

$$x_e(t) \in \partial\, \mathbb{K}(t; x_0)\,.$$

Ponieważ t jest dowolne, więc otrzymujemy wynikanie $\Leftarrow$.

□

Z twierdzenia 7.2 i twierdzenie 7.3 wynika **zasada maksimum Pontriagina dla liniowego zagadnienia czaso–optymalnego** (**Pontryagin maximum principle for linear time–optimal control**) — szczególny przypadek **zasady maksimum Pontriagina** rozpatrywanej w rozdziale 9 — **warunku koniecznego** (**necessary condition**) dla sterowania optymalnego.

Twierdzenie 7.4. *Dla* ***(LA)****:* ***jeżeli*** *sterowanie u_* jest czaso–optymalne,* ***to*** *istnieje $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, t.ż.*

$$h^T e^{-tA} B u_*(t) = \max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-tA} B v \right), \qquad \text{dla p.k. } t \in [0, t_1]\,, \tag{7.11}$$

□

Uwaga 7.1. Każda współrzędna wektora $h^T e^{-tA} B \in \mathbb{R}^m$ jest funkcją analityczną zmiennej t. Stąd (por. [11] , twierdzenie 6.9, str. 199) na zwartym przedziale w $[0, t_1]$ jest albo tożsamościowo równa 0, albo znika tylko w skończonej liczbie punktów $0 < t \leqslant t_1$. Jeżeli zachodzi ten drugi przypadek dla każdej współrzędnej, to sterowanie u jest jednoznacznie wyznaczone, poza skończonym (a więc miary 0) zbiorem punktów. Wtedy sterowanie jest bang–bang ze skończoną liczbą **przełączeń** (**switches**). Natomiast w pierwszym przypadku sterowanie nie jest określone przez $\max_{v \in \Omega} \left(h^T e^{-tA} B v \right)$. Pierwszy przypadek będziemy nazywali **osobliwym** (**singular**), a drugi **normalnym** (**normal**) — por. [22], str. 52.

Definicja 7.3. (**LA**) nazywamy **normalnym** (**normal**), **jeżeli** dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, żadna współrzędna wektora $h^T e^{-tA} B \in \mathbb{R}^m$ nie znika na zbiorze dodatniej miary.

Każdy **(LA)** — **normalny** jest **właściwy** (tzn. rank $M = n$). Warunek w definicji 7.3 jest równoważny warunkowi, że żadna współrzędna nie znika tożsamościowo.

Przykład 7.1. Rozpatrujemy układ RRZ, $n = m = 2$, w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + Bu(t)\,, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$h \in \mathbb{R}^2$, $h \neq 0$,

$$h^T e^{-tA} B = [h^1, h^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [h^1, h^2]\,.$$

Układ jest właściwy, ale nie jest normalny.

Następujący wniosek pokazuje związek pomiędzy sterowaniami ekstremalnymi a sterowaniami bang–bang:

Wniosek 7.1. *Jeżeli **(LA)** jest normalny, to warunek (7.8) jest równoważny warunkowi*

$$u_e^i(t) = \operatorname{sign}\left(h^T e^{-tA} B\right)^i, \qquad i = 1, \ldots, m\,, \qquad \text{dla p.k. } t \in [0, t_e]\,. \tag{7.12}$$

Twierdzenie 7.4 można zapisać w ogólnym formalizmie, który będzie później stosowany w rozdziale 9 w ogólnej sytuacji.

Definicja 7.4. Wprowadzamy **hamiltonian** (**Hamiltonian**)

$$H(w, x, u) = w^T \Big(Ax + Bu \Big)\,, \tag{7.13}$$

gdzie $w, x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}_m$.

Możemy wyrazić twierdzenie 7.4 w następującej postaci

Twierdzenie 7.5. *Dla **(LA)**: niech $u_* \in \mathbb{U}_m[0, t_1]$ będzie sterowaniem czaso-optymalnym z odpowiedzią $x_* = x_*(t) = x(t; x_0, u_*(\,.\,))$. Wówczas istnieje absolutnie ciągła funkcja $w\,:\,[0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, t.ż.*

$$\dot{x}_*^j = \frac{\partial}{\partial w^j} H(w, x_*, u_*)\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,, \qquad \text{p.w. na } [0, t_1]\,, \tag{7.14}$$

$$\dot{w}^j = -\frac{\partial}{\partial x^j} H(w, x_*, u_*)\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,, \qquad \text{p.w. na } [0, t_1]\,, \tag{7.15}$$

oraz

$$H\big(w(t), x_*(t), u_*(t)\big) = M\big(w(t), x_*(t)\big)\,, \qquad \text{dla p.w. } t \in [0, t_1]\,, \tag{7.16}$$

gdzie

$$M(w, x) = \max_{v \in \Omega} H(w, x, v)\,.$$

Dowód: [18], str. 35..

Niech $h \in \mathbb{R}^n$ będzie jak w twierdzeniu 7.4. Rozważmy zagadnienie

$$\dot{w} = -A^T w\,, \qquad w(0) = h\,.$$

Jego rozwiązaniem jest

$$w(t) = e^{-tA^T} h\,,$$

a zatem

$$w^T(t) = h^T e^{-tA}\,, \qquad \text{bo} \quad \left(e^{-tA^T}\right)^T = e^{-tA}\,.$$

Z twierdzenia 7.4 wynika, że

$$h^T e^{-tA} B u_*(t) = \max_{v\in\Omega} \left(h^T e^{-tA} B v\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&H(w(t), x_*(t), u_*(t)) = w^T(t)\Big(Ax_*(t) + Bu_*(t)\Big) = \\
&h^T e^{-tA} A x_*(t) + h^T e^{-tA} B u_*(t) = h^T e^{-tA} A x_*(t) + \max_{v\in\Omega}\left(h^T e^{-tA} B v\right) = \\
&\max_{v\in\Omega}\left(h^T e^{-tA} A x_*(t) + h^T e^{-tA} B v\right) = \max_{v\in\Omega}\left(w^T(t) A x_*(t) + w^T(t) B v\right) = \\
&M(w(t), x_*(t))\,.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Z definicji H warunek (7.16) oraz równania (7.14) i (7.15) są spełnione. □

Definicja 7.5. Równanie (7.15) nazywa się **równaniem sprzężonym** (**adjoint equation**), a funkcja w — **ko–stanem** (**costate**).

Przykład 7.2 (wagon odrzutowy, [35], str. 29–34; [18], str. 36; [30], str. 64, 109, 111)**.** Rozpatrujemy układ RRZ z $n = 2$, $m = 1$ — por. przykłady 1.2, 2.4:

$$\dot{x}^1 = x^2\,, \qquad \dot{x}^2 = u\,, \qquad u = u(t) \in [-1, 1]\,, \tag{7.18}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + Bu(t)\,, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. **„W języku" twierdzenia 7.4:**
   Mamy

$$e^{-tA} = I - tA = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \end{bmatrix}, \qquad (h^1)^2 + (h^2)^2 \neq 0\,,$$

$$h^T e^{-tA} B = [h^1, h^2] \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [h^1, -h^1 t + h^2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = h^2 - h^1 t\,.$$

   Układ (7.18) jest normalny!
   Z twierdzenia 7.4 i wniosku 7.1 wynika, że każde optymalne sterowanie u_* musi spełniać

$$u_*(t) = \operatorname{sign}(h^2 - h^1 t)\,,$$

   dla pewnego $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

2. **„W języku” twierdzenia 7.5:**
   Mamy
$$w = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix},$$
$$H(w,x,v) = w^T(Ax+Bv) = [w^1, w^2]\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v\right),$$
   Stąd
$$H(w,x,v) = w^1x^2 + w^2v$$
   i
$$\dot w^1 = 0\,, \qquad \dot w^2 = -w^1\,.$$
   Zatem
$$H(w,x,v) = w_0^1x^2 + \left(w_0^2 - w_0^1t\right)v\,,$$
   gdzie $w_0^1 = w^1(0) \in \mathbb{R}^1$, $w_0^2 = w^2(0) \in \mathbb{R}^1$. Dla uproszczenia zapisu nie zaznaczono w sposób jawny zależności zmiennych od t.
   Twierdzenie 7.5 implikuje, że **jeżeli** u_* jest czaso–optymalne, **to** istnieją liczby w_0^i, $i=1,2$, t.ż.
$$H(w,x_*,u_*) = M(w,x_*) = \max_{-1\leqslant v\leqslant 1} H(w,x_*,v) = w_0^1x_*^2 + |w_0^2 - w_0^1t|$$
   a to **jest osiągane** dla $v = u_*(t)$, gdzie
$$u_*(t) = \operatorname{sign}(w_0^2 - w_0^1t)\,.$$
   Funkcja liniowa $w_0^2 - w_0^1t$ nie może być tożsamościowo 0, gdyż $w(t) = e^{-tA^T}h$ nie może znikać tożsamościowo.

   Z twierdzenia 7.1 i przykładu 2.4 wynika istnienie sterowania czaso–optymalnego (dla każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}^2$). Z powyższych rozważań wynika, że sterowanie czaso–optymalne jest bang–bang, kawałkami stałe, z co najwyżej jednym punktem przełączenia.

Ćwiczenie 7.1. Opisać czaso–optymalne trajektorie.

Przykład 7.3 (Zlinearyzowane równanie kątowego odchylenia od pionu z wymuszeniem, [35], str. 34–42; [30], str. 64)**.** Rozpatrujemy układ RRZ z $n=2$, $m=1$:
$$\dot x^1 = x^2\,, \qquad \dot x^2 = -x^1 + u\,, \qquad u = u(t) \in [-1,1]\,, \tag{7.19}$$
lub w postaci macierzowej:
$$\begin{bmatrix} \dot x^1 \\ \dot x^2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + Bu(t)\,, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. **„W języku" twierdzenia 7.4:**
   Mamy
$$e^{-tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \end{bmatrix}, \qquad (h^1)^2 + (h^2)^2 \neq 0\,,$$
$$h^T e^{-tA} B = [h^1, h^2] \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$[h^1 \cos t + h^2 \sin t\,,\ -h^1 \sin t + h^2 \cos t] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
   stąd
$$h^T e^{-tA} B = h^2 \cos t - h^1 \sin t = r \sin(t+\alpha)\,,$$
   gdzie $r = \Big((h^1) + (h^2)\Big)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \arccos\Big(-\frac{h^1}{r}\Big)$, $r \neq 0$.
   Układ (7.19) jest normalny!
   Z twierdzenia 7.4 wynika, że każde sterowanie optymalne u_* musi spełniać
$$u_*(t) = \operatorname{sign}(\sin(t+\alpha))\,.$$

2. **„W języku" twierdzenia 7.5:**
   Mamy
$$w = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix},$$
$$H(w,x,v) = w^T(Ax + Bv) = [w^1, w^2]\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v\right),$$
   Stąd
$$H(w,x,v) = w^1 x^2 + w^2(-x^1 + v)$$
   i
$$\dot w^1 = w^2\,, \qquad \dot w^2 = -w^1\,.$$
   Stąd $w^2(t) = r\sin(t+\alpha)$, gdzie $r > 0$ i α są stałymi.
   Twierdzenie 7.5 implikuje, że **jeżeli** u_* jest czaso–optymalne, **to**
$$H(w,x_*,u_*) = M(w,x_*) = \max_{-1\leqslant v\leqslant 1} H(w,x_*,v) = w^1(t)x_*^2(t) - w^2(t)x_*^1(t) + |w^2(t)|$$
   a to **jest osiągane jedynie** dla $v = u_*(t)$, gdzie
$$u_*(t) = \operatorname{sign}\sin(t+\alpha)\,.$$
   Zatem każde sterowanie czaso–optymalne jest bang–bang i okresowe o okresie 2π.

Ćwiczenie 7.2. Opisać czaso–optymalne trajektorie.

Przykład 7.4 ([30], str. 65.)**.** W przykładzie 7.1 rozpatrywany był układ właściwy, który nie jest normalny.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + Bu(t)\,, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech $x_0 = (-1, 0)$. Wówczas każde ze sterowań u_a, $a \in [0, \frac{1}{2}]$, gdzie

$$u_a^1 \equiv 1$$

oraz

$$u_0^2 \equiv 0\,,$$

$$u_a^2 = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0 & a < t \leqslant 1 - a \\ -1 & 1 - a < t \leqslant 1 \end{cases}\,,$$

dla $a \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$u_{\frac{1}{2}}^2 = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}\,,$$

jest czaso–optymalne z $t_1 = 1$, ale tylko $u_{\frac{1}{2}}$ jest bang–bang.

Twierdzenie 7.6. *Jeżeli **(LA)** jest normalny oraz istnieje pomyślne sterowanie (prowadzące x_0 do 0), **to** istnieje jednoznaczne sterowanie czaso–optymalne. To sterowanie jest bang–bang i kawałkami stałe.*

Dowód: [30], str. 66..

Z twierdzenia 7.1 wynika istnienie. Z twierdzenia 7.4 i wniosku 7.1 wynika, że każde sterowanie czaso–optymalne jest bang–bang. Załóżmy, że u_1 oraz u_2 są dwoma różnymi sterowaniami czaso–optymalnymi bang–bang. Wówczas sterowanie $u_3(t) = \frac{u_1(t)+u_2(t)}{2}$ jest też czaso–optymalne, ale nie jest bang–bang. Otrzymujemy sprzeczność: zatem sterowanie czaso–optymalne jest jednoznaczne.

Sterowanie czaso–optymalne jest kawałkami stałe, gdyż każda współrzędna zmienia wartość tylko wtedy, gdy ta sama współrzędna $h^T e^{-At} B$ przyjmuje wartość 0, a to może zdarzyć się tylko w skończonej liczbie punktów odcinka $[0, t_1]$. □

Definicja 7.6. Niech $x_0 \in \mathbb{R}^n$ będzie ustalone, $\tau > 0$ oraz $y \in \mathbb{K}(\tau; x_0)$. **Jeżeli**

$$x(t; x_0, u_1(\,.\,)) = x(t; x_0, u_2(\,.\,)) \qquad \forall\, t \in [0, \tau]\,, \tag{7.20}$$

dla każdego $u_1 \in \mathbb{U}_m[0, \tau]$ i każdego $u_2 \in \mathbb{U}_m[0, \tau]$, t.ż.

$$x(\tau, x_0, u_1(\,.\,)) = x(\tau, x_0, u_2(\,.\,)) = y\,,$$

to odpowiedź z x_0 do y jest **jednoznaczna** (**unique**).

Twierdzenie 7.7. *Załóżmy, ze macierz B nie ma żadnej kolumny złożonej z samych 0, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i niech $y \in \mathbb{K}(\tau, x_0)$. Wówczas następujące warunki są równoważne*

- *sterowanie prowadzące x_0 do y w czasie τ jest jednoznaczne,*
- *odpowiedź z x_0 do y w czasie τ jest jednoznaczna,*
- *y jest ekstremalnym punktem $\mathbb{K}(\tau, x_0)$.*

Dowód: [30], str. 69–71. ♣

Dalej w tym rozdziale będziemy zakładać, że macierz B nie ma żadnej kolumny złożonej z samych 0. Nie zmniejsza to ogólności!

Definicja 7.7. Zbiór $\mathbb{A}$ jest **ściśle wypukły** jeżeli

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in \operatorname{Int} \mathbb{A} \qquad \forall\, \alpha \in]0,1[\ ,$$

dla każdych dwóch punktów $x, y \in \mathbb{A}$.

Twierdzenie 7.8 (**Geometryczna charakteryzacja (LA) normalnych**). ***(LA)*** *jest normalny na $[0,\tau]$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}(\tau; x_0)$ jest ściśle wypukły dla pewnego x_0.*

Dowód: [30], str. 71. ♣

Twierdzenie 7.9 (**Analityczna charakteryzacja (LA) normalnych**). ***(LA)*** *jest normalny na $[0,\tau]$ $\Leftrightarrow$ $b_j\,,\ Ab_j\,,\ \ldots\,,\ A^{n-1}b_j$ są liniowo niezależnymi wektorami w $\mathbb{R}^n$, dla każdej kolumny b_j macierzy B, $j = 1, \ldots, m$.*

Dowód: [30], str. 72. ♣

Podsumowaniem jest następujący wniosek:

Wniosek 7.2. *Dla **(LA)** normalnego: istnieje otoczenie $\mathfrak{N}$ punktu 0, t.ż. każdy punkt $\mathfrak{N}$ może być doprowadzony do 0 jednoznacznym sterowaniem czaso-optymalnym bang–bang i kawałkami stałym. Jeżeli dodatkowo $\Re\lambda \leqslant 0$, dla każdej wartości własnej λ macierzy A, to $\mathfrak{N} = \mathbb{R}^n$.*

Twierdzenie 7.10. *Dla **(LA)** normalnego:*
jeżeli *każda wartość własna (**eigenvalue**) macierzy A jest rzeczywista,*
to *każda współrzędna każdego sterowania czaso–optymalnego ma co najwyżej $n-1$ przełączeń.*

Dowód: *[30], str. 77; [35], str. 138–140.* ♣

Poniższe twierdzenie formułuje warunek dostateczny — odwrotność zasady maksimum:

Twierdzenie 7.11. *Dla **(LA)** właściwego: każde (pomyślne) sterowanie u_*, prowadzące x_0 do 0 w czasie $t_1 > 0$ i spełniające*

$$\begin{array}{l} \text{dla pewnego } h \in \mathbb{R}^n\,,\ h \neq 0\ : \\ h^T e^{-tA} B u_*(t) = \max\limits_{v\in\Omega}(h^T e^{-tA} B v) \\ \text{dla p.k. } t \in]\,0, \tau\,[\,, \end{array} \tag{7.21}$$

*jest **czaso–optymalne** na $[0, \tau]$.*

Dowód: *[30], str. 77.* ♣

8. Istnienie sterowania optymalnego

W tym rozdziale zajmiemy się warunkiem wystarczającym **istnienia** sterowania optymalnego. W całym rozdziale zakładamy, że $\Omega = [-1, 1]$.

8.1. Zagadnienie Mayera

Rozważamy najpierw zagadnienie Mayera (M):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \quad u \in \mathbb{U}_m \tag{8.1}$$

z **funkcjonałem kosztu**

$$\mathfrak{C}[u] = \mathfrak{g}(t_1, x(t_1)), \tag{8.2}$$

gdzie $x(t_1) = x(t_1; x_0, u(\,.\,))$ oraz f i $\mathfrak{g}$ są zadanymi funkcjami o wartościach w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^1$, odpowiednio.

Sformułujemy twierdzenia mówiące o istnieniu sterowania optymalnego, tzn. takiego $u_* \in \mathbb{U}_m$, że warunek (6.2) jest spełniony.

Analogia: Zagadnienie minimum rzeczywistej funkcji h w obszarze $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$. **Warunkiem wystarczającym** (**the sufficient condition**) istnienia minimum jest:
$\mathbb{D}$ jest zbiorem zwartym (**compact**) i h jest funkcją ciągłą.

Wprowadzamy następujące oznaczenie

Definicja 8.1. Dla $T > 0$ zbiór $\Delta(T) \subset \mathbb{U}_m$ jest zbiorem sterowań, które prowadzą x_0 do $\mathcal{T}(t_1)$ w czasie t_1, gdzie $0 < t_1 \leqslant T$.

Podstawowymi założeniami są

Założenie 8.1. Funkcja

$$f \,:\, [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \;\to\; \mathbb{R}^n$$

jest ciągła względem wszystkich zmiennych, różniczkowalna w sposób ciągły
względem $x \in \mathbb{R}^n$ oraz spełnia

$$|f(t, x, v)| \leqslant \text{const.}\,(1 + |x|), \qquad \forall\,(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega. \tag{8.3}$$

Założenie (8.3) może byc zastąpione innym, gwarantującym jednostajne oszacowanie odpowiedzi.

Założenie 8.2. Zbiór

$$f(t,x,\Omega) = \Big\{ f(t,x,v) \,:\, v \in \Omega \Big\} \tag{8.4}$$

jest zbiorem wypukłym (**convex**) dla wszystkich $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Założenie 8.2 gwarantuje domkniętość zbioru trajektorii — por. [13].

Przy powyższych założeniach można sformułować twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego dla zagadnienia Mayera:

Twierdzenie 8.1 (**Istnienie sterowania optymalnego dla zagadnienia Mayera**)**.** *Niech będą spełnione następujące warunki dla $T > 0$:*

1. *funkcja f spełnia założenia 8.1 oraz 8.2;*
2. *funkcja $\mathfrak{g} \,:\, [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ jest ciągła;*
3. *zbiór $\mathcal{T}(t)$ jest domknięty dla każdego $t \in [0,T]$*
4. $\Delta(T) \neq \emptyset$

Wówczas istnieje optymalne sterowanie.

Szkic dowodu. [13]*, str. 89.*

Ogólna idea dowodu istnienia sterowania optymalnego jest następująca: bada się (skomplikowane, nieliniowe) przekształcenie

$$\mathfrak{C} : \quad \mathbb{U}_m \to \mathbb{R}^1$$

i pokazuje następujące fakty

1. istnieje ciąg $\{u_j\}$ „minimalizujący” z odpowiedziami $\{x_j(t)\}$,
2. pewien podciąg $\{x_{j_k}\}$ ciągu $\{x_j\}$ zbiega do pewnej granicy x_*,
3. istnieje $u_* \in \mathbb{U}_m$, dla którego x_* jest odpowiedzią,
4. odpowiedź x_* spełnia wszystkie określone warunki.

Uwaga 8.1. W ogólnym przypadku nie wiemy czy $\{u_{j_k}\}$ zbiega do u_*. Dla zagadnień z liniową zależnością od sterowania można pokazać zbieżność $\{u_{j_k}\}$ do u_*.

□

Przykład 8.1 ([13], str. 91)**.** Zagadnienie optymalnego sterowania dla

$$\dot{x} = (x)^2 \, u \,, \qquad x_0 = 1 \,,$$

z

$$\mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) = -x(t_1) \,.$$

Cel nie jest ustalony, (zagadnienie swobodnego punktu końcowego), czas dotarcia $t_1 > 0$ jest ustalony.

Dla każdego $\varepsilon \in]\,0,1\,[$ określamy sterowanie

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad t \in [0, 1-\varepsilon] \\ 0 & \text{dla} \quad t > 1-\varepsilon\,. \end{cases}$$

Wówczas odpowiedź

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-t} & \text{dla} \quad t \in [\,0, 1-\varepsilon\,] \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{dla} \quad t > 1-\varepsilon\,. \end{cases}\,.$$

Jeżeli $t_1 > 1$, to $x_\varepsilon(t_1) = \frac{1}{\varepsilon}$. Zatem

$$\mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) = -\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Nie ma więc sterowania optymalnego (ε może być dowolnie małe). To pokazuje, że oszacowanie (8.3) w założeniu 8.1, lub inne gwarantujące jednostajne oszacowanie, jest potrzebne.

Przykład 8.2 ([13], str. 92)**.** Zagadnienie optymalnego sterowania dla

$$\dot{x} = u\,, \qquad x_0 = 1\,,$$

z

$$\mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) = (x(t_1) - 1)\operatorname{sign} x(t_1)\,.$$

Infimium $\mathfrak{g}$ to -1, ale nie jest nigdy osiągane. Funkcja $\mathfrak{g}$ nie jest ciągła!

Założenie o wypukłości 8.2 można odrzucić dla układu liniowego względem stanu

$$\dot{x} = A(t)x + b(t, u)\,.$$

Twierdzenie 8.2. *Niech będą spełnione następujące warunki dla $T > 0$:*

1. *$A(t)$ i $b(t, v)$ są macierzami $n \times n$ i $n \times 1$, odpowiednio, dla $t \in [0, T]$, $v \in \Omega$ oraz A, b są ciągłe;*
2. *funkcja $\mathfrak{g} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ jest ciągła;*
3. *zbiór $\mathcal{T}(t)$ jest domknięty dla każdego $t \in [0, T]$*
4. *$\Delta(T) \neq \emptyset$*

Wówczas istnieje optymalne sterowanie.

Dowód: [13], *str. 92.* ♣

8.2. Zagadnienie Bolzy

Dla zagadnienia Bolzy (B) (lub zagadnienia Lagrange'a (L)) określamy

$$x^0(t) = \int_0^t \mathfrak{f}^0(s, x(s), u(s))\, \mathrm{d}s\,,$$

wprowadzamy $(n+1)$–wymiarowy wektor

$$\mathbf{x}(t) = \left(x^0(t), x^T(t)\right)^T$$

oraz

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \left(\mathfrak{f}^0, f^T\right)^T(t, \mathbf{x})\,.$$

W ten sposób sprowadzamy zagadnienie Bolzy (B) do zagadnienia Mayera (M) dla

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\,, \tag{8.5}$$

z $\mathfrak{C}[u] = x^0(t_1) + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))$.

Twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego dla zagadnienia Bolzy wynika z twierdzenia 8.1. Założenie 8.2 jest zastąpione następującym:

Założenie 8.3. Zbiór

$$\mathbf{f}(t, x, \Omega) = \left\{ \left(\mathfrak{f}^0(t, x, v)\,,\ f^T(t, x, v) \right)^T, \quad v \in \Omega \right\} \tag{8.6}$$

jest zbiorem **wypukłym** w $\mathbb{R}^{n+1}$ dla wszystkich $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Można sformułować twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego dla zagadnienia Bolzy:

Twierdzenie 8.3 (Istnienie sterowania optymalnego dla zagadnienia Bolzy). *Niech będą spełnione następujące warunki dla $T > 0$:*

1. *funkcja f spełnia założenie 8.1;*
2. *funkcje $\mathfrak{f}^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^1$ oraz $\mathfrak{g} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ są ciągłe;*
3. *jest spełniony założenie wypukłości 8.3;*
4. *zbiór $\mathcal{T}(t)$ jest domknięty dla każdego $t \in [0, T]$*
5. $\Delta(T) \neq \emptyset$

Wówczas istnieje optymalne sterowanie.

Dowód twierdzenia 8.3: [13], str. 94; [30], str. 92–95. ♣

Założenie 8.3 o wypukłości $\mathbf{f}(t, x, \Omega)$ dotyczy geometrii związku pomiędzy $\mathfrak{f}^0$ i f, a nie odnosi się do wypukłości $\mathfrak{f}^0$ i f.

Przykład 8.3 ([30], str. 91)**.**

$$\dot{x} = |u|^{\frac{1}{2}}\,, \qquad \mathfrak{C}[u] = \int\limits_0^{t_1} |u(s)|^{\frac{1}{2}} x(s)\,\mathrm{d}\,s\,,$$

$$\mathbf{f}(t,x,\Omega) = \Big\{ \big(|v|^{\frac{1}{2}} x\,,\ |v|^{\frac{1}{2}}\big) \ : \quad -1 \leqslant v \leqslant 1 \Big\}$$

jest wypukły, choć f nie jest funkcją wypukłą.

Przykład 8.4 ([30], str. 91)**.**

$$\dot{x} = u\,, \qquad \mathfrak{C}[u] = \int\limits_0^{t_1} \{u(s)\}^2\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\mathbf{f}(t,x,\Omega) = \Big\{ \big((v)^2\,,\ v\big) \ : \quad -1 \leqslant v \leqslant 1 \Big\}$$

nie jest wypukły, choć f jest liniowa, a $\mathfrak{f}^0$ — wypukła.

Założenie 8.1 jest istotne. W poniższym przykładzie nieliniowość względem zmiennej x^2 powoduje nieistnienie optymalnego sterowania.

Przykład 8.5 ([30], str. 83)**.** Niech $n = 2$, $m = 1$,

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x}^1 = 1\,, \quad \dot{x}^2 = \big(x^2+1\big)^2 u\,, \quad x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}[u] = \int\limits_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(t,x,u)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\mathfrak{f}^0(t,x,u) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x^2 < 0 \\ \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} & \text{gdy } x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Cel jest ustalony $\mathcal{T}(t) \equiv \{0\}$.

Mamy $x^1(t) = t-2$, zatem musi być $t_1 = 2$. Dla $u \equiv +1$ mamy $x^1(t) = t-2$, $x^2(t) = \frac{t}{1-t}$, $0 \leqslant t < 1$, więc nie jest to odpowiedź pomyślna. Dla $\alpha \in \,]\,0,1\,[$ określmy

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -\alpha & \text{dla } 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

Odpowiedzią (pomyślną) jest

$$x^1_\alpha(t) = t-2\,, \quad x^2_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha\,t}{1-\alpha\,t} & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{\alpha\,(2-t)}{1-(2-t)\alpha} & \text{dla } 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

Rzeczywiście: na $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \alpha\,\mathrm{d}\,t \qquad \Rightarrow \qquad \Big[-\big(1+x^2\big)^{-1}\Big]_{-2}^{x^2} = \alpha\,t$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-2} = \alpha\, t \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{\alpha\, t}{1-\alpha\, t}$$

Na $1 < t \leqslant 2$: warunek początkowy dla $t = 1$ ma postać $x^2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

$$\Big[-\big(1+x^2\big)^{-1} \Big]_{\frac{\alpha}{1-\alpha}}^{x^2} = -\alpha\, t + \alpha \qquad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} = -\alpha\,(t-1) \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{1+x^2} = 2\alpha - 1 - \alpha t$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 = \frac{-\alpha\,(t-2)}{1+\alpha\,(t-2)}$$

$$\mathfrak{C}[u_\alpha] = \int_0^{t_1} \frac{1}{\big(1+x^2\big)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\Big(1+\frac{\alpha\, t}{1-\alpha\, t}\Big)^2}\, \mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{1}{\Big(1+\frac{\alpha\,(2-t)}{1-\alpha\,(2-t)}\Big)^2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (\alpha t)^2\, \mathrm{d}t + \int_1^2 \Big(1-(2-t)\alpha\Big)^2 = \frac{(\alpha)^2}{3} + \int_1^2 \Big((1-2\alpha)+\alpha t\Big)^2\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{8\,(\alpha)^2}{3} + (1-2\alpha)^2 + 3(1-2\alpha)\alpha\,.$$

Gdy $\alpha \uparrow 1$ funkcja $x^2_\alpha(t)$ zbiega do pewnej funkcji osobliwej w $t = 1$.

Ponadto $\mathfrak{C}[u_\alpha] \to \frac{2}{3}$ gdy $\alpha \uparrow 1$. Zatem optymalne sterowanie u_* powinno spełniać warunek

$$\mathfrak{C}[u_*] \leqslant \frac{2}{3}\,.$$

Pokażemy, że każde pomyślne sterowanie daje koszt $> \frac{2}{3}$.

Dla pomyślnego sterowania mamy $x^2(0) = x^2(2) = 0$ oraz bezpośrednio z równania, dla $-1 \leqslant u(t) \leqslant 1$ otrzymujemy

$$-\big(x^2(t)+1\big)^2 \leqslant \dot{x}^2(t) \leqslant \big(x^2(t)+1\big)^2\,.$$

Stąd, z nierówności po prawej stronie (całkując od 0 do $t < 1$),

$$-\frac{1}{x^2(t)+1} + 1 \leqslant t\,, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{1}{x^2(t)+1} \geqslant 1 - t\,,$$

dla $0 \leqslant t < 1$.

Z nierówności po lewej stronie (całkując od $t \geqslant 1$ do 2),

$$-2 + t \leqslant -1 + \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad \text{czyli} \quad t - 1 \leqslant \frac{1}{x^2+1}\,,$$

dla $1 \leqslant t \leqslant 2$.

Ale pomyślna odpowiedź musi być ograniczona (jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym), więc pierwsza nierówność jest ostra. Zatem

$$\mathfrak{C}[u] > \int_0^1 (1-t)^2\, \mathrm{d}t + \int_1^2 (t-1)^2\, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,.$$

Wniosek: nie istnieje optymalne sterowanie!

Następujący przykład pokazuje, ze nawet dla ograniczonych odpowiedzi, zależność od sterowania u może powodować nieistnienie optymalnego sterowania. Potrzebne jest więc dodatkowe założenie, n.p. o wypukłości 8.3.

Przykład 8.6 ([30], str. 85)**.** Niech $n = 3$, $m = 1$,

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \sin(2\,\pi\,u) \\ \cos(2\,\pi\,u) \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{C}[u] = \int\limits_0^{t_1} \Big(\big(x^1(t)\big)^2 + \big(x^2(t)\big)^2 \Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Cel jest ustalony $\mathcal{T}(t) \equiv 0$.

Mamy $x^3(t) = 1 - t$, zatem musi być $t_1 = 1$

Każda odpowiedź spełnia $|\dot{x}| \leqslant c$, a zatem $|x(t)| \leqslant |x_0| + ct \leqslant c + 1$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Skonstruujemy ciąg sterowań $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, t.ż. $\mathfrak{C}[u_j] \to 0$ dla $j \to \infty$.

Ponieważ zawsze $\mathfrak{C}[u] \geqslant 0$, każde sterowanie optymalne u_* musiałoby spełniać $\mathfrak{C}[u_*] = 0$

To prowadzi do sprzeczności, gdyż wtedy

$$x^1_*(t) = x^2_*(t) = 0\,, \qquad \text{p.w.}\,,$$

a zatem $\dot{x}^1_*(t) = \dot{x}^2_*(t) = 0$, co jest niemożliwe, gdyż

$$\dot{x}^1_*(t) = \sin(2\,\pi\,u_*(t))\,, \qquad \dot{x}^2_*(t) = \cos(2\,\pi\,u_*(t))\,.$$

W.w. ciąg sterowań ma postać $u_j(t) = jt - [jt]$, $j = 1, 2, \ldots$.

Wówczas

$$\sin\Big(2\,\pi\,u_j(t)\Big) = \sin(2\,\pi\,jt)\,, \qquad \cos\Big(2\,\pi\,u_j(t)\Big) = \cos(2\,\pi\,jt)\,.$$

Odpowiedź ma postać

$$x^1_j(t) = \frac{1 - \cos\,(2\,\pi\,jt)}{2\,\pi\,j}\,, \quad x^2_j(t) = \frac{\sin\,(2\,\pi\,jt)}{2\,\pi\,j}\,, \quad x^3_j(t) = 1 - t\,.$$

Mamy więc

$$\mathfrak{C}[u_j] = \int\limits_0^1 \frac{2\,(1 - \cos(2\,\pi\,jt))\,\mathrm{d}\,t}{(2\,\pi\,j)^2} = \frac{1}{2\,\pi^2\,j^2}\,,$$

czyli rzeczywiście $\mathfrak{C}[u_j] \to 0$ dla $j \to \infty$.

9. Zasada Maksimum Pontriagina

Poprzedni rozdział 8 dotyczył **warunku wystarczającego** (**sufficient condition**) istnienia sterowania optymalnego. Natomiast w tym rozdziale 9 sformułujemy **warunek konieczny** (**necessary condition**) dla optymalnego sterowania — zwany **zasadą maksimum Pontriagina** (**Pontryagin Maximum Principle**). Zasada ta pozwala wyznaczyć optymalne sterowania i optymalne trajektorie — por. przykłady 7.2, 7.3.

Analogia: Minimum funkcji z **więzami** (ograniczeniami, **constraints**).

Rozważamy gładkie funkcje $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$, $g^j : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, l$, $l < n$,
gdzie $\mathbb{D}$ jest niepustym obszarem w $\mathbb{R}^n$. Badamy istnienie minimum funkcji h na **hiperpowierzchni** (**hypersurface**)

$$\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, g(x) = 0 \right\}.$$

Jeżeli $x_* \in \mathbb{D}$ jest punktem, w którym h ma (lokalne) minimum na hiperpowierzchni $\mathbb{S}$, to istnieją liczby (**mnożniki Lagrange'a** (**Lagrange multipliers**)) $w = (w^1, w^2, \dots, w^l)$, t.ż. $x_* \in \mathbb{D}$, $w \in \mathbb{R}^l$ jest rozwiązaniem $n + l$ równań:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} h(x) + \sum_{k=1}^{l} w^k \frac{\partial}{\partial x^j} g^k(x) = 0\,, \qquad j = 1, \dots, n$$

$$g^k(x) = 0\,, \qquad k = 1, \dots, l$$

czyli

$$\mathrm{grad}_x\, h(x_*) = -\mathrm{grad}_x \left(w^T g(x_*) \right) \qquad g(x_*) = 0\,,$$

zatem wektor $\mathrm{grad}_x h(x_*)$ jest prostopadły do hiperpłaszczyzny stycznej do hiperpowierzchni $\mathbb{S}$ w punkcie x_*, czyli jest normalny do $\mathbb{S}$ w x_*.

W tym rozdziale nie zakładamy żadnych ograniczeń na sterowania, czyli $\Omega = \mathbb{R}^m$.

Rozpatrujemy najpierw zagadnienie Lagrange'a (L) dla ustalonego punktu końcowego (I) — por. rozdział 6. Zakładamy, że $\mathfrak{f}^0$ jest ciągła względem (x, u) oraz różniczkowalna w sposób ciągły względem x.

Problem 9.1. Mamy zadane punkty x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq x_1$. Wśród dopuszczalnych sterowań $u \in \mathbb{U}_m$, o tej własności, że rozwiązanie $x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,))$ zagadnienia

$$\dot{x} = f(x, u)\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

przechodzi przez x_1 dla $t_1 > 0$, tzn. $x(t_1) = x_1$, znaleźć to, dla którego

$$\mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(x(t), u(t))\, \mathrm{d}t\,,$$

przyjmuje najmniejszą wartość.

Definicja 9.1. Sterowanie u, o którym mowa w zagadnieniu 9.1, nazywamy **sterowaniem optymalnym** (**optimal control**), a odpowiednią trajektorię $x = x(t)$ — **trajektorią optymalną** (**optimal trajectory**).

Zauważmy, że jeżeli sterowanie $u = u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, prowadzi x_0 do x_1 z wartością $\mathfrak{C}[u] = J$, to sterowanie $\tilde{u} = u(t+\tau)$, $-\tau \leqslant t \leqslant t_1 - \tau$ także prowadzi x_0 do x_1 z wartością $\mathfrak{C}[\tilde{u}] = J$. To pozwala przyjąć chwilę początkową, jako $t = 0$.

Każdy kawałek trajektorii optymalnej jest też trajektorią optymalną:

Uwaga 9.1. **Jeżeli** $u = u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, jest sterowaniem optymalnym prowadzącym x_0 do x_1, $x(t) = x(t; x_0, u(\,.\,))$ — trajektorią optymalną oraz $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_1$, **to** sterowanie $u\Big|_{[\tau_1,\tau_2]}$ jest optymalnym sterowaniem prowadzącym $x(\tau_1)$ do $x(\tau_2)$ oraz $x\Big|_{[\tau_1,\tau_2]}$ jest trajektorią optymalną.

Dowód: por. [35], str. 22; [30], str. 118..
Niech wartości $\mathfrak{C}[u]$ na odcinkach $[0,\tau_0]$, $[\tau_0,\tau_1]$, $[\tau_1,t_1]$ będą oznaczone przez J_1, J_2 i J_3, odpowiednio. Wówczas wartość $\mathfrak{C}[u]$ na odcinku $[0,t_1]$, to $J = J_1 + J_2 + J_3$. Jeżeli sterowanie $u\Big|_{[\tau_1,\tau_2]}$ nie byłoby optymalne, to istniałoby sterowanie $\tilde{u}$ prowadzące $x(\tau_0)$ do $x(\tau_1)$ z wartością $\mathfrak{C}[\tilde{u}] = J_2^*$, gdzie $J_2^* < J_2$. Zatem istniałoby sterowanie prowadzące x_0 do x_1 z wartością $J_1 + J_2^* + J_3 < J$, co jest sprzeczne z optymalnością sterowania u. $\square$

Dla zagadnienia Lagrange'a, zadanego sterowania u i odpowiedzi x określamy

$$x^0(t) = \int_0^t \mathfrak{f}^0(x(s), u(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Jeżeli u jest pomyślne, to $x(t_1) = x_1$, dla pewnego $t_1 \geqslant 0$ i odpowiedni koszt to $x^0(t_1)$. Gdy u jest optymalne, to $x^0(t_1)$ jest najmniejsze.

Określamy wektor $(n+1)$–wymiarowy $\mathbf{x}(t) = \left(x^0(t), x^T(t)\right)^T$ oraz

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \left(\mathfrak{f}^0, f^T\right)^T(t,\mathbf{x})\,.$$

Zakładamy, że f oraz $\mathfrak{f}^0$ są ciągłe względem (x,u) oraz różniczkowalne w sposób ciągły względem x.

Zagadnienie 9.1 można sformułować w następującej, równoważnej postaci:

Problem 9.2. Niech $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz Π będzie prostą w $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Pi = \left\{ \left[y, x_1^T\right]^T \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; y \in \mathbb{R}^1 \right\},$$

gdzie $x_1 \in \mathbb{R}^n$ jest ustalonym punktem. Wśród sterowań $u \in \mathbb{U}_m$, o tej własności, że rozwiązanie $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0,\, u(\,.\,))$ zagadnienia

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), u(t)\big) \qquad \text{p.w.}\,, \tag{9.1}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \left[0, x_0^T\right]^T \in \mathbb{R}^{n+1}\,,$$

przecina prostą Π, **znaleźć** to, dla którego punkt $\mathbf{x}_1 = \left[x_1^0, x_1^T\right]^T$ przecięcia z prostą Π ma najmniejszą współrzędną x_1^0.

Podobnie jak w definicji 9.1:

Definicja 9.2. Sterowanie u, o którym mowa w zagadnieniu 9.2, nazywamy **sterowaniem optymalnym** (**optimal control**), a odpowiednią trajektorię $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — **trajektorią optymalną** (**optimal trajectory**).

Wprowadzamy **sprzężenie linearyzacji** (**adjoint to the linearization**):
dla zadanego sterowania u i odpowiedzi $\mathbf{x}$ rozważamy $(n+1)$–wymiarowe zagadnienie zlinearyzowane

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = -\Big[\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(x(t), u(t))\Big]^T \mathbf{w}(t) \qquad \text{p.w.}\,; \tag{9.2}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia nazywa się **rozszerzonym ko-stanem** (**extended costate; adjoint variable; Lagrange multiplier**);
$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(x(t), u(t))$ jest macierzą Jacobiego $\mathbf{f}$ względem $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(x(t), u(t)) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial \mathbf{x}^j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f^0}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^0}{\partial x^n} \\ 0 & \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

(w pierwszej kolumnie są same zera, gdyż żadna z $\mathbf{f}^i$ nie zależy jawnie od x^0).

Zlinearyzowane równanie opisuje ewolucję wektora stycznego wzdłuż krzywej wyznaczonej przez rozwiązanie zagadnienia wyjściowego. Sprzężone równanie zlinearyzowane opisuje ewolucję wektorów prostopadłych — leżących w n-wymiarowej hiperpłaszczyźnie.

Dla zadanego $(\mathbf{x}, u)$, rozważamy **ko-stan** i rzeczywistą funkcję (**Hamiltonian**)

$$H(\mathbf{w}, \mathbf{x}, u) = \mathbf{w}^T\,\mathbf{f} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{w}^j(t)\,\mathbf{f}^j(x(t), u(t))\,,$$

H nie zależy od x^0, gdyż f^j nie zależą od x^0:

$$H(\mathbf{w}, \mathbf{x}, u) = H(\mathbf{w}, x, u)\,.$$

Mamy

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{grad}_{\mathbf{w}} H(\mathbf{w}, x, u) = \left[\frac{\partial H}{\partial w^0}, \frac{\partial H}{\partial w^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial w^n}\right]^T, \qquad \text{p.w.} \tag{9.3}$$

$$\dot{\mathbf{w}} = -\text{grad}_{\mathbf{x}} H(\mathbf{w}, x, u) = -\left[0, \frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^n}\right]^T, \qquad \text{p.w.}\,, \tag{9.4}$$

gdzie równanie (9.3), to inny zapis równania (9.1), a równanie (9.4), to inny zapis równania (9.2). Zatem równanie (9.3), to wyjściowy układ RRZ. W układzie tym nie pojawia się ko–stan $\mathbf{w}$.

Definicja 9.3.

$$M(\mathbf{w}, x) = \sup_{v \in \Omega} H(\mathbf{w}, x, v)$$

Twierdzenie 9.1 (**Zasada maksimum Pontriagina** (**Pontryagin Maximum Principle**) dla **zagadnienia ustalonego punktu końcowego** (**fixed–end–point**) — (I))**.** *Rozważamy rozszerzone zagadnienie sterowania*

$$\dot{\mathbf{x}}^j = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^j} H(\mathbf{w}, x, u)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

z $u \in \mathbb{U}_m$*. Jeżeli* u_* *jest optymalne na* $[0, t_1]$ *z odpowiedzią* $\mathbf{x}_*$*, to istnieje absolutnie ciągła funkcja* $\mathbf{w}$ *spełniająca*

$$\dot{\mathbf{w}}^j = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j} H(\mathbf{w}, x_*, u_*)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, n\,, \qquad \text{p.w. na } [0, t_1]$$

z

(i) $H(\mathbf{w}(t), x_*(t), u_*(t)) = M(\mathbf{w}(t), x_*(t))$ *p.w. na* $[0, t_1]$
(ii) $M(\mathbf{w}(t), x_*(t)) = 0$ *na* $[0, t_1]$
(iii) $\mathbf{w}^0(t) = \mathbf{w}^0(0) \leqslant 0$ *oraz* $\mathbf{w}(t) \neq 0$ *na* $[0, t_1]$.

Dowód: *[35], rozdział 2, §10–15; [30], str. 134–146; [18], str. 112–124; [6], str. 304–340.* ♣

Zasada określa warunek konieczny (**necessary condition**) sterowania optymalnego: **jeżeli** u_* jest optymalne dla zagadnienia (I), **to** istnieje para $\mathbf{x}_*, \mathbf{w}$, t.ż. dla p.k. $t \in [0, t_1]$

$$\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{grad}_{\mathbf{w}^j} H(\mathbf{w}, x_*, u_*)\,, \qquad \text{oraz} \qquad H(\mathbf{w}, x_*, v) \leqslant 0\,, \quad \forall \quad v \in \Omega\,,$$

oraz równość jest osiągana dla $v = u_*(t)$ — oczywiście może być również osiągana dla innych wartości v.

Równość w (i) (bez „p.w.") zachodzi, w każdym punkcie prawostronnej, lub lewostronnej ciągłości sterowania u — por. [30], Lemma 1, str. 110.

Uwaga 9.2. **Zasada maksimum Pontriagina dla swobodnego punktu końcowego** — zagadnienie (III) — rozdział 6. Jeżeli czas końcowy $t_1 > 0$ jest ustalony, a punkt końcowy x_1 nie jest zadany, to twierdzenie 9.1 należy uzupełnić o **warunek transwersalności** (**transversality condition**) — por. (9.6):

$$\mathbf{w}^j(t_1) = 0\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,. \tag{9.5}$$

Z twierdzenia 9.1 można wyprowadzić warunek konieczny dla sterowania czaso–optymalnego. Niech $w = (w^1 \ldots, w^n)$. Mamy

$$\mathrm{f}^0 \equiv 1\,, \qquad x^0(t) = t$$

oraz

$$H(\mathbf{w}, x, u) = w^0 + H_0(w, x, u)\,, \qquad \text{gdzie} \quad H_0(w, x, u) = \sum_{j=1}^{n} w^j f^j(x, u)\,.$$

Wówczas mamy

$$x^j = \frac{\partial H_0}{\partial w^j}\,, \qquad w^j = -\frac{\partial H_0}{\partial x^j}\,, \qquad j = 1, \dots, n\,.$$

Niech

$$M_0(w, x) = \sup_{v \in \Omega} H_0(w, x, v)\,.$$

Z zależności

$$H_0(w, x, u) = H(\mathbf{w}, x, u) - w^0$$

otrzymujemy

$$M_0(w, x) = M(\mathbf{w}, x) - w^0$$

a zatem

$$H_0(w(t), x(t), u(t)) = M_0(w(t), x(t)) = -w^0 \geqslant 0\,.$$

Twierdzenie 9.2 (**Zasada maksimum Pontriagina dla sterowania czaso-optymalnego**)**.** *Rozważamy zagadnienie*

$$\dot{x}^j = \frac{\partial}{\partial w^j} H_0(w, x, u)\,, \qquad j = 1, \dots, n$$

z $u \in \mathbb{U}_m$*. Jeżeli* u_* *jest czaso–optymalne z odpowiedzią* x_**, to istnieje absolutnie ciągła funkcja* $\mathbf{w}$ *spełniająca*

$$\dot{w}^j = -\frac{\partial}{\partial x^j} H_0(w, x_*, u_*)\,, \qquad j = 1, \dots, n\,, \qquad \text{p.w. na } [0, t_1]$$

z

(i) $H_0\big(w(t), x_*(t), u_*(t)\big) = M_0\big(w(t), x_*(t)\big)$ *p.w. na* $[0, t_1]$
(ii) $M_0\big(w(t), x_*(t)\big) = -w^0 \geqslant 0$ *na* $[0, t_1]$
(iii) $w(t) \neq 0$ *na* $[0, t_1]$.

Przykład 9.1 (wagon odrzutowy, [35], str. 29–34; [18], str. 36, [30], str. 109, 111)**.** Por. przyklad 1.2, 2.4, 7.2. Przykład ten jest powtórzeniem przykładu 7.2 „w języku” twierdzenia 9.1. Niech $\Omega = [-1, 1]$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} 1\,\mathrm{d}t = t_1\,,$$

$$\dot{x}^0 = 1\,, \qquad \dot{x}^1 = x^2\,, \qquad \dot{x}^2 = u\,, \qquad \mathbf{f}(x, u) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \\ u \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{w}^0 = \dot{w}^1 = 0\,, \qquad \dot{w}^2 = -w^1\,,$$

$$H(\mathbf{w},x,v)=\mathbf{w}^T\mathbf{f}(x,v)=w_0^0+w_0^1x^2+\Big(w_0^2-w_0^1t\Big)v\,,$$

Z twierdzenia 9.1: **jeżeli** u_* jest czaso–optymalne, **to** istnieją liczby w_0^i, $i=0,1,2$, t.ż.

$$H(\mathbf{w},x_*,v)\leqslant 0\quad \forall\, v\in[-1,1]\,,\qquad H(\mathbf{w},x_*,v)=0\quad \text{p.w.}\quad \text{dla } v=u_*(t)\,,$$

$$M(\mathbf{w},x_*)=\sup_{-1\leqslant v\leqslant 1}H(\mathbf{w},x_*,v)=w_0^0+w_0^1x_*^2(t)+\Big|w_0^2-w_0^1\,t\Big|$$

a to **jest osiągane jedynie** dla

$$u(t)=\operatorname{sign}\Big(w_0^2-w_0^1\,t\Big)\,.$$

Funkcja liniowa $w_0^2-w_0^1t$ jest albo tożsamościowo 0, albo zeruje się w co najwyżej jednym punkcie. Zatem każde czaso–optymalne sterowanie jest p.w. albo tożsamościowo 0, albo bang–bang. Nie może jednak być tożsamościowo 0, gdyż byłoby wtedy $w_0^1=w_0^2=0$ i mielibyśmy $w_0^0\neq 0$ ($\mathbf{w}$ nie może znikać), co by dawało $H=w_0^0\neq 0$, a zatem $M=w_0^0\neq 0$, co byłoby sprzeczne z twierdzeniem 9.1 (ii); por. przykład 7.2.

Rozważmy przypadek, gdy punkt końcowy x_1 nie jest ustalony, lecz należy do zadanego zbioru $\mathbb{S}_1$, o którym zakładamy, że jest l–wymiarową gładką rozmaitością (**manifold**; por. [11], str. 64) w $\mathbb{R}^n$, $l<n$ — zagadnienie (II). Możemy sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie 9.3 (**Zasada maksimum Pontriagina** dla **zagadnienia dla punktu końcowego z zadanej rozmaitości** — (II))**.** *Rozważamy rozszerzone zagadnienie sterowania*

$$\dot{\mathbf{x}}^j=\frac{\partial}{\partial\mathbf{w}^j}H(\mathbf{w},\mathbf{x},u)\,,\qquad j=0,1,\ldots,n$$

z $u\in\mathbb{U}_m$*. Jeżeli* u_* *jest optymalne na* $[0,t_1]$ *z odpowiedzią* $\mathbf{x}_*$*, to istnieje absolutnie ciągła funkcja* $\mathbf{w}$ *spełniająca*

$$\dot{\mathbf{w}}^j=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^j}H(\mathbf{w},\mathbf{x}_*,u_*)\,,\qquad j=0,1,\ldots,n\,,\qquad \text{p.w.}\quad \text{na } [0,t_1]$$

z

(i) $H\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{x}_*(t),u_*(t)\big)=M\big(\mathbf{w}(t),\mathbf{x}_*(t)\big)$ *p.w. na* $[0,t_1]$
(ii) $M\big(\mathbf{w}(t),x_*(t)\big)=0$ *na* $[0,t_1]$
(iii) $\mathbf{w}^0(t)=\mathbf{w}^0(0)\leqslant 0$ *oraz* $\mathbf{w}(t)\neq 0$ *na* $[0,t_1]$

*oraz spełniony jest warunek transwersalności (**transversality (transversal = orthogonal to the tangent space)**)*

(iv) wektor $w(t_1)=[w^1(t_1),\ldots,w^n(t_1)]^T$ *jest prostopadły do przestrzeni stycznej (**tangent space**)* $\mathbb{T}_1$ *do rozmaitości* $\mathbb{S}_1$ *w punkcie* $x(t_1)$*:*

$$w^T(t_1)y=\sum_{j=1}^n w^j(t_1)y^j=0\,,\qquad \forall\, y\in\mathbb{T}_1\,. \tag{9.6}$$

Dowód: *[35], rozdział 2, §16; [6], str. 306–344; [27], Chapter 5, [19], rozdziały 12 i 13.* ♣

Uwaga 9.3. W przypadku zagadnienia swobodnego punktu końcowego — (III) — warunek transwersalności (9.6) przyjmuje postać (9.5):

$$w(t_1) = 0\,.$$

Przykład 9.2 (wagon odrzutowy, por. przykład 9.1, [35], str. 51-61; [30], str. 125)**.** Rozważamy układ równań z przykładu 9.1 z $\Omega = [-1, 1]$, jednakże cel określamy jako

$$\mathcal{T}(t) \equiv \mathbb{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \qquad x^1 = 0 \right\},$$

czyli jesteśmy zainteresowani osiągnięciem położenia $x^1 = 0$ z dowolną prędkością $x^2 \in \mathbb{R}^1$.

Wektor styczny (w dowolnym punkcie $(0, x_2)$) do $\mathbb{S}$ ma postać

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha^2 \neq 0$. Warunek transwersalności przyjmuje więc postać

$$w^T(t_1)\alpha = 0\,, \tag{9.7}$$

skąd $w^2(t_1) = 0$. Ponieważ (por. przykład 9.1)

$$w^2(t) = w_0^2 - w_0^1 t\,,$$

to z (9.7) wynika, że $w^2(t)$ na odcinku $[0, t_1]$ nie zmienia znaku. Zatem każde czaso–optymalne sterowanie jest stałe i równe albo -1, albo 1, bez przełączeń. Zatem przez każdy punkt początkowy x_0 przechodzą tylko dwie trajektorie, które mogą być optymalne (dla $u \equiv -1$ i $u \equiv 1$).

Jeżeli $x_0^1 > 0$ i punkt początkowy leży powyżej dolnej części trajektorii przechodzącej przez 0, to jedynie trajektoria dla $u \equiv -1$ prowadzi do $\mathbb{S}$. Natomiast, gdy $x_0^1 > 0$ i punkt początkowy leży na, lub poniżej dolnej części trajektorii przechodzącej przez 0, to do celu prowadzi zarówno trajektoria z $u \equiv -1$, jak i $u \equiv 1$. Mamy więc **dwie** trajektorie podlegające zasadzie maksimum. Można jednak pokazać (**ćwiczenie**), że czas dojścia do $\mathbb{S}$ w obu przypadkach jest różny i optymalnym sterowaniem jest $u \equiv -1$. Analogicznie dla $x_0^1 < 0$ optymalnym sterowaniem jest $u \equiv 1$. Można więc zsyntetyzować optymalne sterowanie (**synthesize the optimal control**) wprowadzając

$$v(x^1, x^2) = \begin{cases} +1 & \text{dla} \quad x^1 < 0 \\ -1 & \text{dla} \quad x^1 > 0 \end{cases}$$

i rozważając układ

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= v(x^1, x^2) \end{aligned}$$

otrzymujac wszystkie optymalne trajektorie.

Analogia: Zagadnienie minimum rzeczywistej, gładkiej funkcji h na obszarze $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$.

Warunek konieczny (**the necessary condition**): Jeżeli punkt $x_* \in \mathbb{D}$ jest minimum funkcji h, to

$$\frac{\partial}{\partial x^j} h(x_*) = 0\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

Wprowadzając $g(t) = h(x_* + t\alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = 1$, otrzymujemy

$$g'(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} h(x_*) \alpha^j = \Big(\mathrm{grad}_x h(x_*)\Big)^T \alpha = 0\,.$$

Mamy

$$g''(t) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} h(x_* + t\alpha) \alpha^j \alpha^k$$

Warunkiem wystarczającym (**sufficient condition**) minimum jest

$$g''(0) = \sum_{j,k=1} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} h(x_*) \alpha^j \alpha^k > 0\,,$$

czyli macierz

$$\Big[\ \tfrac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} h(x_*) \ \Big]_{j,k=1,\dots,n}$$

jest dodatnio określona.

10. Zadania

Tomasz Cieślak

10.1. Sterowalność — rozdział 2

Definicja 10.1. O sterowalności regularnej mówimy, jeśli jesteśmy w stanie sterować naszym układem za pomocą każdego pojedyńczego sterowania ze zbioru możliwych sterowań.

Ćwiczenie 10.1. Pokazać, że układ sterowalny nie musi być regularnie sterowalny.

Ćwiczenie 10.2. Niech $x : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ będzie dane przez $\begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{bmatrix}$, natomiast $u : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ przez $\begin{bmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \end{bmatrix}$.

Macierze A oraz B dane są odpowiednio przez $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Czy układ

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{10.1}$$

jest sterowalny? Czy jest on regularnie sterowalny?

Ćwiczenie 10.3. Czy układ (10.1) jest regularnie sterowalny dla $x : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ oraz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

Ćwiczenie 10.4. Niech $x : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ oraz $u : [0, T] \to [-1, 1]^3$, czy wówczas układ (10.1), dla którego $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest sterowalny całkowicie oraz czy jest sterowalny lokalnie?

10.2. Obserwowalność — rozdział 3

Ćwiczenie 10.5. Niech $x : [0,T] \to \mathbb{R}^2$, natomiast $u : [0,T] \to \mathbb{R}$. Czy układ (10.1) wraz z równaniem $y(t) = x^1 + x^2 + u$ jest wówczas obserwowalny dla
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Ćwiczenie 10.6. Na ciało o masie m, poruszające się w środowisku bez tarcia, działa zmienna w czasie siła $u(t)$. Należy zbadać obserwowalność całkowitą tego układu, gdy wielkością wyjściową jest
1) przebyta przez ciało droga,
2) prędkość tego ciała.

10.3. Sterowania bang-bang

Ćwiczenie 10.7. Niech $x : [0,T] \to \mathbb{R}^2$, natomiast $u : [0,T] \to \mathbb{R}$. Dodatkowo niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć sterowanie bang-bang układu (10.1) ze stanu początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^2$ do stanu końcowego wynoszącego 0 w czasie t_0.

10.4. Sterowalność ukladów nieliniowych — rozdział 4

Ćwiczenie 10.8. Rozważmy układ równań

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & -2(x^1)^3 + 2x^1x^2 + u^1 \,, \\ \dot{x}^2 & = & -6x^2 + (x^1)^2 + u^2 \,, \end{array}$$

gdzie $x^1(t), x^2(t)$ to funkcje o wartościach rzeczywistych, podobnie sterowania u^1, u^2 mogą przyjmować wartości rzeczywiste. Czy możliwe jest lokalne i globalne sterowanie $x(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix}$ do 0 za pomocą wektora sterowań $u(t) = \begin{bmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \end{bmatrix}$?

Ćwiczenie 10.9. Rozważmy układ równań

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & -e^{x^1} - 2x^1e^{x^2-1} + 1 - (u^1)^2 - u^2 \,, \\ \dot{x}^2 & = & -(x^1)^2e^{x^2-1} - u^1 \,, \end{array}$$

gdzie $x^1(t), x^2(t)$ to funkcje o wartościach rzeczywistych, podobnie sterowania u^1, u^2 mogą przyjmować wartości rzeczywiste. Czy możliwe jest lokalne i globalne sterowanie $x(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix}$ do 0 za pomocą wektora sterowań $u(t) = \begin{bmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \end{bmatrix}$?

10.5. Zasada maksimum — rozdziały 7, 9

Ćwiczenie 10.10. Rozważyć układ o równaniach stanu

$$\dot{x}^1 = x^2 + u^1, \;\; \dot{x}^2 = -x^1 + u^2$$

gdzie wartości sterowań u^1, u^2 są ograniczone do zbioru $[-1, 1]$. Przedyskutować sterowanie czasooptymalne przejścia od $(x^1(0), x^2(0))$ do 0.

Ćwiczenie 10.11. Rozważyć układ o równaniach stanu

$$\dot{x}^i = x^{i+3}, \;\; \dot{x}^{i+3} = u^i$$

dla $i = 1, 2, 3$, gdzie wartości sterowań u^i podlegają więzom $0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{3} (u^i)^2 \leqslant 1$. Przedyskutować sterowanie czasooptymalne przejścia od $(x^1(0), x^2(0), ..., x^6(0))$ do 0.

Ćwiczenie 10.12. Rozważyć układ o równaniach stanu

$$\dot{x}^1 = x^2 + u, \;\; \dot{x}^2 = -u$$

gdzie wartości sterowań u^1, u^2 są ograniczone do zbioru $[-1, 1]$. Chcemy przeprowadzić ten układ z $(x^1(0), x^2(0))$ do 0 minimalizując funkcjonał $\int\limits_{t_0}^{t_1} (x^1(t))^2 dt$. Przedyskutować sterowanie ekstremalne.

Ćwiczenie 10.13. Następujące równania stanu oddają opis zachowania się samolotu w locie płaskim

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 u \,, \\ \dot{x}^2 &= F(x^1, x^2) - u \,, \end{aligned}$$

gdzie F jest funkcją klasy C^1, sterowanie u spełnia $|u| \leqslant 1$. Chcemy przeprowadzić układ ze stanu $(x^1(0), x^2(0))$ do stanu (x^1_1, x^2_1) minimalizując czas przejścia. Przedyskutować sterowanie ekstremalne.

Ćwiczenie 10.14. Następujące równania opisują zachowanie się rakiety w prostoliniowym locie poziomym pod wpływem sił ciężkości

$$\dot{x}^1 = x^2, \;\; \dot{x}^2 = u \,,$$

gdzie sterowanie $u \in [-1, 1]$. Chcemy minimalizować zużycie paliwa $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(1 + (u)^2(t))} dt$ przy przejściu układu ze stanu $(x^1(0), x^2(0))$ do 0. Przedyskutować sterowanie optymalne.

Ćwiczenie 10.15. Równania ruchu prostoliniowego rakiety o stałej mocy dane są układem równań

$$\dot{x}^1 = u, \;\; \dot{x}^2 = (u)^2.$$

Sterowanie jest znormalizowane przez warunek $|u| \leqslant 1$. Znaleźć sterowanie czasooptymalne przejścia układu ze stanu $(x^1(0), x^2(0))$ do stanu (x^1_1, x^2_1), czy takie sterowania są w tym przypadku jednoznaczne?

10.6. Przykłady

Przykład 10.1. (czasooptymalny problem nawigacji, [42]). Przedyskutujmy teraz klasyczne zagadnienie teorii sterowania. Nawigujemy łódką o prędkości v, takiej że $|v| = 1$ niezależnie od czasu. Woda płynie ze stałą prędkością s. Chcemy dostać się do ustalonego punktu w jak najkrótszym czasie. Zagadnienie rozpatrujemy w dwuwymiarowej płaszczyźnie x_1, x_2, gdzie osie są dobrane tak, by przepływ był prostopadły do jednej (x_1), a równoległy do drugiej (x_2). Niech kąt sterowania pomiędzy s i v będzie oznaczany przez ψ. Równania ruchu statku mają postać

$$\dot{x_1} = s + \cos\psi, \quad \dot{x_2} = \sin\psi. \tag{10.2}$$

Równoważnie

$$\dot{x_1} = s + u_1, \quad \dot{x_2} = u_2, \tag{10.3}$$

wraz z więzami sterowania

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \tag{10.4}$$

Po pierwsze, wykorzystując postać zagadnienia (10.2) można sprawdzić, że założenia twierdzenia 8.1, włącznie z założeniami 8.1, 8.2 są spełnione, czyli spośród sterowań ekstremalnych można wybrać optymalne.

Dzięki postaci (10.3), (10.4) rozważanego zagadnienia posłużymy się teraz zasadą maksimum Pontriagina dla ustalenia sterowań optymalnych.

Hamiltonian dany jest przez $H(\lambda, x, u) := \lambda_0 + \lambda_1(s + u_1) + \lambda_2 u_2$, gdzie (λ_1, λ_2) to współrzędne sprzężone. Mamy następujące równania Hamiltona na kostany

$$\dot{\lambda}_i(t) = 0, \quad , i = 1, 2.$$

Zatem

$$\lambda_i = \lambda_i^0, \quad , i = 1, 2, \tag{10.5}$$

i pszukujemy sterowań, przy których wyrażenie

$$\lambda_1^0 u_1 + \lambda_2^0 u_2 + \lambda_0 + \lambda_1^0 s$$

osiąga kres górny przy więzach (10.4). Widzimy, że kres górny osiągany jest, gdy wektory (u_1, u_2) i $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$ mają ten sam kierunek i zwrot, czyli dla

$$\frac{u_i}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{\lambda_i^0}{\sqrt{(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2}}, \quad i = 1, 2.$$

W świetle (10.4) sterowanie ekstremalne jest dane wzorem

$$u_i(t) = \frac{\lambda_i^0}{\sqrt{(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2}} = const, \quad i = 1, 2.$$

Widzimy, że sterowanie ekstremalne to takie, dla którego kąt między wektorem prędkości przepływu oraz wektorem prędkości statku jest stały. Mamy zatem jakościowy wniosek, iż trajektorie sterowań ekstremalnych są liniami prostymi. Możemy automatycznie wyznaczyć ewentualny czas przejścia naszej łódki τ. Otóż

$$\tau^2(1 - s^2) + 2(x_1^{end} - x_1(0))s\tau - (x_1^{end} - x_1(0))^2 - (x_2^{end} - x_2(0))^2 = 0. \tag{10.6}$$

Ponadto dla danej wartości czasu τ sterowanie ekstremalne jest jednoznaczne, dane przez

$$u_1(t) = \frac{x_1^{end} - x_1(0) - \tau s}{\tau}, \quad u_2(t) = \frac{x_2^{end} - x_2(0)}{\tau}.$$

Wyznaczmy teraz najlepsze spośród sterowań ekstremalnych, będące optymalnym sterowaniem w problemie nawigacji. W tym celu rozróżniamy trzy przypadki.

Przypadek pierwszy, $s < 1$. Uwzględniając warunek $\tau \geqslant 0$, wobec (10.6) mamy

$$\tau = \frac{-(x_1^{end} - x_1(0))s + \sqrt{(x_1^{end} - x_1(0))^2 + (x_2^{end} - x_2(0))^2(1 - s^2)}}{1 - s^2}.$$

Widać, że jest tylko jedno sterowanie ekstremalne, zatem istnieje tor optymalny niezależnie od punktów, w których zaczynamy i kończymy nawigację.

Przypadek drugi, $s = 1$. Tutaj rozwiązanie (10.6) to

$$\tau = \frac{(x_1^{end} - x_1(0))^2 + (x_2^{end} - x_2(0))^2}{2(x_1^{end} - x_1(0))}.$$

Znów mamy tylko jedno sterowanie ekstremalne, zatem jednocześnie optymalne. Tym razem jednak wobec warunku $\tau \geqslant 0$ od razu widać, że $(x_1^{end} - x_1(0)) > 0$, co zawęża zbiór punktów początkowych oraz końcowych, pomiędzy którymi możemy nawigować. Musi zachodzić $x_1^{end} > x_1(0)$.

Przypadek trzeci, $s < 1$. Tutaj (10.6) ma dwa pierwiastki. Naturalnie ten o większej wielkości nie jest czasem przepływu odpowiadającym sterowaniu optymalnemu. Zatem sterowanie optymalne jest realizowalne w czasie

$$\tau = \frac{(x_1^{end} - x_1(0))s - \sqrt{(x_1^{end} - x_1(0))^2 + (x_2^{end} - x_2(0))^2(1 - s^2)}}{s^2 - 1}.$$

Uwzględnienie warunku $\tau \geqslant 0$ prowadzi tym razem do wniosku, iż punkty $(x_1(0), x_2(0))$, z których optymalna nawigacja jest wykonalna zajdują się w prawej części płaszczyzny oraz w lewej na prawo od półprostych przechodzących przez punkt $(x_1(0), x_2(0))$, takich że ich współczynniki kierunkowe dane są przez liczby $-(s-1)^{\frac{1}{2}}$ i $(s-1)^{\frac{1}{2}}$.

Przykład 10.2. (Leitman, maksymalny zasięg rakiety o ograniczonym ciągu przy zaniedbaniu aerodynamiki) Naszym celem będzie znalezienie ekstremalnych sterowań maksymalizujących zasięg rakiety o ciągach nie przekraczających określonej wartości. Ustalając model matematyczny zjawiska przyjmiemy, że jesteśmy w stałym (ziemskim) polu grawitacyjnym. Ograniczymy się do badania lotu płaskiego. Dodatkowo zaniedbamy zjawiska aerodynamiczne. W ten sposób dostaniemy model, który z jednej strony dzięki swojej prostocie umożliwi nam analizę. Z drugiej jednak będziemy pamiętać, że chcąc dostać wyniki wartościowe z punktu widzenia praktyki uwzględnić trzeba chociażby siłę nośną jaka wpłynie na rakietę.

Rozpatrujemy proces we współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2. Składowe prędkości $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ będziemy często oznaczać przez x_3, x_4. Masę rakiety oznaczać będziemy przez $x_5(t)$, jest ona funkcją czasu. Zależy od ilości paliwa w zbiorniku. Przyspieszenie ziemskie to g, natomiast u_1 i u_2 oznaczają kosinusy kierunkowe wektora ciągu. Prędkość wypływu masy będziemy oznaczać przez przez $u_3 := \dot{x}_3$. Skuteczną prędkość wylotu spalin będziemy oznaczać przez c, jest to dodatnia stała.

Z jednej strony na rakietę działa ściągająca ją w dół siła grawitacji, z drugiej prowadząca ją siła ciągu równa co do wartości cu_3, a działająca pod kątem Ψ do osi Ox_1. Wtedy $u_1 = \cos\Psi$, a $u_2 = \sin\Psi$.

Wówczas stan układu opisany jest równaniami:

$$\dot{x_1} = x_3,$$

$$\dot{x_2} = x_4,$$

$$\dot{x_3} = \frac{c}{x_5} u_1 u_3, \tag{10.7}$$

$$\dot{x_4} = \frac{c}{x_5} u_2 u_3 - g, \tag{10.8}$$

$$\dot{x_5} = -u_3. \tag{10.9}$$

Jak zaznaczyliśmy, cią jest ograniczony, zatem $0 \leqslant cu_3 \leqslant cu_3^{max}$. Mamy wobec tego pierwsze więzy

$$0 \leqslant u_3 \leqslant u_3^{max}. \tag{10.10}$$

Dodatkowo, wobec jedynki trygonometrycznej,

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \tag{10.11}$$

Nasze zagadnienie dotyczy przeniesienia rakiety o danych masie i prędkości początkowej z punktu $(x_1(0), x_2(0))$ do położenia o danej wyskości h przy użyciu ograniczonej ilości paliwa. Przy czym zależy nam na maksymalnym zasięgu. Nasze sterowanie to zmienne u_i dla $i = 1, 2, 3$, czyli kąt ustawienia rakiety oraz prędkość wypływu masy. Przeprowadzamy układ z punktu $(x_1(0), ..., x_5(0))$ do miejsca określonego przez

$$x_2 = x_2^{end}, \;\; x_5 = x_5^{end} > 0.$$

Dodatkowo minimalizujemy funkcjonał kosztu

$$-\int_0^{t_1} x_3(s)ds. \tag{10.12}$$

Użyjemy zasady maksimum Pontriagina. Naszym hamiltonianem będzie

$$H(\lambda, x, u) = u_3 \left[\frac{c}{x_5}(\lambda_1 u_1 + \lambda_4 u_2) - \lambda_5 \right] - \lambda_0 x_3 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 - \lambda_4 g.$$

Wobec sformułowania zagadnienia kostany spełniają równanie

$$\dot{\lambda_1} = \dot{\lambda_2} = 0,$$

$$\dot{\lambda_3} = \lambda_0 - \lambda_1, \;\; \dot{\lambda_4} = -\lambda_2,$$

$$\dot{\lambda_5} = \frac{cu_3}{x_5^2}(\lambda_1 u_1 + \lambda_4 u_2).$$

Wykonujemy oczywiste całkowania i mamy

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(t_1), \;\; \lambda_2(t) = \lambda_2(t_1), \;\; \lambda_3(t) = (\lambda_1(t_1) - \lambda_0)(t_1 - t) + \lambda_3(t_1),$$

$$\lambda_4(t) = \lambda_2(t_1)(t_1 - t) + \lambda_4(t_1).$$

Teraz warunek (iv) twierdzenia 9.3 mówi nam, że

$$\sum_{j=1}^{5} \lambda_j(t_1)\eta_j = 0$$

dla wszystkich rzeczywistych liczb $\eta_j, j = 1, ..., 5$ takich że $\eta_2 = \eta_5 = 0$. Mamy zatem

$$\lambda_1(t_1) = \lambda_3(t_1) = \lambda_4(t_1) = 0.$$

A wówczas

$$\lambda_1(t) = 0, \quad \lambda_2(t) = \lambda_2(t_1), \tag{10.13}$$

$$\lambda_3(t) = -\lambda_0(t_1 - t), \quad \lambda_4(t) = \lambda_2(t_1)(t_1 - t). \tag{10.14}$$

Wobec (i) twierdzenia 9.3 wiemy, że sterowanie ekstremalne jest takie, że związana z nim odpowiedź maksymalizuje hamiltonian dla dowolnego kostanu λ. Zatem musimy dobrać sterowanie u takie, aby zależna od niego część hamiltonianu

$$u_3\left[\frac{c}{x_5(t)}(\lambda_1(t)u_1(t) + \lambda_4(t)u_2(t)) - \lambda_5(t)\right] \tag{10.15}$$

przyjmowała wartość najwięszą.

Wyznaczymy sterowania ekstremalne przy założeniu, że $u_3(t) \neq 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Wówczas (10.15) przyjmuje wartość maksymalną w sytuacji, gdy wektor (λ_1, λ_2) jest równoległy do (u_1, u_2) i mają one taki sam zwrot. Dodatkowo, z (10.11) wiemy, że w takim razie

$$u_1(t) = \frac{\lambda_3(t)}{\sqrt{\lambda_3(t)^2 + \lambda_4(t)^2}}$$

i

$$u_2(t) = \frac{\lambda_4(t)}{\sqrt{\lambda_3(t)^2 + \lambda_4(t)^2}}.$$

Następnie (10.14) implikuje $\lambda_3(t)^2 + \lambda_4(t)^2 = (t_1 - t)^2(\lambda_0^2 + \lambda_2(t)^2)$, natomiast (10.13) daje $\lambda_2(t) = \lambda_2(t_1)$ dla każdego $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Zatem

$$u_1(t) = \frac{-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_2^2(t_1)}} = const, \tag{10.16}$$

$$u_2(t) = \frac{\lambda_2(t_1)}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_2^2(t_1)}} = const. \tag{10.17}$$

Czyli kąt między rakietą, a Ox_1 jest stały.

Pozostaje jeszcze kwestia wielkości ciągu ekstremalnego $cu_3(t)$. Nie będziemy tu jej rozważać.

11. Optymalne sterowanie w przypadku ustalonego czasu końcowego. Warunki konieczne i dostateczne oraz zastosowania ekonomiczne

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel

W tym rozdziale opisujemy dokładniej różne zagadnienia związane ze sterowaniem optymalnym.

Najpierw prezentujemy różne wersje zasady maksimum Pontragina i twierdzenia o warunkach dostatecznych dla sterowań spełniających zasadę maksimum, następnie wprowadzamy równanie Bellmana zawierające warunki dostateczne optymalności sterowania w postaci pętli zamkniętej.

Ze względu na to, że w zagadnieniach ekonomicznych związanych z poszukiwaniem sterowania optymalnego prawie zawsze występuje dyskontowanie, przedstawiamy modyfikacje obu metod obliczeniowych w przypadku dyskontowania.

Na końcu prezentujemy przykłady ekonomiczne zastosowania zagadnień optymalnego sterowania.

11.1. Zasada maksimum Pontriagina dla ustalonego czasu końcowego

W problemach ekonomicznych często rozważamy zagadnienie Bolzy z ustalonym horyzontem czasowym t_1 i swobodnym stanem końcowym – maksymalizujemy wypłatę lub minimalizujemy koszt dany funkcjonałem
$\mathfrak{C}(u) = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t))dt + \mathfrak{g}(t, x(t))$ przy
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ i ograniczeniu na sterowanie $u(t) \in \Omega$ dla każdego t.

Zdefiniujemy Hamiltonian jako
$H(t, \lambda, x, u) = \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t)) + \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle$.

Ponieważ wielkrotnie będzie pojawiać się określenie „zbiór punktów realizujących minimum/maximum funkcji na zbiorze”, wprowadzimy skrótowe oznaczenie. Dla pewnej funkcji f o wartościach rzeczywistych i zbioru Γ zawartego w jej dziedzinie symbol
$\mathrm{Argmin}_{x\in\Gamma} f(x)$ oznacza zbiór punktów dla których przyjmowane jest minimum funkcji f na zbiorze Γ, natomiast symbol
$\mathrm{Argmax}_{x\in\Gamma} f(x)$ oznacza zbiór punktów dla których przyjmowane jest maksimum funkcji f na zbiorze Γ.

Zasada maksimum Pontriagina ma w tym wypadku następującą postać:

Twierdzenie 11.1 (Zasada maksimum dla zagadnienia Bolzy z ustalonym czasem końcowym)**.** *Niech funkcje $\mathfrak{f}^0$, $\mathfrak{g}$ i f oraz ich pochodne po x będą ciągłe na zbiorach określoności.*

Jeśli u_* jest sterowaniem maksymalizującym (minimalizującym) $\mathfrak{C}[u]$ a x_* odpowiedzią na nie, to istnieje absolutnie ciągła funkcja $\lambda : [0, t_1] \to \mathbb{R}$, taka że w każdym punkcie t, w którym istnieje lewostronna pochodna $x_*(t)$ i jest równa $f(t, x_*(t), u_*(t))$ zachodzi:
$\dot{x_*}(t) = \frac{\partial H(t,\lambda,x_*(t),u_*(t))}{\partial \lambda}$ *z warunkiem początkowym* $x_*(0) = x_0$*;*
$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t,\lambda,x_*(t),u_*(t))}{\partial x}$ *z warunkiem końcowym* $\lambda(t_1) = \frac{\partial \mathfrak{g}(t,x_*(t_1))}{\partial x}$*;*
$u_*(t) \in \operatorname{Argmax}_{u\in\Omega} H(t, \lambda, x_*(t), u)$
($u_*(t) \in \operatorname{Argmin}_{u\in\Omega} H(t, \lambda, x_*(t), u)$*).*

Dowód zasady maksimum Pontriagina w tej wersji można znaleźć np. w Zabczyk [41].

Uwaga 11.1. $\lambda = -\frac{w}{w_0}$ w notacji rozdziału 7 (??) wykładu – można tak zrobić, bo dla naszego zagadnienia $w_0 < 0$. Dlatego też maksymalizacja zamienia się na minimalizację.

Ćwiczenie 11.1. Sformułować problem znalezienia najkrótszej krzywej w przestrzeni (t, x) łączącej zadany punkt początkowy x_0 i czas 0 z pionową prostą w t_1 jako problem optymalnego sterowania i rozwiązać go za pomocą zasady maksimum, czyli znaleźć sterowanie i trajektorię spełniające warunki konieczne z zasady maksimum Pontriagina – twierdzenia 11.1.

Wskazówka. Jeśli za x' we wzorze na długość krzywej podstawimy u, to otrzymamy zagadnienie optymalnego sterowania z $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = \sqrt{1 + u^2}$, $\mathfrak{g} \equiv 0$, $f(t, x, u) = u$ i nieograniczonym zbiorze parametrów sterujących $\Omega = \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 11.2. Rozważyć liniowe zagadnienie maksymalizacji wypłaty z $x(0) = 4$, $\Omega = [0, 2]$, $t_1 = 2$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = 2x - 3u$, $f(t, x, u) = x + u$, $\mathfrak{g} \equiv 0$.

Znaleźć sterowanie i trajektorię spełniające warunki konieczne z zasady maksimum Pontriagina – twierdzenia 11.1.

Ćwiczenie 11.3. Rozważyć zagadnienie maksymalizacji wypłaty z $x(0) = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $t_1 = 1$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = x - u^2$, $f(t, x, u) = -u$, $\mathfrak{g} \equiv 0$.

Znaleźć sterowanie i trajektorię spełniające warunki konieczne z zasady maksimum Pontriagina – twierdzenia 11.1.

Ćwiczenie 11.4. Rozważyć zagadnienie minimalizacji kosztu z $x(0) = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $t_1 = 1$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = x^2 + u^2$, $f(t, x, u) = x - u$, $\mathfrak{g} \equiv x$.

Znaleźć sterowanie i trajektorię spełniające warunki konieczne z zasady maksimum Pontriagina – twierdzenia 11.1.

Ćwiczenie 11.5. Maksymalizacja zysków z łowiska.

Model łowiska będącego podstawą egzystencji właściciela – naszym celem jest zmaksymalizować wypłatę.

Dane stan początkowy $x(0) = x_0 > 0$, wypłata bieżąca $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = \ln(ux)$, wypłata końcowa $\mathfrak{g} \equiv 0$, zmianę stanu populacji ryb określa funkcja $f(t, x, u) = (r - u) \cdot x$, a zbiór parametrów sterujących to $\Omega = (0, M]$.

a) Czy jest możliwe, że sterowanie optymalne u_* spełnia $u(t) < M$ prawie wszędzie na pewnym przedziale $[\bar{t}, t_1)$?

b) Co musi spełniać sterowanie optymalne, jeśli założymy, że u_* ma co najwyżej skończoną liczbie przełączeń pomiędzy wnętrzem a brzegiem Ω?

Wskazówka. Obliczyć oddzielnie równania dla λ i x na odcinkach czasu, na których
a) optymalne sterowanie $u_*(t) = M$ i
b) $u_*(t) < M$.
Rozwiązanie. Jeśli $t_1 \leqslant \frac{1}{M}$, to sterowanie optymalne ma postać $u_*(t) \equiv M$,
$x(t) = x_0 \cdot e^{(r-M)\cdot t}$ i
$\lambda(t) = \frac{1}{x_0} \cdot (t_1 - t) \cdot e^{-(r-M)\cdot t}$.
Jeśli $t_1 > \frac{1}{M}$, to sterowanie optymalne ma postać
$u_*(t) = \frac{1}{\lambda(t)\cdot x_*(t)} = \frac{1}{t_1 - t}$ na odcinku $(0, \bar{t})$ i
$u_*(t) \equiv M$ na odcinku $(\bar{t}, t_1)$
dla $\bar{t} = t_1 - \frac{1}{M}$.

Optymalna trajektoria zmiennej stanu spełnia równanie
$x_*(t) = \frac{x_0}{t_1} \cdot (t_1 - t) \cdot e^{r\cdot t}$ na odcinku $(0, \bar{t})$ i
$x_*(t) = \frac{x_0}{M\cdot t_1} \cdot e^{M\cdot t_1 - 1} \cdot e^{(r-M)\cdot t}$ na odcinku $(\bar{t}, t_1)$,
zaś zmiennej ko-stanu
$\lambda(t) = \frac{t_1}{x_0} \cdot e^{-r\cdot t}$ na odcinku $(0, \bar{t})$ i
$\lambda(t) = \frac{M\cdot t_1}{x_0} \cdot e^{-M\cdot t_1 + 1} \cdot (t_1 - t) \cdot e^{-(r-M)\cdot t}$ na odcinku $(\bar{t}, t_1)$.

Ćwiczenie 11.6. Co jeśli w zadaniu 11.5 zbiór parametrów sterujących $\Omega = (0, +\infty)$?

Ćwiczenie 11.7. Maksymalizacja zysków z łowiska będącego podstawą egzystencji użytkownika z różnymi wypłatami końcowymi.

Analizujemy ponownie łowisko z zadania 11.5. Teraz zakładamy, że w chwili t_1 właściciel może sprzedać łowisko i cena zależy od tego, jaki zasób ryb pozostał, albo że użytkownik będący dzierżawcą musi zapłacić karę za to, że jest ono w złym stanie.

Dane $x(0) > 0$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = \ln(ux)$, $f(t, x, u) = (r - u) \cdot x$, $\Omega = (0, +\infty)$ i
a) $\mathfrak{g}(x) = x$;
b) $\mathfrak{g}(x) = \ln x$.
znaleźć sterowanie i trajektorię spełniające warunki konieczne z zasady maksimum Pontriagina – twierdzenia 11.1.

Wskazówka. W punkcie b) w rozwiązaniu równania na λ dobrze byłoby stałą zacząć wyliczyć dopiero w ostatniej fazie, po wyliczeniu rozwiązania ogólnego dla x, razem z liczeniem stałych dla x.

Uwaga 11.2. W rozwiązaniu zadania 11.7b) pojawia się typowy w zagadnieniach wynikających ze stosowania zasady maksimum Pontriagina problem – rozwiązujemy układ równań na λ i x, przy czym na x mamy warunek początkowy, a na λ końcowy, zależny od końcowej wartości x, która z kolei zależy od λ. Tu udało się tę zależność łatwo rozwikłać (a nawet można jej nie zauważyć, jeśli najpierw znaleźliśmy rozwiązania ogólne dla obu zmiennych, a dopiero potem liczyliśmy stałe, aby zgadzały się warunki końcowo-początkowe).

Jak się należy spodziewać, może to powodować problemy, zwłaszcza kiedy nie widać rozwiązania analitycznego i trzeba liczyć numerycznie – trzeba używać zupełnie innych procedur niż dla rozwiązywania układów równań różniczkowych, w których mamy tylko warunki początkowe albo tylko końcowe.

11.2. Dostateczność dla zasady maksimum Pontriagina

Ponownie rozważamy zagadnienie Bolzy z ustalonym horyzontem czasowym t_1 i swobodnym punktem końcowym – maksymalizujemy wypłatę (lub minimalizujemy koszt) dane funkcjonałem

$\mathfrak{C}[u] = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t))dt + \mathfrak{g}(t, x(t))$ przy
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$
i ograniczeniu na sterowanie $u(t) \in \Omega$ dla każdego t.

Najprostszy warunek konieczny na to, aby mierzalne sterowanie $\bar{u}$ wraz z absolutnie ciągłą odpowiedzią na nie $\bar{x}$ spełniające zasadę maksimum Pontriagina z absolutnie ciągłą zmienną dualną λ było optymalne opisuje twierdzenie Mangasariana [31].

Twierdzenie 11.2. *Niech funkcje $\mathfrak{f}^0$, $\mathfrak{g}$ i f będą wklęsłe (wypukłe) i różniczkowalne ze względu na parę zmiennych (x, u) na zbiorach określoności. Jeśli sterowanie $\bar{u}$ i odpowiedź na nie $\bar{x}$ spełniają warunki konieczne określone zasadą maksimum Pontragina i $\lambda(t) \geqslant 0$ dla każdego t, to $\bar{u}$ jest sterowaniem maksymalizującym (minimalizującym) $\mathfrak{C}[u]$.*

Jeśli natomiast f jest liniowa, to spośród powyższych warunków można usunąć dodatniość λ.

Dowód. Dowód w przypadku, gdy maksimum hamiltonianu jest zawsze przyjmowane w punkcie wewnętrznym Ω, jest zawarty w Chiang [15] s. 213-216.

Aby dowód był poprawny dla dowolnego punktu u z Ω należy zastąpić warunek konieczny maksymalizacji hamiltonianu $\frac{\partial H}{\partial u^i} = 0$ warunkiem $\frac{\partial H}{\partial u^i} = \mu^i$, gdzie $\mu^i = 0$ dla $u_*^i \in (-1, 1)$, $\mu^i > 0$ dla $u_*^i = 1$ i $\mu^i < 0$ dla $u_*^i = -1$. Po kolejnych przekształceniach pojawią się tam czynniki $\mu^i \cdot (u^i - u_*^i)$, które zawsze są niedodatnie dla $u \in \Omega$, więc można je będzie opuścić zachowując żądaną nierówność.

□

Zauważmy, że założenia powyższego twierdzenia gwarantują wypukłość (wklęsłość) hamiltonianu względem (x, u) - i tak naprawdę o nią nam chodzi, co ilustruje poniższe twierdzenie o podobnym schemacie dowodowym.

Twierdzenie 11.3. *Niech funkcje $\mathfrak{f}^0$, $\mathfrak{g}$ i f będą różniczkowalne ze względu na parę zmiennych (x, u) na zbiorach określoności. Jeśli sterowanie $\bar{u}$ i odpowiedź na nie $\bar{x}$ spełniają warunki konieczne określone zasadą maksimum Pontragina i $H(t, \lambda(t), x, u)$ jest funkcją wklęsłą (wypukłą) względem (x, u) i $\mathfrak{g}$ jest funkcją wklęsłą (wypukłą) względem x dla prawie wszystkich t, to $\bar{u}$ jest sterowaniem maksymalizującym (minimalizującym) $\mathfrak{C}[u]$.*

Jeszcze silniejszym warunkiem dostatecznym jest twierdzenie Arrowa, zaproponowane bez dowodu w [4] (później częściowo udowodnione przez Arrowa i Kurza w [25]; pełen dowód, nawet w bardziej ogólnej wersji przeprowadzili Seierstad i Sydsaeter w [5]).

Używamy w nim pojęcia Hamiltonianu zmaksymalizowanego $H^*(t, \lambda, x) = max_{u \in \Omega} H(t, x, \lambda, u)$.

Twierdzenie 11.4. *Niech funkcje $\mathfrak{f}^0$, $\mathfrak{g}$ i f będą różniczkowalne ze względu na parę zmiennych (x, u) na zbiorach określoności. Jeśli sterowanie $\bar{u}$ i odpowiedź na nie $\bar{x}$ spełniają warunki konieczne określone zasadą maksimum Pontragina i $H^*(t, \lambda(t), x)$ i $\mathfrak{g}$ są funkcjami wklęsłymi (wypukłymi) względem x dla prawie wszystkich t, to $\bar{u}$ jest sterowaniem maksymalizującym (minimalizującym) $\mathfrak{C}[u]$.*

Ćwiczenie 11.8. Najkrótsza droga łącząca zadany punkt początkowy w chwili 0 z pionową prostą w t_1.

Sprawdzić dostateczność dla wcześniej wyliczonego rozwiązania ćwiczenia 11.1.

Ćwiczenie 11.9. Sprawdzić dostateczność dla wcześniej wyliczonego rozwiązania ćwiczenia 11.2: liniowego zagadnienia maksymalizacji z $x(0) = 4$, $\Omega = [0, 2]$, $t_1 = 2$

$\mathfrak{f}^0(t, x, u) = 2x - 3u$, $f(t, x, u) = x + u$, $\mathfrak{g} \equiv 0$.

Ćwiczenie 11.10. Sprawdzić dostateczność dla wcześniej wyliczonego rozwiązania ćwiczenia 11.3: maksymalizacji wypłaty z $x(0) = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $t_1 = 1$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = x - u^2$, $f(t, x, u) = -u$, $\mathfrak{g} \equiv 0$.

Ćwiczenie 11.11. Sprawdzić dostateczność dla wcześniej wyliczonego rozwiązania ćwiczenia 11.4 minimalizacji kosztu z $x(0) = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $t_1 = 1$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = x^2 + u^2$, $f(t, x, u) = x - u$, $\mathfrak{g} \equiv x$.

Ćwiczenie 11.12. Maksymalizacja zysków z łowiska w różnych wersjach.

Dane $x(0) > 0$, $\mathfrak{f}^0(t, x, u) = \ln(ux)$, $f(t, x, u) = (1 + r - u) \cdot x$, **a)** $\Omega = (0, M]$ i $\mathfrak{g} \equiv 0$;
b) $\Omega = (0, +\infty)$ i $\mathfrak{g}(x) = x$
c) $\Omega = (0, +\infty)$ i $\mathfrak{g}(x) = \ln x$.

Czy wyliczone w ćwiczeniach 11.5 i 11.7 sterowania spełniające warunki konieczne są optymalne?

11.3. Dyskontowanie

W problemach ekonomicznych przeważnie występuje czynnik dyskontujący. Jest to związane z tym, że ta sama złotówka otrzymana dziś i otrzymana za rok ma zupełnie inną wartość - choćby z tego powodu, że złotówkę otrzymaną dziś mogę włożyć na lokatę i za rok otrzymać więcej.

W modelach z czasem ciągłym czynnikiem dyskontującym jest $e^{-\zeta \cdot t}$ dla pewnego $\zeta > 0$.

Liczba ζ to zazwyczaj tzw. *stopa procentowa kapitalizacji ciągłej*, jeśli liczymy jedynie obiektywną wartość pieniądza – $e^{-\zeta \cdot t}$ jest to wówczas kwota, jaką możemy otrzymać dziś pod zastaw 1zł w czasie 1. Może to też być pewna inna stała dodatnia, jeśli chcemy odzwierciedlić nasze własne preferencje co do oczekiwania na pieniądz – wówczas ζ jest naszą prywatną miarą niecierpliwości.

Zagadnienie z dyskontowaniem ma postać
$\mathfrak{C}(u) = \int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t)) \cdot e^{-\zeta \cdot t} dt + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1)) \cdot e^{-\zeta \cdot t_1}$ przy
$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$
z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$
i ograniczeniu na sterowanie $u(t) \in \Omega$ dla każdego t.

Możemy zastosować zwykłą zasadę maksimum Pontriagina.

Hamiltonian ma teraz postać
$H(t, \lambda, x, u) = \mathfrak{f}^0(t, x(t), u(t)) \cdot e^{-\zeta \cdot t} + \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle$,
a warunek transwersalności $\lambda(T) = \mathfrak{g}_x(T, x(T)) \cdot e^{-\zeta \cdot T}$.

Nawet jeśli wyjściowe funkcje były niezależne od czasu, to teraz problem stał się nieautonomiczny – i to każde z równań, jak otrzymamy z zasady maksimum. A tak nie musi być.
Wskazówka. Rozważyć zmienną dualną $\mu(t) = \lambda \cdot e^{\zeta \cdot t}$ *i Hamiltonian wartości obecnej* H^C *zdefiniowany jako* $H^C(t, \mu, x, u) = \frac{H(t,\lambda,x,u)}{e^{-\zeta \cdot T}}$.

Ćwiczenie 11.13. Zapisać zasadę maksimum Pontriagina przy użyciu nowych zmiennych i podziwiać odzyskaną autonomiczność (kiedy wyjściowe funkcje były niezależne od t).

Rozwiązanie. Równania na trajektorie stanu i kostanu oraz sterowanie dla problemu maksymalizacji (minimalizacji) będą miały w nowych zmiennych następującą postać:
$\dot{x_*}(t) = \frac{\partial H^C(t,\mu,x_*(t),u_*(t))}{\partial \mu}$ z warunkiem początkowym $x_*(0) = x_0$;
$\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial H^C(t,\mu,x_*(t),u_*(t))}{\partial x} + \mu \cdot \zeta$ z warunkiem końcowym $\mu(t_1) = \frac{\partial \mathfrak{g}(t,x_*(t_1))}{\partial x}$;
$u_*(t) \in \operatorname{Argmax}_{u \in \Omega} H^C(t, \mu, x_*(t), u)$
$(u_*(t) \in \operatorname{Argmin}_{u \in \Omega} H^C(t, \mu, x_*(t), u))$.

Ćwiczenie 11.14. Do zadań 11.1, 11.2, 11.3 i 11.4 dorzućmy teraz czynnik dyskontowy $e^{-\zeta t}$ i wyprowadźmy nowe warunki konieczne i dostateczne ze skorygowanej zasady maksimum wyliczonej w ćwiczeniu 11.13.

Ćwiczenie 11.15. Do zadań 11.5 i 11.7 dorzućmy teraz czynnik dyskontowy $e^{-\zeta t}$ i wyprowadźmy nowe warunki konieczne i dostateczne ze skorygowanej zasady maksimum wyliczonej w ćwiczeniu 11.13.

11.4. Funkcja wartości i równanie Bellmana

W tym rozdziale sformułujemy warunki dostateczne na to, aby zadane sterowanie minimalizowało funkcjonał kosztu (lub maksymalizowało funkcjonał wypłaty) korzystające z oczywistego spostrzeżenia poczynionego przez Bellmana [9] – zasadę optymalności.

Stwierdzenie 11.1 (Zasada optymalności Bellmana)**.** *Polityka [strategia] optymalna ma tę własność, że jakikolwiek jest stan początkowy i początkowa decyzja, pozostałe decyzje muszą tworzyć politykę [strategię] optymalną ze względu na stan wynikły z pierwszej decyzji.*

Metoda postępowania oparta na tej zasadzie, którą opiszemy w tym rozdziale została zaproponowana przez Bellmana [9] pod nazwą *programowania dynamicznego*.

Sformułujemy warunki dostateczne na to, żeby pewna funkcja zwracała nam wartość minimalną funkcjonału kosztu (bądź maksymalną funkcjonału wypłaty), a wyliczone sterowanie było sterowaniem optymalnym, dla zagadnienia Bolza ze swobodnym punktem końcowym (i ustalonym czasem końcowym).

Aby to zrobić, zaczniemy od pozornego utrudnienia – zamiast szukać jedynie rozwiązania zadanego problemu sterowania optymalnego, będziemy chcieli znaleźć rozwiązania dla całej klasy sterowań optymalnych, zawierających nasz wyjściowy problem.

Nie będą to zagadnienia sztuczne. Wyobraźmy sobie, że wybraliśmy sterowanie optymalne i stosujemy je. Upłynął pewien czas od początkowego 0 – mamy czas $\bar{t}$ i stan systemu zmienił się zgodnie z odpowiedzią na nasze sterowanie i teraz jest równy $\bar{x}$. W sposób naturalny możemy sformułować nowe zagadnienie sterowania optymalnego – startujące w chwili $\bar{t}$ ze stanu $\bar{x}$ z funkcjonałem kosztu/wypłaty $\int_{\bar{t}}^{t_1} \mathfrak{f}^0(x(t), u(t))dt + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))$. Zasada optymalności mówi, że wybrane przez nas sterowanie optymalne dla początkowego zagadnienia jest sterowaniem optymalnym dla nowego zagadnienia.

Dla tej klasy zagadnień będziemy szukać *funkcji wartości* – przypisującej parom $(\bar{t}, \bar{x})$ wartość minimalną funkcjonału kosztu (lub maksymalną funkcjonału wypłaty) dla nowego zagadnienia.

To pozorne utrudnienie bardzo nam jednak ułatwi znajdowanie optymalnego sterowania. Przy danej funkcji wartości sterowanie optymalne jest zdefiniowane przy pomocy rodziny statycznych zagadnień optymalizacji zależnych od funkcji wartości, określonych na zbiorze parametrów sterujących Ω.

Wprowadzimy pomocnicze oznaczenie – funkcja $\mathfrak{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ (rozszerzająca pojęcie wyjściowej funkcji kosztu lub wypłaty $\mathfrak{C}$) oznaczająca wartość funkcjonału kosztu lub wypłaty wzdłuż trajektorii będzie zdefiniowana jako
$\mathfrak{C}[\bar{t}, \bar{x}, u] = \int_{\bar{t}}^{t_1} \mathfrak{f}^0(x(t), u(t))dt + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))$, gdzie trajektoria x jest zdefiniowana równaniem różniczkowym $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ z warunkiem początkowym $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Dla ustalenia uwagi, sformułujemy problem w wersji dla minimalizacji funkcjonału kosztu.

Definicja 11.1. Funkcję $W^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy *funkcją wartości* (dla klasy zagadnień minimalizacji $\mathfrak{C}[t, x, u]$), jeśli
$W^*(x, t) = \inf_{u \in \Omega} \mathfrak{C}[t, x, u]$.

Przy użyciu tych oznaczeń możemy przeformułować zasadę optymalności jako:
jeśli u_* jest sterowaniem optymalnym dla $\mathfrak{C}[0, x_0, u]$ (czyli, równoważnie sterowaniem optymalnym dla $\mathfrak{C}[x_0]$) a x_* odpowiadającą mu trajektorią, to dla każdego $\bar{t} > 0$ $u_*|_{t \geqslant \bar{t}}$ jest optymalną trajektorią dla minimalizacji $\mathfrak{C}[\bar{t}, x_*(\bar{t}), u]$.

Sformułujemy również warunek dostateczny.

Twierdzenie 11.5. *Jeśli funkcja* $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *klasy* C^1 *spełnia równanie różniczkowe cząstkowe*
$-\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \inf_{u \in \Omega} \mathfrak{f}^0(x, u) + \langle \nabla_x W(x, t), f(x, u) \rangle$ *(*równanie Bellmana*)*
z warunkiem końcowym
$W(x, t_1) = \mathfrak{g}(t_1, x)$,
to

a) dla każdego sterowania u*, czasu* t *i stanu* x
$W(x, t) \leqslant \mathfrak{C}[t, x, u]$.

b) Jeśli ponadto istnieje funkcja $v_* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*, której odpowiada absolutnie ciągła trajektoria* x_* *taka, że*
$v_*(x, t) \in \mathrm{Argmin}_{u \in \Omega} \mathfrak{f}^0(x, u) + \langle \nabla_x W(x, t), f(x, u) \rangle$*, to* W *jest funkcją wartości i* $W(x, t) = \mathfrak{C}[t, x, u_*]$ *dla sterowania* u_* *spełniającego* $u_*(t) = v_*(x_*(t), t)$*, czyli* u_* *jest sterowaniem optymalnym w pętli otwartej.*

Dowód. a) Niech x będzie daną absolutnie ciągłą odpowiedzią na sterowanie u.

Wówczas funkcja $w(t) = W(t, x(t))$ jest absolutnie ciągła na dowolnym przedziale $[a, b] \subset (0, t_1)$, więc możemy ją zróżniczkować prawie wszędzie i
$\frac{\mathrm{d}\, w(t)}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial W(x(t),t)}{\partial t} + \langle \nabla_x W(x(t), t), \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t})\rangle = \frac{\partial W(x(t),t)}{\partial t} + \langle \nabla_x W(x(t), t), f(x(t), u(t)) \rangle$ dla prawie każdego t.

Ponieważ nie mamy absolutnej ciągłości na całym przedziale $[0, t_1]$, ograniczymy się do $[a, b]$. Mamy wówczas
$W(b, x(b)) - W(a, x(a)) = w(b) - w(a) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\, w(t)}{\mathrm{d}\, t} \mathrm{d}\, t = \int_a^b \frac{\partial W(x(t),t)}{\partial t} + \langle \nabla_x W(x(t), t), f(x(t), u(t)) \rangle \mathrm{d}\, t \geqslant \int_a^b -\mathfrak{f}^0(x(t), u(t))\, \mathrm{d}\, t$.

Jeśli teraz z otrzymaną nierównością przejdziemy do granicy przy $a \to 0$ i $b \to t_1$, to otrzymamy
$W(t_1, x(t_1)) - W(0, x(0)) \geqslant -\int_0^{t_1} \mathfrak{f}^0(x(t), u(t))\, \mathrm{d}\, t$.

Ponieważ $W(t_1, x(t_1)) = \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))$, otrzymujemy stąd żądaną nierówność.

b) Dla u_* i x_* powtarzamy dowód a) z tym, że zamiast nierówności będziemy mieć równość. □

Uwaga 11.3. Funkcja v_* jest optymalnym sterowaniem w postaci rozszerzonej zamkniętej pętli (w niektórych podręcznikach tę postać również nazywamy zamkniętą pętlą) – w takiej postaci otrzymujemy optymalne sterowanie z równania Bellmana. Łatwo widać, że w ogólnym przypadku w skończonym horyzoncie czasowym nie da się go przedstawić jako „sprzężenie zwrotne” zależne jedynie od x.

Uwaga 11.4. Można też udowodnić wersję twierdzenia 11.5 bez ustalonego czasu końcowego – patrz na przykład Cesari [14] s. 502-505 lub Başar, Olsder [39] s. 236-237.

Ćwiczenie 11.16 (Zagadnienie liniowo-kwadratowe)**.** Rozwiązać przy pomocy równania Bellmana (z twierdzenia 11.5) problem minimalizacji kosztów z $\mathfrak{f}^0(x,u) = ax^2 + bu^2$, $\mathfrak{g}(x) = cx^2$, $f(x,u) = dx + fu$ i $\Omega = \mathbb{R}$, gdzie $b > 0$, $a, c \geqslant 0$.

Wskazówka. Po wyliczeniu kandydata na $v_*(x,t)$ szukamy W w postaci $C(t) \cdot x^2$.

11.4.1. Nieskończony horyzont czasowy

W przypadku, kiedy rozważamy nieskończony horyzont czasowy a zagadnienie jest autonomiczne, funkcja wartości przestaje być zależna od czasu. Dlatego też dla nieskończonego horyzontu czasowego twierdzenie o warunku dostatecznym ma prostszą postać.

Twierdzenie 11.6. *Jeśli funkcja $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 spełnia równanie różniczkowe*
$\inf_{u\in\Omega} \mathfrak{f}^0(x,u) + \langle \nabla W(x), f(x,u)\rangle = 0$
z warunkiem końcowym
$\liminf_{t\to\infty} W(x(t)) = 0$ *dla każdej trajektorii x osiągalnej z x_0 to*
a) dla każdego sterowania u i stanu x $W(x) \leqslant \mathfrak{C}(t,x,u)$.
b) Jeśli ponadto istnieje funkcja $v_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, której odpowiada absolutnie ciągła trajektoria x_*, taka, że
$v_*(x) \in \mathrm{Argmin}_{u\in\Omega} \mathfrak{f}^0(x,u) + \langle \nabla_x W(x), f(x,u)\rangle$ *z warunkiem końcowym*
$\lim_{t\to\infty} W(x_*(t)) = 0$*, to W jest funkcją wartości, v_* jest optymalnym sterowaniem w postaci sprzężenia zwrotnego i*
$W(x) = \mathfrak{C}(t,x,u_*)$ *dla sterowania u_* spełniającego $u_*(t) = v_*(x_*(t))$, czyli u_* jest sterowaniem optymalnym w pętli otwartej.*

Dowód. a) Wynika z zastosowania z twierdzenia 11.5 dla zagadnień optymalizacyjnych ze skończonym horyzontem czasowym T i funkcją $\mathfrak{g} = W$ oraz faktu, że W jest niezależna bezpośrednio od czasu. Otrzymujemy
$\int_0^T \mathfrak{f}^0(x(t),u(t))\,\mathrm{d}\,t + W(x(T)) \geqslant W(x(0))$.

Bierzemy granicę dolną przy $T \to \infty$ i otrzymujemy żądaną nierówność.

b) Dla przypadku u_* mamy równość
$\int_0^T \mathfrak{f}^0(x_*(t),u_*(t))\,\mathrm{d}\,t + W(x_*(T)) = W(x_*(0))$, która zachowuje się przy przejściu do granicy. □

Uwaga 11.5. Jeśli zbiór stanów jest jednowymiarowy, to zamiast równania cząstkowego w nieskończonym horyzoncie czasowym mamy równanie zwyczajne. Problemem jest jedynie warunek końcowy w nieskończoności – zwłaszcza dla obliczeń numerycznych.

Ćwiczenie 11.17 (Zagadnienie liniowo-kwadratowe z nieskończonym horyzontem czasowym). Rozważyć problem minimalizacji kosztów z $\mathfrak{f}^0(x,u) = ax^2 + bu^2$, $f(x,u) = dx + fu$ i $\Omega = \mathbb{R}$, gdzie $b > 0$, $a, c \geqslant 0$.

Czy można skorzystać z z twierdzenia 11.6?

11.4.2. Funkcja wartości i równanie Bellmana dla zagadnień z dyskontowaniem

Rozważamy teraz zagadnienia minimalizacji funkcjonałów
$\int_{\bar{t}}^{t_1} \mathfrak{f}^0(x(t),u(t))e^{-\zeta\cdot t}dt + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))e^{-\zeta\cdot t_1}$ w skończonym horyzoncie czasowym i
$\int_{\bar{t}}^{\infty} \mathfrak{f}^0(x(t),u(t))e^{-\zeta\cdot t}dt$ w nieskończonym horyzoncie czasowym.

Jeżeli potrakujemy czynnik dyskontujący jako dodatkową współrzędną zmiennej stanu, możemy zastosować odpowiednie wersje twierdzeń 11.5 i 11.6. Jednakże tak otrzymane równanie jest trudne w interpretacji i zbyt złożone. Dlatego dla zagadnień z dyskontowaniem formułuje się inną postać równania Bellmana.

Dla zagadnień z dyskontowaniem ponownie definiujemy nasze pomocnicze oznaczenie – funkcja $\mathfrak{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ wzdłuż trajektorii będzie zdefiniowana jako
$\mathfrak{C}[\bar{t}, \bar{x}, u] = \int_{\bar{t}}^{t_1} \mathfrak{f}^0(x(t),u(t))e^{-\zeta\cdot(t-\bar{t})}dt + \mathfrak{g}(t_1, x(t_1))e^{-\zeta(t_1-\bar{t})}$ w skończonym horyzoncie czasowym i
$\mathfrak{C}[\bar{t}, \bar{x}, u] = \int_{\bar{t}}^{\infty} \mathfrak{f}^0(x(t),u(t))e^{-\zeta\cdot(t-\bar{t})}dt$ w nieskończonym horyzoncie czasowym,
dla trajektorii x zdefiniowanej równaniem różniczkowym $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ z warunkiem początkowym $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Interpretacja jest analogiczna jak w przypadku bez dyskontowania – do chwili $\bar{t}$ stosowaliśmy pewne sterowanie, które zaprowadziło nas do stanu $\bar{x}$. Teraz mamy nowy problem optymalizacyjny – chcemy zminimalizować zdyskontowany funkcjonał kosztu od tego momentu. Choć matematycznie różnica pomiędzy dyskontowaniem na chwilę 0, a na chwilę $\bar{t}$ to tylko przemnożenie przez stałą, jednak dla ekonomisty oczywiste jest, że dyskontujemy zawsze na chwilę podejmowania decyzji, czyli $\bar{t}$. Ponadto okaże się, że dla tak zdefiniowanej zdyskontowanej funkcji wartości otrzymamy proste równanie Bellmana i warunek końcowy.

Ćwiczenie 11.18. Wypisać i udowodnić zasadę maksimum dla zagadnienia z dyskontowaniem, tak aby otrzymać równość $W(\bar{x}, \bar{t}) = \mathfrak{C}[\bar{t}, \bar{x}, u]$ dla optymalnego sterowania u.

a) przy skończonym horyzoncie czasowym ;

b) przy nieskończonym horyzoncie czasowym.

Wskazówka. Można albo powtórzyć z niewielkimi zmianami schemat dowodowy dla zagadnienia bez dyskontowania, albo potraktować zagadnienie z dyskontowaniem jako zagadnienie autonomiczne z $n+1$- wymiarową zmienną stanu, gdzie dodatkowa współrzędna to czynnik dyskontujący. Ponadto założyć, że wchodzi on do funkcji wartości multiplikatywnie.
Rozwiązanie. Przy skończonym horyzoncie czasowym równania Bellmana ma postać
$-\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \zeta \cdot W(x,t) = \inf_{u\in\Omega} \mathfrak{f}^0(x,u) + \langle \nabla_x W(x,t), f(x,u)\rangle$
z warunkiem końcowym $W(x, t_1) = \mathfrak{g}(t_1, x)$,
Przy nieskończonym horyzoncie czasowym równanie Bellmana ma postać
$\inf_{u\in\Omega} \mathfrak{f}^0(x,u) + \langle \nabla W(x), f(x,u)\rangle = \zeta \cdot W(x)$
z warunkiem końcowym
$\operatorname{liminf}_{t\to\infty} W(x(t)) \cdot e^{-\zeta t} = 0$ dla każdej trajektorii x osiągalnej z x_0.

Ćwiczenie 11.19. Rozważmy nasze zagadnienie maksymalizacji zysku z łowiska, tyle że teraz z nieskończonym horyzontem czasowym i dyskontowaniem:

Dane $x(0) > 0$, $\mathfrak{f}^0(x,u) = \ln(ux)$, $f(x,u) = (r-u)\cdot x$, przy $\Omega = (0, M]$, gdzie M – odpowiednio duże.

Wskazówka. Można to zrobić na co najmniej dwa sposoby:
1. założyć pewną pewną postać funkcji wartości (tu $A + B \cdot \ln x$), z równania Bellmana wyliczyć brakujące parametry, tak, aby było spełnione a na koniec sprawdzić, czy zachodzi warunek końcowy;
2. ograniczyć się do pewnej klasy sterowań (tu sterowania stałe w czasie), znaleźć optimum w tej klasie i sprawdzić, czy spełnia równanie Bellmana;
3. poza tym przy rozwiązywaniu zagadnień z nieskończonym horyzontem czasowym można uzyskać funkcję wartości jako granicę funkcji wartości dla zagadnień ze skończonym horyzontem czasowym (choć w tym konkretnym wypadku nie jest to ułatwienie).

Ćwiczenie 11.20. Rozwiązać jeszcze raz minimalizacji kosztów dla zagadnień liniowo-kwadratowych ze skończonym i nieskończonym horyzontem czasowym (zadania 11.16 i 11.17) z dyskontowaniem.

11.5. Teoria sterowania – problemy ekonomiczne

11.5.1. Optymalizacja konsumpcji w cyklu życia

W tym podrozdziale przedstawimy model optymalizacji konsumpcji w cyklu życia przez racjonalnego konsumenta, czasem nazywany zagadnieniem wyboru międzyokresowego.

Ten sam model możemy też zastosować do optymalizacji wydatków budżetowych w ciągu roku budżetowego. Zaproponowany tu model stanowi uciągloną wersję przypadku dyskretnego, który można znaleźć w wielu podręcznikach makroekonomii.

Pan Kowalski uważa, że uważa, że będzie żył jeszcze T czasu. Jego dochody w chwili t wyznacza zewnętrzna, deterministyczna funkcja $Y(t) \geqslant 0$.

Jego bieżąca funkcja wypłaty (nazywana w tym kontekście bieżącą funkcją użyteczności) to $U(C)$ ściśle rosnąca i ściśle wklęsła funkcja konsumpcji C.

Konsumenci mogą korzystać z idealnego konta bankowego, o jednakowej dla kredytów i lokat stopie procentowej r kapitalizacji ciągłej. Tak więc pan Kowalski może bez ograniczeń lokować lub zadłużać się, z jednym ograniczeniem – że w chwili T jego stan konta musi być nieujemny, ponieważ bank, znający doskonale zagadnienie optymalizacyjne klienta, nie pożyczy mu nigdy kwoty, której nie mógłby odzyskać z jego późniejszych zarobków.

Pan Kowalski chce zmaksymalizować użyteczność konsumpcji w cyklu życia, czyli
$\int_0^T U(C(t)) \cdot e^{-\zeta \cdot t} dt$, gdzie $\zeta > 0$ – jest miarą jego niecierpliwości. Bieżąca funkcja użyteczności U w notacji skryptu to funkcja wyłaty $\mathfrak{f}^0$.

Stan konta w chwili t, oznaczany przez $A(t)$ opisuje równanie różniczkowe:
$\dot{A}(t) = r \cdot A(t) + Y(t) - C(t)$ z warunkiem początkowym
$A(0) = A_0$. W notacji skryptu A to nasza zmienna stanu x, prawa strona równania definiuje więc funkcję f.

Parametrem sterującym jest wielkość konsumpcji C – w oznaczeniach skryptu jest to u. Zbiór parametrów sterujących $\Omega = \mathbb{R}_+$ $(= [0, +\infty)$.
Cel $A(T) \geqslant 0$ zapisujemy jako $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$.

Ćwiczenie 11.21. Pokazać, że pan Kowalski nic nie zamierza zabrać do grobu, czyli $A(T) = 0$.

Wskazówka. Można to pokazać to bez odwoływania się do zasady maksimum. Zasada maksimum w wersji zapisanej w twierdzeniu 11.1 w tym wypadku nie działa ze względu na ograniczenia na stan końcowy.

Ćwiczenie 11.22. a) Pokazać, że niezależnie jaką mierzalną funkcją jest Y i jakie jest A_0, jedyną wielkością, przez którą mają one wpływ na optymalną konsumpcję jest bogactwo („wealth”) zdyskonotowane na moment 0, czyli liczba $W = A_0 + \int_0^T Y(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt$, która ponadto powinna wyjść równa $\int_0^T C(t) \cdot e^{-r \cdot t} dt$.

b) Pokazać równocześnie, że zależność pomiędzy $C(t)$ a $C(s)$ jest zdefiniowana przy użyciu pochodnych U, przy czym dla $\zeta = r$ otrzymujemy stałą konsumpcję w cyklu życia.

Wskazówka. Aby obejść problem z nietypowym warunkiem końcowym można, korzystając z wyliczeń z ćwiczenia 11.21, potraktować to jako problem z ustalonym punktem końcowym – wówczas będzie zachodzić zasada maksimum bez warunku transwersalności na $\lambda(T)$.

Uwaga 11.6. Problem z ograniczeniem na wartość końcową zmiennej stanu można rozwiązać metodami podanymi w tym skrypcie, rozważając dwa przypadki – optymalizację bez tego ograniczenia (wówczas korzystamy z zasady maksimum z warunkiem transwersalności) i optymalizację z ustalonym punktem końcowym równym zadanemu ograniczeniu.

Istnieje także wiele gotowych wersji zasady maksimum dla zagadnień z ograczeniami na zmienną stanu (nie tylko wartość końcową) – zainteresowani mogą je znaleźć na przykład w opracowaniach Chiang [15] lub Hartl, Sethi, Vickson [36].

11.5.2. „Chcemy wygrać następne wybory!” czyli polityczny cykl koniunkturalny

Model Nordhausa, przykład podany za Chiang [15].

Do następnych wyborów zostało T czasu. Obecnie panujący rząd jest zainteresowany maksymalizacją szansy na wygranie następnych wyborów, a ta z kolei jest ściśle rosnącą funkcją zadowolenia społeczeństwa w chwili wyborów.

W tym uproszczonym modelu są tylko dwa parametry ekonomiczne związane ze sobą i wpływające na zadowolenie społeczeństwa pośrednio lub bezpośrednio kontrolowane przez rząd. Są to *inflacja* Π (będąca pod bezpośrednią kontrolą rządu emitującego pieniądz) i *bezrobocie* U powiązane z Π zależnością (zwaną w ekonomii *krzywą Philipsa* i potwierdzaną przez wiele lat przez dane empiryczne).
W ogólnym przypadku zależność opisana krzywą Philipsa ma postać $\Pi = \phi(U) + a \cdot \Pi^e$, gdzie Π^e to *oczekiwana inflacja* (nazywana też *oczekiwaniami inflacyjnymi*), $\phi' < 0$, a $a \in (0, 1]$.

Zakładamy ponadto tak zwane adaptacyjne oczekiwania, czyli $(\Pi^e)' = b \cdot (\Pi - \Pi^e)$ – oczekiwania inflacyjne zmieniają się proporcjonalnie do pomyłki w szacowaniu przez nie rzeczywistej inflacji.

Bieżące zadowolenie społeczeństwa mierzy funkcja $v(U, \Pi)$ o obu pochodnych cząstkowych ujemnych, przy czym przeważnie ludzie gorzej znoszą duże wartości inflacji niż bezrobocia – co można odzwierciedlić funkcją liniową względem Π i kwadratową względem U.

Podejmując decyzję wyborczą ludzie lepiej pamiętają to, co jest bliższe. To daje nietypowe „dyskontowanie” w funkcji maksymalizowanej:
$\int_0^T v(U(t), \Pi(t)) e^{\zeta \cdot t} dt$.

Aby uprościć model, wyrugowujemy ze wzorów faktyczną inflację Π. Po przekształceniach otrzymujemy zagadnienie
zmaksymalizować $\int_0^T v(U(t), \Phi(U(t)) + a \cdot \Pi^e(t)) dt$
przy $\dot{\Pi}^e(t) = b \cdot (\Phi(U) + (1 - a) \cdot \Pi^e)$
z warunkiem początkowym $\Pi^e(0) = \Pi^e_0 \geqslant 0$.

W tak przedefiniowanym równaniu zmienną stanu będzie Π^e, a sterowaniem U.

Aby uzyskać wyniki analityczne, Nordhaus analizował model liniowo-kwadratowy (liniowa dynamika, kwadratowa wklęsła funkcja wypłaty bieżącej). Potraktujemy jego model jako ćwiczenie.

Ćwiczenie 11.23. Znaleźć optymalne sterowanie (poziom bezrobocia U) i trajektorię oczekiwanej inflacji Π^e dla modelu politycznego cyklu koniunkturalnego z

$v(U,\Pi) = -U^2 - h \cdot \Pi$ dla stałej $h > 0$ i
$\phi(U) = j - k \cdot U$ dla $j, k > 0$.

Następnie obliczyć, jak zachowuje się faktyczna inflacja Π.

Interpretacja ekonomiczna wyników ćwiczenia 11.23 i implikacje tychże w rzeczywistości.

Optymalne U jest malejącą funkcją czasu, a inflacja i oczekiwania rosnącą.

Ten pierwszy fakt oznacza, że dla rządu kierującego się maksymalizacją funkcji wypłaty jak określona w ćwiczeniu 11.23 optymalne jest tuż po wyborach ustanowienie wysokiego poziomu bezrobocia, żeby było z czego schodzić. „Ustanowienie wysokiego poziomu bezrobocia" wynika z tego, że tylko po wyborach można pozwolić sobie na duszenie inflacji (podobnie jak i inne mało popularne, acz niezbędne reformy).

Tak naprawdę to przypominamy sobie, że bezrobocia rząd nie ustawia – jest ono skutkiem takiej a nie innej polityki monetarnej – czyli obniżenie bezrobocia jest skutkiem zwiększania inflacji. Jeśli pomyślimy o tym, że ten sam problem optymalizacji będzie miał miejsce po wyborach, to jasne jest, że potem ponosimy dodatkowe koszty – bo same oczekiwania inflacyjne zwiększają inflację, a duszenie inflacji powoduje wzrost bezrobocia...

A zatem potem mamy następne wybory i kolejny rząd ma wysokie Π_0^e na starcie i to samo zagadnienie optymalizacyjne.

Warto dodać jeszcze ciekawostkę: krzywą Philipsa i polityczny cykl koniunkturalny potwierdzały dane empiryczne. Do czasu – ponieważ ludzie się uczą. Oczekiwania adaptacyjne z czasem zamieniły się na racjonalne (wiemy, jak działa rząd, więc jesteśmy w stanie wyliczyć faktyczną inflację będącą skutkiem jego działań), a dodruk pustych pieniędzy przestał wpływać na realny rynek, powodując jedynie inflację, bez wpływu na zmniejszenie bezrobocia.

Niestety, proceder nakręcania inflacji przed wyborami, o ile nie ma ograniczeń prawnych, często nadal ma miejsce.

11.5.3. Wydobycie surowców nieodnawialnych przez właściciela – monopolistę. Model Hotellinga

Przykład podany za Chiang [15].

Koszt wydobycia ilości u surowca (ropy naftowej, węgla, etc.) opisuje funkcja $c(u)$ rosnąca (zazwyczaj ściśle), wypukła (zazwyczaj ściśle) i nieujemna. Jeśli na rynku jest $u > 0$ surowca, wówczas ustala się nieujemna cena $p(u)$ za jednostkę, przy czym funkcja p, nazywana przez ekonomistów odwrotną funkcją popytu, jest malejąca (zazwyczaj ściśle na zbiorze tych u dla których jest niezerowa), gdyż ludzie są skłonni zapłacić więcej za towar deficytowy.

Monopolista – posiadacz złoża chce zmaksymalizować łączne zdyskontowane zyski, czyli $\int_0^T [p(u(t)) \cdot u(t) - c(u(t))] \cdot e^{-\zeta \cdot t} dt$, przy czym końcowy czas T może być skończony lub równy $+\infty$.

Zazwyczaj $\zeta = r \geqslant 0$, gdzie r to rynkowa stopa procentowa, przy oczywistym równaniu stanu $\dot{x}(t) = -u(t)$ dla $x(t) > 0$ i $\dot{x}(t) = 0$ dla $x(t) = 0$.

Równie oczywiste jest ograniczenie „z próżnego i Salomon nie naleje", czyli jeśli $x(t) = 0$, to jedynym dostępnym sterowaniem jest 0.

Model opisuje też dowolną sytuację wyprzedaży zapasów.

Ćwiczenie 11.24. Rozwiązać problem wydobycia surowców nieodnawialnych przy $p(u) = (b - a \cdot u)^+$ dla pewnych stałych $a, b > 0$ i c stałym dla przypadku

a) bez dyskontowania ($\zeta = 0$);

b) z dyskontowaniem ($\zeta > 0$).

Wskazówka. Zagadnienie sterowania optymalnego tylko pozornie jest z ustalonym czasem końcowym i wolnym stanem końcowym – w chwili osiągnięcia $x(t_1) = 0$ kończy się jakikolwiek wybór.

Mamy więc albo zagadnienie z wolnym czasem końcowym $t_1 \leqslant T$ i ustalonym stanem końcowym 0 (a więc możemy zastosować zasadę maksimum bez warunku transwersalności, z pewnym parametrem λ_0), albo zagadnienie z ustalonym czasem końcowym i swobodnym stanem końcowym $x(T) > 0$. Po porównaniu wypłat otrzymamy sterowanie optymalne.
Rozwiązanie.
W każdym z przypadków $x(T) = 0$.
a) Sterowanie optymalne jest stałe.
b) Sterowanie optymalne maleje w czasie.

Ćwiczenie 11.25. Jak się zmieni rozwiązanie problemu znalezienia sterowania optymalnego dla wydobycia surowców nieodnawialnych przy $p = (b - a \cdot u)^+$ dla pewnych stałych $a, b > 0$, jeśli $c(u) = d_1 \cdot u^2 + d_2 \cdot u + d_3$ dla $d_1 \geqslant 0$, d_2, d_3 dowolnych?

Ćwiczenie 11.26. Rozważyć problem wydobycia surowców nieodnawialnych ze skończonym horyzontem czasowym T w najbardziej ogólnej postaci w przypadkach z dyskontowaniem i bez.

Wypisać warunek jaki musi spełniać iloraz pochodnych bieżącej funkcji wypłaty dla sterowania optymalnego w dwóch różnych momentach czasu t i s.

Co on implikuje, jeśli bieżąca funkcja wypłaty jest ściśle wklęsła?

11.5.4. Łowimy ryby, wycinamy puszczę – czyli exploatacja surowców odnawialnych

W pojęciu eksploatacja surowców odnawialnych mieści się cała klasa zagadnień tzw. ekonomii ekologicznej, w której przedmiotem eksploatacji jest ekosystem lub jego część. Są to zagadnienia od jednowymiarowych do bardzo złożonych.

Najprostsze modele eksploatacji, w których mamy jedną zmienną stanu, jak na przykład populacja śledzia bałtyckiego albo powierzchnia lasu ignorują wielowymiarowy charakter zależności opisujących stan ekosystemu. Bardziej złożone biorą pod uwagę zależności pomiędzy gatunkami (na przykład interakcje drapieżnik-ofiara), a nawet strukturę wiekową populacji w ramach gatunku.

Zmienna stanu opisuje stan ecosystemu – jest to na przykład wektor, którego współrzędnymi są liczności osobników każdego z gatunków. Parametrem sterującym może być wielkość eksploatacji, albo np. nakłady na eksploatację.

Tym razem równanie stanu ma postać $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, przy czym przeważnie zakładamy, że jeśli $x^i = 0$, to $f^i(x, u) \equiv 0$ (jeśli gatunek wyginął, to nie da się go odtworzyć). Ponadto eksploatacja zazwyczaj nie może być ujemna.

Właściciel łowiska maksymalizuje łączną zdyskontowaną użyteczność eksploatacji
a) $\int_0^\infty [U(u(t), x(t)) \cdot e^{-\zeta \cdot t} dt$ albo
b) $\int_0^{t_1} [U(u(t), x(t)) \cdot e^{-\zeta \cdot t} dt + \mathfrak{g}(x(t_1)) \cdot e^{-\zeta \cdot t_1}$ (kiedy postanowię przejść na emeryturę, prawa do łowiska mogę sprzedać).

Różne wersje tego modelu badaliśmy w ćwiczeniach 11.5, 11.7, 11.12 i 11.19.

Funkcja U może też mieć postać jak funkcja wypłaty bieżącej w modelu Hotellinga (podrozdział 11.5.3) przy czym koszt dodatkowo może zależeć od stanu systemu – $U(u, x) = p(u) \cdot u - c(u, x)$ – i być względem niego malejący (wyłowienie tony śledzia kosztuje dużo, jeśli śledzie prawie wyginęły, natomiast jest tańsze, gdy jest ich pełno).

Ćwiczenie 11.27. Rozwiązać problem wydobycia surowców odnawialnych będący modyfikacją modelu Hotellinga z ćwiczenia 11.24 ($p(u) = (b - a \cdot u)^+$ dla pewnych stałych $a, b > 0$, stałym c, skończonym horyzontem czasowym T i $\Omega = \mathbb{R}_+$) przy dynamice stanu systemu $\dot{x}(t) = r \cdot x - u$ i ograniczeniu na zmienną stanu $x(t) \geqslant 0$ dla każdego $t \leqslant T$.

Rozważyć dwa przypadki

a) bez dyskontowania ($\zeta = 0$);
b) z dyskontowaniem ($\zeta > 0$).

Przykładem zagadnienia wielowymiarowego jest sytuacja, gdy mamy dwa gatunki, a pomiędzy nimi trzy możliwe relacje: symbioza, konkurencja o wspólne źródło pokarmu i drapieżnik-ofiara.

Ćwiczenie 11.28. Mamy dwa gatunki ryb, pomiędzy którymi zachodzą różne interakcje opisane układem równań
$\dot{x}^1(t) = r \cdot x^1(t) + q^1 \cdot x^2(t) - u^1(t)$,
$\dot{x}^2(t) = q^2 \cdot x^1(t) + r \cdot x^2(t) - u^2(t)$,
o ile $x^1(t), x^2(t) > 0$.

x^i to ilość osobników i-tego gatunku, a u^i połowy tegoż gatunku.

Rozważamy skończony horyzont czasowy T.

Dla uproszczenia zbiór parametrów sterujących ma postać $[0, M] \times [0, M]$, gdzie M jest takie, że odpowiedź na każde sterowanie mierzalne spełnia $x^1(t), x^2(t) > 0$ dla każdego $t < T$.

Liczba $r > 0$, natomiast znaki q^1 i q^2 zależą od rodzaju relacji pomiędzy gatunkami: symbioza to $q^1, q^2 > 0$, konkurencja o wspólne źródło pokarmu to $q^1, q^2 < 0$, a drapieżnik-ofiara $q^1 > 0, q^2 < 0$. Dla ułatwienia rachunków niech $|q^1| = |q^2| = q < r$.

Funkcja wypłaty bieżącej to $U(u, x) = x^1 - a \cdot (u^1)^2 + b \cdot u^1 + x^2 - a \cdot (u^2)^2 + b \cdot u^2$, a końcowej $\mathfrak{g}(x) = x^1 + x^2$.

Znaleźć optymalne sterowanie i trajektorię.

Porównać optymalną trajektorię z odpowiedzią na $u \equiv 0$ („naturalną trajektorię systemu”).

Literatura

[1] N.U. Ahmed. *Dynamic Systems and Control with Applications.* World Sci., Singapore, 2006.
[2] V.M. Alekseev, V.M. Tichomirov, S.V. Fomin. *Optimalnoe upravlenie.* Nauka, Moskva, 1979.
[3] N. Andrei. Modern control theory — a historical perspective. *Studies in Informatics and Control*, 10:51–62, 2006.
[4] K.J. Arrow. Applications of control theory to economic growth. A.F. Veinott G.B. Dantzig, redaktor, *Mathematics of the Decision Sciences.* AMS, 1968.
[5] K. Sysaeter A.Seierstad. Sufficient conditions in optimal control theory. *International Economic Review*, 18(2):367–391, 1977.
[6] M. Athans, P. Falb. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications.* Dover Publications, Inc., New York, 2007. III wydanie.
[7] A. Bacciotti. *Teoria matematica dei controlli.* Celid, Torino, 1998.
[8] S. Barnet, G. Cameron. *Introduction to Mathematical Control Theory.* Oxford University Press, Oxford, 1985.
[9] R. Bellman. *Dynamic Programming.* Princeton University Press, 1957.
[10] L.D. Berkovitz. *Optimal Control Theory.* Springer, New York, 1974.
[11] A. Birkholc. *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych.* PWN, Warszawa, 2001.
[12] W.G. Bołtianski. *Matematyczne metody sterowania optymalnego.* WN-T, Warszawa, 1971.
[13] A. Bressan, B. Piccoli. *Introduction to the Mathematical Theory of of Control.* American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, 2007.
[14] L. Cesari. *Optimization Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag, 1983.
[15] A.C. Chiang. *Elementy dynamicznej optymalizacji.* Dom Wydawniczy Elipsa/Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych, 1992.
[16] E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* Tata McGraw–Hill Publishing Company, New Delhi, 1972.
[17] B.D. Craven. *Control and Optimization.* Chapman and Hall, 1995.
[18] L.C. Evans. *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory.* w internecie: http://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf.
[19] I.V. Girsanov. *Lecture on Mathematical Theory of Extremum Problems.* Springer, Berlin, 1972. Lekcji po matematiceskoj teorii ekstremalnych zadac, Moskwa 1970.
[20] W. Hahn. *Stability of motion.* Springer, New York, 1967.
[21] P. Hartman. *Ordinary differential equations.* John Wiley and Sons Inc., New York, 1964.
[22] L. Hocking. *Optimal Control: an Introduction to the Theory with Applications.* Oxford University Press, Oxford, 1991.
[23] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Aris. *Topics in Mathematical Control Theory.* McGraw-Hill, 1969.
[24] D.E. Kirk. *Optimal Control Theory - An Introduction.* Dover Publ., Mineola, 2004.
[25] M. Kurz K.J. Arrow. *Public Investment, the Rate of Return, and Fiscal Policy.* John Hopkins University Press, 1970.
[26] G. Knowles. *An Introduction to Applied Optimal Control.* Academic Press, New York, 1981.
[27] E.B. Lee, L. Marcus. *Foundations of Optimal Control Theory.* Wiley, 1991.
[28] G. Leitmann. *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego.* WN-T, Warszawa, 1971.
[29] D.G. Luenberger. *Teoria optymalizacji.* PWN, Warszawa, 1974.
[30] J. Macki, A. Strauss. *Introduction to Optimal Control Theory.* Springer, New York, 1982.
[31] O.L. Mangasarian. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems. *SIAM Journal of Control*, 4:139–152, 1966.
[32] G. Marro. *Teoria dei sistemi e del controllo.* Zanichelli, Bologna, 1993.
[33] J. Musielak. *Wstęp do analizy funkcjonalnej.* PWN, Warszawa, 1989.

[34] A. Palczewski. *Równania różniczkowe zwyczajne*. WN–T, Warszawa, 1999.

[35] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.S. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko. *Matematiceskaja teorija optymalnych processov*. Nauka, Moskva, 1976. III wydanie, po rosyjsku; oraz The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley, New York 1962.

[36] R.G. Vickson R.F. Hartl, S.P. Sethi. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 37(2):181–218, 1995.

[37] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer, New York, 1998. II wydanie, w internecie: http://www.math.rutgers.edu/~sontag/mct.html.

[38] G.W. Swan. *Applications of Optimal Control Theory in Biomedicine*. Marcel Dekker, 1984.

[39] G.J. Olsder T. Başar. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM, 1999.

[40] W. Terrel. Some fundamental control theory: Contollability, observability, and duality. *Amer. Math. Monthly*, 106, 1999.

[41] J. Zabczyk. *Zarys matematycznej teorii sterowania*. PWN, Warszawa, 1991.

[42] E. Zermelo. *Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung*, wolumen 11. 1930.