*Matematyka stosowana*

# Wstęp do Analizy Stochastycznej

Rafał Latała
R.Latala@mimuw.edu.pl
http://www.mimuw.edu.pl/~rlatala

Uniwersytet Warszawski, 2011

**Streszczenie.** Ogólna teoria procesów, proces Wienera. Wprowadzenie do teorii martyngałów z czasem ciągłym. Definicja i podstawowe własności całki stochastycznej. Wzór Itô. Stochastyczne równania różniczkowe. Twierdzenie Girsanowa.

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=was

(może zawierać dodatkowe materiały)



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

# Spis treści

# 1. Procesy stochastyczne. Proces Wienera

Podczas pierwszego wykładu określimy czym jest proces stochastyczny oraz zdefiniujemy proces Wienera – najważniejszy przykład procesu o ciągłych trajektoriach.

## 1.1. Podstawowe definicje

Zaczniemy od podania ważnych definicji używanych podczas całego wykładu.

**Definicja 1.1.** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $(E, \mathcal{E})$ przestrzenią mierzalną, zaś $T$ dowolnym zbiorem. *Procesem stochastycznym* o wartościach w $E$, określonym na zbiorze $T$, nazywamy rodzinę zmiennych losowych $X = (X_t)_{t\in T}$, przyjmujących wartości w zbiorze $E$.

*Uwaga* 1.1. W czasie wszystkich dalszych wykładów $T$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ (najczęściej przedziałem, niekoniecznie ograniczonym), zaś $E = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$. Parametr $t$ można wówczas interpretować jako czas.

**Definicja 1.2.** *Trajektorią procesu* $X$ nazywamy funkcję (losową!) $t \to X_t(\omega)$, określoną na zbiorze $T$ o wartościach w $E$.

**Definicja 1.3.** Powiemy, że proces $X = (X_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ *ma przyrosty niezależne* jeśli dla dowolnych indeksów $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ ze zbioru $T$, zmienne losowe $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

**Definicja 1.4.** Mówimy, że proces stochastyczny $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *ma przyrosty stacjonarne*, jeśli rozkład $X_t - X_s$ zależy tylko od $t - s$, czyli

$$\forall_{t>s\geqslant 0}\ X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0.$$

## 1.2. Proces Wienera (ruch Browna)

**Definicja 1.5.** *Procesem Wienera (ruchem Browna)* nazywamy proces stochastyczny $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ taki, że

$$W_0 = 0 \text{ p.n.}; \tag{W0}$$
$$W \text{ ma przyrosty niezależne}; \tag{W1}$$
$$\text{Dla } 0 \leqslant s < t \text{ zmienna } W_t - W_s \text{ ma rozkład normalny } \mathcal{N}(0, t-s); \tag{W2}$$
$$\text{Trajektorie } W \text{ są ciągłe z prawdopodobieństwem 1.} \tag{W3}$$

*Uwaga* 1.2. Warunek (W3) oznacza, że istnieje zbiór $A$ taki, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz dla wszystkich $\omega \in A$, $t \to W_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$. Czasami w definicji procesu Wienera zakłada się, że wszystkie trajektorie są ciągłe oraz $W_0 \equiv 0$.

## 1.3. Charakteryzacje procesu Wienera

Najpierw podamy twierdzenie, które znacznie ułatwia sprawdzanie, że dany proces jest procesem Wienera. Musimy wpierw podać ważną definicję.

**Definicja 1.6.** Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady $X$ są gaussowskie, tzn. wektor $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla dowolnych $t_1,\ldots,t_n \in T$.

**Przykład 1.1.** Następujące procesy są procesami gaussowskimi:
— $X_t = f(t)g$, gdzie $f\colon T \to \mathbb{R}$ dowolne oraz $g \sim \mathcal{N}(0,1)$,
— proces Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$,
— most Browna $X_t = W_t - tW_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

**Przykład 1.2.** Procesy $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$, $(\exp(W_t))_{t\geqslant 0}$ nie są gaussowskie.

**Twierdzenie 1.1.** *Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy jest procesem gaussowskim, o ciągłych trajektoriach p.n. takim, że $\mathbb{E}X_t = 0$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min\{t, s\}$.*

*Dowód.* $\Rightarrow$: Mamy $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}(X_t - X_0) = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0) = t$ na mocy (W0) i (W2). Ponadto z niezależności przyrostów, dla $t \geqslant s$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}(X_t - X_s, X_s) + \mathrm{Var}(X_s) = 0 + s = \min\{t, s\}$.

$\Leftarrow$: Zauważmy, że $\mathrm{Var}(X_0) = 0 = \mathbb{E}X_0$, więc spełniony jest warunek (W0). Dla $t > s$, zmienna $W_t - W_s$ ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją $\mathrm{Var}(X_t - X_s) = \mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(X_s) - 2\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = t - s$, więc zachodzi (W2). By sprawdzić niezależność przyrostów ustalmy $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$. Zauważmy, że wektor $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ma rozkład gaussowski, więc jego współrzędne są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane. Mamy jednak dla $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant s_4$,

$$\mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3} - X_{s_2}) = \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3}) - \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_2}) = s_1 - s_1 = 0$$

oraz

$$\mathrm{Cov}(X_{s_2} - X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = \mathrm{Cov}(X_{s_2}, X_{s_4} - X_{s_3}) - \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = 0.$$

□

Kolejne twierdzenie pokazuje, że (z dokładnością do drobnych technicznych założeń oraz normalizacji) proces Wienera jest jedynym procesem o ciągłych trajektoriach oraz niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

**Twierdzenie 1.2.** *Załóżmy, że proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (W0), (W1), (W3) (z $W$ zastąpionym przez $X$) oraz*

$$X \text{ ma przyrosty stacjonarne;} \tag{W2a}$$

$$\mathbb{E}X_1 = 0,\ \mathrm{Var}(X_1) = 1; \tag{W2b}$$

$$\mathbb{E}X_t^4 < \infty \text{ dla wszystkich } t > 0. \tag{W2c}$$

*Wówczas $X_t$ jest procesem Wienera.*

*Dowód.* Określmy dla $t \geqslant 0$, $a(t) = \mathbb{E}X_t$ oraz $b(t) = \mathrm{Var}(X_t)$. Zauważmy, że na mocy niezależności i stacjonarności przyrostów,

$$\begin{aligned} b(t+s) &= \mathrm{Var}(X_{t+s} - X_t + X_t) = \mathrm{Var}(X_{t+s} - X_t) + \mathrm{Var}(X_t) \\ &= \mathrm{Var}(X_s) + \mathrm{Var}(X_t) = b(t) + b(s). \end{aligned}$$

Ponadto oczywiście $b(t) \geqslant 0$, zatem funkcja $b(t)$ jest addytywna i niemalejąca na $[0,\infty)$, więc $b(t) = ct$ dla pewnego $c \geqslant 0$, co wobec (W2b) daje $\mathrm{Var}(X_t) = b(t) = t$. Analogicznie sprawdzamy, że $a(t+s) = a(t) + a(s)$, wiemy też, że $a(0) = 1$, stąd wnioskujemy, że $\mathbb{E}X_t = a(t) = 0$ dla $t$ wymiernych. Weźmy $t > 0$ i wybierzmy dążący do $t$ ciąg liczb wymiernych $(t_n)$. Na mocy (W2c), $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, wiemy też, że $\mathbb{E}X_{t_n}^2 = \mathrm{Var}(X_{t_n}) = t_n$, zatem $(\mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^2)^{1/2} \leqslant M$ dla pewnej stałej $M$. Z ciągłości trajektorii $X_{t_n} \to X_t$ prawie na pewno, czyli również według prawdopodobieństwa. Zatem dla $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}X_t| &= |\mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_{t_n}| \leqslant \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}| \leqslant \varepsilon + \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|\mathrm{I}_{\{|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon\}} \\ &\leqslant \varepsilon + (\mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|^2)^{1/2}\mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon)^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon + M\mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon)^{1/2} \leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych $n$. Stąd $\mathbb{E}X_t = 0$. Wykazaliśmy więc, że $X_t$ ma średnią zero i wariancję $t$.

Ustalmy $t > s \geqslant 0$, chcemy pokazać, że $X_t - X_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t-s)$. Zauważmy, że

$$X_t - X_s = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}, \text{ gdzie } \quad Y_{n,k} = X_{s+k(t-s)/n} - X_{s+(k-1)(t-s)/n}.$$

Zmienne $(Y_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ tworzą układ trójkątny, możemy więc skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego i wykazać, że $\sum_{k=1}^n Y_{n,k}$ zbiega do $\mathcal{N}(0, t-s)$ według rozkładu. Mamy

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(Y_{n,k}) = t - s,$$

wystarczy więc sprawdzić warunek Lindeberga. Dla $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|Y_{n,k}|^2 \mathrm{I}_{\{|Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon\}} \leqslant \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\Big)\mathrm{I}_{\{\max_{k\leqslant n}|Y_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}}\Big] \\ &\leqslant \Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\Big)^2\Big)^{1/2}\mathbb{P}\Big(\max_{k\leqslant n}|Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zmienne $(Y_{n,k})$ dla ustalonego $n$ są niezależne i mają średnią zero, zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t - X_s)^4 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n Y_{n,k}\Big)^4 &= \sum_{1\leqslant k_1,k_2,k_3,k_4\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k_1}Y_{n,k_2}Y_{n,k_3}Y_{n,k_4} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 6\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k}^2\mathbb{E}Y_{n,l}^2 \\ &\geqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k}^2\mathbb{E}Y_{n,l}^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n |Y_{n,k}|^2\Big)^2. \end{aligned}$$

Z ciągłości trajektorii $X$ wynika, że $\mathbb{P}(\max_{k\leqslant n}|Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon) \to 0$ przy $n\to\infty$, zatem spełniony jest warunek Lindeberga $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$. □

*Uwaga* 1.3. Warunek (W2c) nie jest konieczny - zob. Twierdzenie 5 z paragrafu 13.1 książki [3].

Okazuje się, że również nie trzeba zakładać skończoności wariancji ani nawet istnienia wartości średniej $W_1$ - warunek (W2b) ma charakter czysto normalizacyjny. Dokładniej zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.3.** *Załóżmy, że proces stochastyczny $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (W0),(W1), (W2a) i (W3). Wówczas istnieją stałe $a, b \in \mathbb{R}$ i proces Wienera $W$ takie, że $X_t = aW_t + bt$ dla wszystkich $t \geqslant 0$.*

## 1.4. Uwagi i uzupełnienia

### 1.4.1. Konstrukcja Procesu Wienera

Podczas następnych wykładów podamy dość abstrakcyjną konstrukcję procesu Wienera opartą o ogólniejsze twierdzenia dotyczące istnienia i ciągłości trajektorii procesów stochastycznych. Alternatywna, bardziej bezpośrednia konstrukcja (wymagająca pewnej znajomości analizy funkcjonalnej) procesu Wienera jest zawarta w Ćwiczeniach 1.10-1.12.

### 1.4.2. Nieróżniczkowalność trajektorii

Trajektorie procesu Wienera mają wiele ciekawych własności, jedną z nich jest to, że prawdopodobieństwem 1 są funkcjami ciągłymi, nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie.

**Twierdzenie 1.4.** *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$ są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie, tzn.*

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\geqslant 0}\ t \to W_t(\omega) \textit{ jest różniczkowalne w } t_0\Big) = 0.$$

## 1.5. Zadania

**Ćwiczenie 1.1.** Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.

**Ćwiczenie 1.2.** Dla jakich parametrów $a$ i $b$, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

**Ćwiczenie 1.3.** Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.

**Ćwiczenie 1.4.** Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

**Ćwiczenie 1.5.** Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są nieograniczone.

**Ćwiczenie 1.6.** Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$.

**Ćwiczenie 1.7.** Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera:
i) $X_t = -W_t$ (odbicie);
ii) $Y_t = c^{-1/2} W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu);
iii) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu);
iv) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$;
v) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

**Ćwiczenie 1.8.** Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę $\pi_n$. Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a \quad \text{w } L_2(\Omega) \text{ przy } n \to \infty,$$

jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

**Ćwiczenie 1.9.** Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

**Ćwiczenie 1.10.** Niech $f_i(t)$ będzie dowolną bazą $L_2[0, 1]$, $h_i(t) = \int_0^t f_i(s)ds$ oraz niech $g_i$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykaż, że szereg $X_t = \sum_i g_i h_i(t)$ jest zbieżny w $L^2$ dla dowolnego $t \in [0, 1]$ oraz $X_t$ ma te same rozkłady skończenie wymiarowe co proces Wienera.

**Ćwiczenie 1.11.** Niech $I(0) = \{1\}, I(n) = \{1, \ldots, 2^{n-1}\}, n = 1, 2, \ldots$. *Układem Haara* nazywamy rodzinę funkcji $(h_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ określonych na $[0, 1]$ wzorami $h_{0,1}(t) \equiv 1$ oraz dla $n = 1, 2, \ldots, k \in I(n)$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-2)2^{-n} \leqslant t < (2k-1)2^{-n}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-1)2^{-n} \leqslant t < 2k2^{-n}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

*Układem Schaudera* nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ określonych na $[0, 1]$ wzorem $S_{n,k}(t) = \int_0^t h_{n,k}(s)ds$. Niech $(g_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, połóżmy

$$W_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} g_{m,k}(\omega) S_{m,k}(t).$$

Wykaż, że dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ ciąg funkcji $(W_t^{(n)}(\omega))$ zbiega jednostajnie na $[0, 1]$ do pewnej funkcji ciągłej $W_t(\omega)$. Jeśli określimy np. $W_t(\omega) = 0$ dla pozostałych $\omega$ to tak zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Wienera na $[0, 1]$.

**Ćwiczenie 1.12.** Niech $(W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera na $[0, 1]$. Wykaż, że $((1+t)W_{\frac{1}{1+t}} - W_1)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera na całej półprostej.

**Ćwiczenie 1.13.** Udowodnij Twierdzenie 1.4.

*Wskazówka. Wykaż wpierw, że jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w jakimś punkcie przedziału* $[0, 1)$, *to*

$$\exists_{M<\infty}\ \exists_{m<\infty}\ \forall_{n\geqslant m}\ \exists_{0\leqslant j\leqslant n-3}\ \forall_{k=0,1,2}\ \Big|f\Big(\frac{j+k+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{j+k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{5M}{n}.$$

# 2. Rozkłady procesów stochastycznych

Podczas tego wykładu zdefiniujemy rozkład procesu stochastycznego, w szczególności powiemy jakie zdarzenia określone przez proces są mierzalne. Udowodnimy, że rozkład procesu jest wyznaczony przez rozkłady skończenie wymiarowe. Sformułujemy też warunki, które muszą być spełnione, by istniał proces stochastyczny o zadanych rozkładach skończenie wymiarowych.

Przypomnijmy, że jeśli $X$ jest zmienną losową o wartościach w przestrzeni mierzalnej $(E, \mathcal{E})$, to *rozkładem* $X$ jest miara probabilistyczna na $(E, \mathcal{E})$ zadana wzorem

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \ A \in \mathcal{E}.$$

Dla uproszczenia będziemy przyjmować, że proces $X$ przyjmuje wartości rzeczywiste.

## 2.1. $\sigma$-ciało zbiorów cylindrycznych

Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ możemy traktować jako zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^T$. Jakie podzbiory $\mathbb{R}^T$ są wówczas na pewno mierzalne?

**Definicja 2.1.** Zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^T \colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\}, \quad t_1, \ldots, t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

nazywamy *zbiorami cylindrycznymi*. Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ będziemy oznaczać najmniejsze $\sigma$-ciało zawierające zbiory cylindryczne i będziemy je nazywać *$\sigma$-ciałem zbiorów cylindrycznych*.

*Uwaga* 2.1. Zauważmy, że

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma(\{x \in \mathbb{R}^T \colon x_t \in A\}, \ t \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

**Przykład 2.1.** Zbiory $\{x \colon x_t > x_s\}$, $\{x \colon x_{t_1} > 0, x_{t_2} - x_{t_1} > 0, \ldots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}} > 0\}$ oraz $\{x \colon \forall_{t<s, t,s\in\mathbb{Q}_+} \ x_t > x_s\}$ należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$.

**Przykład 2.2.** Zbiór $\{x \colon \sup_{t\in T} |x_t| \leqslant 1\}$ nie należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdy $T$ jest nieprzeliczalny, podobnie $\{x \colon t \to x_t \text{ ciągłe}\}$ nie należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdy $T$ jest niezdegenerowanym przedziałem.

**Definicja 2.2.** *Rozkładem procesu* $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy miarę probabilistyczną $\mu_X$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ daną wzorem

$$\mu_X(C) = \mathbb{P}((X_t)_{t\in T} \in C), \ C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

*Uwaga* 2.2. Załóżmy, że $T$ jest przedziałem (skończonym lub nie). Na przestrzeni funkcji ciagłych $C(T)$ rozważmy topologię zbieżności niemal jednostajnej. Wówczas $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T))$, co oznacza, że jeśli proces $X = (X_t)_{t\in T}$ ma ciągłe trajektorie, to $X$ wyznacza rozkład probabilistyczny na przestrzeni funkcji ciągłych $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$. W szczególności proces Wienera wyznacza pewien rozkład probabilistyczny na $C[0, \infty)$.

## 2.2. Warunki zgodności. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu

Najprostsze zbiory z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ to zbiory cylindryczne. Miary takich zbiorów to rozkłady skończenie wymiarowe procesu.

**Definicja 2.3.** Dla procesu $(X_t)_{t\in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ i $t_1,\dots,t_n \in T$ określamy miarę $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ na $\mathbb{R}^n$ wzorem

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A) = \mathbb{P}((X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Rodzinę miar $\{\mu_{t_1,\dots,t_n} : t_1,\dots,t_n \in T \text{ parami różne}\}$ nazywamy rodziną *skończenie wymiarowych rozkładów* procesu $X$.

**Stwierdzenie 2.1.** *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in T}$ i $Y = (Y_t)_{t\in T}$ są procesami o tych samych skończenie wymiarowych rozkładach, czyli*

$$\mathbb{P}((X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \in A) = \mathbb{P}((Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}) \in A)$$

*dla wszystkich $t_1,\dots,t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $X$ i $Y$ mają ten sam rozkład, tzn.*

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C) \text{ dla wszystkich } C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

*Dowód.* Rodzina zbiorów cylindrycznych $\mathcal{A}$ tworzy $\pi$-układ, a rodzina $\mathcal{C}$ zbiorów $C$ takich, że $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C)$, jest $\lambda$-układem zawierającym $\mathcal{A}$. Zatem z twierdzenia o $\pi$- i $\lambda$- układach, $\mathcal{C}$ zawiera również $\sigma$-ciało generowane przez $\mathcal{A}$, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. □

**Definicja 2.4.** Powiemy, że rodzina skończenie wymiarowych rozkładów

$$\{\mu_{t_1,\dots,t_n} : \ t_1,\dots,t_n \in T \text{ parami różne}\}$$

*spełnia warunki zgodności*, jeśli zachodzą następujące warunki:

i) Dla dowolnych $t_1, t_2,\dots,t_n \in T$, dowolnej permutacji $(i_1,\dots,i_n)$ liczb $(1,\dots,n)$ oraz zbiorów $A_1, A_2,\dots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n).$$

ii) Dla dowolnych $t_1, t_2,\dots,t_{n+1} \in T$ oraz $A_1, A_2,\dots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n).$$

Oczywiście rodzina rozkładów skończenie wymiarowych dowolnego procesu stochastycznego spełnia warunki zgodności. Okazuje się, że są to jedyne warunki jakie należy nałożyć na taką rodzinę.

**Twierdzenie 2.1.** *Załóżmy, że dana jest rodzina skończenie wymiarowych rozkładów $(\mu_{t_1,\dots,t_n})$ spełniająca warunki zgodności. Wówczas istnieje proces $(X_t)_{t\in T}$ mający skończenie wymiarowe rozkłady równe $(\mu_{t_1,\dots,t_n})$.*

Nie będziemy przedstawiać technicznego dowodu powyższego twierdzenia - wszystkich zainteresowanych odsyłamy do [9] lub [4]. W zamian sformułujemy użyteczny wniosek.

**Wniosek 2.1.** *Załóżmy, że* $T \subset \mathbb{R}$ *oraz dana jest rodzina rozkładów skończenie wymiarowych* $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} : t_1 < t_2 < \ldots < t_n, t_1, \ldots, t_n \in T\}$ *spełniająca warunek*

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times \mathbb{R} \times A_{k+1} \ldots \times A_n) \\ = \mu_{t_1,\ldots t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \ldots \times A_n).$$

*dla wszystkich* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *oraz zbiorów borelowskich* $A_1, \ldots, A_n$. *Wówczas istnieje proces* $(X_t)_{t\in T}$ *taki, że* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *ma rozkład* $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ *dla* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

*Dowód.* Dla $t_1, \ldots, t_n \in T$ parami różnych istnieje permutacja $(i_1, \ldots, i_n)$ liczb $(1, \ldots, n)$ taka, że $t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_n}$. Możemy więc określić $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ jako rozkład wektora $(Y_1, \ldots, Y_n)$ takiego, że $(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n})$ ma rozkład $\mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}$. Nietrudno sprawdzić, że tak określona rodzina miar $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ spełnia warunki zgodności. □

**Przykład 2.3.** Jeśli $(\mu_t)_{t\in T}$ jest dowolną rodziną rozkładów na $\mathbb{R}$, to istnieje rodzina niezależnych zmiennych losowych $(X_t)_{t\in T}$ taka, że $X_t$ ma rozkład $\mu_t$. Używamy tu twierdzenia o istnieniu dla $\mu_{t_1,\ldots,t_n} = \mu_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_n}$.

**Przykład 2.4.** Istnieje proces spełniający warunki (W0)-(W2) definicji procesu Wienera. Istotnie dla $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ kładziemy

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} \sim \Big(X_1, X_1 + X_2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} X_k\Big),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. Warunki zgodności wynikają wówczas stąd, iż jeśli $Y_1, Y_2$ są niezależne i $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ dla $i = 1, 2$, to $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

## 2.3. Uwagi i uzupełnienia

Podczas wykładu zakładaliśmy, że proces $X$ ma wartości rzeczywiste. Nic się zmieni (poza oczywistymi drobnymi zmianami definicji) dla procesów o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Czasem jednak zachodzi potrzeba rozpatrywania procesów o wartościach w ogólniejszej przestrzeni $E$. Warto więc zauważyć, że

— w Stwierdzeniu 2.1 nie wykorzystywaliśmy żadnych własności przestrzeni $E$,

— w dowodzie Twierdzenia 2.1 wykorzystuje się regularność miar na $E^n$ – tu wystarczy założyć, że $E$ jest $\sigma$-zwartą przestrzenią metryczną, tzn. $E$ jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych lub dodać warunek regularności rozpatrywanych miar (definicje i podstawowe własności miar regularnych można znaleźć w rozdziale 2 [7]).

## 2.4. Zadania

**Ćwiczenie 2.1.** Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$, to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

**Ćwiczenie 2.2.** Niech $T = [a, b]$, $a < t_0 < b$, wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$:
i) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : \ \sup_{t\in[a,b]} |x_t| \leqslant 1\}$;
ii) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : \ t \to x_t$ ciągłe na $[a, b]\}$;
iii) $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T : \ \lim_{t\to t_0} x_t = 0\}$;
iv) $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T : \ t \to x_t$ ciągłe w $t_0\}$.

Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii, tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ (odp. $RC(T)$–przestrzeni funkcji prawostronnie ciągłych) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).

**Ćwiczenie 2.3.** Niech $T = [a, b]$. Wykaż, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest $\sigma$-ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.

**Ćwiczenie 2.4.** Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t \geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

# 3. Ciągłość trajektorii

Wiemy już kiedy istnieje proces o zadanych skończenie wymiarowych rozkładach. Nasuwa się pytanie – kiedy taki proces ma ciągłe trajektorie? Zanim jednak zastanowimy się nad odpowiedzią wprowadzimy dwa ważne sposoby porównywania procesów.

## 3.1. Procesy stochastycznie równoważne i nierozróżnialne

**Definicja 3.1.** Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ oraz $Y = (Y_t)_{t\in T}$ będą dwoma procesami stochastycznymi, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Powiemy, że:
a) $X$ jest *modyfikacją* $Y$ (lub $X$ jest *stochastycznie równoważny* $Y$), jeśli

$$\forall_{t\in T}\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1;$$

b) $X$ i $Y$ są nierozróżnialne, jeśli

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in T}\ X_t = Y_t) = 1.$$

Zauważmy, że procesy nierozróżnialne są oczywiście stochastycznie równoważne. Ponadto dwa procesy stochastycznie równoważne mają ten sam rozkład. Poniższy przykład pokazuje, że z rozkładu procesu nie można wnioskować o własnościach trajektorii.

**Przykład 3.1.** Niech $Z \geqslant 0$ będzie dowolną zmienną losową o rozkładzie bezatomowym tzn. $\mathbb{P}(Z = z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy dwa procesy na $T = [0,\infty)$:

$$X_t \equiv 0 \quad \text{oraz} \quad Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq Z(\omega), \\ 1 & \text{dla } t = Z(\omega). \end{cases}$$

Wówczas $Y$ jest modyfikacją $X$, bo $\mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = \mathbb{P}(Z = t) = 0$. Zauważmy jednak, że wszystkie trajektorie $Y$ są nieciągłe. W szczególności $\mathbb{P}(\forall_{t\geqslant 0}\ X_t = Y_t) = 0$, a zatem procesy $X$ i $Y$ nie są nierozróżnialne.

**Stwierdzenie 3.1.** *Załóżmy, że $T$ jest przedziałem oraz procesy $X = (X_t)_{t\in T}$ i $Y = (Y_t)_{t\in T}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie. Wówczas, jeśli $X$ jest modyfikacją $Y$, to $X$ i $Y$ są nierozróżnialne.*

*Dowód.* Wybierzmy przeliczalny podzbiór $T_0 \subset T$, gęsty w $T$, zawierający dodatkowo $\sup T$, jeśli $T$ jest przedziałem prawostronnie domkniętym. Niech

$$A = \{\forall_{t\in T_0}\ X_t = Y_t\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A) = 1$, jako przeliczalne przecięcie zbiorów pełnej miary. Ponadto, jeśli $\omega \in A$, to dla dowolnego $t \in T$,

$$X_t(\omega) = \lim_{s\to t+, s\in T_0} X_s(\omega) = \lim_{s\to t+, s\in T_0} Y_s(\omega) = Y_t(\omega),$$

czyli

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in T}\ X_t = Y_t) \geqslant \mathbb{P}(A) = 1.$$

□

## 3.2. Twierdzenie o ciągłej modyfikacji

Najważniejsze twierdzenie tego wykładu podaje kryterium istnienia modyfikacji procesu, która ma ciągłe trajektorie. Zanim sformułujemy dokładny wynik przypomnijmy definicję funkcji hölderowskiej.

**Definicja 3.2.** Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest *hölderowsko ciągła z wykładnikiem* $\gamma$, jeśli dla pewnej stałej $C < \infty$,

$$|f(s) - f(t)| \leqslant C|t-s|^{\gamma} \text{ dla wszystkich } s,t \in [a,b].$$

**Twierdzenie 3.1.** *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ jest procesem takim, że*

$$\forall_{t,s\in[a,b]}\ \mathbb{E}|X_t - X_s|^{\alpha} \leqslant C|t-s|^{1+\beta} \tag{3.1}$$

*dla pewnych stałych dodatnich $\alpha, \beta, C$. Wówczas istnieje proces $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t\in[a,b]}$, będący modyfikacją procesu $X$, którego wszystkie trajektorie są ciągłe. Co więcej trajektorie każdej modyfikacji $X$ o ciągłych trajektoriach są, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$.*

Zainteresownych dowodem odsyłamy np. do [4] lub [9].

**Wniosek 3.1.** *Twierdzenie 3.1 jest prawdziwe, gdy przedział $[a,b]$ zastąpimy nieskończonym przedziałem, o ile hölderowskość trajektorii zastąpimy lokalną hölderowskością (tzn. hölderowskością na każdym przedziale skończonym). Co więcej, wystarczy, by warunek (3.1) zachodził dla $|s-t| \leqslant \delta$, gdzie $\delta$ jest ustaloną liczbą dodatnią.*

*Dowód.* Przedział nieskończony $T$ można zapisać jako przeliczalną sumę przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$, długości nie większej od $\delta$. Z Twierdzenia 3.1 wynika istnienie modyfikacji $\widetilde{X}_t^{(n)}$ procesu $X$ na przedziale $[a_n, a_{n+1}]$, o ciągłych trajektoriach. Niech $A_n = \{\tilde{X}_{a_{n+1}}^{(n)} \neq \tilde{X}_{a_{n+1}}^{(n+1)}\}$, wówczas $A = \bigcup_n A_n$ ma miarę zero. Możemy więc położyć:

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \widetilde{X}_t^{(n)}(\omega) & \text{dla } t \in [a_n, a_{n+1}],\ \omega \notin A, \\ 0 & \text{dla } \omega \in A. \end{cases}$$

□

**Wniosek 3.2.** *Istnieje proces Wienera, tzn. proces spełniający warunki (W0)-(W3).*

*Dowód.* Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^4 = \mathbb{E}|\sqrt{t-s}W_1|^4 = (s-t)^2\mathbb{E}W_1^4 = 3(s-t)^2$ i możemy zastosować Wniosek 3.1 z $\beta = 1$, $\alpha = 4$ i $C = 3$. □

**Wniosek 3.3.** *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie hölderowsko ciągłe z dowolnym parametrem $\gamma < 1/2$.*

*Dowód.* Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^p = (s-t)^{p/2}\mathbb{E}|W_1|^p = C_p(s-t)^{p/2}$ dla dowolnego $p < \infty$. Stosując Twierdzenie 3.1 z $\beta = p/2 - 1$, $\alpha = p$ dostajemy hölderowską ciągłość trajektorii z dowolnym $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Biorąc $p \to \infty$ dostajemy tezę. □

*Uwaga* 3.1. Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $[0,\infty)$, nie mogą więc być globalnie hölderowskie z żadnym wykładnikiem.

*Uwaga* 3.2. Założenia $\beta > 0$ nie można opuścić – wystarczy rozważyć proces Poissona $(N_t)_{t\geqslant 0}$ (tzn. proces o prawostronnie ciaglych trajektoriach, startujący z zera, o przyrostach niezależnych taki, że $N_t - N_s$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t-s)$ – zob. np. rozdział 23 w [1]). Wówczas $\mathbb{E}|N_t - N_s| = \lambda|t-s|$, a oczywiście proces Poissona przyjmuje wartości całkowite, więc nie ma modyfikacji o ciągłych trajektoriach.

## 3.3. Uwagi i uzupełnienia

W tym wykładzie koncentrowaliśmy uwagę nad procesami o trajektoriach ciągłych. Warto jednak wspomnieć o innych formach ciągłości procesów stochastycznych.

**Definicja 3.3.** Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym. Mówimy, że
a) proces $X$ jest *stochastycznie ciągły*, jeśli

$$t_n \to t \ \Rightarrow\ X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t.$$

b) proces $X$ jest *ciągły wg $p$-tego momentu (ciągły w $L_p$)*, jeśli

$$t_n \to t \ \Rightarrow\ \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^p \to 0.$$

*Uwaga* 3.3. Ciągłość trajektorii oraz ciągłość wg $p$-tego momentu implikują ciągłość stochastyczną procesu. Z pozostałych czterech implikacji między powyższymi pojęciami ciągłości procesu żadna nie jest prawdziwa bez dodatkowych założeń.

## 3.4. Zadania

**Ćwiczenie 3.1.** Proces $X$ jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu $X$:
a) niezależność przyrostów,
b) stacjonarność przyrostów,
c) ciągłość trajektorii,
d) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.,
e) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?

**Ćwiczenie 3.2.** Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie 1/2-hölderowskie.

**Ćwiczenie 3.3.** Scentrowany proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli $\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2\alpha}$ (można wykazać, że taki proces istnieje dla $0 < \alpha < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

**Ćwiczenie 3.4.** Udowodnij tezę Uwagi 3.3.

# 4. Filtracje, momenty zatrzymania

Pokażemy jak zmodyfikować definicje omawiane podczas kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa z przypadku czasu dyskretnego na czas ciągły.

Będziemy zakładać, że $T$ jest lewostronnie domkniętym przedziałem (typowo $T = [0, \infty)$), choć większość definicji i wyników można uogólnić na szerszą klasę zbiorów.

## 4.1. Filtracje z czasem ciągłym

**Definicja 4.1.** *Filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy rosnącą rodzinę $\sigma$-ciał zawartych w $\mathcal{F}$, tzn. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ dla $t \leqslant s,\ t, s \in T$.

Zdarzenia z $\sigma$-ciała $\mathcal{F}_t$ możemy interpretować jako zdarzenia obserwowalne do chwili $t$.

**Definicja 4.2.** Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ będzie procesem stochastycznym. *Filtracją generowaną przez* $X$ nazywamy rodzinę $(\mathcal{F}^X_t)_{t\in T}$ daną wzorem $\mathcal{F}^X_t = \sigma(X_s \colon s \leqslant t)$.

**Stwierdzenie 4.1.** *Proces $X_t$ ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $t < s,\ t, s \in T$ przyrost $X_s - X_t$ jest niezależny od $\sigma$-ciała $\mathcal{F}^X_t$.*

*Dowód.* $\Rightarrow$: Rodzina $\mathcal{A}$ zdarzeń niezależnych od $X_s - X_t$ tworzy $\lambda$-układ, ponadto, z niezależności przyrostów $X$, zawiera $\pi$-układ zdarzeń postaci $\{X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}$ dla $t_1 < \ldots < t_n \leqslant t$, który generuje $\sigma$-ciało $\mathcal{F}^X_t$. Zatem, na mocy twierdzenia o $\pi$- i $\lambda$-układach, $\mathcal{A} \supset \mathcal{F}^X_t$.

$\Leftarrow$: Ustalmy $t_1 < \ldots < t_n$ oraz zbiory borelowskie $A_1, \ldots, A_n$. Zdarzenie $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1}\}$ należy do $\sigma$-ciała $\mathcal{F}^X_{t_{n-1}}$, więc jest niezależne od zmiennej $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Stąd

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(&X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1})\mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n).\end{aligned}$$

Iterując to rozumowanie pokazujemy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t_1} \in &A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1)\mathbb{P}(X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2,) \cdots \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n).\end{aligned}$$

$\square$

**Definicja 4.3.** Proces $X = (X_t)$ nazywamy *zgodnym z filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, $\mathcal{F}_t$*-adaptowalnym* lub *adaptowanym do filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, jeśli dla wszystkich $t \in T$, $X_t$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne.

*Uwaga* 4.1. Oczywiście proces $X$ jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}^X_t \subset \mathcal{F}_t$ dla $t \in T$. W szczególności każdy proces $X$ jest zgodny z filtracją przez siebie generowaną.

## 4.2. Momenty zatrzymania

**Definicja 4.4.** *Momentem zatrzymania (momentem Markowa, czasem zatrzymania)* względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ nazywamy zmienną losową o wartościach w $T \cup \{\infty\}$ taką, że $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$.

Moment zatrzymania to strategia przerwania eksperymentu losowego (np. zakończenia udziału w pewnej grze losowej) taka, że decyzję o przerwaniu do chwili $t$ podejmujemy tylko na podstawie obserwacji dostępnych w tym czasie.

Dla zbioru $A \subset \mathbb{R}$ i procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$ określmy

$$\tau_A = \inf\{t \in T \colon X_t \in A\}.$$

**Stwierdzenie 4.2.** *Jeśli $(X_t)_{t\in T}$ jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym procesem o ciągłych trajektoriach, zaś $A$ zbiorem domkniętym, to $\tau_A$ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$.*

*Dowód.* Niech $T_0 \subset T$ będzie gęstym podzbiorem $T$ zawierającym lewy koniec. Z domkniętości zbioru $A$ i ciągłości $X$ dostajemy dla $t \in T$,

$$\{\tau_A \leqslant t\} = \{\exists_{s\leqslant t}\, X_s \in A\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\leqslant t, s\in T_0} \{X_s \in A_{1/n}\} \in \mathcal{F}_t,$$

gdzie

$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x, A) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon\text{-otoczka zbioru } A).$$

□

*Uwaga* 4.2. Jeśli w powyższym przykładzie $A$ będzie zbiorem otwartym, to $\tau_A$ nie musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, ale musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$, gdzie dla $t < \sup T$

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,$$

a jeśli $t$ jest największym elementem $T$, to kładziemy $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

Powyższa uwaga motywuje poniższą definicję, która ma nieco techniczny charakter, ale jest powszechnie używana w teorii procesów.

**Definicja 4.5.** Filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ nazywamy *prawostronnie ciągłą*, jeśli $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$. Mówimy, że filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *spełnia zwykłe warunki*, jeśli
a) jest prawostronnie ciągła,
b) dla wszystkich $t$, $\mathcal{F}_t$ zawiera wszystkie zbiory miary zero, tzn. jeśli $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, to $A \in \mathcal{F}_t$.

**Definicja 4.6.** Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Definiujemy $\sigma$-ciało *zdarzeń obserwowalnych do chwili* $\tau$ wzorem

$$\mathcal{F}_\tau := \Big\{A \in \mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t\Big) \colon \forall_{t\in T}\; A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\Big\}.$$

**Stwierdzenie 4.3.** *a) Zbiór $\mathcal{F}_\tau$ jest $\sigma$-ciałem.*
*b) Jeśli $\tau \leqslant \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.*
*c) Zmienna losowa $\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna.*

*Dowód.* a) Zbiór $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, bo $\Omega \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$, to $A' \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus (A \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t$, czyli $A' \in \mathcal{F}_\tau$. Jeśli $A_n \in \mathcal{F}_\tau$, to $(\bigcup_n A_n) \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_n (A_n \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t$, zatem $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau$.

b) Weźmy $A \in \mathcal{F}_\tau$, wówczas dla $t \in T$, $A \cap \{\sigma \leqslant t\} = A \cap \{\tau \leqslant t\} \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, czyli $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

c) Wystarczy pokazać, że $\{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_\tau$, ale $\{\tau \leqslant s\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$. □

**Stwierdzenie 4.4.** *Załóżmy, że $\tau$ i $\sigma$ są momentami zatrzymania. Wówczas $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\sigma \leqslant \tau\}, \{\tau = \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.*

*Dowód.* Zauważmy, że $\tau \wedge \sigma$ jest momentem zatrzymania oraz $\tau \wedge \sigma \leqslant \tau$ i $\tau \wedge \sigma \leqslant \sigma$, zatem na mocy Stwierdzenia 4.3 dostajemy $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$. Na odwrót, jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$, to $A \cap \{\tau \wedge \sigma \leqslant t\} = A \cap (\{\tau \leqslant t\} \cup \{\sigma \leqslant t\}) = (A \cap \{\tau \leqslant t\}) \cup (A \cap \{\sigma \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t$, czyli $A \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$. Dalszą część stwierdzenia pozostawiamy do samodzielnego udowodnienia w ramach prostego ćwiczenia. □

## 4.3. Progresywna mierzalność

Okazuje się, że adaptowalność procesu nie gwarantuje np. mierzalności zmiennych $X_\tau$ dla wszystkich momentów zatrzymania $\tau$. Dlatego wprowadzimy jeszcze jedną techniczną definicję.

**Definicja 4.7.** Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy *progresywnie mierzalnym* względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, jeśli dla każdego $t \in T$, funkcja $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ traktowana jako funkcja ze zbioru $T \cap (-\infty, t] \times \Omega$ w $\mathbb{R}$ jest mierzalna względem $\sigma$-algebry $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Równoważnie

$$\forall_{t\in T}\ \forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ \{(s,\omega) \in T \times \Omega\colon s \leqslant t, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

**Stwierdzenie 4.5.** *Załóżmy, że $T$ jest przedziałem oraz dany jest proces $X = (X_t)_{t\in T}$ oraz filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.*
*a) Jeśli proces $X$ jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$, to jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalny.*
*b) Jeśli proces $X$ jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalny oraz ma prawostronnie ciągłe trajektorie, to jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$.*

*Dowód.* a) Zbiór $\{\omega\colon X_t(\omega) \in A\}$ jest przekrojem zbioru $\{(s,\omega) \in T \times \Omega\colon s \leqslant t, X_s(\omega) \in A\}$, a zatem należy do $\mathcal{F}_t$.

b) Ustalmy $t \in T$ i połóżmy dla $s \in T$, $s \leqslant t$, $X_s^{(n)} := X_{t-2^{-n}k}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą taką, że $t - 2^{-n}(k+1) < s \leqslant t - 2^{-n}k$. Wówczas

$$\begin{aligned}\{(s,\omega) \in T \times \Omega\colon & s \leqslant t, X_s^{(n)}(\omega) \in A\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \Big(T \cap \Big(t - \frac{k+1}{2^n}, t - \frac{k}{2^n}\Big]\Big) \times \{\omega\colon X_{t-\frac{k}{2^n}}(\omega) \in A\} \\ &\in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Zatem funkcja $X_s^{(n)}(\omega), s \in T\cap(-\infty,t], \omega \in \Omega$ jest $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t$ mierzalna. Wobec prawostronnej ciągłości $X$ mamy $X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega)$, więc funkcja $X_s(\omega), s \in T\cap(-\infty,t], \omega \in \Omega$ jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. □

Jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania, a $X = (X_t)_{t\in T}$ procesem, to zmienna $X_\tau$ jest dobrze zdefiniowana tylko na zbiorze $\{\tau < \infty\}$. Musimy zatem określić co mamy na myśli mówiąc, że zmienna $X_\tau$ jest mierzalna.

**Definicja 4.8.** Mówimy, że zmienna losowa $X$ określona na zbiorze $A$ jest mierzalna względem $\sigma$-ciała $\mathcal{G}$ zawierającego $A$, jeśli $\{\omega \in A\colon\ X(w) \in B\} \in \mathcal{G}$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $B$.

Przed sformułowaniem kolejnego stwierdzenia wprowadzimy jeszcze jedną użyteczną definicję.

**Definicja 4.9.** Jeśli $X = (X_t)_{t\in T}$ jest procesem stochastycznym, a $\tau$ zmienną o wartościach w $T \cup \{\infty\}$, to definujemy $X^\tau = (X_t^\tau)_{t\in T}$ – *proces $X$ zatrzymany w czasie $\tau$* wzorem $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$.

**Stwierdzenie 4.6.** *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in T}$ jest procesem progresywnie mierzalnym względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a $\tau$ jest momentem zatrzymania. Wówczas zmienna losowa $X_\tau$ określona na zbiorze $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna. Ponadto $X^\tau$ – proces $X$ zatrzymany w chwili $\tau$ jest progresywnie mierzalny.*

*Dowód.* Odwzorowanie

$$(s,\omega) \to (\tau(\omega)\wedge s, \omega)\colon T\cap(-\infty,t]\times\Omega \to T\cap(-\infty,t]\times\Omega$$

jest mierzalne względem $\sigma$-ciała $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t)$. Jeśli złożymy je z odwzorowaniem

$$(s,\omega)\to X_s(\omega) \quad \text{mierzalnym z } (T\cap(-\infty,t]\times\Omega, \mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t) \text{ w } \mathbb{R},$$

to otrzymamy odwzorowanie

$$(s,\omega)\to X_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega) \quad \text{mierzalne z } (T\cap(-\infty,t]\times\Omega, \mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t) \text{ w } \mathbb{R}.$$

Stąd wynika progresywna mierzalność procesu $X^\tau$. By zakończyć dowód zauważmy, że

$$\{X_\tau\in A\}\cap\{\tau\leqslant t\} = \{X_{\tau\wedge t}\in A\}\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$$

na mocy progresywnej mierzalności (a właściwie adaptowalności) $X^\tau$. □

## 4.4. Zadania

**Ćwiczenie 4.1.** Załóżmy, że $T$ jest przedziałem i określmy:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\Big(\bigcup_{s<t}\mathcal{F}_s\Big).$$

a) Wykaż, że filtracja $\mathcal{F}_{t+}$ jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces $X$ o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
c) Niech $T = [0,\infty), A\in\mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź $\mathcal{F}_t^X$.
d) Dla $X$ jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t\colon X_t > 0\}$. Wykaż, że $\tau$ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

**Ćwiczenie 4.2.** Załóżmy, że $T$ jest przedziałem, wykaż, że:
a) jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\}\in\mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$;
b) jeśli $\{\tau < t\}\in\mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$, to $\tau$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

**Ćwiczenie 4.3.** Niech $T = [0,\infty)$, a $\tau$ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau+1, \tau^2, \tau-1$ muszą być momentami zatrzymania?

**Ćwiczenie 4.4.** Niech $T = [0,\infty)$, a $X_t$ procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla $A$ otwartego $\tau_A := \inf\{t\colon X_t\in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

**Ćwiczenie 4.5.** Wykaż, że jeśli $\tau$ i $\sigma$ są momentami zatrzymania, to zdarzenia $\{\tau<\sigma\}, \{\tau=\sigma\}$ i $\{\tau\leqslant\sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

**Ćwiczenie 4.6.** Wykaż, że jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := \mathrm{I}_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

**Ćwiczenie 4.7.** Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a $(X_t)$ będzie procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym. Wykaż, że
a) $\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalne;
b) jeśli $\tau$ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to $X_\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalny na zbiorze $\tau<\infty$.

**Ćwiczenie 4.8.** Wykaż, że jeśli $\sigma$ jest momentem zatrzymania, $\tau \geqslant \sigma$ oraz $\tau$ jest $\mathcal{F}_\sigma$ mierzalny, to $\tau$ jest momentem zatrzymania.

**Ćwiczenie 4.9.** Wykaż, że jeśli proces $X_t$ ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie, to dla $s \geqslant t$ zmienna $X_s - X_t$ jest niezależna od $\mathcal{F}_{t+}^X$.

# 5. Martyngały z czasem ciągłym

Tak jak podczas poprzedniego wykładu, jeśli nie zaznaczymy inaczej, będziemy zakładać, że $T$ jest lewostronnie domkniętym przedziałem.

## 5.1. Definicje i przykłady

**Definicja 5.1.** Mówimy, że $(X_t)_{t\in T}$ jest *martyngałem* (odp. *podmartyngałem, nadmartyngałem) względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ lub, że $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest *martyngałem* (odp. *podmartyngałem, nadmartyngałem*), jeśli
a) dla wszystkich $t \in T$, $X_t$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalny i $\mathbb{E}|X_t| < \infty$,
b) dla dowolnych $s,t \in T, s < t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ p.n. (odp. $\geqslant$ dla podmartyngału i $\leqslant$ dla nadmartyngału).

**Przykład 5.1.** Jeśli $X$ jest całkowalną zmienną losową, a $\mathcal{F}_t$ dowolną filtracją to $X_t := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ jest martyngałem.
Sprawdzamy dla $t > s$,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{p.n..}$$

**Przykład 5.2.** $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s\colon s \leqslant t)$.
Istotnie dla $t > s$ mamy z niezależności przyrostów

$$\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = W_s + \mathbb{E}(W_t - W_s) = W_s \quad \text{p.n..}$$

**Przykład 5.3.** $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$ jest podmartyngałem, a $(W_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s\colon s \leqslant t)$.
Liczymy dla $t > s$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_s^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(2W_s(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) \\ &= W_s^2 + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = W_s^2 + t - s \quad \text{p.n..}\end{aligned}$$

*Uwaga* 5.1. W ostatnich dwu przykładach filtrację $(\mathcal{F}_t^W)$ można zastąpić filtracją $(\mathcal{F}_{t+}^W)$.

**Stwierdzenie 5.1.** *Załóżmy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)$ jest martyngałem (odp. podmartyngałem), zaś $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą (odp. wypukłą i niemalejącą) taką, że $\mathbb{E}|f(X_t)| < \infty$ dla wszystkich $t$. Wówczas $(f(X_t), \mathcal{F}_t)$ jest podmartyngałem.*

*Dowód.* Z nierówności Jensena mamy $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) \geqslant f(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s))$ p.n., a ostatnia zmienna jest równa $f(X_s)$ w przypadku martyngału i nie mniejsza niż $f(X_s)$ dla podmartyngału. □

Przypomnijmy definicję funkcji harmonicznych.

**Definicja 5.2.** Funkcję $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy podharmoniczną (odp. harmoniczną, nadharmoniczną) jeśli jest ograniczona na zbiorach zwartych oraz

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\ \forall_{r\geqslant 0}\ f(x) \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x+ry)d\sigma(y) \quad (\text{odp. } =, \geqslant),$$

gdzie $\sigma(y)$ jest miarą powierzchniową na sferze, a $|S_{n-1}| = \int_{S^{n-1}} d\sigma(y) = 2\pi^{n/2}(\Gamma(n/2))^{-1}$.

*Uwaga* 5.2. Funkcja gładka jest harmoniczna (odp. pod-,nad-) wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta f = 0$ (odp. $\geqslant$, $\leqslant$). Dla $n = 1$ warunek podharmoniczności jest równoważny wypukłości. Funkcja $f(x) = -\ln|x - x_0|$ jest nadharmoniczna na $\mathbb{R}^2$, a funkcja $f(x) = |x - x_0|^{2-d}$ nadharmoniczna na $\mathbb{R}^d$ dla $d > 2$.

**Stwierdzenie 5.2.** *Niech $W_t = (W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)})$ będzie $d$-wymiarowym procesem Wienera, $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s \colon s \leqslant t)$, zaś $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funkcją harmoniczną (odp. nad-, pod-) taką, że $\mathbb{E}|f(W_t)| < \infty$ dla $t \geqslant 0$. Wówczas $(f(W_t), \mathcal{F}_t^W)$ jest martyngałem (odp. nad-, pod-).*

*Dowód.* Liczymy dla $t > s$ korzystając z niezależności przyrostów procesu Wienera oraz wprowadzając współrzędne sferyczne,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(W_t)|\mathcal{F}_s^W) &= \mathbb{E}(f(W_s + (W_t - W_s))|\mathcal{F}_s^W) \\
&= (2\pi(t-s))^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(W_s + x) e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}} dx \\
&= (2\pi(t-s))^{-d/2} \int_0^\infty r^{d-1} e^{-\frac{r^2}{2(t-s)}} \Big( \int_{S^{d-1}} f(W_s + y) d\sigma(y) \Big) dr \\
&= (2\pi(t-s))^{-d/2} |S^{d-1}| f(W_s) \int_0^\infty r^{d-1} e^{-\frac{r^2}{2(t-s)}} dr \\
&= (2\pi)^{-d/2} |S^{d-1}| \int_0^\infty r^{d-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr f(W_s) = c_d f(W_s) \qquad \text{p.n.}.
\end{aligned}$$

By zauważyć, że $c_d = 1$ przeprowadzamy albo bezpośredni rachunek, albo podstawiamy powyżej $f \equiv 1$. $\square$

## 5.2. Nierówności maksymalne

Zacznijmy od przypomnienia podstawowego lematu dla martyngałów z czasem dyskretnym, pochodzącego od Dooba.

**Lemat 5.1.** *Załóżmy, że $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ jest martyngałem (odp. nad-, pod-), zaś $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant N$ dwoma momentami zatrzymania. Wówczas*

$$\mathbb{E}(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau) = X_\tau \qquad \textit{p.n. (odp. } \leqslant, \geqslant).$$

*Dowód.* Musimy pokazać, że dla $A \in \mathcal{F}_\tau$, $\mathbb{E}X_\tau \mathrm{I}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathrm{I}_A$. Połóżmy $A_k := A \cap \{\tau = k\}$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$. Mamy

$$(X_\sigma - X_\tau)\mathrm{I}_{A_k} = (X_\sigma - X_k)\mathrm{I}_{A_k} = \sum_{i=k}^{\sigma-1} (X_{i+1} - X_i)\mathrm{I}_{A_k} = \sum_{i=k}^{N} (X_{i+1} - X_i)\mathrm{I}_{A_k \cap \{\sigma > i\}},$$

zatem

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathrm{I}_{A_k}] = \sum_{i=k}^{N} \mathbb{E}[(X_{i+1} - X_i)\mathrm{I}_{A_k \cap \{\sigma > i\}}] = 0,$$

gdyż $A_k \cap \{\sigma > i\} \in \mathcal{F}_i$. Stąd

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathrm{I}_A] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathrm{I}_{A_k}] = 0.$$

$\square$

*Uwaga* 5.3. Lemat 5.1 nie jest prawdziwy, jeśli nie założymy ograniczoności momentów zatrzymania, np. biorąc $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_n$ niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\tau = 0$, $\sigma = \inf\{n\colon X_n = 1\}$ widzimy, że $\mathbb{E}X_\tau = 0 \neq 1 = \mathbb{E}X_\sigma$.

Przed sformułowaniem kolejnego lematu przypomnijmy, że przez $X^+$ i $X^-$ oznaczamy odpowiednio część dodatnią i ujemną zmiennej $X$, tzn. $X^+ := \max X, 0$ oraz $X^- := \max -X, 0$.

**Lemat 5.2.** *Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ będzie podmartyngałem, wówczas dla wszystkich $\lambda \geqslant 0$ mamy*

a) $\lambda\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}X_N \mathrm{I}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda\}} \leqslant \mathbb{E}X_N^+$,

b) $\lambda\mathbb{P}\Big(\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -\lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}X_N \mathrm{I}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > -\lambda\}} - \mathbb{E}X_0 \leqslant \mathbb{E}X_N^+ - \mathbb{E}X_0$.

*Dowód.* a) Niech $\tau := \inf\{n\colon X_n \geqslant \lambda\}$, z Lematu 5.1 dostajemy (wobec $\tau\wedge N \leqslant N$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_N \geqslant \mathbb{E}X_{\tau\wedge N} &= \mathbb{E}X_\tau \mathrm{I}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda\}} + \mathbb{E}X_N \mathrm{I}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n < \lambda\}}\\ &\geqslant \lambda\mathbb{P}(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \geqslant \lambda) + \mathbb{E}X_N \mathrm{I}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n < \lambda\}}\end{aligned}$$

i po przeniesieniu wartości oczekiwanych na jedną stronę dostajemy postulowaną nierówność.

b) Definiujemy $\tau := \inf\{n\colon X_n \leqslant -\lambda\}$, z Lematu 5.1 dostajemy (wobec $\tau\wedge N \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_0 \leqslant \mathbb{E}X_{\tau\wedge N} &= \mathbb{E}X_\tau \mathrm{I}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -\lambda\}} + \mathbb{E}X_N \mathrm{I}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > -\lambda\}}\\ &\leqslant -\lambda\mathbb{P}(\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n \leqslant -\lambda) + \mathbb{E}X_N \mathrm{I}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N} X_n > -\lambda\}}\end{aligned}$$

i znów wystarczy pogrupować wartości oczekiwane. □

**Wniosek 5.1.** *Jeśli $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ jest martyngałem, bądź nieujemnym podmartyngałem, to*

a) $\forall_{p\geqslant 1}\, \forall_{\lambda\geqslant 0}\, \lambda^p\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p$,

b) $\forall_{p>1}\, \mathbb{E}|X_N|^p \leqslant \mathbb{E}\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}|X_N|^p$.

*Dowód.* a) Funkcja $f(t) = |t|^p$ jest wypukła, niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, stąd na mocy Stwierdzenia 5.1 $|X_n|^p$ jest nieujemnym podmartyngałem, zatem z Lematu 5.2 mamy

$$\begin{aligned}\lambda^p\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n| \geqslant \lambda\Big) &= \lambda^p\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p \geqslant \lambda^p\Big)\\ &\leqslant \mathbb{E}|X_N|^p \mathrm{I}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p \geqslant \lambda^p\}} \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p.\end{aligned}$$

b) Niech $X^* := \max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|$, z rachunku przeprowadzonego powyżej dla $p = 1$,

$$\lambda\mathbb{P}(X^* \geqslant \lambda) \leqslant \mathbb{E}|X_N| \mathrm{I}_{\{X^* \geqslant \lambda\}}.$$

Stosując kolejno wzór na całkowanie przez części, twierdzenie Fubiniego i nierówność Höldera dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{0\leqslant n\leqslant N} |X_n|^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mathbb{P}(X^* \geqslant \lambda)d\lambda \leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\mathbb{E}|X_N|\mathrm{I}_{\{X^*\geqslant\lambda\}}d\lambda\\ &= p\mathbb{E}|X_N|\int_0^{X^*} \lambda^{p-2}d\lambda \leqslant \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_N|(X^*)^{p-1}\\ &\leqslant \frac{p}{p-1}(\mathbb{E}|X_N|^p)^{1/p}(\mathbb{E}(X^*)^p)^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

Jeśli $\mathbb{E}|X_N|^p < \infty$, to na mocy nierówności Jensena, $\mathbb{E}|X_n|^p \leqslant \mathbb{E}|X_N|^p < \infty$ dla $0 \leqslant n \leqslant N$ oraz $\mathbb{E}(X^*)^p \leqslant \mathbb{E}\sum_{n=0}^N |X_n|^p < \infty$. Dzieląc więc otrzymaną poprzednio nierówność stronami przez $(\mathbb{E}(X^*)^p)^{(p-1)/p}$ dostajemy

$$(\mathbb{E}(X^*)^p)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}(\mathbb{E}|X_N|^p)^{1/p}.$$

□

Udowodnimy teraz *nierówność maksymalną Dooba* w przypadku ciągłym.

**Twierdzenie 5.1.** *Załóżmy, że $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem, o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Wówczas*

a) $\forall_{p\geqslant 1}\ \forall_{\lambda\geqslant 0}\ \lambda^p\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T}|X_t| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p,$

b) $\forall_{p>1}\ \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p \leqslant \mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t|^p \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p.$

*Uwaga* 5.4. Oczywiście, jeśli $T$ zawiera element maksymalny $t_{\max}$, to przy założeniach twierdzenia $\sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p = \mathbb{E}|X_{t_{\max}}|^p$.

*Dowód.* Jeśli $D$ jest skończonym podzbiorem $T$, to na podstawie Wniosku 5.1 dostajemy

$$\lambda^p\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in D}|X_t| \geqslant \lambda\Big) \leqslant \sup_{t\in D}\mathbb{E}|X_t|^p \leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p.$$

Niech $T_0$ będzie gęstym podzbiorem $T$ zawierającym prawy koniec $T$ (o ile taki istnieje), zaś $D_n$ wstępującym ciągiem skończonych podzbiorów $T_0$ takim, że $\bigcup_n D_n = T_0$. Wówczas dla dowolnego $\tilde{\lambda} > 0$ dostajemy na mocy prawostronnej ciągłości

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^p\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T}|X_t| > \tilde{\lambda}\Big) &= \tilde{\lambda}^p\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T_0}|X_t| > \tilde{\lambda}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\tilde{\lambda}^p\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in D_n}|X_t| > \tilde{\lambda}\Big) \leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|^p.\end{aligned}$$

Biorąc ciąg $\tilde{\lambda}_n \nearrow \lambda$ dostajemy postulowaną w a) nierówność. Nierówność z punktu b) wynika z Wniosku 5.1 w podobny sposób. □

*Uwaga* 5.5. Punkt b) Twierdzenia 5.1 nie zachodzi dla $p = 1$ – można skonstruować martyngał dla którego $\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$, ale $\mathbb{E}\sup_t |X_t| = \infty$. Zachodzi jednak (przy założeniach Twierdzenia 5.1) nierówność

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t| \leqslant \frac{e}{e-1}\Big(1 + \sup_{t\in T}\mathbb{E}|X_t|\ln^+|X_t|\Big).$$

**Wniosek 5.2.** *Dla dowolnych $u, s > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \geqslant u\Big) \leqslant e^{-\frac{u^2}{2s}}.$$

*Dowód.* Ustalmy $\lambda > 0$, wówczas $M_t := \exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2})$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t^W$ generowanej przez proces Wienera (Ćwiczenie 5.2). Stąd na mocy Twierdzenia 5.1 a) z $p = 1$ i nieujemności $M_t$ dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \geqslant u\Big) &\leqslant \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} M_t \geqslant e^{\lambda u - \frac{\lambda^2 s}{2}}\Big)\\ &\leqslant e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} \sup_{0\leqslant t\leqslant s} \mathbb{E}|M_t| = e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}}\mathbb{E}M_0 = e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \geqslant u\Big) \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{-\lambda u + \frac{\lambda^2 s}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2s}}.$$

□

## 5.3. Zadania

**Ćwiczenie 5.1.** Załóżmy, że $(N_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Poissona, tzn. procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $N_0 = 0$, $N$ ma przyrosty niezależne, oraz $N_t - N_s \sim \mathrm{Poiss}(t-s)$ dla $t > s$. Wykaż, że $(N_t - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ oraz $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geqslant 0}$.

**Ćwiczenie 5.2.** Wykaż, że $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Ćwiczenie 5.3** (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera)**.** Wykaż, że
a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n.,
b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n..

*Wskazówka. i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że*

$$\sum_n \mathbb{P}\Big(\sup_{C^n\leqslant t\leqslant C^{n+1}} W_t \geqslant u\sqrt{2C^n \ln\ln C^n}\Big) < \infty$$

*i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant u$ p.n..*
*ii) Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n. oraz $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant -1$ p.n..*
*iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $t > 0$,*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\Big)e^{-t^2/2} \leqslant \mathbb{P}(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$

*iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$*

$$\sum \mathbb{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geqslant u\sqrt{1 - 1/C}\sqrt{2C^n \ln\ln C^n}) = \infty$$

*i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant u(1 - 1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n..*

**Ćwiczenie 5.4.** Udowodnij, że
a) $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n.,
b) $\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = -1$ p.n..

# 6. Twierdzenia o zbieżności martyngałów

Udowodnimy twierdzenia o zbieżności martyngałów z czasem ciągłym prawie na pewno i w $L_p$. Wykażemy też ciągłą wersję twierdzenia Dooba „optional sampling”.

## 6.1. Przejścia w dół przez przedział

**Definicja 6.1.** Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha < \beta$. Jeśli $I$ jest skończone, to określamy

$$\tau_1 := \inf\{t \in I\colon f(t) \geqslant \beta\} \text{ oraz } \sigma_1 := \inf\{t \in I\colon t > \tau_1, f(t) \leqslant \alpha\}$$

i dalej indukcyjnie dla $i = 1, 2, \ldots$

$$\tau_{i+1} := \inf\{t \in I\colon t > \sigma_i, f(t) \geqslant \beta\} \text{ oraz } \sigma_{i+1} := \inf\{t \in I\colon t > \tau_{i+1}, f(t) \leqslant \alpha\}.$$

Definiujemy

$$D_I(f, [\alpha, \beta]) := \sup\{j\colon \sigma_j < \infty\} \vee 0.$$

W przypadku, gdy $I$ jest nieskończone kładziemy

$$D_I(f, [\alpha, \beta]) := \sup\{D_F(f, [\alpha, \beta])\colon F \subset T \text{ skończone}\}.$$

Wielkość $D_I(f, [\alpha, \beta])$ nazywamy *liczbą przejść w dół funkcji $f$ przez przedział* $[\alpha, \beta]$.

Przypomnijmy fakt z rachunku prawdopodobieństwa wiążący skończoność liczby przejść ciągu przez przedział z istnieniem granicy.

**Lemat 6.1.** *Ciąg liczbowy $x_n$ jest zbieżny do pewnej, niekoniecznie skończonej granicy wtedy i tylko wtedy, gdy $D_{\mathbb{N}}((x_n), [\alpha, \beta]) < \infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$.*

Następny lemat jest niewielką modyfikacją poprzedniego.

**Lemat 6.2.** *Jeśli $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \leqslant \infty$ jest prawostronnie ciągłą funkcją taką, że dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$, $D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(f, [\alpha, \beta]) < \infty$, to istnieje (niekoniecznie skończona) granica $\lim_{t\to b} f(t)$.*

*Dowód.* Załóżmy, że postulowana granica nie istnieje, wtedy można znaleźć liczby wymierne $\alpha, \beta$ takie, że

$$\liminf_{t\to b} f(t) < \alpha < \beta < \limsup_{t\to b} f(t).$$

Stąd wynika, że istnieje rosnący ciąg liczb wymiernych $t_n$ z przedziału $[a, b)$ taki, że $f(t_{2k-1}) \geqslant \beta$ oraz $f(t_{2k}) \leqslant \alpha$. Przyjmując $I = \{t_1, t_2, \ldots\}$ widzimy, że $D_{[a,b)\cap\mathbb{Q}}(f, [\alpha, \beta]) \geqslant D_I(f, [\alpha, \beta]) = \infty$. □

**Lemat 6.3.** *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in T}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji, a $F$ jest przeliczalnym podzbiorem $T$, wówczas*

$$\mathbb{E} D_F(X, [\alpha, \beta]) \leqslant \sup_{t\in F} \frac{\mathbb{E}(X_t - \beta)^+}{\beta - \alpha}.$$

*Dowód.* Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej widzimy, że wystarczy udowodnić lemat dla skończonych zbiorów $F$, dla uproszczenia notacji możemy oczywiście przyjąć, że $F = \{1, 2, \ldots, N\}$. Zauważmy, że (przy oznaczeniach jak w Definicji 6.1)

$$X_{\tau_i \wedge N} - X_{\sigma_i \wedge N} = \begin{cases} X_{\tau_i} - X_{\sigma_i} \geqslant \beta - \alpha & \text{gdy } \sigma_i < \infty, \\ X_{\tau_i} - X_N \geqslant \beta - X_N \geqslant -(X_N - \beta)^+ & \text{gdy } \tau_i < \sigma_i = \infty, \\ X_N - X_N = 0 & \text{gdy } \tau_i = \infty. \end{cases}$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{N} (X_{\tau_i \wedge N} - X_{\sigma_i \wedge N}) \geqslant (\beta - \alpha) D_F(X, [\alpha, \beta]) - (X_N - \beta)^+.$$

Na mocy Lematu 5.1, $\mathbb{E}X_{\tau_{i \wedge N}} \leqslant \mathbb{E}X_{\sigma_{i \wedge N}}$, więc

$$0 \geqslant \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} (X_{\tau_i \wedge N} - X_{\sigma_i \wedge N}) \geqslant \mathbb{E}(\beta - \alpha) D_F(X, [\alpha, \beta]) - \mathbb{E}(X_N - \beta)^+.$$

□

## 6.2. Zbieżność prawie na pewno

Przypomnijmy twierdzenie dotyczące zbieżności podmartyngałów z czasem dyskretnym:

**Twierdzenie 6.1.** *Załóżmy, że $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji takim, że $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$ (lub nadmartyngałem takim, że $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^- < \infty$), wówczas $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ istnieje i jest skończona p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Sformułujemy teraz odpowiednik powyższego twierdzenia dla czasu ciągłego.

**Twierdzenie 6.2.** *Załóżmy, że $(X_t)_{t \in [a,b)}$, $b \leqslant \infty$ jest podmartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}X_t^+ < \infty$. Wówczas $X = \lim_{t \to b} X_t$ istnieje i jest skończony p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

*Dowód.* Dla ustalonego $\alpha < \beta$ na podstawie Lematu 6.3 mamy

$$\mathbb{E}D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) \leqslant \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+ < \infty,$$

zatem $\mathbb{P}(D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) = \infty) = 0$. Niech

$$A := \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta} \{D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t, [\alpha, \beta]) < \infty\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A) = 1$, bo $A$ jest przecięciem przeliczalnej liczby zbiorów pełnej miary. Jeśli $\omega \in A$, to $D_{[a,b) \cap \mathbb{Q}}(X_t(\omega), [\alpha, \beta]) < \infty$ dla dowolnych liczb wymiernych $\alpha < \beta$, czyli, na podstawie Lematu 6.2, granica $X(\omega) := \lim_{t \to b} X_t(\omega)$ istnieje (choć apriori może być nieskończona). Zauważmy, że $\mathbb{E}|X_t| = 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_t \leqslant 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_0$, zatem $\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Z Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E} \lim_{t \to b} |X_t| \leqslant \liminf_{t \to b} \mathbb{E}|X_t| \leqslant \sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty,$$

czyli zmienna $X$ jest całkowalna, a więc w szczególności skończona p.n.. □

**Wniosek 6.1.** *Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest niedodatnim podmartyngałem (lub nieujemnym nadmartyngałem) o prawostronnie ciągłych trajektoriach, wówczas granica $X = \lim_{t\to\infty} X_t$ istnieje i jest skończona p.n., ponadto $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

## 6.3. Jednostajna całkowalność

**Definicja 6.2.** Rodzinę zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ nazywamy *jednostajnie całkowalną*, jeśli

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i| \mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} = 0.$$

**Stwierdzenie 6.1.** *Rodzina zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki*
*a)* $\sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i| < \infty$,
*b)* $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\ \mathbb{P}(A) \leqslant \delta \Rightarrow \sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A \leqslant \varepsilon$.

*Dowód.* $\Rightarrow$: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $C$ takie, że $\sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant \varepsilon/2$. Wówczas

$$\forall_{i\in I}\ \mathbb{E}|X_i| \leqslant C + \mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant C + \varepsilon/2 < \infty$$

oraz, jeśli $\mathbb{P}(A) < \delta := \frac{\varepsilon}{2C}$, to

$$\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A \leqslant C\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant C\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Niech $\alpha := \sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|$ oraz $\delta > 0$ będzie takie, że $\sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A \leqslant \varepsilon$ dla $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$. Wówczas, jeśli $C = \alpha/\delta$, to $\mathbb{P}(|X_i| > C) < \alpha/C = \delta$ dla dowolnego $i \in I$, czyli $\sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} \leqslant \varepsilon$. □

Podamy teraz kilka przykładów rodzin jednostajnie całkowalnych.

**Przykład 6.1.** Rodzina jednoelementowa $\{Y\}$ taka, że $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Istotnie, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej mamy $\lim_{C\to\infty} \mathbb{E}|Y|\mathrm{I}_{\{|Y|>C\}} = 0$.

**Przykład 6.2.** Rodzina wspólnie ograniczona przez zmienną całkowalną tzn. rodzina $(X_i)_{i\in I}$ taka, że $\forall_{i\in I}|X_i| \leqslant Y$ oraz $\mathbb{E}Y < \infty$.

Wynika to ze Stwierdzenia 6.1, poprzedniego przykładu i oczywistej obserwacji $\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A \leqslant \mathbb{E}|Y|\mathrm{I}_A$.

**Przykład 6.3.** Rodzina uśrednień ustalonej całkowalnej zmiennej losowej, tzn. rodzina postaci $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i))_{i\in I}$, gdzie $\mathbb{E}|X| < \infty$, zaś $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ dowolna rodzina $\sigma$-podciał $\mathcal{F}$.

Na podstawie nierówności Jensena $\mathbb{E}|X_i| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i)| \leqslant \mathbb{E}|X|$, a zatem

$$\mathbb{P}(|X_i| \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X_i|}{C} \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{C} \leqslant \delta \quad \text{dla } C \geqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{\delta}.$$

Zbiór $\{|X_i| > C\} \in \mathcal{F}_i$, więc z nierówności Jensena

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} &= \mathbb{E}|\mathbb{E}(X\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}|\mathcal{F}_i)| \leqslant \mathbb{E}\mathbb{E}(|X|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}|\mathcal{F}_i)\\ &\leqslant \mathbb{E}(|X|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

jeśli tylko dobierzemy odpowiednio małe $\delta$ korzystając z jednostajnej całkowalności $\{|X|\}$.

Jednostajna całkowalność jest jednym z kluczowych narzędzi (obok twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej) pozwalającym ze zbieżności prawie na pewno wywnioskować zbieżność w $L_p$.

**Stwierdzenie 6.2.** *Załóżmy, że $1 \leqslant p < \infty$, a $X_n$ są zmiennymi losowymi takimi, że rodzina $(|X_n|^p)_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie całkowalna. Wówczas $X_n$ zbiega do zmiennej $X$ w $L_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_n$ zbiega do $X$ według prawdopodobieństwa.*

*Dowód.* Wystarczy udowodnić, że zbieżność $X_n$ według prawdopodobieństwa implikuje zbieżność w $L_p$, bo przeciwna implikacja jest zawsze prawdziwa. Załóżmy więc, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, wówczas dla pewnego podciągu $n_k$, $X_{n_k}$ zbiega do $X$ p.n., stąd na mocy Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E} \lim_{k\to\infty} |X_{n_k}|^p \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}|X_{n_k}|^p \leqslant \sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

Zatem rodzina $\{|X_n|^p : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{|X|^p\}$ jest jednostajnie całkowalna. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak, by dla $\mathbb{P}(A) < \delta$ zachodziło $\mathbb{E}|X_n|^p \mathrm{I}_A \leqslant \varepsilon$ oraz $\mathbb{E}|X|^p \mathrm{I}_A \leqslant \varepsilon$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_n - X|^p &\leqslant \varepsilon^p + \mathbb{E}|X_n - X|^p \mathrm{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} \\ &\leqslant \varepsilon^p + 2^p \mathbb{E}|X_n|^p \mathrm{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + 2^p \mathbb{E}|X|^p \mathrm{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}},\end{aligned}$$

a ponieważ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, więc $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$ dla dużych $n$, czyli

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p \leqslant \varepsilon^p + 2^{p+1}\varepsilon \text{ dla dostatecznie dużych } n.$$

□

**Wniosek 6.2.** *Jeśli rodzina $(X_n)_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie całkowalna oraz $X_n$ zbiega prawie na pewno do zmiennej $X$, to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \mathrm{I}_A = \mathbb{E}X\mathrm{I}_A$ dla wszystkich zdarzeń $A$.*

*Dowód.* Stosujemy Stwierdzenie 6.2 i oczywiste szacowanie $|\mathbb{E}X_n\mathrm{I}_A - \mathbb{E}X\mathrm{I}_A| \leqslant \mathbb{E}|X_n - X|$. □

## 6.4. Ciągła wersja twierdzenia Dooba

Jesteśmy teraz gotowi do dowodu ciągłej wersji Lematu 5.1.

**Twierdzenie 6.3.** *a) Załóżmy, że $T$ jest przedziałem, a $(X_t)_{t\in T}$ martyngałem prawostronnie ciągłym, zaś $\sigma$ i $\tau$ czasami zatrzymania takimi, że $\sigma \leqslant \tau \leqslant t_{\max}$ oraz $t_{\max} \in T$. Wówczas $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n..*
*b) Jeśli $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem z ostatnim elementem $X_\infty$ to dla dowolnych dwu czasów zatrzymania $\sigma \leqslant \tau$, $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n.*

*Dowód.* Udowodnimy część a) (część b) można za pomocą zmiany czasu sprowadzić do a)). Zdefiniujmy

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \tau(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}], k = 0, 1, \ldots, n^2, \\ t_{\max} - n & \text{dla } \tau(\omega) \leqslant t_{\max} - n \end{cases}$$

oraz

$$\sigma_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \sigma(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}], k = 0, 1, \ldots, n^2, \\ t_{\max} - n & \text{dla } \sigma(\omega) \leqslant t_{\max} - n. \end{cases}$$

Wówczas $\sigma_n \leqslant \tau_n \leqslant t_{\max}$ są ograniczonymi czasami zatrzymania przyjmującymi jedynie skończenie wiele wartości. Zatem na mocy Lematu 5.1 mamy $\mathbb{E}(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n., $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n. oraz $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}$ p.n., w szczególności więc rodziny $(X_{\tau_n})_{n=1}^\infty$ oraz $(X_{\sigma_n})_{n=1}^\infty$

są jednostajnie całkowalne. Ponieważ $\tau_n \to \tau+$ oraz $\sigma_n \to \sigma+$, więc z prawostronnej ciągłości $X$ oraz Stwierdzenia 6.2, $X_{\tau_n} \to X_\tau$, $X_{\sigma_n} \to X_\sigma$ p.n. i w $L_1$. Weźmy $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$, wówczas

$$\mathbb{E}X_\tau \mathrm{I}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\tau_n}\mathrm{I}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\sigma_n}\mathrm{I}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathrm{I}_A,$$

co oznacza, że $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n.. □

**Wniosek 6.3.** *Załóżmy, że $T$ jest przedziałem, a $(M_t)_{t\in T}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Wówczas dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau$ proces $M^\tau = (M_{\tau\wedge t})_{t\in T}$ jest martyngałem zarówno względem $(\mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\in T}$, jak i $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.*

*Dowód.* Niech $s < t$ oraz $s, t \in T$, wówczas $\tau \wedge s \leqslant \tau \wedge t \leqslant t$, więc z Twierdzenia 6.3 mamy $\mathbb{E}(M_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_{\tau\wedge s}) = M_{\tau\wedge s}$ p.n., czyli $(M_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\in T}$ jest martyngałem.

By udowodnić drugą część ustalmy $s < t$ oraz $A \in \mathcal{F}_s$. Nietrudno sprawdzić, że $A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge s}$, zatem z poprzednio udowodnionej części wniosku mamy

$$\mathbb{E}M_{\tau\wedge t}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau>s\}} = \mathbb{E}M_{\tau\wedge s}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau>s\}}.$$

Ponadto

$$\mathbb{E}M_{\tau\wedge t}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau\leqslant s\}} = \mathbb{E}M_\tau \mathrm{I}_{A\cap\{\tau\leqslant s\}} = \mathbb{E}M_{\tau\wedge s}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau\leqslant s\}}.$$

Dodając powyższe tożsamości stronami otrzymujemy $\mathbb{E}M_{\tau\wedge t}\mathrm{I}_A = \mathbb{E}M_{\tau\wedge s}\mathrm{I}_A$ dla $A \in \mathcal{F}_s$, zatem $(M_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest martyngałem. □

## 6.5. Zbieżność martyngałów w $L_p$

Zacznijmy od warunków zbieżności martyngałów z czasem ciągłym w $L_1$.

**Twierdzenie 6.4.** *Załóżmy, że $(X_t)_{t\in[a,b)}$, $b \leqslant \infty$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
*a) Rodzina $(X_t)_{t\in[a,b)}$ jest jednostajnie całkowalna.*
*b) Istnieje całkowalna zmienna losowa $X_b$ taka, że $X_t$ zbiega do $X_b$ w $L_1$, tzn. $\lim_{t\to b} \mathbb{E}|X_t - X_b| = 0$.*
*c) Istnieje całkowalna zmienna losowa $X_b$ mierzalna względem $\sigma$-ciała $\mathcal{F}_b := \sigma(\bigcup_{t\in[a,b)} \mathcal{F}_t)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in [a, b)$.*
*W przypadku, gdy zachodzą warunki (a)-(c), to $X_b = \lim_{t\to b} X_t$ p.n..*

*Dowód.* a)⇒b): $X_t$ jest jednostajnie całkowalny, więc $\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$, czyli wobec Twierdzenia 6.2 istnieje zmienna całkowalna $X_b$ taka, że $X_t \to X_b$ p.n. przy $t \to b$. Z jednostajnej całkowalności i Lematu 6.2 wynika zbieżność w $L_1$.

b)⇒c): Dla pewnego podciągu $t_k \to b$, $X_{t_k} \to X_b$ p.n., stąd możemy zakładać, że zmienna $X_b$ jest $\mathcal{F}_b$ mierzalna. Ustalmy $t$ i $A \in \mathcal{F}_t$, wówczas dla $s \geqslant t$

$$\mathbb{E}X_t\mathrm{I}_A = \mathbb{E}X_s\mathrm{I}_A \to \mathbb{E}X_b\mathrm{I}_A,\ s \to \infty.$$

Zatem $X_t = \mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_t)$ p.n..

c)⇒a) Wiemy, że rodzina uśrednień ustalonej zmiennej jest jednostajnie całkowalna.

Ostatnia część twiedzenia wynika z dowodu implikacji a)⇒b). □

**Twierdzenie 6.5.** *Załóżmy, że $(X_t)_{t\in[a,b)}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
*a)* $\sup_{t\in[a,b)} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$.
*b) Rodzina $(|X_t|^p)_{t\in[a,b)}$ jest jednostajnie całkowalna.*
*c) Istnieje zmienna losowa $X_b \in L_p$ taka, że $X_t$ zbiega do $X_b$ w $L_p$, tzn.* $\lim_{t\to b} \mathbb{E}|X_t - X_b|^p = 0$.
*d) Istnieje zmienna losowa $X_b \in L_p$ mierzalna względem $\mathcal{F}_b := \sigma(\bigcup_{t\in[a,b)} \mathcal{F}_t)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}(X_b|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in [a,b)$.*
*W przypadku, gdy zachodzą warunki (a)-(d), to $X_b = \lim_{t\to b} X_t$ p.n..*

*Dowód.* a)⇒b): Na podstawie Twierdzenia 5.1 wiemy, że

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[a,b)} |X_t|^p \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sup_{t\in[a,b)} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty.$$

Pozostałe implikacje dowodzimy jak w dowodzie Twierdzenia 6.4. □

## 6.6. Uwagi i uzupełnienia

W wielu twierdzeniach zakłada się, iż $(X_t)$ jest prawostronnie ciągłym podmartyngałem. Oczywiście modyfikacja podmartyngału jest podmartyngałem – problem jest tylko z mierzalnością, ale znika on, gdy filtracja spełnia zwykłe warunki. Naturalnie jest więc zapytać kiedy dany podmartyngał możemy zmodyfikować tak, by stał się prawostronnie ciągły. Odpowiedź na to pytanie jest bardzo prosta.

**Twierdzenie 6.6.** *Załóżmy, że $T$ jest przedziałem, a $X = (X_t)_{t\in T}$ jest podmartyngałem (odp. nadmartyngałem) względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ spełniającej zwykłe warunki. Wówczas $X$ ma prawostronnie ciągłą modyfikację wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $t \to \mathbb{E}X_t$ jest prawostronnie ciągła.*

## 6.7. Zadania

**Ćwiczenie 6.1.** Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu $X_n$:
a) $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$,
b) $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$,
c) $\mathbb{E}\sup_n |X_n| < \infty$,
d) zbieżność $X_n$ w $L_1$,
e) zbieżność $X_n$ p.n.?

**Ćwiczenie 6.2.** Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\leqslant 0}$ będzie podmartyngałem (z czasem odwróconym!) takim, że $\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}X_n > -\infty$. Wykaż, że $(X_n)$ jest jednostajnie całkowalny.

**Ćwiczenie 6.3.** Wykaż, że martyngał $M_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w $L_1$?

**Ćwiczenie 6.4.** a) Wykaż, że jeśli $f$ jest dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ oraz $f, f', f''$ są ograniczone, to

$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_u)du$$

jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t^W$.
b) Ogólniej, jeśli $f$ jest dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}^d$, pochodne cząstkowe $f$ rzędu mniejszego niż 2 są ograniczone oraz $W$ jest $d$-wymiarowym procesem Wienera, to

$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(W_u)du$$

jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t^W$.

**Ćwiczenie 6.5.** Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$.
a) Wykaż, że $(W_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n=1}^\infty$ jest martyngałem.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}\sup_n W_{\tau\wedge n}^2 < \infty$.
c) Wykaż, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}W_\tau = 0$.

**Ćwiczenie 6.6.** Niech $W_t$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0\colon W_t = a\}, \ \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0\colon |W_t| = a\}.$$

Rozpatrując martyngały $W_t$ i $W_t^2 - t$ wykaż, że
a) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$,
b) $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$,
c) $\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geqslant 0$,
d) $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$,
e) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$.

**Ćwiczenie 6.7.** Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda = (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, \lambda \geqslant 0$,
a) $\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$,
b) $\mathbb{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

**Ćwiczenie 6.8.** Niech $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ będzie $d$ wymiarowym procesem Wienera, a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ oraz $d > 2$.
a) Wykaż, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ jest nieujemnym nadmartyngałem.
b) Udowodnij, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ zbiega przy $t \to \infty$ do 0 według prawdopodobieństwa i p.n. oraz wywnioskuj stąd, że $\lim_{t\to\infty} |W_t| = \infty$ p.n..
c) Wykaż, że dla prawostronnie ciągłego nadmartyngału $(X_t)_{t\geqslant a}$ zachodzi

$$\forall_{\lambda>0}\ \lambda\mathbb{P}(\sup_{t\geqslant a} X_t \geqslant \lambda) \leqslant \sup_t \mathbb{E}X_t^- + \mathbb{E}X_a.$$

d) Wykaż, że $\mathbb{P}(\exists_{t>0}\ W_t = x_0) = 0$.

# 7. Całka Stieltjesa

Podstawowy problem jakim się zajmiemy podczas najbliższych wykładów polega na ścisłym zdefiniowaniu całek $\int_0^t f(s)dW_s$, $\int_0^t X_s dW_s$ lub ogólniej $\int_0^t X_s dY_s$, gdzie $f(s)$ jest „porządną" funkcją, a $X_s$, $Y_s$ są „porządnymi" procesami stochastycznymi.

Najprostsze podejście polega na zdefiniowaniu osobno całki dla każdej trajektorii, tzn. określeniu dla ustalonego $\omega \in \Omega$, $\int_0^s Y_s(\omega)dX_s(\omega)$. Sposób takiej konstrukcji daje całka Stieltjesa, uogólniająca całkę Riemanna.

## 7.1. Całka Riemanna-Stieltjesa

W tej części podamy tylko podstawowe fakty i definicje, bez dowodów. Więcej informacji oraz kompletne dowody można znaleźć w [2, 5] i [8].

**Definicja 7.1.** *Podziałem przedziału* $[a, b]$ nazywamy niemalejący ciąg liczb $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ taki, że $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$. *Średnicę* podziału $\Pi$ definiujemy wzorem $\mathrm{diam}(\Pi) := \max_i |t_{i+1} - t_i|$.
Mówimy, że podział $\Pi'$ jest *podpodziałem* $\Pi$ (ozn. $\Pi' \prec \Pi$) jeśli wszystkie punkty $\Pi$ są punktami $\Pi'$.
Ciąg $\Pi^n = (t_0^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, jeśli $\mathrm{diam}(\Pi^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ oraz $\Pi^{n+1} \prec \Pi^n$.

**Definicja 7.2.** Niech $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Powiemy że $\int_a^b g\,df$ istnieje oraz, że $g$ jest *całkowalna względem* $f$, jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\Pi^n = (t_0^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ oraz punktów $s_0^n, \ldots, s_{k_n-1}^n$ takich, że $t_j^k \leqslant s_j^k \leqslant t_{j+1}^k$ istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} g(s_{j-1}^k)[f(t_j^k) - f(t_{j-1}^k)],$$

która nie zależy od wybranego ciągu punktów i podziałów. Granicę tą oznaczamy $\int_a^b g(t)\,df(t)$ i nazywamy *całką Riemanna-Stjeltjesa*.

*Uwaga* 7.1. Można udowodnić, że całka $\int_a^b g\,df$ istnieje oraz jest równa $S$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału $\Pi^n = (t_0^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ o średnicy nie większej niż $\delta$ oraz punktów $s_0^n, \ldots, s_{k_n-1}^n$ takich, że $t_j^k \leqslant s_j^k \leqslant t_{j+1}^k$,

$$\Big|S - \sum_{j=1}^{k_n} g(s_{j-1}^k)[f(t_j^k) - f(t_{j-1}^k)]\Big| \leqslant \varepsilon.$$

*Uwaga* 7.2. i) W przypadku $f(t) = t$ całka Riemanna-Stieltjesa jest całką Riemanna.
ii) Jeśli $f \in C^1[a, b]$, to $f(t_{j+1}^n) - f(t_j^n) = f'(\Theta_j^n)$ dla pewnego $t_j^{n+1} \leqslant \Theta_j^n \leqslant t_j^n$, stąd można prosto udowodnić, że w tym przypadku $\int_a^b g(t)\,df(t) = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$.

Wprost z definicji natychmiast wynika.

**Stwierdzenie 7.1.** *i) Jeśli $g_1$ i $g_2$ są całkowalne względem $f$, to dla dowolnych liczb $c_1$ i $c_2$ funkcja $c_1g_1 + c_2g_2$ jest całkowalna względem $f$ oraz*

$$\int_a^b (c_1g_1 + c_2g_2)df = c_1 \int_a^b g_1 df + c_2 \int_a^b g_2 df.$$

*ii) Jeśli $g$ jest całkowalna względem $f_1$ i $f_2$, to dla dowolnych liczb $c_1$ i $c_2$, $g$ jest całkowalna względem $c_1f_1 + c_2f_2$ oraz*

$$\int_a^b g d(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1 \int_a^b g df_1 + c_2 \int_a^b g df_2.$$

*Uwaga* 7.3. Może się zdarzyć, że dla $a < b < c$ całki $\int_a^b gdf$ i $\int_b^c gdf$ istnieją, a całka $\int_a^c gdf$ nie istnieje. Jeśli jednak wszystkie trzy całki istnieją, to $\int_a^c gdf = \int_a^b gdf + \int_b^c gdf$.

Oczywiście naturalnie jest zapytać dla jakich funkcji $f$ i $g$ istnieje całka $\int gdf$. By odpowiedzieć na to pytanie musimy zdefiniować funkcje o wahaniu skończonym.

**Definicja 7.3.** Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, to liczbę

$$\mathrm{Wah}_{[a,b]}(f)\colon = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{a=t_0<\ldots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

nazywamy *wahaniem funkcji $f$ w przedziale* $[a,b]$. Mówimy, że $f$ *ma wahanie skończone na* $[a,b]$, jeśli $\mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) < \infty$.

Oczywiście $0 \leqslant \mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) \leqslant \infty$ Wahanie jest addytywną funkcją przedziału, tzn. $\mathrm{Wah}_{[a,c]}(f) = \mathrm{Wah}_{[a,b]}(f) + \mathrm{Wah}_{[b,c]}(f)$ dla $a < b < c$.

**Przykład 7.1.** Funkcje lipschitzowskie, funkcje monotoniczne mają wahanie skończone na ograniczonych przedziałach. Kombinacja liniowa funkcji o wahaniu skończonym ma wahanie skończone.

**Przykład 7.2.** Funkcja $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ oraz $f(0) = 0$ jest ciągła, ale nie ma wahania skończonego na $[0,1]$.

**Twierdzenie 7.1.** *Jeżeli $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, przy czym $g$ jest ciągła, a $f$ ma wahanie skończone, to $\int_a^b g\,df$ istnieje.*

Twierdzenie to można odwrócić.

**Twierdzenie 7.2.** *Jeśli całka Riemanna-Stieltjesa $\int_a^b gdf$ istnieje dla dowolnej funkcji ciągłej $g$, to funkcja $f$ ma wahanie skończone na $[a,b]$.*

## 7.2. Całka Lebesgue'a-Stieltjesa

**Stwierdzenie 7.2.** *Jeśli $f$ ma wahanie skończone na $[a,b]$, to istnieją funkcje niemalejące $f_1, f_2$ takie, że $f_1(a) = f_2(a) = 0$ oraz $f(t) = f(a) + f_1(t) - f_2(t)$. Co więcej $f$ ma w każdym punkcie granice jednostrone. Ponadto jeśli $f$ jest ciągła (odp. prawostronnie ciągła), to $f_1$ i $f_2$ można wybrać ciągłe (odp. prawostronnie ciągłe).*

*Szkic dowodu.* Określamy $f_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{Wah}_{[a,t]}(f) + f(t) - f(a))$ oraz $f_2(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{Wah}_{[a,t]}(f) - f(t) + f(a))$. □

**Definicja 7.4.** Załóżmy, że $f$ jest prawostronnie ciągłą funkcją na $[a,b]$ o wahaniu skończonym. Niech $f_1$ i $f_2$ będą prawostronnie ciągłymi funkcjami niemalejącymi takimi, że $f_1(a) = f_2(a) = 0$ oraz $f(t) = f(a) + f_1(t) - f_2(t)$. Istnieją wtedy skończone miary borelowskie $\mu_1$ i $\mu_2$ na $[a,b]$ takie, że $\mu_i[a,t] = f_i(t)$ dla $i = 1,2$. Dla ograniczonych funkcji mierzalnych $g$ na $[a,b]$ określamy *całkę Lebesgue'a-Stieltjesa* $g$ względem $f$ wzorem

$$\int_{[a,b]} g df = \int g d\mu_1 - \int g d\mu_2.$$

*Uwaga* 7.4. Można wykazać, że dla funkcji ciągłych $g$ całki Riemanna-Stieltjesa i Lebesgue'a-Stieltjesa $g$ względem $f$ są sobie równe.

## 7.3. Nieskończone wahanie ciągłych martyngałów

Niestety proces Wienera ma z prawdopodobieństwem jeden nieskończone wahanie na każdym przedziale. Prawdziwy jest znacznie ogólniejszy fakt.

**Twierdzenie 7.3.** *Załóżmy, że $(M_t)_{t\in[a,b]}$ jest ciągłym martyngałem oraz*

$$A = \{\omega\colon M_t(\omega) \text{ ma wahanie skończone na } [a,b]\}.$$

*Wówczas $M_t$ ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie stałe na $A$, tzn.*

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[a,b]}\ M_t \mathrm{I}_A = M_a \mathrm{I}_A) = 1.$$

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$, $\mathrm{Wah}_{[a,b]}(M_t(\omega)) \leqslant C$ oraz $\sup_{t\in[a,b]} |M_t(\omega)| \leqslant C$. Ustalmy $0 \leqslant u \leqslant b-a$ i rozpatrzmy zmienne losowe

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} (M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n})^2.$$

Dla $s < t$ mamy

$$\mathbb{E}M_s M_t = \mathbb{E}\mathbb{E}(M_s M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_s \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}M_s^2,$$

stąd

$$\mathbb{E}X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(M^2_{a+(k+1)u/n} - M^2_{a+ku/n}) = \mathbb{E}M^2_{a+u} - \mathbb{E}M^2_a.$$

Szacujemy

$$\begin{aligned}|X_n| &\leqslant \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} |M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}| \sum_{k=0}^{n-1} |M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}| \\ &\leqslant \sup_{|s-t|\leqslant u/n} |M_t - M_s| \mathrm{Wah}_{[a,b]}(M_t),\end{aligned}$$

stąd $|X_n| \leqslant 2C^2$ oraz, z ciągłości $M$, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = 0$, czyli $\mathbb{E}M_{a+u}^2 = \mathbb{E}M_a^2$. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M_{a+u}^2 &= \mathbb{E}\mathbb{E}((M_a + (M_{a+u} - M_a))^2 | \mathcal{F}_a) \\ &= \mathbb{E}M_a^2 + \mathbb{E}(M_{a+u} - M_a)^2 + 2\mathbb{E}[M_a \mathbb{E}((M_{a+u} - M_a)|\mathcal{F}_a) \\ &= \mathbb{E}M_a^2 + \mathbb{E}(M_{a+u} - M_a)^2.\end{aligned}$$

Stąd $M_{a+u} = M_a$ p.n., czyli $M_t = M_a$ p.n. dla dowolnego $t \in [a, b]$. Z ciągłości $M$ wynika, że $\mathbb{P}(\forall_t\ M_t = M_a) = 1$.

W przypadku ogólnym zdefiniujmy ciąg czasów zatrzymania

$$\tau_n = \inf\{t \geqslant a\colon \sup_{a\leqslant s\leqslant t} |M_s| \geqslant n\} \wedge \inf\{t \geqslant a\colon \mathrm{Wah}_{[0,t]} \geqslant n\},$$

wówczas martyngał $M^{\tau_n}$ spełnia założenia pierwszej części dowodu (z $C = n$), więc $M^{\tau_n}$ ma stałe trajektorie p.n.. Wystarczy zauważyć, że dla $\omega \in A$, $\tau_n(\omega) = \infty$ dla dostatecznie dużych $n$. □

## 7.4. Zadania

**Ćwiczenie 7.1.** Załóżmy, że $h$ jest niemalejącą funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Udowodnij, że

a) Jeśli $g$ ma wahanie skończone, to $g \circ h$ też ma wahanie skończone.

b) Jeśli $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$ istnieje, to

$$\int_a^b f(h(t))dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s)dg(s).$$

**Ćwiczenie 7.2.** Załóżmy, że $f, g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, przy czym $f$ i $g$ są ciągłe, a $h$ ma wahanie skończone. Udowodnij, że

a) $H(x) = \int_a^x g(t)dh(t)$ ma wahanie skończone na $[a, b]$,

b) $\int_a^b f dH = \int_a^b fgdh$.

**Ćwiczenie 7.3.** Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f$ o wahaniu skończonym na $[a, b]$ zachodzi $\int_a^b f(s)df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

**Ćwiczenie 7.4.** Oblicz granice w $L_2(\Omega)$ przy $n \to \infty$,

a) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$,

b) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.

# 8. Całka izometryczna względem procesu Wienera

Podczas kolejnych wykładów zdefiniujemy całkę względem procesu Wienera - zaczniemy od całkowania funkcji deterministycznych, by później przejść do konstrukcji izometrycznej całki stochastycznej Itô.

Konstrukcja całki stochastycznej ma pewne podobieństwa do konstrukcji całki Lebesgue'a. Najpierw określa się, w naturalny sposób, całki najprostszych funkcji/procesów (funkcje schodkowe, procesy elementarne), później pokazuje się własności tak określonej całki (oparte na liczeniu drugich momentów), które pozwalają uogólnić definicję na bardziej złożone funkcje/procesy.

Należy zwrócić uwagę, że całkę stochastyczną definiujemy globalnie na całej przestrzeni probabilistycznej, a nie dla każdej trajektorii z osobna.

Dla uproszczenia notacji będziemy definiowali całki $\int_0^t X_s dW_s$. Całkę $\int_u^t X_s dW_s$ dla $0 < u < t$ można wówczas określić na kilka sposobów - albo uogólniając w naturalny sposób odpowiednie definicje albo np. jako całkę $\int_0^t X_s \mathrm{I}_{[u,\infty)}(s) dW_s$.

Będziemy zakładać, że $0 < T \leqslant \infty$ oraz $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest filtracją spełniającą zwykłe warunki taką, że $W_t$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalne oraz $W_s - W_t$ jest niezależne od $\mathcal{F}_t$ dla $s \geqslant t$ (za $\mathcal{F}_t$ można przyjąć uzupełnienie $\mathcal{F}^W_{t+}$).

## 8.1. Całka Paleya-Wienera

Definiowanie całki stochastycznej względem procesu Wienera zaczniemy od najprostszego przypadku funkcji deterministycznych.

Dla funkcji schodkowej postaci

$$h = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{I}_{(t_{i-1},t_i]}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t,\ \alpha_i \in \mathbb{R},$$

określamy

$$I(h) = \int_0^t h(s)\, dW_s := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (W(t_i) - W(t_{i-1})).$$

Z podstawowych własności procesu Wienera natychmiast otrzymujemy następujące własności przekształcenia $I$:

**Stwierdzenie 8.1.** *Przy powyżej wprowadzonych oznaczeniach mamy*
*i)* $\mathbb{E}I(h) = 0$,
*ii)* $\mathrm{Var}(I(h)) = \mathbb{E}I(h)^2 = \int_0^t h^2(s)\, ds$,
*iii) $I(h)$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \int_0^t h^2(s)\, ds)$,*
*iii) $I(c_1h_1 + c_2h_2) = c_1I(h_1) + c_2I(h_2)$ dla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

Oznaczając przez $E_1$ zbiór funkcji schodkowych na $[a, b]$ widzimy, że przekształcenie $I$ definiuje liniową izometrię $L_2([0, t]) \supset E_1 \to L_2(\Omega)$. Ponieważ funkcje schodkowe są gęste w $L_2$ izometrię w jednoznaczny sposób możemy rozszerzyć na całe $L_2([0, t])$.

**Definicja 8.1.** Rozszerzenie powyższej izometrii do izometrii na $L_2([0, t])$ nazywamy *całką Paleya-Wienera z funkcji $h$* i oznaczamy $\int_0^t h(s)\, dW_s$.

**Stwierdzenie 8.2.** *Dla dowolnej funkcji* $h \in L_2([0,t])$,
*i)* $\mathbb{E}(\int_0^t h(s)\,dW_s) = 0$,
*ii)* $\mathrm{Var}(\int_0^t h(s)\,dW_s) = \mathbb{E}(\int_0^t h(s)\,dW_s)^2 = \int_0^t h^2(s)\,ds$,
*iii)* $\int_0^t h(s)\,dW_s$ *ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(0, \int_0^t h^2(s)\,ds)$.

Można też udowodnić następujące proste własności całki Paleya-Wienera:

**Stwierdzenie 8.3.** *i) Jeżeli* $h \in C^1([0,t])$, *to*

$$\int_0^t h(s)\,dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s\,ds.$$

*Ponadto dla dowolnego* $h \in L_2[0,t]$,
*ii)* $\mathbb{E}|\int_0^t h(s)\,dW_s|^p = \mathbb{E}|W_1|^p(\int_0^t h^2(s)\,ds)^{p/2}$
*oraz*
*iii)* $\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h(s)\mathrm{I}_{[0,u]}(s)ds$ *p.n. dla dowolnych* $0 < u < t$.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi (zob. Ćwiczenia 8.2-8.4).

## 8.2. Procesy elementarne

Starając się przenieść konstrukcję Paleya-Wienera na przypadek całki z procesów, musimy określić stochastyczny odpowiednik funkcji schodkowych - są to tak zwane procesy elementarne.

**Definicja 8.2.** Powiemy, że proces $X = (X_t)_{t\in[0,T)}$ należy do $\mathcal{E}$ - rodziny *procesów elementarnych* (*elementarnych procesów prognozowalnych*), jeśli $X$ jest postaci

$$X_t = \xi_0\mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{m} \xi_{k-1}\mathrm{I}_{(t_{k-1},t_k]}(t), \tag{8.1}$$

gdzie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, zaś $\xi_k$ są ograniczonymi zmiennymi losowymi, $\mathcal{F}_{t_k}$-mierzalnymi.

Oczywiście $\mathcal{E}$ jest przestrzenią liniową.

**Definicja 8.3.** Dla $X \in \mathcal{E}$ definiujemy proces

$$I(X) = (I(X)_t)_{t\leqslant T} = \Big(\int_0^t X_s\,dW_s\Big)_{t\leqslant T}$$

wzorem

$$I(X)_t := \sum_{k=1}^{m} \xi_{k-1}(W_{t_k\wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge t}).$$

*Uwaga* 8.1. Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od reprezentacji $X \in \mathcal{E}$.

**Stwierdzenie 8.4.** *Jeśli* $X$ *jest procesem elementarnym, to proces* $I(X) = (\int_0^t X_s\,dW_s)_{t\leqslant T}$ *jest martyngałem względem* $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, *o ciągłych trajektoriach takim, że* $I(X)_0 = 0$ *oraz*

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^T X_s\,dW_s\Big|^2 = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\,ds.$$

*Dowód.* Przyjmijmy, że $X_t$ jest postaci (8.1). Ciągłość trajektorii i $I(X)_0 = 0$ wynika natychmiast z określenia $I(X)$. Jeżeli $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, to zmienna

$$I(X)_t = \xi_0(W_{t_1} - W_{t_0}) + \xi_1(W_{t_2} - W_{t_1}) + \ldots + \xi_j(W_t - W_{t_j})$$

jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna. Ponadto $I(X)_t = I(X)_{t_m}$ dla $t_m \leqslant t \leqslant T$.

Sprawdzimy teraz, że $I(X)$ jest martyngałem, czyli dla $s < t \leqslant T$ mamy $\mathbb{E}(I(X)_t|\mathcal{F}_s) = I(X)_s$. Wystarczy pokazać to dla $t_j \leqslant s < t \leqslant t_{j+1}$, ale wtedy

$$\mathbb{E}(I(X)_t - I(X)_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_j(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) = \xi_j\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = 0,$$

wykorzystujemy tu założenie, że $\xi_j$ jest $\mathcal{F}_{t_j} \subset \mathcal{F}_s$ mierzalne. By zakończyć dowód liczymy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}I(X)_T^2 = &\sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}[\xi_{k-1}^2(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2] \\ &+ 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})] \qquad =: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Wykorzystując mierzalność $\xi_j$ oraz niezależność przyrostów procesu Wienera mamy

$$I_1 = \sum_k \mathbb{E}[\xi_{k-1}^2\mathbb{E}((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] = \sum_k \mathbb{E}\xi_{k-1}^2(t_k - t_{k-1}) = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\,ds$$

oraz

$$\begin{aligned}I_2 &= 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[(\xi_{k-1}\xi_{j-1}\mathbb{E}((W_{t_k} - W_{t_{k-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] \\ &= 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\mathbb{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] = 0,\end{aligned}$$

bo $\mathbb{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = 0$. □

*Uwaga* 8.2. Jedyne własności procesu Wienera jakie wykorzystywaliśmy w dowodzie, to $\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = 0$ oraz $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ dla $0 \leqslant s < t$. Własności te można formalnie wyprowadzić z faktu, że procesy $(W_t)$ i $(W_t^2 - t)$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t)$.

## 8.3. Martyngały ciągłe, całkowalne z kwadratem

**Definicja 8.4.** Przez $\mathcal{M}_T^{2,c}$ oznaczamy przestrzeń martyngałów $(M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ o trajektoriach ciągłych takich, że $\mathbb{E}M_T^2 < \infty$.

*Uwaga* 8.3. i) Jeśli $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, to z nierówności Jensena wynika, że $\mathbb{E}M_t^2 \leqslant \mathbb{E}M_T^2 < \infty$, więc $(M_t^2)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest podmartyngałem.
ii) Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ można utożsamić z przestrzenią martyngałów ciągłych $(M_t)_{0\leqslant t<T}$ takich, że $\sup_{t<T}\mathbb{E}M_t^2 < \infty$. Możemy bowiem określić $M_T$ jako granicę p.n. $M_t$ przy $t \to T$ (zob. Twierdzenie 6.5 dla $p = 2$).
iii) Z nierówności Dooba (Twierdzenie 5.1) wynika, że dla $M = (M_t) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$,

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant T} M_t^2 \leqslant 4\mathbb{E}M_T^2.$$

**Twierdzenie 8.1.** *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią Hilberta (tzn. zupełną przestrzenią euklidesową) z iloczynem skalarnym*

$$(M, N) = (M, N)_T = \mathbb{E}M_TN_T, \quad M, N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$$

*oraz normą*

$$\|M\|_T = \sqrt{(M, M)_T} = \sqrt{\mathbb{E}M_T^2} = \|M_T\|_{L_2(\Omega)}.$$

*Uwaga* 8.4. i) Przy rozważaniach dotyczących całki stochastycznej utożsamiamy procesy nieodróżnialne. Formalnie rzecz biorąc elementy $\mathcal{M}_T^{2,c}$ to klasy abstrakcji martyngałów ciągłych względem relacji nieodróżnialności.
ii) Przekształcenie $M \to M_T$ jest izometrycznym włożeniem przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$ w $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

*Dowód Twierdzenia.* Oczywiście $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią liniową, zaś $(M, N)$ jest iloczynem skalarnym, bo jest dwuliniowy, symetryczny, $(M, M) \geqslant 0$ oraz jeśli $(M, M) = 0$, to $\mathbb{E}M_T^2 = 0$, czyli $M_T = 0$ p.n., co z własności martygału implikuje, że $M_t = 0$ p.n., więc z ciągłości $M$, $\mathbb{P}(\forall_{t\leqslant T}\ M_t = 0) = 1$.

Musimy jeszcze udowodnić zupełność. Niech $M^{(n)} = (M_t^{(n)}) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ będzie ciągiem Cauchy'ego, czyli

$$\|M^{(n)} - M^{(m)}\|_T^2 = \mathbb{E}(M_T^{(n)} - M_T^{(m)})^2 \to 0 \quad \text{dla } m, n \to \infty.$$

Wówczas $M_T^{(n)}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L_2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, zatem z zupełności $L_2$ istnieje całkowalna z kwadratem zmienna $M_T$ taka, że $\mathbb{E}|M_T^{(n)} - M_T|^2 \to 0$ przy $n \to \infty$.

Możemy położyć $\tilde{M}_t := \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$, ale taka definicja nie gwarantuje ciągłości $\tilde{M}$. Udowodnimy, że można znaleźć martyngał $M$, który jest ciągłą modyfikację $\tilde{M}$.

Zauważmy, że na mocy nierówności Dooba,

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}(M_t^{(n)} - M_t^{(m)})^2 \leqslant 4\mathbb{E}|M_T^{(n)} - M_T^{(m)}|^2,$$

więc możemy wybrać podciąg $n_k$ taki, że

$$\forall_{l>k}\ \mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}(M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_l)})^2 \leqslant 8^{-k}.$$

Wówczas

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \geqslant 2^{-k}\Big) \leqslant 2^{-k}.$$

Zatem, jeśli określimy

$$A_k := \{\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \geqslant 2^{-k}\},$$

to $\sum_k \mathbb{P}(A_k) < \infty$, czyli na mocy lematu Borela-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0$.

Jeśli $\omega \notin \limsup A_k$, to $\omega \notin A_k$ dla $k \geqslant k_0 = k_0(\omega)$, czyli $\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n_k)} - M_t^{(n_{k+1})}| \leqslant 2^{-k}$ dla $k \geqslant k_0$. Ciąg $(M_t^{n_k}(\omega))_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest zatem zbieżny jednostajnie na $[0, T]$ do pewnej funkcji $M_t(\omega)$. Kładziemy dodatkowo $M(\omega) = 0$ dla $\omega \in \limsup A_k$.

Z ciągłości $M^{(n_k)}$ wynika ciągłość $M$. Ponieważ $M_T^{(n_k)} \to M_T$ w $L_2$ więc również w $L_1$, czyli $M_t^{(n_k)} = \mathbb{E}(M_T^{(n_k)}|\mathcal{F}_t) \to \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$ w $L_1$, a że $M_t^{(n_k)} \to M_t$ p.n., więc $M_t = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t) = \tilde{M}_t$ p.n., czyli $(M_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest martyngałem ciągłym. □

## 8.4. Całka izometryczna Itô. Procesy prognozowalne

Każdemu procesowi elementarnemu $X$ przyporządkowaliśmy martyngał ciągły $I(X)$, co więcej przekształcenie $I$

$$L_2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \mathbb{P}) \hookleftarrow \mathcal{E} \xrightarrow{I} \mathcal{M}_T^{2,c}$$

jest liniową izometrią. Przekształcenie $I$ możemy więc rozszerzyć do liniowej izometrii (którą też będziemy oznaczać literą $I$) z $\overline{\mathcal{E}}$ w $\mathcal{M}_T^{2,c}$, gdzie $\overline{\mathcal{E}}$ oznacza domknięcie przestrzeni procesów elementarnych w $L_2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \mathbb{P})$.

**Definicja 8.5.** Tak zdefiniowane przekształcenie $I$ przyporządkowujące każdemu procesowi $X = (X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ z przestrzeni $\overline{\mathcal{E}}$ ciągły, całkowalny z kwadratem martyngał $I(X)$ nazywamy *izometryczną całką stochastyczną Itô z procesu* $X$ i oznaczamy

$$I(X)_t =: \int_0^t X_s dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Oczywiście natychmiast powstaje pytanie jak wygląda przestrzeń $\overline{\mathcal{E}}$, czyli jakie procesy stochastyczne umiemy całkować.

**Definicja 8.6.** $\sigma$-ciało *zbiorów prognozowalnych* $\mathcal{P}$, to $\sigma$-ciało podzbiorów $[0,T)\times\Omega$ generowane przez zbiory postaci $\{0\}\times A$, $(s,t]\times A$, $s<t<T$, $A\in\mathcal{F}_s$.

Proces $X=(X_t)_{0\leqslant t<T}$ jest *prognozowalny*, jeśli traktowany jako funkcja $X:[0,T)\times\Omega\to\mathbb{R}$ jest mierzalny względem $\mathcal{P}$.

Z definicji natychmiast wynika, że $X_t(\omega)=\mathrm{I}_A(\omega)\mathrm{I}_{(u,v]}(t)$ jest prognozowalny, jeśli $A\in\mathcal{F}_u$ oraz $u\leqslant v<T$.

Ponieważ każdą ograniczoną zmienną $\xi$, $\mathcal{F}_u$–mierzalną można aproksymować jednostajnie przez zmienne postaci $\sum a_i\mathrm{I}_{A_i}$, $A_i\in\mathcal{F}_u$, więc proces $\xi(\omega)\mathrm{I}_{(u,v]}(t)$ jest prognozowalny dla dowolnej ograniczonej zmiennej $\xi$, $\mathcal{F}_u$–mierzalnej.

Zatem dowolny proces $Y\in\mathcal{E}$ jest prognozowalny, czyli $\mathcal{E}\subset L_2([0,T)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$, stąd

$$\overline{\mathcal{E}}\subset L_2([0,T)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P}).$$

W szczególności każdy proces z $\overline{\mathcal{E}}$ jest nieodróznialny od procesu prognozowalnego. Okazuje się, że zachodzi również odwrotne zawieranie.

**Stwierdzenie 8.5.** *Mamy* $\overline{\mathcal{E}}=L^2([0,T)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$.

*Dowód.* Wobec poprzednich rozważań musimy tylko pokazać, że $\overline{\mathcal{E}}\supset L_2([0,T)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$. Rozważymy dwa przypadki.

**Przypadek I:** $T<\infty$.

Najpierw pokażemy, że jeśli $\Gamma\in\mathcal{P}$, to $\mathrm{I}_\Gamma\in\overline{\mathcal{E}}$. W tym celu określmy $\mathcal{A}:=\{\Gamma\in\mathcal{P}\colon\ \mathrm{I}_\Gamma\in\overline{\mathcal{E}}\}$ oraz

$$\mathcal{B}:=\{\{0\}\times A\colon\ A\in\mathcal{F}_0\}\cup\{(u,v]\times A\colon\ 0\leqslant u<v<T,\ A\in\mathcal{F}_u\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{B}$ jest $\pi$-układem, ponadto jeśli $\Gamma\in\mathcal{B}$, to $\mathrm{I}_\Gamma\in\mathcal{E}\subset\overline{\mathcal{E}}$, a zatem $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$. Co więcej $\mathcal{A}$ jest $\lambda$-układem dla $T<\infty$, bo

i) $\Gamma=[0,T)\times\Omega\in\mathcal{A}$, czyli $\mathrm{I}_\Gamma=1\in\overline{\mathcal{E}}$, gdyż biorąc ciąg $T_n\nearrow T$, otrzymujemy $\mathcal{E}\ni\mathrm{I}_{\{0\}\times\Omega}+\mathrm{I}_{(0,T_n]\times\Omega}=\mathrm{I}_{[0,T_n]\times\Omega}\xrightarrow{L_2}\mathrm{I}_{[0,T)\times\Omega}\in\overline{\mathcal{E}}$.

ii) $\Gamma_1,\Gamma_2\in\mathcal{A}$, $\Gamma_1\subset\Gamma_2$, $\mathrm{I}_{\Gamma_2\setminus\Gamma_1}=\mathrm{I}_{\Gamma_2}-\mathrm{I}_{\Gamma_1}\in\overline{\mathcal{E}}$ z liniowości $\overline{\mathcal{E}}$, czyli $\Gamma_2\setminus\Gamma_1\in\mathcal{A}$.

iii) $\Gamma_n\in\mathcal{A}$ wstępujący, wówczas $\mathrm{I}_{\Gamma_n}\xrightarrow{L_2}\mathrm{I}_{\bigcup\Gamma_n}\in\overline{\mathcal{E}}$, czyli $\bigcup\Gamma_n\in\mathcal{A}$.

Zatem dla $T<\infty$, z twierdzenia o $\pi$- i $\lambda$-układach $\mathcal{A}\supset\sigma(\mathcal{B})=\mathcal{P}$.

Dalej, jeśli $\Gamma_i\in\mathcal{P}$, $a_i\in\mathbb{R}$, to $\sum_{i=1}^n a_i\mathrm{I}_{\Gamma_i}\in\overline{\mathcal{E}}$ (z liniowości). Ponadto funkcje proste $\sum_{i\leqslant n}a_i\mathrm{I}_{\Gamma_i}$ są gęste w $L^2([0,T)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$, czyli $\overline{\mathcal{E}}=L^2([0,T)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$.

**Przypadek II:** $T=\infty$.

Niech $X\in L_2([0,\infty)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$ oraz $X_t^{(n)}(\omega):=X_t(\omega)\mathrm{I}_{[0,n)\times\Omega}(t,\omega)$. Wówczas procesy $X^{(n)}$ są prognozowalne, należą do $L_2([0,n)\times\Omega,\mathcal{P},\lambda\otimes\mathbb{P})$, zatem $X^{(n)}\in\overline{\mathcal{E}}$ na mocy przypadku I.

Ponadto $X^{(n)}\to X$ w $L_2([0,\infty)\times\Omega,\lambda\otimes\mathbb{P})$ (tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej), czyli $X\in\overline{\mathcal{E}}$. $\square$

Określiliśmy zatem $\int_0^t X_s dW_s$ dla procesów prognozowalnych całkowalnych z kwadratem względem miary $\lambda \otimes \mathbb{P}$ na $[0,T) \times \Omega$. Od tej pory przyjmujemy następujące oznaczenie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^T &= L_2([0,T) \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \otimes \mathbb{P}) \\ &= \Big\{X = (X_t)_{0 \leqslant t < T} \text{ prognozowalny : } \mathbb{E}\int_0^T X_s^2 ds < \infty\Big\}.\end{aligned}$$

Dobrze by było jeszcze wiedzieć, że klasa procesów prognozowalnych jest dostatecznie duża, wynika to z następującego faktu:

**Stwierdzenie 8.6.** *Jeśli $X = (X_t)_{t\in[0,T)}$ jest procesem adaptowalnym i lewostronnie ciągłym, to $X$ jest prognozowalny.*

*Dowód.* Dla $T < \infty$ określmy

$$X_t^{(n)} := X_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{2^n-1} X_{\frac{k-1}{2^n}T} \mathrm{I}_{(\frac{k-1}{2^n}T, \frac{k}{2^n}T]},$$

zaś w przypadku $T = \infty$ niech

$$X_t^{(n)} := X_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n2^n} X_{\frac{k-1}{2^n}} \mathrm{I}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}.$$

Łatwo zauważyć, że procesy $X^{(n)}$ są prognozowalne oraz z lewostronnej ciągłości $X$ wynika, że $X_t^{(n)} \to X_t$ punktowo. Prognozowalność $X$ wynika z faktu, że granica punktowa ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna. $\square$

*Uwaga* 8.5. Można udowodnić, że dla $(\mathcal{F}_t)$-adaptowalnego procesu $X = (X_t)_{t\in[0,T)}$ takiego, że $\mathbb{E}\int_0^T X_s^2 ds < \infty$ istnieje proces prognozowalny $Y$ taki, że $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ dla $\lambda \otimes \mathbb{P}$ prawie wszystkich $(t,\omega) \in [0,T) \times \Omega$. Pozwala to określić $\int X dW$ dla procesów adaptowalnych z $L_2([0,T) \times \Omega)$.

## 8.5. Zadania

**Ćwiczenie 8.1.** Oblicz $\mathrm{Cov}(\int_0^s h_1(t)dW_t, \int_0^s h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L_2([0,s])$.

**Ćwiczenie 8.2.** Wykaż, że dla $0 \leqslant u < t$ i $h \in L_2([0,t])$ zachodzi

$$\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h\mathrm{I}_{[0,u]}(s)dW_s \quad \text{p.n..}$$

**Ćwiczenie 8.3.** Wykaż, że dla $h \in C^1[0,t]$ zachodzi

$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds \quad \text{p.n..}$$

**Ćwiczenie 8.4.** Niech $C_p := (\mathbb{E}|W_1|^p)^{1/p}$. Wykaż, że dla $0 < p < \infty$, przekształcenie $h \to C_p^{-1}\int_0^T h(t)dW_t$ jest izometrycznym włożeniem $L_2([0,T])$ w $L_p(\Omega)$.

**Ćwiczenie 8.5.** Wykaż, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s & 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna).

**Ćwiczenie 8.6.** Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ oraz $\xi$ jest ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}_t$ mierzalną to $\xi X I_{(t,s]} \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$ (Uwaga: $\int_t^s X dW$ definiujemy jako $\int_0^T \mathrm{I}_{(s,t]} X dW$).

**Ćwiczenie 8.7.** Wykaż, że jeśli $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ oraz $\xi_k$ są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalnymi to proces $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathrm{I}_{(t_k, t_{k+1}]}$ należy do $\mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.

**Ćwiczenie 8.8.** Załóżmy, że $X$ jest procesem prognozowalnym, ciągłym w $L_2$ (tzn. $t \to X_t$ jest ciągła z $[0, T]$ w $L_2(\Omega)$). Wykaż, że wówczas $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla $t \leqslant T$,

$$\sum_{k=0}^{k_n - 1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^T X dW$$

w $L_2(\Omega)$ przy $n \to \infty$.

**Ćwiczenie 8.9.** Oblicz $\int_0^t W_s dW_s$.

# 9. Własności całki izometrycznej. Uogólnienie definicji całki stochastycznej

Poprzednio zdefiniowaliśmy całkę $\int X dW$ dla $X \in \mathcal{L}^2_T$. Czasami jednak potrzeba zdefiniować całkę względem procesu Wienera z procesu ciągłego $X$ dla którego $\int \mathbb{E}X_t^2 dt = \infty$. Podczas tego wykładu pokażemy jak określić taką całkę.

## 9.1. Twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej

Zacznijmy od prostej obserwacji.

**Stwierdzenie 9.1.** *Jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T$, to dla dowolnego $u < T$, $\mathrm{I}_{[0,u]}X \in \mathcal{L}^2_T$ i*

$$\int_0^t \mathrm{I}_{[0,u]}(s) X_s \, dW_s = \int_0^{t\wedge u} X_s \, dW_s \qquad \textit{dla } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

*Dowód.* Funkcja $(t,\omega) \to \mathrm{I}_{[0,u]}(t)$ jest deterministyczna, więc prognozowalna, zatem proces $\mathrm{I}_{[0,u]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, stąd $\mathrm{I}_{[0,u]}X \in \mathcal{L}^2_T$.

Jeśli $X$ jest procesem elementarnym postaci $X = \xi_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_k \xi_k \mathrm{I}_{(t_{k-1},t_k]}$, to $X\mathrm{I}_{[0,u]} = \xi_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_k \xi_k \mathrm{I}_{(t_{k-1}\wedge u, t_k \wedge u]} \in \mathcal{E}$ oraz

$$\int_0^t \mathrm{I}_{[0,u]}(s) X_s \, dW_s = \sum \xi_k (W_{t_k\wedge u\wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge u \wedge t}) = \int_0^{t\wedge u} X_s \, dW_s.$$

Dla $X \in \mathcal{L}^2_T$ weźmy $X^{(n)} \in \mathcal{E}$ takie, że $X^{(n)} \to X$ w $\mathcal{L}^2_T$. Wówczas oczywiście również $X^{(n)}\mathrm{I}_{[0,u]} \to X\mathrm{I}_{[0,u]}$ w $\mathcal{L}^2_T$. Stąd

$$\int_0^t X_s \mathrm{I}_{[0,u]}(s) dW_s \leftarrow \int_0^t X_s^{(n)} \mathrm{I}_{[0,u]}(s) dW_s = \int_0^{t\wedge u} X_s^{(n)} dW_s \to \int_0^{t\wedge u} X_s dW_s.$$

□

Uogólnieniem faktu jest ważne twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej.

**Twierdzenie 9.1.** *Niech $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\tau$ będzie momentem zatrzymania. Wówczas $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz*

$$\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s) X_s \, dW_s = \int_0^{t\wedge \tau} X_s \, dW_s \qquad \textit{dla } 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9.1}$$

*Dowód.* Biorąc $\tau \wedge T$ zamiast $T$ możemy zakładać, że $\tau \leqslant T$ p.n..

Proces $\mathrm{I}_{[0,\tau]}(t)$ jest lewostronnie ciągły i adaptowalny, a zatem jest prognozowalny, czyli $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X$ jest prognozowalny (iloczyn funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną). Stąd $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$.

Wzór (9.1) udowodnimy w trzech krokach.

**Krok 1.** $X \in \mathcal{E}$, $\tau$ przyjmuje skończenie wiele wartości.

Ewentualnie powiększając ciąg $t_i$ możemy zakładać, że $\tau$ przyjmuje wartości $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant T$ oraz $X = \xi_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k \mathrm{I}_{(t_k,t_{k+1}]}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{[0,\tau]}(t) &= \sum_{k=0}^{m} \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} \mathrm{I}_{[0,t_k]}(t) = \sum_{k=0}^{m} \Big( \Big( \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]}(t) \Big) + \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} \mathrm{I}_{\{0\}} \Big) \\
&= \mathrm{I}_{\Omega} \mathrm{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]}(t) \\
&= \mathrm{I}_{\Omega} \mathrm{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{I}_{\{\tau>t_j\}} \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]}(t),
\end{aligned}$$

zatem

$$\mathrm{I}_{[0,\tau]}(t) X = \xi_0 \mathrm{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j \mathrm{I}_{\{\tau>t_j\}} \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]}(t),$$

czyli $\mathrm{I}_{[0,\tau]}(t) X \in \mathcal{E}$. Liczymy

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s) X_s \, dW_s &= \sum_{j=0}^{m-1} \xi_j \mathrm{I}_{\{\tau>t_j\}} (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \xi_j \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{I}_{\{\tau=t_k\}} \int_0^{t\wedge t_k} X_s \, dW_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s \, dW_s.
\end{aligned}$$

**Krok 2.** $\tau$ dowolne oraz $X \in \mathcal{E}$.

Weźmy ciąg momentów zatrzymania $\tau_n$ przyjmujących skończenie wiele wartości taki, że $\tau_n \searrow \tau$. Na mocy kroku 1, para $(\tau_n, X)$ spełnia (9.1). Z ciągłości trajektorii całki stochastycznej, $\int_0^{t\wedge\tau_n} X_s \, dW_s \to \int_0^{t\wedge\tau} X_s \, dW_s$ p.n.. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big( \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}(s) X_s \, dW_s - \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s) X_s \, dW_s \Big)^2 &= \mathbb{E}\Big( \int_0^t \mathrm{I}_{(\tau,\tau_n]}(s) X_s \, dW_s \Big)^2 \\
&= \mathbb{E} \int_0^t \mathrm{I}_{(\tau,\tau_n]}(s) X_s^2 \, ds \to 0.
\end{aligned}$$

Zbieżność wynika z twierdzenia Lebesgue'a, gdyż proces $\mathrm{I}_{(\tau,\tau_n]}(s) X_s^2$ dąży punktowo do zera i jest majoryzowany przez $X_s^2$. Stąd

$$\int_0^{t\wedge\tau} X \, dW \xleftarrow{p.n.} \int_0^{t\wedge\tau_n} X \, dW = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]} X \, dW \xrightarrow{L_2(\Omega)} \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]} X \, dW,$$

czyli spełnione jest (9.1).

**Krok 3.** $\tau$ oraz $X \in \mathcal{L}_T^2$ dowolne.

Weźmy $X^{(n)} \in \mathcal{E}$ takie, że $X^{(n)} \to X$ w $\mathcal{L}^2_T$. Z kroku 2, para $(\tau, X^{(n)})$ spełnia (9.1). Mamy

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge\tau}(X_s - X_s^{(n)})\,dW_s\Big)^2 \leqslant \mathbb{E}\Big(\int_0^T (X - X^{(n)})\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (X - X_s^{(n)})^2\,ds \to 0,$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z nierówności Jensena oraz Twierdzenia Dooba 6.3 dla martyngału $(\int (X - X^{(n)})\,dW)$. Ponadto

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s)(X_s - X_s^{(n)})\,dW_s\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s)(X_s - X_s^{(n)})^2\,ds \leqslant \mathbb{E}\int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2\,ds \to 0.$$

Stąd

$$\int_0^{t\wedge\tau} X_s\,dW_s \xleftarrow{L_2(\Omega)} \int_0^{t\wedge\tau} X_s^{(n)}\,dW_s = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]} X_s^{(n)}\,dW_s \xrightarrow{L_2(\Omega)} \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]} X_s\,dW_s,$$

czyli (9.1) spełnione jest i w tym przypadku. □

**Wniosek 9.1.** *Dla $X \in \mathcal{L}^2_T$, proces $M := ((\int_0^t X\,dW)^2 - \int_0^t X^2\,ds)_{t\leqslant T}$ jest martyngałem.*

Dla $X \equiv 1$ otrzymujemy znany fakt, że $W_t^2 - t$ jest martyngałem.

Dowód wniosku oparty jest na następującej prostej obserwacji.

**Stwierdzenie 9.2.** *Załóżmy, że $M$ jest adaptowalnym, prawostronnie ciągłym procesem takim, że $M_0 = 0$ i dla wszystkich $t$, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$. Wówczas $M$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}M_\tau = 0$ dla wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania $\tau$.*

*Dowód.* $\Rightarrow$: Z Twierdzenia Dooba 6.3, $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 = 0$.

$\Leftarrow$: Musimy pokazać, że dla $s < t$, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ p.n., czyli $\mathbb{E}M_t\mathrm{I}_A = \mathbb{E}M_s\mathrm{I}_A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}_s$. Określmy

$$\tau := \begin{cases} s \text{ dla } \omega \in A, \\ t \text{ dla } \omega \notin A. \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić $\tau$ jest momentem zatrzymania, stąd

$$0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_s\mathrm{I}_A + \mathbb{E}M_t\mathrm{I}_{A^c} = \mathbb{E}M_s\mathrm{I}_A - \mathbb{E}M_t\mathrm{I}_A,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że

$$\mathbb{E}M_t\mathrm{I}_{A^c} = \mathbb{E}M_t - \mathbb{E}M_t\mathrm{I}_A = 0 - \mathbb{E}M_t\mathrm{I}_A.$$

□

*Dowód Wniosku.* Jak wiemy $\int X\,dW \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, czyli proces $M$ jest ciągły, adaptowalny i całkowalny oraz $M_0 = 0$. Dla ograniczonego momentu zatrzymania $\tau \leqslant T$ otrzymujemy na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^\tau X\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathrm{I}_{[0,\tau]} X\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s) X_s^2\,ds = \mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.$$

Zatem

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^\tau X\,dW\Big)^2 - \int_0^\tau X_s^2\,ds\Big] = 0.$$

Teza Wniosku wynika ze Stwierdzenia 9.2. □

## 9.2. Uogólnienie definicji całki stochastycznej

**Definicja 9.1.** Dla $T \leqslant \infty$ określamy przestrzeń procesów prognozowalnych, lokalnie całkowalnych z kwadratem

$$\Lambda_T^2 = \Big\{(X_t)_{t<T} - \text{ prognozowalny: } \int_0^t X_s^2\,ds < \infty \text{ p.n. dla } 0 < t < T\Big\}.$$

Zatem proces prognozowalny $X$ należy do przestrzeni $\Lambda_T^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbb{P}\Big(\forall_{t<T} \int_0^t X_s^2\,ds < \infty\Big) = 1.$$

Przestrzeń $\Lambda_T^2$ jest liniowa, ale nie jest przestrzenią Hilberta.

**Lemat 9.1.** *Dla $X \in \Lambda_T^2$ określmy*

$$\tau_n := \inf\Big\{t \geqslant 0 : \int_0^t X_s^2\,ds \geqslant n\Big\} \wedge T \wedge n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

*Wówczas $(\tau_n)$ jest rosnącym ciagiem momentów zatrzymania, $\tau_n \nearrow T$ p.n. Ponadto dla wszystkich $n$, $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$.*

*Dowód.* $\tau_n$ jest momentem zatrzymania gdyż jest definiowany poprzez moment dojścia przez adaptowalny proces ciągły $\int_0^t X_s^2\,ds$ do zbioru domkniętego $[n, \infty)$. Z założenia o skończoności $\int X_s^2\,ds$ wynika, że $\tau_n \nearrow T$ p.n..

Proces $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, ponadto na mocy nierówności Schwarza i definicji $\tau_n$,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}(s)X_s\,ds\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau_n} X_s\,ds\Big)^2 \leqslant \mathbb{E}\Big[\tau_n \int_0^{\tau_n} X_s^2\,ds\Big] \leqslant n^2 < \infty.$$

□

Załóżmy, że mamy dany rosnący ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ p.n. taki, że $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ dla wszystkich $n$. Niech $M_n(t) := \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X_s\,dW_s$. Przypomnijmy też, że przez $X^\tau$ oznaczamy proces $X$ zatrzymany w chwili $\tau$ (zob. Definicja 4.9).

**Lemat 9.2.** *Dla $m \geqslant n$, procesy $M_m^{\tau_n}$ i $M_n$ są nierozróżnialne, czyli*

$$\mathbb{P}(\forall_{t\leqslant T}\ M_m(t \wedge \tau_n) = M_n(t)) = 1.$$

*Dowód.* Na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej dla ustalonego $t \leqslant T$,

$$\begin{aligned} M_m(\tau_n \wedge t) &= \int_0^{\tau_n\wedge t} \mathrm{I}_{[0,\tau_m]}X\,dW = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}\mathrm{I}_{[0,\tau_m]}X\,dW \\ &= \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW = M_n(t). \end{aligned}$$

Zatem $M_m^\tau$ jest modyfikacją $M_n$. Teza lematu wynika z ciągłości obu procesów. □

**Definicja 9.2.** Niech $X \in \Lambda_T^2$ oraz $\tau_n$ będzie rosnącym do $T$ ciągiem momentów zatrzymania takich, że $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ dla wszystkich $n$. *Całką stochastyczną* $\int X\,dW$ dla $X \in \Lambda_T^2$ nazywamy taki proces $(M_t)_{t<T} = (\int_0^t X\,dW)_{t<T}$, że $M_t^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

**Stwierdzenie 9.3.** *Proces $M$ zdefiniowany powyżej jest jest ciągły i jednoznacznie określony w klasie procesów nieodróżnialnych.*

*Dowód.* Na mocy Lematu 9.2 dla każdego $m > n$ istnieje zbiór $N_{n,m}$ taki, że $\mathbb{P}(N_{n,m}) = 0$ oraz dla $\omega \notin N_{n,m}$ zachodzi $M_n(t,\omega) = M_m(t \wedge \tau_n(\omega), \omega)$ dla wszystkich $t < T$. Niech $N := \bigcup_{m>n} N_{n,m}$, wówczas $\mathbb{P}(N) = 0$ oraz dla $\omega \notin N$, $t \leqslant \tau_n(\omega)$ ciąg $(M_m(t,\omega))_{m\geqslant n}$ jest stały. Zatem możemy (i musimy) położyć $M(t,\omega) := M_n(t,\omega)$ dla $t \leqslant \tau_n(\omega)$. $\square$

**Stwierdzenie 9.4.** *Definicja $\int X\,dW$ nie zależy od wyboru ciągu $\tau_n$ dla $X \in \Lambda_T^2$. Dokładniej, jeśli $\tau_n$, $\overline{\tau}_n$ - momenty zatrzymania, $\tau_n \nearrow T$, $\overline{\tau}_n \nearrow T$, $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ i $\mathrm{I}_{[0,\overline{\tau}_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $M, \overline{M}$ określone jak w Definicji 9.2 za pomocą $\tau_n$, $\overline{\tau}_n$ odpowiednio, to procesy $M$ i $\overline{M}$ są nierozróżnialne.*

*Dowód.* Mamy
$$M_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW, \quad \overline{M}_{t\wedge\overline{\tau}_n} = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\overline{\tau}_n]}X\,dW.$$
Na mocy twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej,
$$M_{t\wedge\tau_n\wedge\overline{\tau}_n} = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}\mathrm{I}_{[0,\overline{\tau}_n]}X\,dW = \overline{M}_{t\wedge\tau_n\wedge\overline{\tau}_n}.$$
Ponadto $\tau_n \wedge \overline{\tau}_n \nearrow T$, więc $t \wedge \tau_n \wedge \overline{\tau}_n = t$ dla $n \geqslant n(\omega)$ i stąd $M_t = \overline{M}_t$ p.n., a że są to procesy ciągłe, to są nierozróżnialne. $\square$

Sformułujemy teraz uogólnienie twierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej.

**Twierdzenie 9.2.** *Jeśli $X \in \Lambda_T^2$, to dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau$, $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \Lambda_T^2$ oraz*
$$\int_0^{t\wedge\tau} X\,dW = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}X\,dW.$$

*Dowód.* Proces $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X$ jest prognozowalny jako iloczyn procesów prognozowalnych, jest majoryzowany przez $X$, stąd $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \Lambda_T^2$. Proces $X \in \Lambda_T^2$, więc istnieje ciąg $\tau_n \nearrow T$ taki, że $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}_T^2$. Wtedy też $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}_T^2$. Niech
$$M := \int X\,dW, \quad N := \int \mathrm{I}_{[0,\tau]}X\,dW.$$
Na mocy definicji,
$$M_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X, dW, \quad N_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}\mathrm{I}_{[0,\tau]}X\,dW.$$
Z udowodnionego wcześniej Twierdzenia 9.1 o zatrzymaniu całki izometrycznej,
$$M_{t\wedge\tau\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW = N_{t\wedge\tau_n}.$$
Biorąc $n \to \infty$ dostajemy $M_t^\tau = M_{t\wedge\tau} = N_t$, czyli $M^\tau = N$. $\square$

## 9.3. Martyngały lokalne

**Definicja 9.3.** Jeżeli dla procesu adaptowalnego $M = (M_t)_{t<T}$, istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ taki, że $M^{\tau_n}$ jest martyngałem, to $M$ nazywamy *martyngałem lokalnym.* Jeśli dodatkowo $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, to mówimy, że $M$ jest *ciągłym martyngałem lokalnym całkowalnym z kwadratem.* Klasę takich procesów oznaczamy $\mathcal{M}_{T,\mathrm{loc}}^{2,c}$ ($\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$ jeśli wartość $T$ jest jasna z kontekstu).

*Uwaga* 9.1. $M - M_0 \in \mathcal{M}^c_{T,\mathrm{loc}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - M_0 \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,\mathrm{loc}}$, gdzie $\mathcal{M}^c_{T,\mathrm{loc}}$ oznacza rodzinę ciągłych martyngałów lokalnych.

**Stwierdzenie 9.5.** *Załóżmy, że $M = \int X dW$ dla $X \in \Lambda^T_2$. Wówczas*
*i) $M$ jest procesem ciągłym, $M_0 = 0$,*
*ii) $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,\mathrm{loc}}$,*
*iii) Przekształcenie $X \to \int X dW$ jest liniowe.*

*Dowód.* Punkty i), ii) wynikają z definicji. By udowodnić iii) weźmy $X, Y \in \Lambda^2_T$. Istnieją wówczas momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ i $\overline{\tau}_n \nearrow T$ takie, że $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\mathrm{I}_{[0,\overline{\tau}_n]}Y \in \mathcal{L}^2_T$. Przyjmując $\sigma_n := \overline{\tau}_n \wedge \tau_n \nearrow T$ otrzymujemy $\mathrm{I}_{[0,\sigma_n]}X$, $\mathrm{I}_{[0,\sigma_n]}Y \in \mathcal{L}^2_T$, a zatem $\mathrm{I}_{[0,\sigma_n]}(aX + bY) \in \mathcal{L}^2_T$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$. Stąd na mocy definicji otrzymujemy, że $\int_0^{t\wedge\sigma_n}(aX+bY)\,dW = a\int_0^{t\wedge\sigma_n} X\,dW + b\int_0^{t\wedge\sigma_n} Y\,dW$ i biorąc granicę $n \to \infty$, $\int(aX + bY)\,dW = a\int X dW + b\int Y dW$. □

*Uwaga* 9.2. Martyngał lokalny $M = \int X\,dW$ dla $X \in \Lambda^2_T$ *nie musi być* martyngałem, $M_t$ nie musi być nawet całkowalne. Ale, jeśli $\mathbb{E}\int_0^t X_s^2\,ds < \infty$ dla wszystkich $t < T$, to $M$ jest martyngałem, bo możemy przyjąć $\tau_n = t_n$, gdzie $t_n$ jest ciągiem rosnącym zbieżnym do $T$ i wtedy $M_{t\wedge\tau_n} = M_{t\wedge t_n} \in \mathcal{M}^{2,c}_T$.

*Uwaga* 9.3. Przykłady ciągłych martyngałów lokalnych, które nie są martyngałami są podane w Ćwiczeniach 13.4 i 13.6.

Mimo, że w przypadku ogólnym $\int X\,dW$ nie musi być martyngałem, to zachodzi dla tego procesu nierówność Dooba.

**Twierdzenie 9.3** (Nierówność Dooba)**.** *Dla dowolnego procesu $X \in \Lambda^T_2$ oraz momentu zatrzymania $\tau \leqslant T$,*

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t X\,dW\Big)^2 \leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.$$

*Dowód.* Weźmy $\tau_n \nearrow T$ takie, że $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}^2_T$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW\Big)^2 &= \mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2\\ &= \mathbb{E}\sup_{t<T}\Big(\int_0^{t\wedge\tau} \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2 = \mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}\Big(\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2,\end{aligned}$$

$\mathrm{I}_{[0,\tau]}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, więc $t < T$ można zamienić na $t \leqslant T$. Na mocy nierówności Dooba dla martyngałów,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\leqslant T}\Big(\int_0^t \mathrm{I}_{[0,T]}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2 &\leqslant 4\mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathrm{I}_{[0,\tau]}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dW\Big)^2\\ &= 4\mathbb{E}\int_0^T(\mathrm{I}_{[0,\tau]}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X_s)^2\,ds = 4\mathbb{E}\int_0^{\tau\wedge\tau_n} X_s^2\,ds\\ &\leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.\end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW\Big)^2 \leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,ds.$$

Ponieważ
$$\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} X\,dW\Big)^2 = \sup_{t<\tau\wedge\tau_n}\Big(\int_0^{t} X\,dW\Big)^2 \nearrow \sup_{t<\tau}\Big(\int_0^{t} X\,dW\Big)^2,$$
więc teza wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. □

**Stwierdzenie 9.6.** *a) Każdy ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem.*
*b) Każdy nieujemny martyngał lokalny jest nadmartyngałem.*

*Dowód.* Załóżmy, że $\tau_n \nearrow T$ jest ciągiem momentów zatrzymania takim, że dla każdego $n$, $M^{\tau_n}$ jest martyngałem. Ustalmy $s < t < T$ oraz $A \in \mathcal{F}_s$.

a) Jeśli $M$ jest ograniczony, to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej,
$$\mathbb{E}M_t\mathrm{I}_A \leftarrow \mathbb{E}M_{\tau_n\wedge t}\mathrm{I}_A = \mathbb{E}M_t^{\tau_n}\mathrm{I}_A = \mathbb{E}M_s^{\tau_n}\mathrm{I}_A = \mathbb{E}M_{\tau_n\wedge s}\mathrm{I}_A \to \mathbb{E}M_s\mathrm{I}_A,$$
stąd $M$ jest martyngałem.

b) Jeśli $M$ jest nieujemny, to
$$\begin{aligned}\mathbb{E}M_s\mathrm{I}_A &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}M_s\mathrm{I}_{A\cap\{\tau_n>s\}} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}M_s^{\tau_n}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau_n>s\}} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}M_t^{\tau_n}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau_n>s\}}\\ &\geqslant \mathbb{E}\lim_{n\to\infty}M_t^{\tau_n}\mathrm{I}_{A\cap\{\tau_n>s\}} = \mathbb{E}M_t\mathrm{I}_A,\end{aligned}$$
gdzie korzystaliśmy z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, tego, że $M^{\tau_n}$ jest martyngałem i $A\cap\{\tau_n>s\}\in\mathcal{F}_s$ oraz z lematu Fatou. □

## 9.4. Zadania

**Ćwiczenie 9.1.** Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\tau<\infty$. Wykaż, że $\mathrm{I}_{[0,\tau]}\in\mathcal{L}^2_\infty$ oraz $\int_0^\infty \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s)dW_s = W_\tau$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbb{E}W_\tau=0$ oraz $\mathbb{E}W_\tau^2=\mathbb{E}\tau$.

**Ćwiczenie 9.2.** Dla $a,b>0$ określmy $\tau := \inf\{t : |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$. Wykaż, że $\tau<\infty$ p.n. oraz $\mathbb{E}\tau<\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $a<1$. Ponadto dla $a<1$, $\mathbb{E}\tau = \frac{a^2b}{1-a^2}$.

**Ćwiczenie 9.3.** Wykaż, że dla $X\in\Lambda_T^2$, $(\int X\,dW)^2 - \int X^2\,ds$ jest ciągłym martyngałem lokalnym.

**Ćwiczenie 9.4.** Niech $X\in\Lambda_T^2$, $0\leqslant t<s\leqslant T$ oraz $\xi$ będzie zmienną losową $\mathcal{F}_t$-mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że $\xi X\mathrm{I}_{(t,s]}\in\Lambda_T^2$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi\int_t^s X dW$.

**Ćwiczenie 9.5.** Znajdź proces $X\in\Lambda_T^2$ taki, że $\int_0^t X_s dW_s$ nie jest martyngałem.

**Ćwiczenie 9.6.** Wykaż, że $M-M_0\in\mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M-M_0\in\mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$.

**Ćwiczenie 9.7.** Niech $X$ będzie martyngałem lokalnym takim, że $|X_t|\leqslant Y$ dla wszystkich $t$ oraz $\mathbb{E}Y<\infty$. Wykaż, że $X$ jest martyngałem.

**Ćwiczenie 9.8.** Podaj przykład nieujemnego całkowalnego ciągłego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.

# 10. Całka względem ciągłych martyngałów

Podczas wcześniejszych wykładów zdefiniowaliśmy całkę $\int X dW$. Okazuje się, że bez większych trudności definicję tę daje się uogólnić na $\int X dM$, gdzie $M$ jest ciągłym martyngałem (a nawet ciągłym martyngałem lokalnym).

## 10.1. Rozkład Dooba-Meyera

Podstawą konstrukcji całki stochastycznej względem procesu Wienera jest to, że $W_t$ i $W_t^2 - t$ są martyngałami. Okazuje się, że dla dowolnego całkowalnego z kwadratem ciągłego martyngału $M$ znajdzie się proces niemalejący $X$ taki, że $M^2 - X$ jest martyngałem.

**Twierdzenie 10.1** (rozkład Dooba-Meyera)**.** *Dla $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ istnieje proces $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ o trajektoriach ciągłych, niemalejących taki, że $\langle M \rangle_0 = 0$ oraz $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ jest martyngałem. Co więcej proces $\langle M \rangle$ jest wyznaczony jednoznacznie.*

Udowodnimy jednoznaczność rozkładu, dowód istnienia można znaleźć w [6].

*Dowód Jednoznaczności.* Załóżmy, że procesy $Y_t, Z_t$ są niemalejące oraz $M_t^2 - Y_t$ i $M_t^2 - Z_t$ są martyngałami o ciągłych trajektoriach. Trajektorie procesu $Y_t - Z_t$ mają wahanie skończone, ponadto $Y_t - Z_t = (M_t^2 - Z_t) - (M_t^2 - Y_t)$ jest martyngałem ciągłym. Stąd, na podstawie Twierdzenia 7.3, $Y - Z \equiv 0$. □

**Przykład 10.1.** Dla procesu Wienera $\langle W \rangle_t = t$.
Ogólniej, Wniosek 9.1 implikuje, że $\langle \int X_s \, dW_s \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, ds$ dla $X \in \mathcal{L}_T^2$.

## 10.2. Całka izometryczna

Ponieważ dla wszystkich $\omega$, $t \to \langle M \rangle_t(\omega)$ jest niemalejące, zatem ma wahanie skończone, czyli można określić skończoną miarę $d\langle M \rangle_t(\omega)$ na $[0, T]$. Z uwagi na ciągłość $\langle M \rangle$ miara ta jest bezatomowa. Następna definicja jest naturalnym uogólnieniem definicji dla procesu Wienera.

**Definicja 10.1.** Dla procesu elementarnego $X$ postaci

$$X = \xi_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k \mathrm{I}_{(t_k, t_{k+1}]},$$

gdzie $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m < T$, $\xi_k$ ograniczone, $\mathcal{F}_{t_k}$- mierzalne oraz $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ określamy

$$\int_0^t X \, dM := \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k (M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t}) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Definiujemy też dla $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$,

$$\mathcal{L}_T^2(M) = \Big\{X = (X_t)_{t<T} \text{ prognozowalne takie, że } \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\, d\langle M\rangle_s < \infty\Big\}.$$

**Stwierdzenie 10.1.** *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $X \in \mathcal{E}$. Wówczas $I(X) := \int X\, dM \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $I(X)_0 = 0$ oraz*

$$\|I(X)\|^2_{\mathcal{M}_T^{2,c}} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T X_s\, dM_s\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\, d\langle M\rangle_s = \|X\|^2_{\mathcal{L}_T^2(M)}.$$

*Dowód.* Ciągłość $I(X)$, warunek $I(X)_0 = 0$ oraz to, że $I(X)_t \in L_2$ dla wszystkich $t$ są oczywiste. Dla $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ mamy

$$I(X)_t = \xi_0(M_{t_1} - M_{t_0}) + \xi_1(M_{t_2} - M_{t_1}) + \ldots + \xi_j(M_t - M_{t_j}).$$

Dla $t_j \leqslant t \leqslant s \leqslant t_{j+1}$ otrzymujemy zatem

$$\mathbb{E}(I(X)_s|\mathcal{F}_t) - I(X)_t = \mathbb{E}(\xi_j(M_s - M_t)|\mathcal{F}_t) = \xi_j(\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) - M_t) = 0,$$

czyli $I(X)$ jest martyngałem. Ponadto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}I(X)_T^2 = &\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{E}[\xi_k^2(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2]\\ &+ 2\sum_{j<k}\mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})] =: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $s < t$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s)\\ &\qquad= \mathbb{E}(M_t^2 - \langle M\rangle_t|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_t|\mathcal{F}_s) - 2M_s\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_s) + M_s^2\\ &\qquad= M_s^2 - \langle M\rangle_s + \mathbb{E}(\langle M\rangle_t|\mathcal{F}_s) - M_s^2 = \mathbb{E}(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s|\mathcal{F}_s).\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_k \mathbb{E}[\xi_k^2\mathbb{E}((M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2|\mathcal{F}_{t_k})] = \sum_k \mathbb{E}[\xi_k^2\mathbb{E}(\langle M\rangle_{t_{k+1}} - \langle M\rangle_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k})]\\ &= \mathbb{E}\sum_k \xi_k^2(\langle M\rangle_{t_{k+1}} - \langle M\rangle_{t_k}) = \mathbb{E}\sum_k\int_{t_k}^{t_{k+1}}\xi_k^2\, d\langle M\rangle_s = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2\, d\langle M\rangle_s.\end{aligned}$$

Ponadto

$$I_2 = 2\sum_{j<k}\mathbb{E}[\xi_{k-1}\xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\mathbb{E}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})] = 0.$$

□

Tak jak dla procesu Wienera dowodzimy, że domknięcie $\mathcal{E}$ w przestrzeni $L_2([0,T)\times\Omega, d\langle M\rangle\otimes\mathbb{P})$ jest równe $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_T^2(M)$. Izometrię $I(X)$ możemy przedłużyć do $\overline{\mathcal{E}}$, w ten sposób otrzymujemy izometryczną definicję całki $I(X) = \int X\, dM$ dla $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$. Mamy zatem następujący fakt.

**Stwierdzenie 10.2.** *Niech $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Wówczas*
*a) Dla $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$ proces $\int X dM \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz*

$$\Big\|\int X dM\Big\|^2_{\mathcal{M}_T^{2,c}} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T X_s dM_s\Big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s = \|X\|_{\mathcal{L}_T^2(M)}.$$

*b) Jeśli $X, Y \in \mathcal{L}_T^2(M)$, to $aX + bY \in \mathcal{L}_T^2(M)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\int(aX + bY)dM = a\int X dM + b\int Y dM$.*

## 10.3. Uogólnienie definicji całki

Zacznijmy od prostego faktu.

**Stwierdzenie 10.3.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, wówczas dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau$, $M^\tau \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$.*

*Dowód.* Wiemy, że $M^\tau$ jest ciągłym martyngałem. Na mocy nierówności Jensena

$$\mathbb{E}|M_T^\tau|^2 = \mathbb{E}M_{\tau\wedge T}^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_{\tau\wedge T})]^2 \leqslant \mathbb{E}M_T^2,$$

zatem $M^\tau \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Proces $\langle M \rangle^\tau$ startuje z zera, ma trajektorie ciągłe, ponadto $(M^\tau)^2 - \langle M \rangle^\tau = (M^2 - \langle M \rangle)^\tau$ jest martyngałem, więc $\langle M \rangle^\tau$ spełnia wszystkie warunki definicji $\langle M^\tau \rangle$. $\square$

Możemy uogólnić rozkład Dooba-Meyera na przypadek ciągłych martyngałów lokalnych.

**Wniosek 10.1.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, wówczas istnieje dokładnie jeden proces $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{0\leqslant t<T}$ o trajektoriach ciągłych, niemalejących taki, że $\langle M \rangle_0 = 0$ oraz $M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$.*

*Dowód.* **Istnienie.** Niech $\tau_n$ będzie rosnącym do $T$ ciągiem momentów zatrzymania takim, że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Określmy $Y_n := \langle M^{\tau_n} \rangle$, wówczas dla $n \leqslant m$,

$$Y_m^{\tau_n} = \langle M^{\tau_m} \rangle^{\tau_n} = \langle (M^{\tau_m})^{\tau_n} \rangle = \langle M^{\tau_n \wedge \tau_m} \rangle = \langle M^{\tau_n} \rangle = Y_n.$$

Stąd istnieje proces ciągły $Y = (Y_t)_{0\leqslant t<T}$ taki, że $Y^{\tau_n} = Y_n$, oczywiście $Y_0 = Y_{n,0} = 0$, ponadto $Y$ ma trajektorie niemalejące oraz

$$(M^2 - Y)^{\tau_n} = (M^{\tau_n})^2 - Y^{\tau_n} = (M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle \in \mathcal{M}^c,$$

zatem $M^2 - Y$ jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0, T)$.

**Jednoznaczność.** Niech $Y$ i $\bar{Y}$ procesy ciągłe o niemalejących trajektoriach takie, że $Y_0 = \bar{Y}_0 = 0$ oraz $M^2 - Y$ i $M^2 - \bar{Y}$ są martyngałami lokalnymi. Wówczas istnieją momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ i $\bar{\tau}_n \nearrow T$ takie, że $(M^2 - Y)^{\tau_n}$ oraz $(M^2 - \bar{Y})^{\bar{\tau}_n}$ są martyngałami. Biorąc $\sigma_n = \tau_n \wedge \bar{\tau}_n \nearrow T$ dostajemy martyngały $(M^2 - Y)^{\sigma_n} = ((M^2 - Y)^{\tau_n})^{\bar{\tau}_n}$ oraz $(M^2 - \bar{Y})^{\sigma_n} = ((M^2 - \bar{Y})^{\bar{\tau}_n})^{\tau_n}$, proces $(Y - \bar{Y})^{\sigma_n}$ jest więc martyngałem o ograniczonym wahaniu, czyli jest stały, zatem $Y^{\sigma_n} = \bar{Y}^{\sigma_n}$. Przechodząc z $n \to \infty$ otrzymujemy $Y = \bar{Y}$. $\square$

Podobnie jak dla procesu Wienera dowodzimy twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej względem martyngałów całkowalnych z kwadratem.

**Twierdzenie 10.2.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$ oraz $\tau$ jest momentem zatrzymania. Wówczas $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}_T^2(M)$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M^\tau)$ oraz*

$$\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s) X_s \, dM_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s \, dM_s = \int_0^t X_s dM_s^\tau \qquad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

**Definicja 10.2.** Dla $T \leqslant \infty$, $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$ określamy przestrzeń procesów prognozowalnych, lokalnie całkowalnych z kwadratem względem $\langle M \rangle$

$$\Lambda_T^2(M) = \Big\{ (X_t)_{t<T} - \text{ prognozowalny: } \int_0^t X_s^2 \, d\langle M \rangle_s < \infty \text{ p.n. dla } t < T \Big\}.$$

Ponieważ $\int X dM = \int X d(M - M_0)$ oraz $\langle M - M_0 \rangle = \langle M \rangle$, więc bez straty ogólności przy uogólnianiu definicji całki będziemy zakładać, że $M_0 = 0$.

**Definicja 10.3.** Niech $M = (M_t)_{t<T} \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $M_0 = 0$, $X = (X_t)_{t<T} \in \Lambda^2_T(M)$ oraz $\tau_n$ będzie rosnącym do $T$ ciągiem momentów zatrzymania takich, że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}_T$ i $\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_n})$ dla wszystkich $n$. *Całką stochastyczną* $\int X\,dM$ nazywamy taki proces $(N_t)_{t<T} = (\int_0^t X\,dM)_{t<T}$, że $N^{\tau_n}_t = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\,dM^{\tau_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Nietrudno udowodnić (naśladując dowód dla całki względem procesu Wienera), że całka $\int X\,dM$ dla $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$ i $X \in \Lambda^2_T(M)$ jest zdefiniowana poprawnie i jednoznacznie (z dokładnością do nieodróżnialności procesów) oraz nie zależy od wyboru ciągu momentów zatrzymania $\tau_n$.

Następujący fakt przedstawia podstawowe własności $\int X dM$.

**Stwierdzenie 10.4.** *Niech $M, N \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$. Wówczas*
*a) Dla $X \in \Lambda^2_T(M)$ proces $\int X dM \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$.*
*b) Jeśli $X, Y \in \Lambda^2_T(M)$, to $aX + bY \in \Lambda^2_T(M)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\int(aX + bY)dM = a\int XdM + b\int YdM$.*
*c) Jeśli $X \in \Lambda^2_T(M) \cap \Lambda^2_T(N)$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, to $X \in \Lambda^2_T(aM + bN)$ oraz $\int Xd(aM + bN) = a\int XdM + b\int XdN$.*

Można również sformułować twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej w ogólnym przypadku.

**Twierdzenie 10.3.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $X \in \Lambda^2_T(M)$ oraz $\tau$ będzie momentem zatrzymania. Wówczas $\mathrm{I}_{[0,\tau]}X \in \Lambda^2_T(M)$, $X \in \Lambda^2_T(M^\tau)$ oraz*

$$\int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau]}(s)\,dM_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s\,dM_s = \int_0^t X_s dM^\tau_s \qquad \text{dla } 0 \leqslant t < T.$$

## 10.4. Zadania

**Ćwiczenie 10.1.** Niech $M = \int W_t^2 dW_t$. Oblicz $\mathbb{E}M_s^2$. Jak wygląda przestrzeń $\mathcal{L}^2_T(M)$? Czy $W_t^{-1}$ należy do tej przestrzeni?

**Ćwiczenie 10.2.** Udowodnij Twierdzenia 10.2 i 10.3.

**Ćwiczenie 10.3.** Udowodnij Stwierdzenie 10.4.

**Ćwiczenie 10.4.** Załóżmy, że $X$ jest procesem ciągłym, a $M$ ciągłym martyngałem lokalnym. Wykaż, że jeśli $t < T$, $\Pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)})$ jest ciągiem podziałów $[0, t]$ takim, że $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = t$ oraz $\mathrm{diam}(\Pi_n) \to 0$, to

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}}(M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^t X_s dM_s \qquad \text{według prawdopodobieństwa.}$$

**Ćwiczenie 10.5.** Wykaż, że każdy ciągły martyngał lokalny $M = (M_t)_{t<T}$, którego trajektorie mają skończone wahanie na każdym przedziale $[0, t]$ jest stale równy $M_0$.

# 11. Własności nawiasu skośnego

Podczas tego wykładu zajmiemy się interpretacją procesu $\langle M\rangle$. Wprowadzimy też definicję nawiasu skośnego pary ciągłych martyngałów lokalnych.

## 11.1. Nawias skośny jako wariacja kwadratowa

Niech $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ będzie podziałem $[0,t]$ takim, że $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = t$. Definiujemy wówczas

$$V^M_{\Pi,t} := \sum_{i=1}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2.$$

Będziemy też czasem pisać $V_{\Pi,t}(M)$ zamiast $V^M_{\Pi,t}$. Pokażemy, że $\langle M\rangle_t$ jest granicą $V^M_{\Pi,t}$ przy $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$, dlatego też $\langle M\rangle$ nazywa się często *wariacją kwadratową* $M$.

Zacznijmy od najprostszej sytuacji martyngałów ograniczonych, tzn. takich, że $\sup_t \|M_t\|_\infty < \infty$.

**Twierdzenie 11.1.** *Załóżmy, że $M$ jest ograniczonym martyngałem ciągłym Wówczas $V^M_{\Pi,t} \to \langle M\rangle_t$ w $L_2(\Omega)$ dla $t \leqslant T$, gdy* $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$.

*Dowód.* Możemy założyć, rozpatrując zamiast $M$ proces $M - M_0$, że $M_0 = 0$, bo $V_{\Pi,t}(M-M_0) = V_{\Pi,t}(M)$ oraz $\langle M - M_0\rangle = \langle M\rangle$ ($(M-M_0)^2 - \langle M\rangle = (M^2 - \langle M\rangle) - 2MM_0 + M_0^2$ jest martyngałem, czyli, z jednoznaczności $\langle\cdot\rangle$, mamy $\langle M - M_0\rangle = \langle M\rangle$).

Niech $\Pi_n = (0 = t^{(n)}_0 \leqslant t^{(n)}_1 \leqslant \ldots \leqslant t^{(n)}_{k_n} = t)$ będzie ciągiem podziałów $[0,t]$ takim, że $\mathrm{diam}(\Pi_n) \to 0$.

Połóżmy $C = \sup_{s\leqslant T} \|M_s\|_\infty$. Liczymy

$$\begin{aligned}
M_t^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{k_n} (M_{t^{(n)}_k} - M_{t^{(n)}_{k-1}})\Big)^2 \\
&= \sum_k (M_{t^{(n)}_k} - M_{t^{(n)}_{k-1}})^2 + 2\sum_{k<j} (M_{t^{(n)}_k} - M_{t^{(n)}_{k-1}})(M_{t^{(n)}_j} - M_{t^{(n)}_{j-1}}) \\
&= V^M_{\Pi_n,t} + 2\sum_j (M_{t^{(n)}_j} - M_{t^{(n)}_{j-1}}) M_{t^{(n)}_{j-1}} = V^M_{\Pi_n,t} + 2N_n(t).
\end{aligned}$$

Niech

$$X_n(s) := \sum_{j=1}^{k_n} M_{t^{(n)}_{j-1}} \mathrm{I}_{(t^{(n)}_{j-1}, t^{(n)}_j]} \in \mathcal{E},$$

wówczas $N_n(t) = \int_0^t X_n(s)\, dM_s$. Z ciągłości $M$ dostajemy $X_n(s) \to M_s$ dla wszystkich $s \leqslant t$. Ponadto $|X_n| \leqslant C$, stąd $|X_n - M|^2 \leqslant 4C^2$ i na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej,

$$\mathbb{E}\int_0^t |X_n - M|^2\, d\langle M\rangle_s \to 0.$$

Zatem $X_n \to M$ w $\mathcal{L}^2_t(M)$, czyli $N_n \to \int M\,dM$ w $\mathcal{M}^{2,c}_t$, to znaczy $N_n(t) \to \int_0^t M_s\,dM_s$ w $L_2(\Omega)$. Wykazaliśmy zatem, iż

$$V^M_{\Pi_n,t} = M_t^2 - 2N_n(t) \to M_t^2 - 2\int M\,dM \quad \text{w } L_2(\Omega).$$

Proces $Y := M^2 - 2\int M\,dM$ jest ciągły, $Y_0 = 0$ oraz $M^2 - Y = 2\int M\,dM$ jest martyngałem. By zakończyć dowód, że $Y = \langle M\rangle$ musimy wykazać monotoniczność trajektorii $Y$. Wybierzmy $s < t$ i rozpatrzmy taki ciąg podziałów $\Pi_n$ odcinka $[0,t]$, że $s$ jest jednym z punktów każdego z podziałów. Wówczas $\Pi_n$ można też traktować jako ciąg podziałów $[0,s]$ i określić $V^M_{\Pi_n,s}$. Mamy

$$Y_s \xleftarrow{L_2} V^M_{\Pi_n,s} \leqslant V^M_{\Pi_n,t} \xrightarrow{L_2} Y_t,$$

czyli proces $Y$ ma trajektorie monotoniczne. □

*Uwaga* 11.1. W szczególności przedstawiony dowód pokazuje, że dla martyngału jednostajnie ograniczonego $M$, takiego, że $M_0 = 0$, zachodzi $M^2 = 2\int M\,dM + \langle M\rangle$.

By uogólnić Twierdzenie 11.1 na przypadek martyngałów całkowalnych z kwadratem będziemy potrzebowali dwóch faktów.

**Lemat 11.1.** *Niech $(\xi_n)$ będzie ciągiem zmiennych losowych, a $(A_k)$ wstępującym ciągiem zdarzeń takim, że $\mathbb{P}(\bigcup A_k) = 1$. Załóżmy, że dla wszystkich $k$, zmienne $\xi_n \mathrm{I}_{A_k}$ zbiegają według prawdopodobieństwa (przy $n \to \infty$) do zmiennej $\eta_k$. Wówczas $\xi_n$ zbiega według prawdopodobieństwa do zmiennej $\eta$ takiej, że $\eta \mathrm{I}_{A_k} = \eta_k$ p.n. dla $k = 1, 2, \ldots$.*

*Dowód.* Dla $k \leqslant l$ mamy $\eta_l \mathrm{I}_{A_k} = \eta_k$ p.n., gdyż pewien podciąg $\xi_{n_s}\mathrm{I}_{A_l} \to \eta_l$ p.n., a zatem $\xi_{n_s}\mathrm{I}_{A_l} = \xi_{n_s}\mathrm{I}_{A_l}\mathrm{I}_{A_k} \to \eta_l \mathrm{I}_{A_k}$ p.n. (czyli również wg $\mathbb{P}$). Stąd istnieje zmienna losowa $\eta$ taka, że $\eta\mathrm{I}_{A_k} = \eta_k$ p.n..

Zauważmy, że $\mathbb{P}(A_k^c) \leqslant \varepsilon/2$ dla dużego $k$ oraz przy ustalonym $k$, $\mathbb{P}(|\xi_n\mathrm{I}_{A_k} - \eta_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$ dla dużych $n$, stąd

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(A_k^c) + \mathbb{P}(|\xi_n\mathrm{I}_{A_k} - \eta\mathrm{I}_{A_k}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych $n$. □

Kolejny lemat pokazuje, że przy pewnych prostych założeniach można ze zbieżności według prawdopodobieństwa wyprowadzić zbieżność w $L_1$.

**Lemat 11.2.** *Załóżmy, że $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \to \xi$ według $\mathbb{P}$ oraz dla wszystkich $n$, $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi < \infty$. Wówczas $\xi_n \to \xi$ w $L_1$.*

*Dowód.* Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi - \xi_n| &= \mathbb{E}(|\xi - \xi_n| - (\xi - \xi_n)) = 2\mathbb{E}(\xi - \xi_n)\mathrm{I}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\mathbb{E}(\xi - \xi_n)\mathrm{I}_{\{\xi \geqslant \xi_n + \frac{\varepsilon}{4}\}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\mathbb{E}\xi\mathrm{I}_{\{\xi \geqslant \xi_n + \frac{\varepsilon}{4}\}}.\end{aligned}$$

Na mocy zbieżności według prawdopodobieństwa, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi \geqslant \xi_n + \varepsilon/4) = 0$. Ponadto $\mathbb{E}|\xi| = \mathbb{E}\xi < \infty$, zatem $\{\xi\}$ jest jednostajnie całkowalna , czyli $|\mathbb{E}\xi\mathrm{I}_A| \leqslant \varepsilon/2$ dla odpowiednio małego $\mathbb{P}(A)$. Stąd $\mathbb{E}\xi\mathrm{I}_{\{\xi \geqslant \xi_n + \varepsilon/4\}} \leqslant \varepsilon/2$ dla dużych $n$, a więc $\mathbb{E}|\xi - \xi_n| \leqslant \varepsilon$. □

**Twierdzenie 11.2.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, wówczas dla $t < T$, $V^M_{\Pi,t} \to \langle M\rangle_t$ w $L_1(\Omega)$, gdy* $\operatorname{diam}(\Pi) \to 0$.

*Dowód.* Jak poprzednio możemy zakładać, że $M_0 = 0$. Ustalmy ciąg podziałów $\Pi_n$ taki, że $\mathrm{diam}(\Pi_n) \to 0$.

Istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_k \nearrow T$ taki, że $M^{\tau_k}$ jest jednostajnie ograniczony (np. $\tau_k = \inf\{t\colon |M_t| \leqslant k\}$). Na mocy Twierdzenia 11.1, dla ustalonego $k$, mamy przy $n \to \infty$,

$$V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k}) \xrightarrow{L_2} \langle M^{\tau_k}\rangle_t = \langle M\rangle_t^{\tau_k}.$$

Stąd

$$\mathrm{I}_{\{t\leqslant\tau_k\}} V_{\Pi_n,t}(M) = \mathrm{I}_{\{t\leqslant\tau_k\}} V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k}) \xrightarrow{L_2} \mathrm{I}_{\{t\leqslant\tau_k\}} \langle M\rangle_t^{\tau_k} = \mathrm{I}_{\{t\leqslant\tau_k\}} \langle M\rangle_t.$$

Zbieżność w $L_2$ implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa, zatem możemy stosować Lemat 11.1 do $\xi_n = V_{\Pi_n,t}(M)$ i $A_k = \{t \leqslant \tau_k\}$, by otrzymać $V_{\Pi_n,t}(M) \to \langle M\rangle_t$ według $\mathbb{P}$. Mamy jednak

$$\mathbb{E}\langle M\rangle_t = \mathbb{E}M_t^2 = \mathbb{E}[V_{\Pi_n,t}(M) + 2\sum_j M_{t_{j-1}^{(n)}}(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}})] = \mathbb{E}V_{\Pi_n,t}(M),$$

a zatem na mocy Lematu 11.2, $V_{\Pi_n,t}(M) \to \langle M\rangle_t$ w $L_1$. □

Dla martyngałów lokalnych zachodzi zbliżone twierdzenie, tylko zbieżność w $L_1$ musimy zastąpić zbieżnością według prawdopodobieństwa.

**Wniosek 11.1.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, wówczas dla $t < T$, $V^M_{\Pi,t} \to \langle M\rangle_t$ według prawdopodobieństwa, gdy* $\mathrm{diam}(\Pi) \to 0$.

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy założyć, że $M_0 = 0$, wówczas $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$. Niech $\Pi_n$ będą podziałami $[0,t]$ o średnicy zbieżnej do zera oraz $\tau_k \nearrow T$ takie, że $M^{\tau_k} \in \mathcal{M}^{2,c}$. Na podstawie Twierdzenia 11.2 otrzymujemy, że dla ustalonego $k$,

$$V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k}) \xrightarrow{L_1} \langle M^{\tau_k}\rangle = \langle M\rangle^{\tau_k}.$$

Stąd

$$V_{\Pi_n,t}(M)\mathrm{I}_{\{\tau_k\geqslant t\}} = V_{\Pi_n,t}(M^{\tau_k})\mathrm{I}_{\{\tau_k\geqslant t\}} \xrightarrow{L_1} \langle M\rangle^{\tau_k}\mathrm{I}_{\{\tau_k\geqslant t\}} = \langle M\rangle\mathrm{I}_{\{\tau_k\geqslant t\}}.$$

Teza wynika z Lematu 11.1. □

## 11.2. Uogólnienie definicji nawiasu skośnego

Nawias skośny określa się nie tylko dla pojedynczego martyngału, ale też i dla pary martyngałów.

**Definicja 11.1.** Nawiasem skośnym dwóch ciągłych martyngałów lokalnych $M$ i $N$ nazywamy proces $\langle M, N\rangle$ zdefiniowany wzorem

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{4}[\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle].$$

**Stwierdzenie 11.1.** *a) Załóżmy, że $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, wówczas $\langle M, N\rangle$ to jedyny proces o trajektoriach ciągłych mających wahanie skończone na $[0,T]$ taki, że $\langle M, N\rangle_0 = 0$ oraz $MN - \langle M, N\rangle$ jest martyngałem na $[0,T]$.*
*b) Załóżmy, że $M, N \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, wówczas $\langle M, N\rangle$ to jedyny proces o trajektoriach ciągłych mających wahanie skończone na $[0,t]$ dla $t < T$ taki, że $\langle M, N\rangle_0 = 0$ oraz $MN - \langle M, N\rangle$ jest martyngałem lokalnym na $[0,T)$.*

*Dowód.* Jednoznaczność dowodzimy jak dla $\langle M\rangle$, zaś wymienione własności wynikają z tożsamości

$$MN - \langle M,N\rangle = \frac{1}{4}\Big[\Big((M+N)^2 - \langle M+N\rangle\Big) - \Big((M-N)^2 - \langle M-N\rangle\Big)\Big].$$

□

**Stwierdzenie 11.2.** *Niech* $\Pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)})$ *będzie ciągiem podziałów* $[0,t]$ *takim, że* $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = t$ *oraz* $\mathrm{diam}(\Pi_n) \to 0$.
*a) Jeśli* $M, N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, *to dla* $t < T$,

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} (M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}})(N_{t_{k+1}^{(n)}} - N_{t_k^{(n)}}) \to \langle M,N\rangle_t \quad w\ L_1(\Omega).$$

*b) Jeśli* $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$, *to dla* $t < T$,

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} (M_{t_{k+1}^{(n)}} - M_{t_k^{(n)}})(N_{t_{k+1}^{(n)}} - N_{t_k^{(n)}}) \to \langle M,N\rangle_t \quad \textit{według prawdopodobieństwa.}$$

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że

$$(M_t - M_s)(N_t - N_s) = \frac{1}{4}[((M_t+N_t) - (M_s+N_s))^2 - ((M_t-N_t) - (M_s-N_s))^2]$$

i skorzystać z Twierdzenia 11.1 i Wniosku 11.1. □

**Stwierdzenie 11.3.** *Dla dowolnych ciągłych martyngałów lokalnych* $M$ *i* $N$,
*a)* $\langle M,M\rangle = \langle M\rangle = \langle -M\rangle$,
*b)* $\langle M,N\rangle = \langle N,M\rangle$,
*c)* $\langle M - M_0, N\rangle = \langle M, N - N_0\rangle = \langle M - M_0, N - N_0\rangle = \langle M,N\rangle$,
*d)* $(N,M) \to \langle M,N\rangle$ *jest przekształceniem dwuliniowym,*
*e)* $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M,N\rangle^\tau$ *dla każdego momentu zatrzymania* $\tau$,
*f) jeśli* $X \in \Lambda_T^2(M)$ *oraz* $Y \in \Lambda_T^2(N)$, *to* $\langle \int X dM, \int Y dN\rangle = \int XY d\langle M,N\rangle$.

*Szkic dowodu..* Punkty a), b) i c) wynikają natychmiast z definicji, punkt d) z Wniosku 11.1. To, że $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M,N\rangle^\tau$ dowodzimy jak w Stwierdzeniu 10.3 (wykorzystując Stwierdzenie 11.1). Pozostałe równości w e) wynikają ze Stwierdzenia 11.2. Punkt f) dowodzimy najpierw dla przypadku, gdy $M$ i $N$ są martyngałami, zaś $X$ i $Y$ procesami elementarnymi, następnie dla $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$ oraz $Y \in \mathcal{L}_T^2(M)$ i wreszcie, wykorzystując własność e), dla przypadku ogólnego. □

## 11.3. Zadania

**Ćwiczenie 11.1.** Oblicz $\langle W^1, W^2\rangle$, gdzie $W^1, W^2$ są niezależnymi procesy Wienera.

**Ćwiczenie 11.2.** Wykaż, że
a) $|\langle M,N\rangle| \leqslant \langle M\rangle\langle N\rangle$
b) $\mathrm{Wah}_{[s,t]}(\langle M,N\rangle) \leqslant \frac{1}{2}[\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + \langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s]$.

**Ćwiczenie 11.3.** Uzupełnij dowód Stwierdzenia 11.3.

**Ćwiczenie 11.4.** Wykaż, że dla dowolnego procesu $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, $X \in \Lambda_2^T(M)$ oraz momentu zatrzymania $\tau \leqslant T$,

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t X\,dM\Big)^2 \leqslant 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2\,d\langle M\rangle_s.$$

**Ćwiczenie 11.5.** Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $M_0 = 0$ oraz $\tau$ jest momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\langle M\rangle_\tau < \infty$. Wykaż, że $M^\tau$ jest martyngałem.

**Ćwiczenie 11.6.** Określamy

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{3n-1} \Big| \int_{k/n}^{(k+1)/n} W_s^4 dW_s \Big|^\alpha.$$

a) Wykaż, że ciąg $S_n(2)$ jest zbieżny w $L_1$ i zidentyfikuj jego granicę.
b) Co można powiedzieć o zbieżności według prawdopodobieństwa ciągu $S_n(\alpha)$ dla $\alpha \neq 2$?

# 12. Dalsze własności całki stochastycznej

Podczas tego wykładu wykażemy szereg ważnych własności całki stochastycznej, które pozwolą nam później udowodnić wzór Itô.

## 12.1. Zbieżność zmajoryzowana dla całek stochastycznych

Zacznijmy od wersji stochastycznej twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

**Twierdzenie 12.1.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$ oraz $X_n$ są procesami prognozowalnymi takimi, że $\lim_{n\to\infty} X_{n,t}(\omega) = X_t(\omega)$ dla wszystkich $t < T, \omega \in \Omega$. Jeśli dla wszystkich $t < T$ i $\omega \in \Omega$, $|X_{n,t}(\omega)| \leqslant Y_t(\omega)$ dla pewnego procesu $Y \in \Lambda^2_T(M)$, to $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ oraz*

$$\int_0^t X_n dM \to \int_0^t X dM \quad \text{według prawdopodobieństwa przy } n \to \infty.$$

*Dowód.* Proces $X$ jest prognozowalny jako granica procesów prognozowalnych. Ponadto dla $t < T$,

$$\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s, \int_0^t X_{n,s}^2 d\langle M\rangle_s \leqslant \int_0^t Y_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \text{ p.n.},$$

więc $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$. Bez straty ogólności możemy też założyć, że $M_0 = 0$.

Niech $\tau_k \nearrow T$ takie, że $M^{\tau_k} \in \mathcal{M}^{2,c}_T$ oraz $\mathrm{I}_{[0,\tau_k]} Y \in \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Ponieważ $\mathrm{I}_{[0,\tau_k]} X_n \leqslant \mathrm{I}_{[0,\tau_k]} Y$, więc $\mathrm{I}_{[0,\tau_k]} X_n \in \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej łatwo wykazać, że $\mathrm{I}_{[0,\tau_k]} X_n \to \mathrm{I}_{[0,\tau_k]} X$ w $\mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Stąd dla ustalonego $k$,

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} X_n dM = \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_k]} X_n dM^{\tau_k} \xrightarrow{L_2(\Omega)} \int_0^t \mathrm{I}_{[0,\tau_k]} X dM^{\tau_k} = \int_0^{t\wedge\tau_k} X dM,$$

czyli

$$\mathrm{I}_{\{\tau_k \geqslant t\}} \int_0^t X_n dM \xrightarrow{L_2} \mathrm{I}_{\{\tau_k \geqslant t\}} \int_0^t X dM \text{ przy } n \to \infty.$$

Zbieżność w $L_2$ implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa, by zakończyć dowód wystarczy skorzystać z Lematu 11.1. $\square$

## 12.2. Całkowanie przez podstawienie

**Definicja 12.1.** Mówimy, że proces $X$ jest lokalnie ograniczony, jeśli istnieją momenty zatrzymania $\tau_n \nearrow T$ takie, że procesy $X^{\tau_n} - X_0$ są ograniczone.

*Uwaga* 12.1. Każdy proces ciągły, adaptowalny jest lokalnie ograniczony.

Kolejne twierdzenie podaje wzór na całkowanie przez podstawienie.

**Twierdzenie 12.2.** *a) Załóżmy, że $N \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(N)$, $Y$ jest procesem prognozowalnym ograniczonym oraz $M = \int X dN$. Wówczas $Y \in \mathcal{L}_T^2(M), XY \in \mathcal{L}_T^2(N)$ oraz $\int Y dM = \int XY dN$.*
*b)Załóżmy, że $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$, $X \in \Lambda_T^2(N)$, $Y$ jest procesem prognozowalnym lokalnie ograniczonym oraz $M = \int X dN$. Wówczas $Y \in \Lambda_T^2(M), XY \in \Lambda_T^2(N)$ oraz $\int Y dM = \int XY dN$.*

*Dowód.* a) Załóżmy wpierw, że $Y$ jest procesem elementarnym postaci

$$Y = \xi_0 \mathrm{I}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \mathrm{I}_{(t_j, t_{j+1}]},$$

gdzie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < T$, zaś $\xi_k$ są ograniczonymi zmiennymi $\mathcal{F}_{t_k}$-mierzalnymi. Wówczas

$$\begin{aligned}
\int_0^t Y dM &= \sum_j \xi_j (M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_j \xi_j \Big( \int_0^t \mathrm{I}_{[0,t_{j+1}]} X dN - \int_0^t \mathrm{I}_{[0,t_j]} X dN \Big) \\
&= \sum_j \xi_j \int_0^t \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]} X dN = \sum_j \int_0^t \xi_j \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]} X dN \\
&= \int_0^t \sum_j \xi_j \mathrm{I}_{(t_j,t_{j+1}]} X dN = \int_0^t Y X dN.
\end{aligned}$$

Jeśli $Y$ jest dowolnym ograniczonym procesem prognozowalnym, to

$$\mathbb{E} \int_0^T Y_s^2 d\langle M\rangle_s \leqslant \|Y\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T d\langle M\rangle_s = \|Y\|_\infty^2 \mathbb{E}\langle M\rangle_T = \|Y\|_\infty^2 \mathbb{E} M_T^2 < \infty,$$

więc $Y \in \mathcal{L}_T^2(M)$. Nietrudno też sprawdzić, że $XY \in \mathcal{L}_T^2(N)$. Możemy znaleźć procesy elementarne $Y_n$ zbieżne do $Y$ w $\mathcal{L}_T^2(M)$, co więcej możemy założyć, że $\|Y_n\|_\infty \leqslant \|Y\|_\infty$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\|XY - XY_n\|_{\mathcal{L}_T^2(N)}^2 &= \mathbb{E} \int_0^T (XY - XY_n)_s^2 d\langle N\rangle_s = \mathbb{E} \int_0^T (Y - Y_n)_s^2 X_s^2 d\langle N\rangle_s \\
&= \mathbb{E} \int_0^T (Y - Y_n)_s^2 d\langle M\rangle_s = \|Y - Y_n\|_{\mathcal{L}_T^2(M)}^2 \to 0,
\end{aligned}$$

więc $Y_n X \to Y X$ w $\mathcal{L}_T^2(N)$. Stąd dla $t \leqslant T$,

$$\int_0^t XY dN \xleftarrow{L_2} \int_0^t XY_n dN = \int Y_n dM \xrightarrow{L_2} \int_0^t Y dM.$$

b) Mamy $\int_0^t Y_0 dM = Y_0 M_t = Y_0 \int_0^t X dN = \int_0^t Y_0 X dN$, zatem rozpatrując $Y - Y_0$ zamiast $Y$ możemy zakładać,że $Y_0 = 0$. Niech $\tau_n \nearrow T$ takie, że $Y^{\tau_n}$ jest ograniczone, $N^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $X \mathrm{I}_{[0,\tau_n]} \in \mathcal{L}_T^2(N^{\tau_n})$. Zauważmy, że

$$M^{\tau_n} = \Big( \int X dN \Big)^{\tau_n} = \int X \mathrm{I}_{[0,\tau_n]} dN^{\tau_n},$$

zatem na mocy części a),

$$\Big(\int YdM\Big)^{\tau_n} = \int Y\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}dM^{\tau_n} = \int Y\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}X\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}dN^{\tau_n}$$
$$= \int XY\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}dN^{\tau_n} = \Big(\int XYdN\Big)^{\tau_n}.$$

Biorąc $n \to \infty$ dostajemy tezę. □

## 12.3. Całkowanie przez części

Sformułujemy teraz pierwsze twierdzenie o całkowaniu przez części.

**Twierdzenie 12.3.** *Niech $M, N \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, wówczas*

$$M_tN_t = M_0N_0 + \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \langle M, N\rangle_t. \tag{12.1}$$

Stosując twierdzenie do $M = N$ dostajemy natychmiast.

**Wniosek 12.1.** *Jeśli $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, to*

$$\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2}(M_t^2 - M_0^2) - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t.$$

**Wniosek 12.2.** *Niech $X, Y \in \Lambda^2_T$, $M = \int XdW$ oraz $N = \int YdW$, wówczas*

$$M_tN_t = \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \langle M, N\rangle_t$$
$$= \int_0^t M_sY_s dW_s + \int_0^t N_sX_s dW_s + \int_0^t X_sY_s ds.$$

*Dowód.* Pierwsza równość wynika z Twierdzenia 12.3, druga z Twierdzenia 12.2 oraz tego, że $\langle M, N\rangle = \int XYds$. □

*Dowód Twierdzenia 12.3.* Całki $\int MdN$ i $\int NdM$ są dobrze określone, gdyż procesy $M$ i $N$ są ciągłe, zatem lokalnie ograniczone.

Możemy założyć, iż $M_0 = N_0 = 0$, gdyż $\langle M, N\rangle = \langle M - N_0, N - N_0\rangle$,

$$\int MdN = \int Md(N - N_0) = \int (M - M_0)d(N - N_0) + \int M_0 d(N - N_0)$$
$$= \int (M - M_0)d(N - N_0) + M_0(N - N_0),$$

zatem

$$M_0N_0 + \int_0^t MdN + \int_0^t NdM + \langle M, N\rangle_t - M_tN_t$$
$$= \int_0^t (M - M_0)d(N - N_0) + \int_0^t (N - M_0)d(M - M_0)$$
$$+ \langle M - N_0, N - N_0\rangle_t - (M_t - M_0)(N_t - N_0).$$

Wystarczy udowodnić, że teza zachodzi dla $M = N$, tzn.

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M\rangle_t \quad \text{dla } M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}},\ M_0 = 0. \tag{12.2}$$

Jeśli bowiem zastosujemy (12.2) dla $M + N$ i $M - N$, odejmiemy stronami i podzielimy przez 4, to dostaniemy (12.1).

Wiemy (zob. Uwaga 11.1), że (12.2) zachodzi przy dodatkowym założeniu ograniczoności $M$. W ogólnym przypadku określamy

$$\tau_n := \inf\{t > 0\colon |M_t| \geqslant n\} \wedge T,$$

wtedy $\tau_n \nearrow T$. Ponadto $M^{\tau_n}$ jest ograniczonym martyngałem lokalnym, zatem ograniczonym martyngałem, więc

$$\begin{aligned}(M^2)^{\tau_n} &= (M^{\tau_n})^2 = 2\int M^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \langle M^{\tau_n}\rangle = 2\int M^{\tau_n}\mathrm{I}_{[0,\tau_n]} dM + \langle M\rangle^{\tau_n} \\ &= 2\int M\mathrm{I}_{[0,\tau_n]} dM + \langle M\rangle^{\tau_n} = \Big(2\int M dM + \langle M\rangle\Big)^{\tau_n}.\end{aligned}$$

Przechodząc z $n \to \infty$ dostajemy (12.2). □

**Definicja 12.2.** Przez $\mathcal{V}^c$ oznaczamy procesy ciągłe, adaptowalne, których trajektorie mają wahanie skończone na każdym przedziale $[0, t]$ dla $t < T$.

Udowodnimy teraz kolejne twierdzenie o całkowaniu przez części.

**Stwierdzenie 12.1.** *Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $A \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$M_t A_t = M_0 A_0 + \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s dA_s.$$

*Dowód.* Jak w dowodzie Twierdzenia 12.3 możemy założyć, że $M_0 = A_0 = 0$.

Załóżmy wpierw, że $M$ i $N$ są ograniczone. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}M_t A_t &= \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n}) \sum_{k=1}^n (A_{tk/n} - A_{t(k-1)/n} \\ &= \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})(A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n M_{t(j-1)/n}(A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n}) + \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})A_{t(j-1)/n} \\ &=: a_n + b_n + c_n.\end{aligned}$$

Składnik $b_n$ dąży prawie na pewno do $\int_0^t M dA$ (definicja całki Riemanna-Stieltjesa). Nietrudno sprawdzić, że procesy elementarne

$$A_n = \sum_{j=1}^n A_{t(j-1)/n}\mathrm{I}_{(t(j-1)/n, tj/n]}$$

zbiegają w $\mathcal{L}^2_t(M)$ do $A$, stąd $c_n = \int_0^t A_n dM$ zbiega w $L_2$ do $\int_0^t A dM$. Zauważmy też, że

$$\begin{aligned}|a_n|^2 &\leqslant \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})^2 \sum_{j=1}^n (A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n})^2 \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n (M_{tj/n} - M_{t(j-1)/n})^2 \sup_{1\leqslant j\leqslant n} |A_{tj/n} - A_{t(j-1)/n}| \mathrm{Wah}_{[0,t]}(A).\end{aligned}$$

Pierwszy czynnik powyżej dąży do $\langle M\rangle_t$ w $L_2$ (w szczególności jest więc ograniczony w $L_2$), drugi zaś dąży do zera p.n. (proces $A$ jest ciągły), stąd $a_n$ dąży do 0 według prawdopodobieństwa. Zatem

$$M_tA_t = a_n + b_n + c_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t MdA + \int_0^t AdM.$$

Jeśli $M$ i $A$ nie są ograniczone, to określamy

$$\tau_n = \inf\{t > 0\colon |M_t| \geqslant n\} \wedge \inf\{t > 0\colon |A_t| \geqslant n\} \wedge T.$$

Mamy $|A^{\tau_n}| \leqslant n$, $|M^{\tau_n}| \leqslant n$, więc z poprzednio rozważonego przypadku

$$(MA)^{\tau_n} = \int A^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \int M^{\tau_n} dA^{\tau_n} = \Big(\int AdM + \int MdA\Big)^{\tau_n},$$

przechodząc z $n \to \infty$ dostajemy tezę. □

Ostatnie twierdzenie o całkowaniu przez części jest nietrudną konsekwencją definicji całki Riemanna-Stieltjesa.

**Stwierdzenie 12.2.** *Załóżmy, że $A, B \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$A_tB_t = A_0B_0 + \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_s dA_s.$$

## 12.4. Ciągłe semimartyngały

**Definicja 12.3.** Proces $Z = (Z_t)_{t<T}$ nazywamy *ciągłym semimartyngałem*, jeśli da się przedstawić w postaci $Z = Z_0 + M + A$, gdzie $Z_0$ jest zmienną $\mathcal{F}_0$-mierzalna, $M \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$, $A \in \mathcal{V}^c$ oraz $A_0 = M_0 = 0$.

*Uwaga* 12.2. Rozkład semimartyngału jest jednoznaczny (modulo procesy nieodróżnialne).

*Dowód.* Jeśli $Z = Z_0 + M + A = Z_0 + M' + A'$, to $M - M' = A' - A$ jest ciągłym martyngałem lokalnym, startującym z zera o ograniczonym wahaniu na $[0, t]$ dla $t < T$, zatem jest stale równy 0. □

**Przykład 12.1.** Proces Itô, tzn. proces postaci $Z = Z_0 + \int XdW + \int Yds$, gdzie $X \in \Lambda^2_T$, $Y$ prognozowalny taki, że $\int_0^t |Y_s|ds < \infty$ p.n. dla $t < T$ jest semimartyngałem.

**Przykład 12.2.** Z twierdzenia Dooba-Meyera wynika, że kwadrat martyngału jest semimartyngałem.

**Definicja 12.4.** Jeśli $Z = Z_0 + M + A$ jest ciągłym semimartyngałem, to określamy $\int XdZ := \int XdM + \int XdA$, gdzie pierwsza całka to całka stochastyczna, a druga całka Stieltjesa.

**Twierdzenie 12.4.** *Jeśli $Z = Z_0 + M + A$ oraz $Z' = Z_0' + M' + A'$ są ciągłymi semimartyngałami, to $ZZ'$ też jest semimartyngałem oraz*

$$ZZ' = Z_0Z_0' + \int ZdZ' + \int Z'dZ + \langle M, M'\rangle.$$

*Dowód.* Mamy $ZZ' = Z_0Z_0' + MM' + MA' + AM' + AA'$ i stosujemy twierdzenia o całkowaniu przez części (Twierdzenie 12.3, Stwierdzenia 12.1 i 12.2). □

Dla semimartyngałów wygodnie jest też wprowadzić następującą definicję:

**Definicja 12.5.** Jeśli $Z = Z_0 + M + A$, $Z' = Z'_0 + M' + A'$ są ciągłymi semimartyngałami, to przyjmujemy $\langle Z, Z'\rangle = \langle M, M'\rangle$.

## 12.5. Zadania

**Ćwiczenie 12.1.** Udowodnij Stwierdzenie 12.2.

**Ćwiczenie 12.2.** Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstaw $\int W_s^2 dW_s$ jako wyrażenie nie zawierające całek stochastycznych.

**Ćwiczenie 12.3.** Załóżmy, że $X$ jest procesem ciągłym, a $Z$ ciągłym martyngałem lokalnym. Wykaż, że jeśli $t < T$, $\Pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)})$ jest ciągiem podziałów $[0,t]$ takim, że $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = t$ oraz $\operatorname{diam}(\Pi_n) \to 0$, to

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}}(Z_{t_{k+1}^{(n)}} - Z_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^t X_s dZ_s \quad \text{według prawdopodobieństwa.}$$

**Ćwiczenie 12.4.** Niech $\Pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)})$ będzie ciągiem podziałów $[0,t]$ takim, że $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = t$ oraz $\operatorname{diam}(\Pi_n) \to 0$. Wykaż, że dla dowolnych ciągłych semimartyngałów $X$ i $Y$,

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} (X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}})(Y_{t_{k+1}^{(n)}} - Y_{t_k^{(n)}}) \to \langle X, Y\rangle_t \quad \text{według prawdopodobieństwa.}$$

# 13. Wzór Itô

Podczas tego wykładu udowodnimy fundamentalne twierdzenie dla analizy stochastycznej. Pokazuje ono, że klasa semimartyngałów ciągłych jest zamknięta ze względu na funkcje gładkie oraz podaje wzór na różniczkę stochastyczną $df(X)$.

## 13.1. Podstawowe twierdzenie analizy stochastycznej

**Twierdzenie 13.1** (Wzór Itô)**.** *Załóżmy, że $Z = Z_0 + M + A$ jest ciągłym semimartyngałem, $f$ funkcją klasy $C^2$ na $\mathbb{R}$. Wówczas $f(Z)$ też jest semimartyngałem oraz*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d\langle M\rangle_s. \tag{13.1}$$

*Dowód.* Wszystkie całki w (13.1) są dobrze zdefiniowane, bo procesy $f'(Z_s)$ i $f''(Z_s)$ są ciągłe, zatem $f'(Z_s) \in \Lambda_T^2(M)$ oraz $f''(Z_s)$ jest całkowalne względem $\langle M\rangle$.

Wzór Itô (13.1) będziemy dowodzić poczynając od najprostszych przypadków.

**Przypadek I.** $Z$ jest semimartyngałem ograniczonym, a $f$ wielomianem.

Z liniowości obu stron (13.1) wystarczy rozpatrywać przypadek, gdy $f(x) = x^n$. Pokażemy ten wzór przez indukcję po $n$.

Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy więc, że (13.1) zachodzi dla $f(x) = x^n$ pokażemy go dla $g(x) = xf(x)$. Zauważmy, że $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ oraz $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$. Ze wzoru na całkowanie przez części,

$$\begin{aligned}
g(Z_t) =& Z_t f(Z_t) = Z_0 f(Z_0) + \int_0^t Z_s df(Z)_s + \int_0^t f(Z)dZ_s \\
&+ \Big\langle \int f'(Z)dM, M\Big\rangle_t \\
=& g(Z_t) + \int_0^t (Z_s f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}Z_s f''(Z_s)d\langle M\rangle_s) + \int_0^t f(Z)dZ_s \\
&+ \int_0^t f'(Z_s)d\langle M\rangle_s \\
=& g(Z_t) + \int_0^t g'(Z_t)dZ_t + \frac{1}{2}\int_0^t g''(Z_t)d\langle M\rangle_s.
\end{aligned}$$

**Przypadek II.** $Z$ jest semimartyngałem ograniczonym (a $f$ jest dowolną funkcją klasy $C^2$).

Niech $C := \|Z\|_\infty < \infty$, istnieje ciąg wielomianów $f_n$ taki, że

$$|f_n(x) - f(x)|, |f_n'(x) - f'(x)|, |f_n''(x) - f''(x)| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{dla } x \in [-C, C].$$

Wtedy $f_n(Z_s) \to f(Z_s), f_n'(Z_s) \to f'(Z_s), f_n''(Z_s) \to f''(Z_s)$ jednostajnie oraz $|f_n'(Z_s)| \leqslant \sup_n \sup_{|x|\leqslant C} |f_n'(x)| \leqslant \sup_{|x|\leqslant C} |f'(x)| + 1 < \infty$, więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (dla całki zwykłej i stochastycznej),

$$\begin{aligned} f(Z_s) \leftarrow f_n(Z_s) &= f_n(Z_0) + \int_0^t f_n'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(Z_s)d\langle M\rangle_s \\ &\to f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d\langle M\rangle_s. \end{aligned}$$

**Przypadek III.** Zmienna $Z_0$ jest ograniczona.

Połóżmy w tym przypadku

$$\tau_n := \inf\{t > 0 \colon |Z_t| \geqslant n\} \wedge T,$$

wówczas $Z^{(n)} := Z_0 + M^{\tau_n} + A^{\tau_n}$ jest ciągłym ograniczonym semimartyngałem oraz $Z_t^{(n)} \to Z_t$ p.n.. Na mocy przypadku II, (13.1) zachodzi dla $Z^{(n)}$, więc

$$\begin{aligned} f(Z_t^{(n)}) &= f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s^{(n)})dZ_s^{(n)} + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s^{(n)})d\langle M^{\tau_n}\rangle_s \\ &= f(Z_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_s^{(n)})\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_s^{(n)})\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}d\langle M\rangle_s^{\tau_n} \\ &= f(Z_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_s)\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_s)\mathrm{I}_{[0,\tau_n]}d\langle M\rangle_s \\ &= f(Z_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_s)d\langle M\rangle_s. \end{aligned}$$

Biorąc $n \to \infty$ dostajemy (13.1).

**Przypadek IV.** $Z$ jest dowolnym semimartyngałem ciągłym.

Połóżmy $Z_0^{(n)} := (Z_0 \wedge n) \vee -n$ oraz $Z^{(n)} := Z_0^{(n)} + M + A$. Zauważmy, że $\int X dZ = \int X dZ^{(n)}$, więc, ponieważ wiemy już, iż (13.1) zachodzi, gdy $Z_0$ ograniczone, to

$$f(Z_t^{(n)}) = f(Z_0^{(n)}) + \int_0^t f'(Z_s^{(n)})dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s^{(n)})d\langle M\rangle_s. \tag{13.2}$$

Mamy

$$|f'(Z_s^{(n)})| \leqslant \sup_n |f'(Z_s^{(n)})| := Y_s,$$

proces $Y$ jest prognozowalny jako supremum procesów prognozowalnych, ponadto

$$\sup_n \sup_{s\leqslant t} |Z_s^{(n)}| \leqslant |Z_0| + \sup_{s\leqslant t} |M_s| + \sup_{s\leqslant t} |A_s| < \infty \text{ p.n..}$$

Zatem z ciągłości $f'$, $\sup_{s\leqslant t} |Y_s| < \infty$ p.n., skąd $Y \in \Lambda_T^2(M)$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dla całek stochastycznych,

$$\int_0^t f'(Z_s^{(n)})dM_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f'(Z_s)dM_s,$$

ponadto z twierdzenia Lebesgue'a dla zwykłej całki,

$$\int_0^t f'(Z_s^{(n)})dA_s \to \int_0^t f'(Z_s)dA_s \quad \text{p.n..}$$

Podobnie $\sup_n \sup_{s\leqslant t} |f''(Z_s^{(n)})| < \infty$ p.n. i ponownie stosując twierdzenie Lebesgue'a dostajemy

$$\int_0^t f''(Z_s^{(n)})d\langle M\rangle_s \to \int_0^t f''(Z_s)d\langle M\rangle_s \quad \text{p.n..}$$

Oczywiście $f(Z_t^{(n)}) \to f(Z_t)$ p.n., więc możemy przejść w (13.2) z $n$ do $\infty$, by dostać (13.1). □

**Wniosek 13.1.** *Dla* $f \in C^2(\mathbb{R})$,

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds.$$

W podobny sposób jak w przypadku jednowymiarowym możemy udowodnić wielowymiarową wersję twierdzenia Itô.

**Twierdzenie 13.2.** *Załóżmy, że* $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* $C^2$ *oraz* $Z = (Z^{(1)},\dots,Z^{(d)})$, *gdzie* $Z^{(i)} = Z_0^{(i)} + M^{(i)} + A^{(i)}$ *są ciągłymi semimartyngałami dla* $i = 1,\dots,d$. *Wówczas* $f(Z)$ *jest semimartyngałem oraz*

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(Z_s)dZ_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Z_s)d\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle_s.$$

## 13.2. Twierdzenie Levy'ego

**Twierdzenie 13.3** (Levy)**.** *Załóżmy, że* $M$ *jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że* $M_0 = 0$ *oraz* $M_t^2 - t$ *jest martyngałem lokalnym. Wówczas* $M$ *jest procesem Wienera.*

*Dowód.* Musimy wykazać, że dla $s < t$, $M_t - M_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_s$ oraz ma rozkład $\mathcal{N}(0, t-s)$. W tym celu wystarczy wykazać, że

$$\mathbb{E}(e^{ih(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2} \quad \text{dla } t > s \geqslant 0,\ h \in \mathbb{R}. \tag{13.3}$$

Istotnie (13.3) implikuje, że $\mathbb{E}e^{ih(M_t-M_s)} = \exp(-\frac{1}{2}(t-s)h^2)$ dla $h \in \mathbb{R}$, czyli $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Ponadto dla dowolnej $\mathcal{F}_s$-mierzalnej zmiennej $\eta$ oraz $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{ih_1(M_t-M_s)+ih_2\eta} &= \mathbb{E}[e^{ih_2\eta}\mathbb{E}(e^{ih_1(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s)] \\ &= \mathbb{E}[e^{ih_2\eta}e^{-\frac{1}{2}(t-s)h_1^2}] = \mathbb{E}e^{ih_2\eta}\mathbb{E}e^{ih_1(M_t-M_s)}.\end{aligned}$$

Zatem $M_t - M_s$ jest niezależne od zmiennych $\mathcal{F}_s$-mierzalnych, czyli jest niezależne od $\mathcal{F}_s$.

Zastosujmy wzór Itô dla $f(x) = e^{ihx}$ (wzór Itô zachodzi też dla funkcji zespolonych, wystarczy dodać odpowiednie równości dla części rzeczywistej i urojonej),

$$\begin{aligned}e^{ihM_t} &= f(M_t) = f(M_0) + \int_0^t f'(M_u)dM_u + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_u)d\langle M\rangle_u \\ &= 1 + ih\int_0^t e^{ihM_u}dM_u - \frac{h^2}{2}\int_0^t e^{ihM_u}du \\ &= e^{ihM_s} + ih\int_s^t e^{ihM_u}dM_u - \frac{h^2}{2}\int_s^t e^{ihM_u}du.\end{aligned}$$

Niech $N := \int_0^t e^{ihM} dM$, wówczas $N$ jest martyngałem lokalnym oraz z nierówności Dooba (Twierdzenie 9.3),

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} N_s^2 \leqslant 4\mathbb{E} \int_0^t |e^{ihM_u}|^2 du = 4t,$$

czyli $N$ jest na każdym przedziale skończonym majoryzowany przez zmienną całkowalną, zatem jest martyngałem. Ustalmy $A \in \mathcal{F}_s$, wtedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{ihM_t} \mathrm{I}_A] &= \mathbb{E}[e^{ihM_s} \mathrm{I}_A] + \mathbb{E}[(N_t - N_s)\mathrm{I}_A] - \frac{h^2}{2} \mathbb{E}\Big[\int_s^t e^{ihM_u} du \mathrm{I}_A\Big] \\ &= \mathbb{E}[e^{ihM_s} \mathrm{I}_A] - \frac{h^2}{2} \int_s^t \mathbb{E}[e^{ihM_u} \mathrm{I}_A] du.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy $g(u) = \mathbb{E}[e^{ihM_{s+u}} \mathrm{I}_A]$, wtedy

$$g(t-s) = g(0) - \frac{h^2}{2} \int_s^t g(u-s) du,$$

czyli

$$g(r) = g(0) - \frac{h^2}{2} \int_0^r g(u) du.$$

Funkcja $g$ jest ciągła, a zatem z powyższego wzoru jest różniczkowalna i spełnia równanie różniczkowe

$$g'(r) = -\frac{h^2}{2} g(r).$$

Zatem $g(r) = g(0) \exp(-\frac{1}{2} h^2 r)$ dla $r \geqslant 0$, czyli

$$\mathbb{E}[e^{ihM_t} \mathrm{I}_A] = \mathbb{E}[e^{ihM_s} \mathrm{I}_A] e^{-\frac{1}{2} h^2 (t-s)} = \mathbb{E}[e^{ihM_s - \frac{1}{2} h^2 (t-s)} \mathrm{I}_A],$$

stąd $\mathbb{E}(e^{ihM_t} | \mathcal{F}_s) = \exp(ihM_s - \frac{1}{2} h^2 (t-s))$ p.n. i

$$\mathbb{E}(e^{ih(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{-ihM_s} \mathbb{E}(e^{ihM_t} | \mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2} h^2 (t-s)}.$$

□

*Uwaga* 13.1. Równoważnie Twierdzenie Levy'go można sformułować w następujący sposób: Jeśli $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$ oraz $\langle M \rangle = t$, to $M - M_0$ jest procesem Wienera.

*Uwaga* 13.2. Założenie ciągłości $M$ jest fundamentalne. Jeśli położymy $M_t = N_t - t$, gdzie $N$ jest procesem Poissona z parametrem 1, to $M_t^2 - t$ jest martyngałem, a oczywiście $M$ nie jest procesem Wienera.

Można też udowodnić wielowymiarową wersję twierdzenia Levy'ego.

**Twierdzenie 13.4.** *Załóżmy, że $M^{(1)}, \ldots, M^{(d)}$ są ciągłymi martyngałami lokalnymi takimi, że $M_0^{(i)} = 0$ oraz $M_t^{(i)} M_t^{(j)} - \delta_{i,j} t$ są martyngałami lokalnymi dla $1 \leqslant i, j \leqslant d$. Wówczas $M = (M^{(1)}, \ldots, M^{(d)})$ jest $d$-wymiarowym procesem Wienera.*

## 13.3. Charakteryzacja procesu Wienera za pomocą martyngałów wykładniczych

**Twierdzenie 13.5.** *Załóżmy, że proces $M$ jest ciągły, adaptowalny oraz $M_0 = 0$. Wówczas $M$ jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$, $\exp(\lambda M_t - \lambda^2 t/2)$ jest martyngałem lokalnym.*

*Dowód.* To, że $\exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ jest martyngałem jest prostym i dobrze znanym faktem. Wystarczy więc udowodnić implikację "$\Leftarrow$".

Określmy $\tau_n := \inf\{t > 0 \colon |M_t| \geqslant n\} \wedge n$, wówczas $\tau_n \nearrow \infty$ oraz dla wszystkich $\lambda$ proces $X_t(\lambda) = \exp(\lambda M_{t\wedge\tau_n} - \lambda^2 t \wedge \tau_n/2)$ jest ograniczonym martyngałem lokalnym (z dołu przez 0, z góry przez $e^{|\lambda|n}$), a więc martyngałem. Stąd

$$\mathbb{E}[X_t(\lambda)\mathrm{I}_A] = \mathbb{E}[X_s(\lambda)\mathrm{I}_A] \quad \text{dla } s < t,\ A \in \mathcal{F}_s.$$

Zauważmy, że $X_t(0) = 1$ oraz

$$\Big|\frac{dX_t(\lambda)}{d\lambda}\Big| = |X_t(\lambda)(M_{t\wedge\tau_n} - \lambda t \wedge \tau_n)| \leqslant e^{\lambda_0 n}(n + \lambda_0 n) \quad \text{dla } |\lambda| \leqslant \lambda_0.$$

Stąd, z Twierdzenia Lebesque'a o zbieżności zmajoryzowanej dla $t < s$, $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[X_t(\lambda)(M_{t\wedge\tau_n} - \lambda t \wedge \tau_n)\mathrm{I}_A] = \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{h}(X_t(\lambda + h) - X_t(\lambda))\mathrm{I}_A\Big]$$
$$= \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{h}(X_s(\lambda + h) - X_s(\lambda))\mathrm{I}_A\Big] = \mathbb{E}[X_s(\lambda)(M_{s\wedge\tau_n} - \lambda s \wedge \tau_n)\mathrm{I}_A].$$

Biorąc $\lambda = 0$ dostajemy $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n}\mathrm{I}_A] = \mathbb{E}[M_{s\wedge\tau_n}\mathrm{I}_A]$, czyli $M^{\tau_n}$ jest martyngałem, a więc $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$.

By skorzystać z twierdzenia Levy'ego i zakończyć dowód musimy jeszcze wykazać, że $M_t^2 - t \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$. Szacujemy dla $|\lambda| \leqslant \lambda_0$,

$$\Big|\frac{d^2X_t(\lambda)}{d\lambda^2}\Big| = |X_t(\lambda)[(M_{t\wedge\tau_n} - t \wedge \tau_n)^2 - t \wedge \tau_n]| \leqslant e^{\lambda_0 n}[(n + \lambda_0 n)^2 + n],$$

skąd w podobny sposób jak dla pierwszych pochodnych dowodzimy, że dla $t < s$, $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[X_t(\lambda)((M_{t\wedge\tau_n} - \lambda t \wedge \tau_n)^2 - t \wedge \tau_n)\mathrm{I}_A] = \mathbb{E}[X_s(\lambda)((M_{s\wedge\tau_n} - \lambda s \wedge \tau_n)^2 - s \wedge \tau_n)\mathrm{I}_A].$$

Podstawiając $\lambda = 0$ dostajemy

$$\mathbb{E}[(M^2_{t\wedge\tau_n} - t \wedge \tau_n)\mathrm{I}_A] = \mathbb{E}[(M^2_{s\wedge\tau_n} - s \wedge \tau_n)\mathrm{I}_A],$$

czyli $(M_t^2 - t)^{\tau_n}$ jest martyngałem, więc $M_t^2 - t \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$. □

## 13.4. Zadania

**Ćwiczenie 13.1.** Korzystając ze wzoru Itô oblicz $\langle W_t^2\rangle$ oraz $\langle W_t, e^{W_t}\rangle$.

**Ćwiczenie 13.2.** Niech $Z_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$. Wykaż, że $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$ tzn. $Z_t = 1 + \lambda\int_0^t Z_s dW_s$.

**Ćwiczenie 13.3.** Niech $f$ będzie funkcją klasy $C^2$ na $\mathbb{R}^2$, korzystając z wzoru Itô oblicz $df(t, W_t)$.

**Ćwiczenie 13.4.** Niech $M$ będzie ciągłym martyngałem lokalnym. Wykaż, że proces $N_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ jest ciągłym martyngałem lokalnym oraz nadmartyngałem. Ponadto jeśli $M$ jest ograniczony, to $N$ jest martyngałem.

**Ćwiczenie 13.5.** Niech $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^2$, $G$ zbiorem otwartym ograniczonym w $\mathbb{R}^d$ oraz $x \in G$. Określmy $\tau := \inf\{t\colon W_t + x \notin G\}$. Korzystając ze wzoru Itô wykaż, że jeśli $g$ jest harmoniczna w $G$, to $h(W_t^\tau + x)$ jest martyngałem. Pokaż, że wystarczy zakładać, iż $g$ jest klasy $C^2$ w pewnym otoczeniu domknięcia $G$.

**Ćwiczenie 13.6.** Wykaż, że dla 3-wymiarowego ruchu Browna $W_t$ i $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ proces $X_t = |W_t - a|^{-1}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. Ponadto $X_t$ jest nadmartyngałem oraz zbiega do 0 w $L_1$ i prawie na pewno.

**Ćwiczenie 13.7.** Wykaż, że 2-wymiarowego ruchu Browna $W_t$ i $a \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$ proces $X_t = \ln|W_t - a|$ jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces $W_t$ omija punkt $a$, ale trajektoria procesu jest dowolnie bliska punktu $a$.

**Ćwiczenie 13.8.** Załóżmy, że $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)})$ jest trójwymiarowym procesem Wienera oraz

$$X_t := \int_0^t \sin(W_t^{(3)})dW_t^{(1)} + \int_0^t \cos(W_t^{(3)})dW_t^{(2)}.$$

Wykaż, że $X$ jest procesem Wienera.

**Ćwiczenie 13.9.** Udowodnij Twierdzenie 13.4.

**Ćwiczenie 13.10.** Niech $T < \infty$ oraz $X = (X_t)_{0\leqslant t<T}$ będzie procesem prognozowalnym takim, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ zachodzi

$$\mathbb{E}\int_0^T X^{2m}(s)ds < \infty.$$

Wykaż, że $X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $M = \int XdW$ jest martyngałem takim, że

$$\mathbb{E}M_T^{2m} \leqslant (m(2m-1))^m T^{m-1}\mathbb{E}\int_0^T X_s^{2m}ds.$$

*Wskazówka. Zastosuj wzór Itô i nierówność Höldera.*

**Ćwiczenie 13.11.** Niech $W = (W^1, \ldots, W^d)$ będzie $d$-wymiarowym ruchem Browna, a $R_t = \|W_t\|$. Wykaż, że

a) $B_t := \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s^i$ jest jednowymiarowym procesem Wienera;

b) $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s}ds + B_t$ ($R_t$ jest nazywane procesem Bessela).

**Ćwiczenie 13.12.** Niech $Z = Z_0 + A + M, Y = Y_0 + B + N$ będą ciągłymi semimartyngałami. Definiujemy *całkę Stratonowicza* wzorem

$$\int_0^t Y_s \circ dZ_s := \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle.$$

Pokazać, że jeśli $f$ jest funkcją klasy $C^3$ na $\mathbb{R}$, to

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ dZ_s.$$

**Ćwiczenie 13.13.** Pokazać, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania oraz dowolnym ciągu $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$ podziałów odcinka $[0, t]$ takim, że $\operatorname{diam}(\pi_n) \to 0$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{Y_{t_{j+1}^{(n)}} + Y_{t_j^{(n)}}}{2} (Z_{t_{j+1}^{(n)}} - Z_{t_j^{(n)}}) \to \int_0^t Y_s \circ dZ_s$$

przy $n \to \infty$ według prawdopodobieństwa.

# 14. Stochastyczne Równania Różniczkowe

Z całką stochastyczną wiąże się pojęcie równania stochastycznego. Podamy kryteria istnienia i jednoznaczności rozwiązań takich równań oraz omówimy kilka przykładów.

## 14.1. Jednorodne równania stochastyczne

**Definicja 14.1.** Załóżmy, że $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, a $\xi$ zmienną losową $\mathcal{F}_s$-mierzalną. Mówimy, że proces $X = (X_t)_{t\in[s,T)}$ rozwiązuje *jednorodne równanie stochastyczne*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_s = \xi, \tag{14.1}$$

jeśli

$$X_t = \xi + \int_s^t b(X_r)dr + \int_s^t \sigma(X_r)dW_r, \quad t \in [s,T).$$

*Uwaga* 14.1. Przyjeliśmy, że $b$ i $\sigma$ są funkcjami ciągłymi, by uniknąć problemów związanych z mierzalnością i lokalną ograniczonością procesów $b(X_r)$ i $\sigma(X_r)$. Rozważa się jednak również stochastyczne równania różniczkowe z nieciągłymi współczynnikami.

*Uwaga* 14.2. Wprowadzając nowy proces $\tilde{X}_t := X_{t+s}$, $t \in [0, T-s)$ oraz filtrację $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t+s}$ zamieniamy równanie różniczkowe (14.1) na podobne równanie dla $\tilde{X}$ z warunkiem początkowym $\tilde{X}_0 = \xi$.

**Definicja 14.2.** Proces $X$ rozwiązujący równanie (14.1) nazywamy *dyfuzją startująca z $\xi$*. Funkcję $\sigma$ nazywamy *współczynnikiem dyfuzji*, a funkcję $b$ *współczynnikiem dryfu*.

Przypomnijmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska ze stałą $L$, jeśli $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$ dla wszystkich $x, y$. Lipschitzowskość implikuje też, że

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + L|x| \leqslant \tilde{L}\sqrt{1+x^2}$$

gdzie można przyjąć np. $\tilde{L} = 2\max\{|f(0)|, L\}$.

**Twierdzenie 14.1.** *Załóżmy, że funkcje $b$ i $\sigma$ są lipschitzowskie na $\mathbb{R}$, wówczas równanie stochastyczne* (14.1) *ma co najwyżej jedno rozwiązanie (z dokładnością do nierozróżnialności).*

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy zakładać, że $s = 0$ oraz $\sigma, b$ są lipschitzowskie z tą samą stałą $L$.

Załóżmy, że $X$ i $Y$ są rozwiązaniami (14.1), wówczas

$$X_t - Y_t = \int_0^t (b(X_r) - b(Y_r))dr + \int_0^t (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r))dW_r, \quad 0 \leqslant t < T.$$

**Krok I.** Załóżmy dodatkowo, że funkcja $u \mapsto \mathbb{E}|X_u - Y_u|^2$ jest skończona i ograniczona na przedziałach $[0,t]$, $t < T$.

Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 &\leqslant 2\mathbb{E}\Big(\int_0^t (b(X_r) - b(Y_r))dr\Big)^2 + 2\mathbb{E}\Big(\int_0^t (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r)dW_r\Big)^2 \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Z warunku Lipschitza i nierówności Schwarza,

$$I_1 \leqslant 2L^2\mathbb{E}\Big(\int_0^t |X_r - Y_r|dr\Big)^2 \leqslant 2L^2 t\int_0^t \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 dr.$$

By oszacować $I_2$ zauważmy, że $|\sigma(X_r) - \sigma(Y_r)| \leqslant L|X_r - Y_r|$, więc $\sigma(X_r) - \sigma(Y_r) \in \mathcal{L}^2_t$. Stąd

$$I_2 = 2\mathbb{E}\int_0^t (\sigma(X_r) - \sigma(Y_r))^2 dr \leqslant 2L^2\int_0^t \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 dr.$$

Ustalmy $t_0 < T$, wówczas z powyższych oszacowań wynika, że

$$\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 \leqslant C\int_0^t \mathbb{E}(X_r - Y_r)^2 dr \quad \text{dla } t \leqslant t_0,$$

gdzie $C = C(t_0) = 2L^2(t_0 + 1)$. Iterując powyższą nierówność dostajemy dla $t \leqslant t_0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 &\leqslant C\int_0^t \mathbb{E}(X_{r_1} - Y_{r_1})^2 dr_1 \leqslant C^2\int_0^t\int_0^{r_1} \mathbb{E}(X_{r_2} - Y_{r_2})^2 dr_2 dr_1 \\ &\leqslant \ldots \leqslant C^k\int_0^t\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_{k-1}} \mathbb{E}(X_{r_k} - Y_{r_k})^2 dr_k\ldots dr_1 \\ &\leqslant C^k \sup_{r\leqslant t}\mathbb{E}(X_r - Y_r)^2\int_0^t\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_{k-1}} dr_k\ldots dr_1 \\ &= C^k \sup_{r\leqslant t}\mathbb{E}(X_r - Y_r)^2\frac{t^k}{k!} \overset{k\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Stąd dla wszystkich $t < T$, $\mathbb{E}(X_t - Y_t)^2 = 0$, czyli $X_t = Y_t$ p.n., a więc z ciągłości obu procesów, $X$ i $Y$ są nieodróżnialne.

**Krok II.** $X$ i $Y$ dowolne. Określmy

$$\tau_n := \inf\{t \geqslant s\colon |X_t| + |Y_t| \geqslant n\}$$

i zauważmy, że $|X_t|\mathrm{I}_{(0,\tau_n]}, |X'_t|\mathrm{I}_{(0,\tau_n]} \leqslant n$. Ponieważ w zerze oba procesy się pokrywają, więc $|X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n}| \leqslant 2n$, stąd $|\sigma(X_t^{\tau_n}) - \sigma(Y_t^{\tau_n})| \leqslant 2Ln$ i $\sigma(X^{\tau_n}) - \sigma(Y^{\tau_n}) \in \mathcal{L}^2_t$ dla $t < T$. Mamy

$$\begin{aligned}X_{t\wedge\tau_n} - Y_{t\wedge\tau_n} &= \int_0^{t\wedge\tau_n}(b(X_r) - b(Y_r))dr + \int_0^{t\wedge\tau_n}(\sigma(X_r) - \sigma(Y_r))dW_r \\ &= \int_0^{t\wedge\tau_n}(b(X_r^{\tau_n}) - b(Y_r^{\tau_n}))dr + \int_0^{t\wedge\tau_n}(\sigma(X_r^{\tau_n}) - \sigma(Y_r^{\tau_n}))dW_r.\end{aligned}$$

Naśladując rozumowanie z kroku I dostajemy $X_{t\wedge\tau_n} = Y_{t\wedge\tau_n}$ p.n., przechodząc z $n \to \infty$ mamy $X_t = Y_t$ p.n.. □

**Twierdzenie 14.2.** *Załóżmy, że funkcje $b$ i $\sigma$ są lipschitzowskie na $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, wówczas równanie stochastyczne (14.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie $X = (X_t)_{t\geqslant s}$. Co więcej $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ oraz funkcja $t \to \mathbb{E}X_t^2$ jest ograniczona na przedziałach ograniczonych.*

*Dowód.* Jak w poprzednim twierdzeniu zakładamy, że $s = 0$. Jednoznaczność rozwiązania już znamy. By wykazać jego istnienie posłużymy się konstrukcją z użyciem *metody kolejnych przybliżeń*. Określamy $X_t^{(0)}(\omega) := \xi(\omega)$ oraz indukcyjnie

$$X_t^{(n)} := \xi + \int_0^t b(X_r^{(n-1)})dr + \int_0^t \sigma(X_r^{(n-1)})dW_r. \tag{14.2}$$

Definicja jest poprawna (tzn. całki są dobrze określone), gdyż $X_t^{(n)}$ są procesami ciągłymi, adaptowalnymi. Ponadto indukcyjnie pokazujemy, że funkcja $r \to \mathbb{E}|X_r^{(n)}|^2$ jest ograniczona na przedziałach skończonych:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^{(n)}|^2 &\leqslant 3\Big[\mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\Big(\int_0^t |b(X_r^{(n-1)})|dr\Big)^2 + \mathbb{E}\Big(\int_0^t \sigma(X_r^{(n-1)})dW_r\Big)^2\Big] \\
&\leqslant 3\Big[\mathbb{E}\xi^2 + t\mathbb{E}\int_0^t |b(X_r^{(n-1)})|^2 dr + \mathbb{E}\int_0^t |\sigma(X_r^{(n-1)})|^2 dr\Big] \\
&\leqslant 3\Big[\mathbb{E}\xi^2 + \tilde{L}^2(1+t) \sup_{0\leqslant r\leqslant t} \mathbb{E}|X_r^{(n-1)}|^2\Big].
\end{aligned}$$

Zatem $X^{(n)} \in \mathcal{L}_t^2$, a więc również $\sigma(X^{(n)}) \in \mathcal{L}_t^2$.

Zauważmy, że wobec nierówności $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ i niezależności $\xi$ i $W_t$, dla $t \leqslant t_0$ zachodzi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 &= \mathbb{E}\Big(\int_0^t b(\xi)dr + \int_0^t \sigma(\xi)dW_r\Big)^2 = \mathbb{E}(b(\xi)t + \sigma(\xi)W_t)^2 \\
&\leqslant 2t^2\mathbb{E}b(\xi)^2 + 2\mathbb{E}\sigma(\xi)^2\mathbb{E}W_t^2) \leqslant 2\tilde{L}^2(1+\mathbb{E}\xi^2)(t+t^2) \leqslant C,
\end{aligned}$$

gdzie $C = C(t_0) = 2\tilde{L}^2(1+\mathbb{E}\xi^2)(t_0+t_0^2)$. Podobnie szacujemy dla $t \leqslant t_0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^t (b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)}))dr + \int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big]^2 \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr\Big]^2 + 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big]^2 \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t L|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|dr\Big]^2 + 2\mathbb{E}\int_0^t |\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)})|^2 dr \\
&\leqslant 2L^2(t+1)\mathbb{E}\int_0^t |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr \leqslant C_1\int_0^t \mathbb{E}|X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr,
\end{aligned}$$

gdzie $C_1 = C_1(t_0) = 2L^2(t_0+1)$. Iterując to szacowanie dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 &\leqslant C_1^2\int_0^t\int_0^{r_1} \mathbb{E}|X_{r_2}^{(n-1)} - X_{r_2}^{(n-2)}|^2 dr_2 dr_1 \\
&\leqslant \dots \leqslant C_1^n\int_0^t\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_{n-1}} \mathbb{E}|X_{r_n}^{(1)} - X_{r_n}^{(0)}|^2 dr_n\dots dr_1 \\
&\leqslant C_1^n C\int_0^t\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_{n-1}} dr_n\dots dr_1 = CC_1^n\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że $\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\|_{L_2}^2 \leqslant CC_1^n\frac{t^n}{n!}$ dla $t \leqslant t_0$. Ponieważ szereg $\sum_n (CC_1^n\frac{t^n}{n!})^{1/2}$ jest zbieżny, więc $(X_t^{(n)})_{n\geqslant 0}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L_2$, czyli jest zbieżny. Z uwagi na jednostajność szacowań wykazaliśmy istnienie $X_t$ takiego, że

$$X_t^{(n)} \to X_t \text{ w } L_2 \text{ jednostajnie na przedziałach ograniczonych.}$$

Stąd też wynika, że $t \mapsto \mathbb{E}X_t^2$ jest ograniczona na przedziałach ograniczonych.

Wykażemy teraz, że $X_t^{(n)}$ z prawdopodobieństwem 1 zbiega do $X_t$ niemal jednostajnie. Zauważmy, że dla $t_0 < \infty$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant t_0}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2^n}\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant t_0}\int_0^t |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\Big) \\
&\quad + \mathbb{P}\Big(\sup_{t\leqslant t_0}|\int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r| \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\Big) =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \mathbb{P}\Big(\int_0^{t_0} |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\Big) \\
&\leqslant 4^{n+1}\mathbb{E}\Big(\int_0^{t_0} |b(X_r^{(n)}) - b(X_r^{(n-1)})|dr\Big)^2 \\
&\leqslant 4^{n+1}L^2\mathbb{E}\Big(\int_0^{t_0} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|dr\Big)^2 \leqslant 4^{n+1}L^2 t_0 \mathbb{E}\int_0^{t_0} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr \\
&\leqslant 4^{n+1}L^2 t_0 \int_0^{t_0} CC_1^{n-1}\frac{r^{n-1}}{(n-1)!}dr = 4^{n+1}L^2 CC_1^{n-1} t_0^{n+1}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Z nierówności Dooba dla martyngału $\int(\sigma(X^{(n)}) - \sigma(X^{(n-1)}))dW$ dostajemy

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant 4^{n+1}\mathbb{E}\sup_{t\leqslant t_0}\Big|\int_0^t (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big|^2 \\
&\leqslant 4^{n+2}\mathbb{E}\Big|\int_0^{t_0} (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))dW_r\Big|^2 \\
&= 4^{n+2}\mathbb{E}\int_0^{t_0} (\sigma(X_r^{(n)}) - \sigma(X_r^{(n-1)}))^2 dr \leqslant 4^{n+2}L^2\mathbb{E}\int_0^{t_0} |X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)}|^2 dr \\
&\leqslant 4^{n+2}L^2 CC_1^{n-1} t_0^n \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Przyjmując

$$A_n := \Big\{\sup_{t\leqslant t_0}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2^n}\Big\}$$

dostajemy

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_n 4^{n+1}(4+t_0)L^2 CC_1^{n-1} t_0^n \frac{1}{n!} < \infty,$$

więc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Zatem dla $t_0 < \infty$, ciąg procesów $X^{(n)}$ zbiega jednostajnie na $[0, t_0]$ z prawdopodobieństwem 1, czyli z prawdopodobieństwem 1 zbiega niemal jednostajnie na $[0, \infty)$. Ewentualnie modyfikując $X$ i $X^{(n)}$ na zbiorze miary zero widzimy, że $X$ jest granicą niemal jednostajną $X^{(n)}$, czyli $X$ ma trajektorie ciągłe.

Ze zbieżności $X_r^{(n)}$ do $X_r$ w $L_2$, jednostajnej na $[0, t]$ oraz lipschitzowskości $b$ i $\sigma$ łatwo wynika zbieżność w $L_2$, $\int_0^t b(X_r^{(n)})dr$ i $\int_0^t \sigma(X_r^{(n)})dr$ do odpowiednio $\int_0^t b(X_r)dr$ i $\int_0^t \sigma(X_r)dW_r$, zatem możemy przejść w (14.2) do granicy by otrzymać dla ustalonego $t < T$

$$X_t := \xi + \int_0^t b(X_r)dr + \int_0^t \sigma(X_r)dW_r \quad \text{p.n..}$$

Oba procesy $X$ i $\xi + \int b(X)dr + \int \sigma(X)dW$ są ciągłe, zatem są nierozróżnialne. □

**Przykład 14.1.** Stosując wzór Itô łatwo sprawdzić, że proces $X_t = \xi \exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$ jest rozwiązaniem równania

$$dX_t = \lambda X_t dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

Jest to jedyne rozwiązanie tego równania, gdyż $b = 0$ oraz $\sigma(x) = \lambda x$ są funkcjami lipschitzowskimi.

**Przykład 14.2.** Proces

$$X_t = e^{bt}\xi + \sigma \int_0^t e^{b(t-s)} dW_s$$

jest rozwiązaniem równania

$$dX_t = bX_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

Jest to jedyne rozwiązanie, gdyż funkcje $b(x) = bx$ oraz $\sigma(x) = s^2$ są lipschitzowskie. Jeśli $b < 0$ oraz $\xi$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, -\frac{1}{2b}\sigma^2)$, to proces $X$ jest stacjonarny (proces Ornsteina-Uhlenbecka).

## 14.2. Równania niejednorodne

Często współczynniki równania zależą nie tylko od $x$, ale i od czasu.

**Definicja 14.3.** Załóżmy, że $b, \sigma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, a $\xi$ zmienną losową $\mathcal{F}_s$-mierzalną. Mówimy, że proces $X = (X_t)_{t\in[s,T)}$ rozwiązuje *równanie stochastyczne*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_s = \xi, \tag{14.3}$$

jeśli

$$X_t = \xi + \int_s^t b(r, X_r)dr + \int_s^t \sigma(r, X_r)dW_r, \quad t \in [s, T).$$

Dla równania niejednorodnego naturalne są następujące warunki Lipschitza

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leqslant L|x - y|, \quad |b(t, x)| \leqslant \tilde{L}\sqrt{1 + x^2},$$
$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant L|x - y|, \quad |\sigma(t, x)| \leqslant \tilde{L}\sqrt{1 + x^2}.$$

**Twierdzenie 14.3.** *Załóżmy, że funkcje $b$ i $\sigma$ spełniają warunki Lipschitza. Wówczas dla dowolnej zmiennej $\xi$, $\mathcal{F}_s$-mierzalnej takiej, że $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie (14.3). Co więcej rozwiązanie to daje się otrzymać metodą kolejnych przybliżeń jak w przypadku jednorodnym.*

**Przykład 14.3.** Równanie

$$dX_t = \sigma(t)X_t dW_t, \quad X_0 = \xi. \tag{14.4}$$

spełnia założenia twierdzenia, jeśli $\sup_t |\sigma(t)| < \infty$. By znaleźć jego rozwiązanie sformułujmy ogólniejszy fakt.

**Stwierdzenie 14.1.** *Załóżmy, że $M$ jest ciągłym martyngałem lokalnym, zaś $Z_0$ zmienną $\mathcal{F}_0$-mierzalną. Wówczas proces $Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ jest martyngałem lokalnym takim, że $dZ_t = Z_t dM_t$, tzn. $Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_s dM_s$.*

Proces $Z$ bywa nazywany *eksponentą stochastyczną*.

*Dowód.* Z wzoru Itô dla semimartyngału $X_t = M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t$ dostajemy

$$dZ_t = d(Z_0 e^{X_t}) = Z_0 e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} Z_0 e^{X_t} d\langle M\rangle_t = Z_0 e^{X_t} dM_t = Z_t dM_t.$$

Proces $Z$ jest martyngałem lokalnym na mocy konstrukcji całki stochastycznej. □

Wracając do Przykładu 14.3 zauważamy, że $M_t = \int_0^t \sigma(s)dW_s$ jest martyngałem lokalnym, więc rozwiązanie równania (14.4) ma postać

$$X_t = \xi \exp\Big(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\Big) = \xi \exp\Big(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds\Big).$$

**Przykład 14.4.** Rozpatrzmy niejednorodne równanie liniowe postaci

$$dY_t = b(t)Y_t dt + \sigma(t)Y_t dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

Współczynniki $b(t,y) = b(t)y$ i $\sigma(t,y) = \sigma(t)y$ spełniają warunki Lipschitza, jeśli $\sup_t |b(t)| < \infty$ oraz $\sup_t |\sigma(t)| < \infty$. By znaleźć rozwiązanie załóżmy, że jest postaci $X_t = g(t)Y_t$, gdzie $dY_t = \sigma(t)Y_t dW_t$, $Y_0 = \xi$, postać $Y$ znamy z Przykładu 3. Wówczas, z dwuwymiarowego wzoru Itô

$$dX_t = g'(t)Y_t dt + g(t)dY_t = g'(t)Y_t dt + \sigma(t)X_t dW_t.$$

Wystarczy więc rozwiązać zwyczajne równanie różniczkowe

$$g'(t) = b(t)g(t), \quad g(0) = 1,$$

by dostać

$$X_t = Y_t g(t) = \xi \exp\Big(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2 ds + \int_0^t b(s)ds\Big).$$

## 14.3. Przypadek wielowymiarowy

Zanim sformułujemy odpowiednik wcześniejszych wyników dla przypadku wielowymiarowego wprowadzimy wygodne ustalenia notacyjne.

**Definicja 14.4.** Niech $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ będzie $d$-wymiarowym procesem Wienera. Dla $X = [X^{(i,j)}]_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant d}$ macierzy $m \times d$ złożonej z procesów z $\Lambda_T^2$ określamy $m$-wymiarowy proces

$$M_t = (M_t^{(1)}, \ldots, M_t^{(m)}) = \int_0^t X_s dW_s, \quad 0 \leqslant t < T$$

wzorem

$$M_t^{(i)} = \sum_{j=1}^d \int_0^t X_s^{(i,j)} dW_s^{(j)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Przy powyżej wprowadzonej notacji możemy zdefiniować wielowymiarowe równania stochastyczne.

**Definicja 14.5.** Załóżmy, że $b\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \sigma\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$ są funkcjami ciągłymi, $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ jest $d$-wymiarowym procesem Wienera, a $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $m$-wymiarowym, $\mathcal{F}_s$-mierzalnym wektorem losowym. Mówimy, że $m$-wymiarowy proces $X = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(m)})_{t\in[s,T)}$ rozwiązuje *jednorodne wielowymiarowe równanie stochastyczne*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_s = \xi,$$

jeśli

$$X_t = \xi + \int_s^t b(X_r)dr + \int_s^t \sigma(X_r)dW_r, \quad t \in [s, T).$$

Tak jak w przypadku jednowymiarowym dowodzimy:

**Twierdzenie 14.4.** *Załóżmy, że* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ *jest* $m$*-wymiarowym,* $\mathcal{F}_s$*-mierzalnym wektorem losowym takim, że* $\mathbb{E}\xi_j^2 < \infty$ *dla* $1 \leqslant j \leqslant m$, $b\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \sigma\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{d\times m}$ *są funkcjami lipschitzowskimi oraz* $W$ *jest* $d$*-wymiarowym procesem Wienera. Wówczas równanie*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_s = \xi$$

*ma dokładnie jedno rozwiązanie* $X = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(m)})_{t\geqslant s}$. *Ponadto*

$$\mathbb{E} \sup_{s\leqslant t\leqslant u} \mathbb{E}|X_t^{(i)}|^2 < \infty \qquad \text{dla } u < \infty.$$

## 14.4. Generator procesu dyfuzji.

W tej części zakładamy, że $b = (b_i)_{i\leqslant m}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \sigma = (\sigma_{i,j})_{i\leqslant m, j\leqslant d}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$ są funkcjami ciągłymi, zaś $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ jest $d$-wymiarowym procesem Wienera.

**Definicja 14.6.** *Generatorem* $m$-wymiarowego procesu dyfuzji spełniającego stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

nazywamy operator różniczkowy drugiego rzędu dany wzorem

$$Lf(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^m).$$

Definicja ta jest motywowana przez poniższy prosty, ale bardzo ważny fakt.

**Stwierdzenie 14.2.** *Załóżmy, że* $L$ *jest generatorem procesu dyfuzji spełniającego równanie* $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$. *Wówczas dla dowolnej funkcji* $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ *takiej, że* $f(X_0)$ *jest całkowalne, proces* $M_t^f := f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ *jest ciągłym martyngałem lokalnym. Ponadto, jeśli* $f$ *ma dodatkowo nośnik zwarty, to* $M_t^f$ *jest martyngałem.*

*Dowód.* Ze wzoru Itô łatwo sprawdzić, że

$$M_t^f = f(X_0) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{i,j}(X_t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)dW_t^{(j)} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c.$$

Jeśli $f \in C^2_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R}^m)$, to funkcje $\sigma_{i,j}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ są ciągłe i mają nośnik zwarty w $\mathbb{R}^m$, więc są ograniczone, zatem procesy $\sigma_{i,j}(X_t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)$ należą do $\mathcal{L}_T^2$ dla dowolnego $T < \infty$, więc $M_t^f$ jest martyngałem (a nawet martyngałem całkowalnym z kwadratem). □

*Uwaga* 14.3. Założenie o zwartym nośniku $f$ można w wielu przykładach istotnie osłabić. Załóżmy, że współczynniki $b$ i $\sigma$ są lipschitzowskie oraz $X_0 \in L_2$. Wówczas, jak wiemy, $X_t$ jest całkowalny z kwadratem oraz $\sup_{t\leqslant T} \mathbb{E}X_t^2 < \infty$ dla $T < \infty$. Stąd nietrudno sprawdzić (używając lipschitzowskości $\sigma_{i,j}$), że jeśli pochodne $f$ są ograniczone, to $\sigma_{i,j}(X_t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t) \in \mathcal{L}_T^2$ dla $T < \infty$, zatem $M_t^f$ jest martyngałem.

**Przykład 14.5.** Generatorem $d$-wymiarowego procesu Wienera jest operator $Lf = \frac{1}{2}\triangle f$. Jeśli $X = (X_1, \ldots, X_d)$ spełnia

$$dX_t^{(i)} = bX_t^{(i)}dt + \sigma dW_t^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

($m$-wymiarowy proces Ornsteina-Uhlenbecka), to $Lf(x) = b\langle x, \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\sigma^2 \triangle f$.

Wykład zakończymy przykładem pokazującym związek między stochastycznymi równaniami różniczkowymi a równaniami cząstkowymi. Dokładna analiza takich związków jest ważną dziedziną łączącą rozumowania analityczne i probabilistyczne. Nieco więcej na ten temat można się będzie dowiedzieć na przedmiocie Procesy Stochastyczne.

**Przykład 14.6.** Dla $x \in \mathbb{R}^m$ niech $X_t^x$ będzie rozwiązaniem równania stochastycznego

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t, \quad X_0^x = x,$$

zaś $L$ odpowiadającym mu generatorem. Załóżmy, że $D$ jest obszarem ograniczonym oraz $f$ spełnia równanie cząstkowe

$$Lf(x) = 0,\ x \in D, \quad f(x) = h(x),\ x \in \partial D.$$

Załóżmy dodatkowo, że $f$ daje się rozszerzyć do funkcji klasy $C^2$ na pewnym otoczeniu $D$. Wówczas $f$ się rozszerza też do funkcji klasy $C^2_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R}^m)$. Wybierzmy $x \in D$ i określmy

$$\tau = \inf\{t > 0 \colon X_t^x \notin D\}.$$

Wiemy, że proces $M_t = f(X_t^x) - \int_0^t Lf(X_s^x)ds$ jest martyngałem, zatem martyngałem jest również $M_{t\wedge\tau}$, ale

$$M_{t\wedge\tau} = f(X_{t\wedge\tau}^x) - \int_0^{\wedge\tau} tLf(X_s^x)ds = f(X_{t\wedge\tau}^x),$$

w szczególności

$$\mathbb{E}f(X_{t\wedge\tau}^x) = \mathbb{E}M_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}M_0 = f(x).$$

Jeśli dodatkowo $\tau < \infty$ p.n. (to założenie jest spełnione np. dla procesu Wienera), to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$f(x) = \mathbb{E}f(X_{t\wedge\tau}^x) \to \mathbb{E}f(X_\tau^x) = \mathbb{E}h(X_\tau^x).$$

Otrzynaliśmy więc stochastyczną reprezentację rozwiązania eliptycznego równania cząstkowego.

Podobne rozumowanie pokazuje, że (przy pewnych dodatkowych założeniach) rozwiązanie równania

$$Lf(x) = g(x),\ x \in D, \quad f(x) = h(x)x \in \partial D$$

ma postać zadaną *wzorem Feynmana-Kaca*

$$f(x) = \mathbb{E}h(X_\tau^x) = \mathbb{E}\int_0^\tau g(X_s^x)ds, \quad x \in D.$$

## 14.5. Zadania

**Ćwiczenie 14.1.** Zweryfikuj rachunki dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka z Przykładu 14.2.

**Ćwiczenie 14.2.** i) Wykaż, że dla $x, \sigma, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden proces $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ taki, że

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_s dW_s + b \int_0^t X_s ds.$$

Ponadto $\sup_{t \leqslant u} \mathbb{E} X_t^2 < \infty$ dla $u < \infty$.
ii) Oblicz $\mathbb{E} X_t$.
iii) Znajdź stochastyczne równania różniczkowe spełnione przez $X^2$ i $e^X$.

**Ćwiczenie 14.3.** Wykaż, że rozwiązanie równania $dX = e^{-X} dW - \frac{1}{2} e^{-2X} dt$ eksploduje w skończonym czasie. *Wskazówka. Rozpatrz proces* $Y = e^X$.

**Ćwiczenie 14.4.** Wykaż, że rozwiązanie równania

$$dX_t = (1 + X_t)(1 + X_t^2) dt + (1 + X_t^2) dW_t$$

eksploduje w skończonym czasie. Ponadto wartość oczekiwana czasu do eksplozji jest skończona.

**Ćwiczenie 14.5.** Załóżmy, że $A(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0, T]$ o wartościach w macierzach $m \times m$, $\sigma(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0, T]$ o wartościach w macierzach $m \times d$, zaś $a(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0, T]$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Niech $S(t)$ będzie jedynym rozwiązaniem równania

$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t) S(t), \quad S(0) = I.$$

Ponadto niech $W$ będzie $d$-wymiarowym procesem Wienera, a $\xi$ zmienną losową niezależną od $W$. Wykaż, że

*a)*
$$\xi(t) := S(t)\Big(\xi + \int_0^t S^{-1}(s) a(s) ds\Big)$$

jest rozwiązaniem równania deterministycznego

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) + a(t), \quad \xi(0) = \xi,$$

*b)*
$$X(t) = S(t)\Big(\xi + \int_0^t S^{-1}(s) a(s) ds + \int_0^t S^{-1}(s) \sigma(s) dW_s\Big)$$

jest jedynym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = (A(t) X_t + a(t)) dt + \sigma(t) dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

# 15. Twierdzenie Girsanowa

W czasie tego wykładu przyjmujemy jak zwykle, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest ustaloną przestrzenią probabilistyczną. Będziemy konstruowali inne miary probabilistyczne na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F})$ względem których proces Wienera z dryfem ma taki rozkład jak zwykły proces Wienera. Przez $\mathbb{E}X$ będziemy rozumieli zawsze wartość oczekiwaną względem $\mathbb{P}$, wartość oczekiwaną $X$ względem innej miary $\mathbb{Q}$ będziemy oznaczać $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}X$. Zauważmy, że jeśli $d\mathbb{Q} = Zd\mathbb{P}$, tzn. $\mathbb{Q}(A) = \int_A Zd\mathbb{P}$, to

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}X = \int Xd\mathbb{Q} = \int XZd\mathbb{P} = \mathbb{E}(XZ).$$

## 15.1. Przypadek dyskretny

Załóżmy, że zmienne $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ są niezależne i mają standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Wprowadźmy nową miarę $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ wzorem $d\mathbb{Q} = \exp(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2)d\mathbb{P}$, tzn.

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \exp\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2\Big)d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}\exp\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\exp\Big(\mu_i Z_i - \frac{1}{2}\mu_i^2\Big) = 1,$$

więc $\mathbb{Q}$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F})$. Ponadto dla dowolnego zbioru $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}((Z_1,\ldots,Z_n) \in \Gamma) &= \mathbb{E}\exp\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2\Big)\mathrm{I}_{\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in\Gamma\}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_\Gamma \exp\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n z_i^2\Big)dz_1\ldots dz_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_\Gamma \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (z_i-\mu_i)^2\Big)dz_1\ldots dz_n.
\end{aligned}$$

Zatem względem miary $\mathbb{Q}$ zmienne $Z_i - \mu_i$ są niezależne oraz mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Definiując $S_k = Z_1 + \ldots + Z_k$ widzimy, że względem $\mathbb{Q}$ zmienne $(S_k - \sum_{i=1}^k \mu_i)_{k\leqslant n}$ są sumami niezależnych standardowych zmiennych normalnych (czyli mają ten sam rozkład co $(S_k)_k$ względem $\mathbb{P}$). Podczas dalszej części wykładu pokażemy, że można podobny fakt sformułować w przypadku ciągłym, gdy $S_k$ zastąpimy procesem Wienera, a sumy $\sum_{i=1}^k \mu_i$ całką $\int_0^t Y_s ds$.

## 15.2. Twierdzenie Girsanowa dla procesu Wienera

Załóżmy, że $T < \infty$, proces $Y = (Y_t)_{t<T}$ jest prognozowalny oraz $\int_0^T Y_t^2 < \infty$ p.n., wówczas $Y \in \Lambda_T^2$, proces $M_t = \int YdW$ jest martyngałem lokalnym na $[0,T)$ oraz $\langle M\rangle = \int Y^2 dt$. Co więcej można też określić wartość $M$ i $Z$ w punkcie $T$. Zatem jak wiemy (zob. Stwierdzenie 14.1) proces

$$Z_t := \exp\Big(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\Big) = \exp\Big(\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds\Big)$$

jest martyngałem lokalnym na $[0,T]$.

**Lemat 15.1.** *Jeśli $M$ jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0,T]$, to proces $Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ jest martyngałem na przedziale skończonym $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}Z_T = 1$.*

*Dowód.* Implikacja "$\Rightarrow$" jest oczywista, bo $\mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_0 = 1$. Wystarczy więc udowodnić "$\Leftarrow$".

Wiemy, że $Z$ jest nieujemnym martyngałem lokalnym, zatem jest nadmartyngałem (Stwierdzenie 9.6). Ustalmy $t \in [0,T]$, wówczas $Z_t \geqslant \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)$ p.n.. Ponadto $1 = \mathbb{E}Z_0 \geqslant \mathbb{E}Z_t \geqslant \mathbb{E}Z_T$, czyli, jeśli $\mathbb{E}Z_T = 1$, to $\mathbb{E}Z_t = 1$ i

$$\mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}Z_t - \mathbb{E}Z_T = 0,$$

a więc $Z_t = \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)$ p.n.. □

**Twierdzenie 15.1.** *Załóżmy, że $T < \infty$, proces $Y$ jest prognozowalny oraz $\int_0^T Y_s^2 ds < \infty$ p.n.. Niech $Z_t = \exp(\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds)$, wówczas, jeśli $\mathbb{E}Z_T = 1$ (czyli $Z$ jest martyngałem na $[0,T]$), to proces*

$$V_t = W_t - \int_0^t Y_s ds, \quad t \in [0,T]$$

*jest procesem Wienera na zmodyfikowanej przestrzeni propabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_T)$, gdzie $d\mathbb{Q}_T = Z_T d\mathbb{P}$, tzn.*

$$\mathbb{Q}_T(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

*Dowód.* Zmienna $Z_T$ jest nieujemna i $\mathbb{E}Z_T = 1$, więc $\mathbb{Q}_T$ jest miarą probabilistyczną. Zauważmy też, że jeśli $\mathbb{P}(A) = 0$, to $\mathbb{Q}_T(A) = 0$, czyli zdarzenia, które zachodzą $\mathbb{P}$ prawie na pewno, zachodzą też $\mathbb{Q}_T$ prawie na pewno. Proces $V$ jest ciągły, adaptowalny względem $\mathcal{F}_t$ oraz $V_0 = 0$. Wystarczy zatem, na mocy Twierdzenia 13.5 wykazać, że dla $\lambda \in \mathbb{R}$, proces $U_t = U_t(\lambda) := \exp(\lambda V_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ jest martyngałem lokalnym względem $\mathbb{Q}_T$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} U_t Z_t &= \exp\Big(\lambda V_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\Big)\exp\Big(\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds\Big) \\ &= \exp\Big(\lambda W_t + \int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (2\lambda Y_s + \lambda^2 + Y_s^2) ds\Big) \\ &= \exp\Big(\int_0^t (\lambda + Y_s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\lambda + Y_s)^2 ds\Big) = \exp\Big(N_t - \frac{1}{2}\langle N\rangle_t\Big), \end{aligned}$$

gdzie $N = \int(\lambda + Y)dW \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$. Zatem proces $UZ$ jest martyngałem lokalnym względem $\mathbb{P}$, czyli istnieją $\tau_n \nearrow T$ takie, że $U^{\tau_n}Z^{\tau_n}$ jest martyngałem. Ustalmy $n$, wtedy dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania $\tau$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} U_0 &= \mathbb{E}(U_0 Z_T) = \mathbb{E}(U_0 \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(U_0 Z_0) = \mathbb{E}(U_{\tau_n\wedge\tau} Z_{\tau_n\wedge\tau}) \\ &= \mathbb{E}(U_{\tau_n\wedge\tau}\mathbb{E}(Z_T|\mathcal{F}_{\tau_n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(U_{\tau_n\wedge\tau} Z_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} U_{\tau_n\wedge\tau}, \end{aligned}$$

zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Dooba wynika, że $U^{\tau_n}$ jest martyngałem względem $\mathbb{Q}_T$, czyli $U$ jest $\mathbb{Q}_T$-martyngałem lokalnym. □

W pewnych zastosowaniach wygodnie jest mieć miarę względem której proces $W - \int Y ds$ jest procesem Wienera na całej półprostej $[0, \infty)$.

**Twierdzenie 15.2.** *Załóżmy, że $Y \in \Lambda^2_\infty$, zaś proces $Z_t$ i miary $\mathbb{Q}_T$ dla $T < \infty$ są określone jak poprzednio. Wówczas, jeśli $\mathbb{E}Z_t = 1$ dla wszystkich $t$ (czyli $Z$ jest martyngałem na $[0, \infty)$), to istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}^W_\infty)$ taka, że $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}_T(A)$ dla $A \in \mathcal{F}^W_T$ i $T < \infty$. Proces $V = W - \int Y ds$ jest względem $\mathbb{Q}$ procesem Wienera na $[0, \infty)$.*

*Szkic Dowodu..* Na zbiorach postaci $A = \{(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k}) \in \Gamma\}$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant T$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ kładziemy $\mathbb{Q}(A) ;= \mathbb{Q}_T(A)$. Otrzymujemy w ten sposób zgodną rodzinę miar probabilistycznych, która na mocy twierdzenia Kołmogorowa przedłuża się w sposób jednoznaczny do miary $\mathbb{Q}$ na $\mathcal{F}^W_\infty$. $\square$

*Uwaga* 15.1. O ile miara $\mathbb{Q}_T$ jest absolutnie ciągła względem $\mathbb{P}$ (tzn. $\mathbb{Q}_T(A) = 0$, jeśli $\mathbb{P}(A) = 0$), to miara $\mathbb{Q}$ zadana przez ostatnie twierdzenie taka być nie musi. Istotnie określmy $Y_t \equiv \mu \neq 0$, czyli $V_t = W_t - \mu t$. Niech

$$
\begin{aligned}
A &:= \Big\{\omega\colon \limsup \frac{1}{t} W_t(\omega) = 0\Big\}, \\
B &:= \Big\{\omega\colon \limsup \frac{1}{t} V_t(\omega) = 0\Big\} = \Big\{\omega\colon \limsup \frac{1}{t} W_t(\omega) = \mu\Big\}.
\end{aligned}
$$

Wówczas z mocnego prawa wielkich liczb dla proceseu Wienera $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz $\mathbb{P}(B) = 0$, z drugiej strony $\mathbb{Q}(B) = 1$, zatem miary $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są wzajemnie singularne na $\mathcal{F}^W_\infty$, mimo, że po odbcięciu do $\mathcal{F}^W_T$ dla $T < \infty$ są względem siebie absolutnie ciągłe. Można pokazać, że albsolutna ciągłość $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ wiąże się z jednostajną całkowalnością martyngału $Z$.

Naturalne jest pytanie kiedy spełnione są założenia twierdzenia Girsanowa, czyli kiedy $Z$ jest martyngałem. Użyteczne jest następujące kryterium.

**Twierdzenie 15.3** (Kryterium Nowikowa)**.** *Jeśli $Y$ jest procesem prognozowalnym spełniającym warunek $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T Y_s^2 ds) < \infty$, to spełnione są założenia twierdzenia Girsanowa, tzn. proces $Z = \exp(\int Y dW - \frac{1}{2}\int Y^2 dt)$ jest martyngałem na $[0, T]$.*

Kryterium Nowikowa jest konsekwencją silniejszego twierdzenia, które przedstawimy bez dowodu.

**Twierdzenie 15.4.** *Załóżmy, że $M$ jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że dla wszystkich $t$, $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\langle M\rangle_t) < \infty$. Niech $Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle)$, wówczas $\mathbb{E}Z_t = 1$ dla wszystkich $t$, czyli $Z$ jest martyngałem.*

Twierdzenie Girsanowa można sformułować też w przypadku wielowymiarowym.

**Twierdzenie 15.5.** *Załóżmy, że* $Y = (Y^{(1)}, \ldots, Y^{(d)})$ *proces d-wymiarowy taki, że* $Y^{(j)} \in \Lambda_T^2$ *oraz* $T < \infty$. *Niech* $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ *będzie d-wymiarowym procesem Wienera oraz*

$$Z_t = \exp\Big(\sum_{i=1}^{d} \int Y_s^{(i)} dW_t^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t |Y_s|^2 ds\Big).$$

*Wówczas, jeśli* $\mathbb{E}Z_T = 1$ *(czyli* $Z_t$ *jest martyngałem na* $[0,T]$*), to proces*

$$V_t = W_t - \int_0^t Y_s ds = \Big(W_t^{(1)} - \int_0^t Y^{(1)} ds, \ldots, W_t^{(d)} - \int_0^t Y_s^{(d)} ds\Big)$$

*jest procesem Wienera na* $[0,T]$ *względem miary probabilistycznej* $\mathbb{Q}_t$ *takiej, że* $d\mathbb{Q}_T = Z_T d\mathbb{P}$.

Kryterium Nowikowa w przypadku $d$-wymiarowym ma postać

**Twierdzenie 15.6.** *Jeśli* $Y$ *jest d-wymiarowym procesem prognozowalnym spełniającym warunek* $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T |Y_s|^2 ds) < \infty$, *to spełnione są założenia twierdzenia Girsanowa.*

## 15.3. Zadania

**Ćwiczenie 15.1.** Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}^W_{\leqslant 1})$, by proces $(W_t + 2t^4)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ był procesem Wienera względem $\mathbb{Q}$.

**Ćwiczenie 15.2.** Niech $T < \infty$, $U$ będzie procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$Z_t = \exp\Big(\int_0^t b(s, U_s) dU_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s, U_s) ds\Big), \quad W_t := U_t - \int_0^t b(s, U_s) ds.$$

Stosując twierdzenie Girsanowa wykaż, że jeśli $\mathbb{E}Z_T = 1$, to istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{Q}_T$ taka, że na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_T)$, $(W_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ jest procesem Wienera oraz

$$dU_t = b(t, U_t) dt + dW_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad U_0 = 0.$$

**Ćwiczenie 15.3.** Niech $\mu$ oznacza miarę Wienera na $C([0,1])$ (tzn. rozkład wyznaczony przez proces Wienera na $[0,1]$). Dla $h \in C([0,1])$ określamy nową miarę $\mu_h$ wzorem $\mu_h(A) := \mu(h + A)$. Wykaż, że
a) jeśli $h(t) = \int_0^t g(s) ds$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ oraz $g \in L_2[0,1]$, to miara $\mu_h$ jest absolutnie ciągła względem $\mu$ oraz znajdź jej gęstość,
b*) jeśli $h$ nie ma powyższej postaci, to miary $\mu$ i $\mu_h$ są wzajemnie singularne.

# Literatura


[1] P. Billingsley. *Prawdopodobieństwo i miara.* PWN, Warszawa, wydanie drugie, 2009.
[2] G.M. Fichtenholz. *Rachunek różniczkowy i całkowy, t.3.* PWN, Warszawa, wydanie dziesiąte, 2007.
[3] J. Jakubowski, R. Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa.* Script, Warszawa, wydanie drugie, 2001.
[4] I. Karatzas, S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer-Verlag, New York, wydanie drugie, 1991.
[5] S. Łojasiewicz. *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.* PWN, Warszawa, 1973.
[6] D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer-Verlag, Berlin, wydanie trzecie, 1999.
[7] W. Rudin. *Analiza rzeczywista i zespolona.* PWN, Warszawa, wydanie drugie, 2009.
[8] W. Rudin. *Podstawy analizy matematycznej.* PWN, Warszawa, wydanie szóste, 2009.
[9] A.D. Wentzell. *Wykłady z teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa, 1980.