

Matematyka stosowana

Inżynieria Finansowa

Włodzimierz Waluś
w.walus@mimuw.edu.pl

Mariusz Baryło
mbarylo@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski, 2011



Streszczenie. Wykład przedstawia podstawowe instrumenty finansowe: kontrakty na przyszłą stopę procentową, kontrakty wymiany procentowej, kontrakty forward i futures, kontrakty opcyjne – opcje waniliowe, wybrane opcje egzotyczne oraz opcje na stopę procentową. Dla każdego z tych instrumentów przedstawione są: struktura instrumentu i jego zastosowania, metoda wyceny oraz analiza wrażliwości – z uwzględnieniem praktyki rynkowej.

Wersja internetowa wykładu:

<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=ifi>

(może zawierać dodatkowe materiały)



Niniejsze materiały są dostępne na [licencji Creative Commons 3.0 Polska](#):
Uznanie autorstwa — Użycie niekomercyjne — Bez utworów zależnych.

Copyright © W. Waluś, M. Baryło, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011.
Niniejszy plik PDF został utworzony 13 kwietnia 2011.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego.



Skład w systemie L^AT_EX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji:
Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

1. Wprowadzenie	6
1.1. Wstęp i podstawowe pojęcia	6
1.2. Zasadnicze kategorie instrumentów pochodnych	6
1.3. Rynki finansowe	8
1.4. Zmienne rynkowe – ceny	10
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	12
2. Stopy procentowe	16
2.1. Podstawowe stopy procentowe	16
2.2. Obligacje zerokuponowe, czynniki dyskontowe	17
2.3. Wartość strumienia przepływów pieniężnych	18
2.4. Zerokuponowe stopy procentowe (spotowe, natychmiastowe)	18
2.5. Struktura stóp procentowych	20
2.6. Chwilowa stopa natychmiastowa	21
2.7. Stopy forward	21
2.8. Chwilowa stopa forward	23
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	24
3. Kontrakt FRA	29
3.1. Struktura kontraktu FRA	29
3.2. Wartość kontraktu FRA	30
3.3. Stopa kontraktu FRA	31
3.4. Wyznaczanie wartości kontraktu FRA na podstawie stopy forward	32
3.5. FRA jako instrument zabezpieczający	32
3.6. Reprezentacja FRA w postaci strumienia pieniężnego	33
3.7. Aspekty praktyczne	33
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	33
4. Kontrakty IRS / CCIRS	36
4.1. Struktura kontraktów wymiany stóp procentowych	36
4.2. Wycena kontraktu IRS/CCIRS	38
4.3. Standardowy kontrakt IRS	41
4.4. Bootstrapping czynników dyskontowych	43
4.5. Własności stóp kontraktów IRS	45
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	45
5. Kontrakty Forward i Futures	48
5.1. Struktura kontraktów Forward	48
5.2. Kontrakty Futures	54
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	57
6. Kontrakty opcyjne	59
6.1. Kontrakty opcyjne	59
6.2. Opcje waniliowe	60
6.3. Opcje egzotyczne	60
6.4. Własności opcji waniliowych	61
6.5. Parytet opcji kupna/sprzedaży	61
6.6. Ograniczenia na wartość opcji	63
6.7. Wczesne wykonanie w opcjach amerykańskich	63

6.8. Zależność wartości opcji europejskiej od ceny wykonania	64
6.9. Zależność wartości opcji europejskiej od ceny instrumentu podstawowego	66
6.10. Wartość czasowa opcji	66
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	67
7. Model dwumianowy – jednookresowy	72
7.1. Model dwumianowy	72
7.2. Świat wolny od ryzyka	74
7.3. Wycena instrumentów pochodnych	75
7.4. Alternatywne wyprowadzenie wzorów na wycenę instrumentu pochodnego	76
7.5. Wyznaczanie wartości współczynników U i D	78
7.6. Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	80
8. Model dwumianowy – wielookresowy	82
8.1. Podsumowanie – algorytm wyceny na drzewie dwumianowym	85
8.2. Dalsze uogólnienia i rozszerzenia algorytmu dwumianowego	86
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	87
9. Model Blacka-Scholesa	91
9.1. Model dynamiki cen aktywa	91
9.2. Rozkład logarytmicznej stopy zwrotu	94
9.3. Zasada wyceny instrumentów pochodnych w modelu ciągłym	94
9.4. Wycena instrumentów pochodnych w modelu Blacka-Scholesa	95
9.5. Formuły Blacka-Scholesa dla europejskich opcji waniliowych	96
9.6. Proste uogólnienia formuł Blacka-Scholesa	99
9.7. Wycena instrumentów pochodnych metodą Monte Carlo	100
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	101
10. Analiza wrażliwości	103
10.1. Współczynniki wrażliwości instrumentów pochodnych	103
10.2. Współczynniki wrażliwości opcji waniliowych	105
10.3. Równanie Blacka-Scholesa (związek między tetą, deltą i gammą)	108
10.4. Współczynniki wrażliwości portfela instrumentów pochodnych	109
10.5. Obliczanie współczynników wrażliwości metodą ilorazu różnicowego	109
10.6. Zabezpieczanie portfela instrumentów pochodnych	110
10.7. Dynamiczne zabezpieczanie portfela instrumentów pochodnych	112
Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	113
11. Zmienność	115
11.1. Rodzaje zmienności	115
11.2. Zmienność historyczna	115
11.3. Metody wyznaczania zmienności dziennej	116
11.4. Zmienność implikowana	118
11.5. Uśmiech zmienności	119
11.6. Struktura zmienności implikowanej opcji walutowych	121
11.7. Wyznaczenie zmienności dla opcji o danej cenie wykonania	123
11.8. Zmienność dla opcji dowolnym czasie trwania i cenie wykonania	123
11.9. Struktura zmienności implikowanej opcji na akcje/indeksy	124
11.10. Zmienność lokalna	125
11.11. Zmienność stochastyczna	126
12. Instrumenty pochodne stopy procentowej	127
12.1. Proste instrumenty pochodne stopy procentowej	127
12.2. Caplet / Floorlet	127
12.3. Związek capletów / floorletów z opcjami na obligacje zerokuponowe	128
12.4. Cap / Floor	129
12.5. Binary cap / binary floor	130
12.6. Swapcje – opcje na kontrakty IRS	130
12.7. Niespójność modelu Blacka'76	132

12.8. Finansowe produkty strukturalne z wbudowanymi opcjami na stopę procentową	133
12.9. Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia	134
Literatura	136

1. Wprowadzenie

1.1. Wstęp i podstawowe pojęcia

Inżynieria finansowa to dyscyplina, która zajmuje się analizą właściwości instrumentów finansowych, w szczególności **instrumentów pochodnych**.

Instrument pochodny X to instrument finansowy (kontrakt, umowa), którego wartość wypłaty (wypłat) zależy od wartości, które przyjmą (lub przyjęły) w określonych umową chwilach czasu inne instrumenty finansowe. O instrumentach finansowych, od wartości których zależy wypłata (zależą wypłaty) instrumentu pochodnego X , mówimy że są tak zwanymi instrumentami podstawowymi instrumentu pochodnego (ang. *underlyings*). W szczególności, instrumentem podstawowym instrumentu pochodnego może być inny instrument pochodny.

1.2. Zasadnicze kategorie instrumentów pochodnych

- Kontrakty forward
 - FX forward
 - FX swap = FX spot + FX forward
 - terminowy zakup/sprzedaż obligacji
 - transakcje repo (buy sell back) i reverse repo (sell buy back) na papierach wartościowych
- Kontrakty futures
 - futures na obligacje skarbowe
 - futures na stopę procentową (Eurodollar futures)
 - futures na indeksy/akcje
 - futures na towary
- Kontrakty wymiany stóp procentowych
 - FRA – Forward Rate Agreement
 - OIS – OverNight Indexed Swap
 - IRS – Interest Rate Swap
 - CCIRS – Cross Currency Interest Rate Swap
- Kontrakty opcyjne
 - opcje walutowe (waniliowe, azjatyckie, barierowe, binarne)
 - opcje na stopę procentową (cap/floor)
 - opcje na kontrakt IRS (swapcje)
 - opcje na obligacje
 - opcje na indeksy/akcje
 - opcje na towary
- Kontrakty wymiany cen towarów
- Kredytowe instrumenty pochodne
 - opcje na *default*
 - swap *default*-owy – credit default swap (CDS)
- Instrumenty powstałe w drodze sekurytyzacji (długu)
 - obligacje MBS – Mortgage Backed Securities

- obligacje CMO – Collateralized Mortgage Obligations
- obligacje CDO – Collateralized Debt Obligations

Kilka przykładów wypłat opcyjnych instrumentów pochodnych (opcji)

Uwaga: Szczegółowe charakterystyki tych instrumentów będą podane na przyszłych wykładach.

1. europejska opcja kupna

$$\max(S_T - K, 0),$$

gdzie S_T jest wartością akcji w chwili zapadalności opcji T , a K jest ceną wykonania (dlaczego instrument o takiej wypłacie nazywamy *opcją*?)

2. europejska opcja kupna na średnią arytmetyczną (opcja azjatycka o europejskim typie wykonania)

$$\max(\bar{S}_T - K, 0),$$

gdzie $\bar{S}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$ przy czym $t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$

3. europejska opcja kupna akcji droższej z dwóch

$$\max(\max(S_T^{(1)}, S_T^{(2)}) - K, 0)$$

4. europejska opcja wymiany akcji A na akcję B

$$\max(S_T^{(B)} - S_T^{(A)}, 0)$$

5. europejska binarna opcja kupna (sprzedaży)

$$1_{S_T \geq K} \quad (1_{S_T < K})$$

6. europejska barierowa opcja kupna typu *up-and-out*

$$\max(S_T - K, 0) 1_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t < H\}},$$

gdzie $H \geq K$ jest tak zwaną barierą.

Uwagi

- Wypłaty opcji 1), 3), 4) i 5) zależą tylko od wartości instrumentów podstawowych w chwili zapadalności opcji – o takich opcjach mówimy że nie zależą od „drogi” (trajektorii procesu cen instrumentów podstawowych).
- W opcjach 3) i 4) mamy dwa instrumenty podstawowe.
- Wypłaty opcji 2) i 6) zależą od „drogi” instrumentu podstawowego, każda na swój specyficzny sposób.
- Wypłaty opcji 5) są funkcjami nieciągłymi ceny instrumentu podstawowego w chwili zapadalności opcji. Zarządzanie ryzykiem opcji o nieciągłych wypłatach jest zdecydowanie trudniejsze niż w przypadku opcji których wypłaty są ciągłe.

Głównymi celami inżynierii finansowej są:

wycena instrumentów pochodnych

- wycena z modelu – ang. *mark-to-model*, którą stosuje się, gdy nie jest możliwa
- wycena do rynku – ang. *mark-to-market*.
- konstrukcja strategii zabezpieczających instrumenty pochodne,
- analiza i pomiar ryzyka instrumentów pochodnych,
- konstrukcje złożonych strukturalnych produktów finansowych dopasowanych do potrzeb rynku.

1.3. Rynki finansowe

Rynki finansowe to *świat* (miejsce), w którym *żyją* (na którym są handlowane) instrumenty finansowe. Rynki finansowe dzielą się na segmenty, które odpowiadają różnym aspektom instrumentów finansowych na nich handlowanych oraz podmiotom dopuszczonym do handlu. I tak na przykład mamy

- Rynek kapitałowy (papiery wartościowe, akcje)
- Rynek pieniężny (kasowy) – instrumenty dłużne (lokaty/depozyty, bony, obligacje)
- Rynek instrumentów pochodnych
- Rynek walutowy – transakcje wymiany walut

Rynki możemy też podzielić na:

Rynki regulowane – giełdy

- produkty wystandaryzowane
- z systemami zabezpieczeń mającymi wyeliminować ryzyko kredytowe (rozliczeniowe i przed-rozliczeniowe transakcji)

Rynki pozagiełdowe – klientowskie, OTC (Over The Counter)

- rynek międzybankowy (instytucji finansowych)
- rynek dużych wiarygodnych klientów (korporacji)

Bieżący obraz statystyczny rynków finansowych

Na podstawie danych opracowanych przez BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS (Bazylea) – patrz *Triennial Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivatives Market Activity in April 2007; Preliminary global results; September 2007* (opracowanie dostępne na stronie <http://www.bis.org>).

► Struktura rynków OTC instrumentów pochodnych ze względu na rodzaj czynnika ryzyka instrumentu podstawowego.

Tabela poniżej przedstawia strukturę tych rynków w dwóch ujęciach - udziały procentowe nominalów (Nominał) oraz udziały procentowe wartości (Wartość) niezapadłych (na koniec grudnia 2006) transakcji na tych instrumentach na rynku OTC.

Rodzaj ryzyka	Nominał	Wartość
Stopy procentowe	70.3	49.9
Kursy wymiany walut	9.7	13.0
Akcje/Indeksy	1.8	8.8
Ryzyko kredytowe (CDS)	6.9	4.8
Towary	1.7	6.9
Inne	9.6	16.6

Tabela 1.1. Procentowe udziały ryzyk

Jak widać z powyższej tabeli najważniejszymi czynnikami są stopy procentowe oraz kursy wymiany walut. Dlatego poniżej skoncentrujemy się głównie na pochodnych których instrumentami podstawowymi są czynniki ryzyka z tych grup.

Dane są prezentowane dla dwóch segmentów rynków finansowych

Rynek walutowy – tradycyjne transakcje wymiany walut

- transakcje FX spot
- transakcje FX forward
- transakcje FX swap

Rynek OTC instrumentów pochodnych:

- pochodne kursów walutowych, głównie

- walutowe kontrakty wymiany procentowej (CCIRS)
- opcje walutowe (waniliowe i egzotyczne)
- pochodne stopy procentowej, głównie
 - kontrakty na przyszłą stopę procentową (FRA)
 - kontrakty wymiany procentowej (IRS)
 - opcje na stopę procentową (waniliowe i egzotyczne)
- Średni dzienny obrót na rynkach: walutowym oraz pochodnych OTC

Instrument	2001	2004	2007
FX spot	387	621 _{60%}	1005 _{62%}
FX fwd	131	208 _{59%}	362 _{74%}
FX swap	656	944 _{44%}	1714 _{82%}
Total – FX	1200	1880 _{57%}	3210 _{71%}
CCIRS	7	21 _{200%}	80 _{281%}
Opcje walutowe	60	117 _{95%}	212 _{81%}
Inne	0	2	0
Total – Pochodne walutowe	67	140 _{109%}	291 _{108%}
FRA	129	233 _{81%}	258 _{11%}
IRS	331	621 _{88%}	1210 _{95%}
Opcje na stopę	29	171 _{490%}	215 _{26%}
Total – Pochodne stopy	489	1025 _{110%}	1686 _{65%}

Tabela 1.2. Średnie dzienne obroty na rynkach FX i OTC (w mld USD)

- Udziały walut na rynku walutowym

Waluta	2001	2004	2007
USD	90.3	88.7	86.3
EUR	37.6	37.2	37.0
JPY	22.7	20.3	16.5
GBP	13.2	16.9	15.0
PLN	0.5	0.4	0.8

Tabela 1.3. Udziały walut (w %)

Symbole walut: PLN – Złoty Polski, EUR – Euro, USD – dolar USA, GBP – funt brytyjski, JPY – jen japoński. Ponieważ w każdej transakcji wymiany walutowej biorą udział dwie waluty, udziały (po wszystkich walutach) powinny sumować się do 200%.

- Udziały par walutowych (kursów wymiany) na rynku walutowym
- Główne centra obrotu na rynku tradycyjnych transakcji walutowych (FX), na rynku pochodnych OTC oraz dane dla Polski dla tych segmentów rynku

Tabela poniżej przedstawia geograficzną strukturę aktywności rynków tradycyjnych transakcji wymiany walut (FX spot, FX fwd, FX swap oznaczonych w tabeli symbolem FX) i rynku pochodnych OTC.

Kurs wymiany	2001	2004	2007
USD/EUR	30	28	27
USD/JPY	20	17	13
USD/GBP	11	14	12
USD/CHF	5	4	5
USD/CAD	4	4	4
USD/AUD	4	5	6
USD/Inne	17	16	19
EUR/JPY	3	3	2
EUR/GBP	2	2	2

Tabela 1.4. Udziały par walutowych (w %)

Kraj	FX	OTC
Wielka Brytania	34.1	42.5
Stany Zjednoczone	16.6	23.8
Japonia	6.0	3.5
Singapur	5.8	2.7
Niemcy	2.5	3.7
Irlandia	0.3	3.4
Hong Kong	4.4	0.9
Szwajcaria	6.1	2.9
Australia	4.2	1.2
Francja	3.0	7.2
Polska	0.2	0.1

Tabela 1.5. Udział w % dziennego obrotu

1.4. Zmienne rynkowe – ceny

Podstawowe zmienne rynkowe, które często pełnią rolę instrumentów podstawowych instrumentów pochodnych

- ceny akcji spółek giełdowych, wartości indeksów giełdowych,
- kursy wymiany walut,
- stopy procentowe (depozytowe, kontraktów IRS, referencyjne (typu LIBOR), etc.),
- ceny obligacji,
- kontrakty futures,
- ceny towarów (surowce, metale, ropa, produkty rolne, etc.).

Wartość instrumentów pochodnych staramy się wyrazić jako funkcje

- wartości instrumentów podstawowych (cen *spot* – to jest cen „natychmiastowej” dostawy) lub struktury cen *forward*),
- bieżącej struktury stóp procentowych,
- zmienności instrumentów podstawowych, a w niektórych przypadkach i korelacji między nimi.

Zmienne rynkowe są opisywane (modelowane) matematycznie przez procesy stochastyczne o odpowiednich właściwościach. Na przykład niech

- S oznacza proces ceny akcji spółki giełdowej,

- w chwili bieżącej t_0 obserwujemy na rynku cenę S_0 , która jest realizacją zmiennej losowej S_{t_0} ,
- dla przyszłych chwil czasu t , tj. dla $t > t_0$, S_t jest zmienną losową.

Często będziemy postulować, że proces stochastyczny opisujący zmienną rynkową spełnia pewne stochastyczne równanie (na szczęście na ogół dość proste), na przykład

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

gdzie μ , σ są pewnymi stałymi (liczbami rzeczywistymi), a W_t jest tzw. procesem Wienera (o tym więcej później).

Uwaga: Równanie tego typu służy do wyprowadzenia formuły na wycenę instrumentu pochodnego. Natomiast nie jest ono używane do prognozowania przyszłych wartości zmiennej rynkowej.

Rodzaje cen instrumentów finansowych

- transakcyjne – odzwierciedlają rzeczywisty stan rynku
- kwotowane – bardziej odzwierciedlają oczekiwania rynku, lub też zamiary kwotującego w stosunku do własnego portfela
- fixingi, kursy zamknięcia – oficjalne ceny odniesienia, często stosowane przy rozliczaniu transakcji, na ogół są średnimi cen kwotowanych – np. kursy walutowe NBP fixing, stopy WIBOR, LIBOR – ustalone przez odpowiednie niezależne organizacje.

Ceny mają strony, mianowicie

- cena kupna (ile skłonny jest zapłacić kwotujący) – BID Price,
- cena sprzedaży (za ile kwotujący jest skłonny sprzedać) – OFFER Price,
- cena średnia – MID Price.

Oczywiście musi zachodzić relacja

$$\text{cena kupna} < \text{cena sprzedaży}.$$

Uwagi:

- Ceny *natychmiastowe* (*spotowe*) to ceny dla transakcji zawartych w chwili bieżącej i rozliczanych lub w ramach których dostawa nastąpi *natychmiast*, przy czym to co znaczy *natychmiast* zależy od zasad przyjętych na danym rynku (z uwzględnieniem specyfiki waluty).
- Cena instrumentu finansowego nie zawsze jest tożsama z sumą pieniędzy, którą trzeba zapłacić za ten instrument. Będziemy rozróżniać między ceną instrumentu a jego wartością, czyli kwotą pieniędzy, którą trzeba za dany instrument zapłacić.

Ceny akcji, wartości indeksów

Akcje

- S_t – cena za 1 akcję, wyrażona w walucie lokalnej, w chwili t ,
- dostawa natychmiastowa $\rightarrow$ dostawa i jej rozliczenie następuje w tym samym dniu kiedy zawarto transakcję kupna (sprzedaży), konwencja $t + 0$
- akcje na ogół płacą dywidendę, zwykle raz lub dwa razy w roku,
- t_{cum} – ostatni dzień, w którym kupujący akcję nabiera prawa do najbliższej dywidendy,
- t_{ex} – pierwszy dzień, w którym kupujący akcję nie otrzymuje prawa do najbliższej dywidendy,
- D_0 – wartość bieżąca (na dzień cum-dividend) najbliższej dywidendy,
- r_{tax} – stopa podatku od przychodów z inwestycji kapitałowych,
- jeśli inne czynniki nie wpływałyby na cenę akcji, musiałoby zachodzić

$$S_{t_{\text{cum}}} = S_{t_{\text{ex}}} + D_0(1 - r_{\text{tax}})$$

tak więc następuje deterministyczna ale skokowa zmiana (spadek) ceny akcji.

- czasami akcje są poddawane podziałowi (ang. *split*) na m części, wtedy w dniu splitu S_t zostaje zastąpione przez S_t/m .

Indeksy

- Są w pewnym przybliżeniu syntetycznym portfelem wybranej grupy spółek giełdowych
- Odzwierciedlają stan i zmiany wartości portfela spółek wchodzących w jego skład
- Indeks możemy traktować jak *syntetyczną* spółkę, z tym że nie można dostarczyć fizycznie akcji tej syntetycznej spółki.
- Indeksy „płaca” dywidendę w sposób ciągły, a nie w sposób dyskretny tak jak zwykłe akcje.

Kursy wymiany walut

ang. *FX rate (Foreign eXchange rate)*

- S_t – wartość kursu natychmiastowej wymiany waluty CUR_1 na CUR_2 w chwili t
- wymiana natychmiastowa (ang. *FX spot*) → wymiana (dostawa, rozliczenie) następuje w dniu *spot*, to jest (zwykle) za 2 dni handlowe od t , konwencja $t + 2$
- wymiana walut → jedną walutę kupujemy, a drugą sprzedajemy
- kurs wymiany można podawać na dwa sposoby:
 - jako ilość waluty CUR_1 za jednostkę waluty $CUR_2 \rightarrow S_t$
 - jako ilość waluty CUR_2 za jednostkę waluty $CUR_1 \rightarrow 1/S_t$
- waluta bazowa → w odniesieniu do kwotowanego kursu ta waluta za jednostkę, której podajemy ilość drugiej waluty
- waluta niebazowa, kwotowana → ta druga waluta, w tej walucie wyrażamy wartość jednostki waluty bazowej
- notacja: CUR_1/CUR_2 , gdzie CUR_1 – waluta bazowa, a CUR_2 – waluta niebazowa, i zwykle (ang. *direct quotation*) oznacza ilość waluty CUR_2 za jednostkę waluty CUR_1 (odwrotnie niż się oznacza miana w fizyce!); zdarza się jednak, że pod takim oznaczeniem kryje się kwotowanie odwrotne (ang. *indirect quotation*) – ilość waluty CUR_1 za jednostkę waluty CUR_2 – tak na przykład jest kwotowany kurs funta brytyjskiego GBP do dolara amerykańskiego USD – wtedy USD/GBP oznacza ilość USD za 1 GBP. Dlatego dobrze jest się upewnić jak kwotowany jest kurs, nim się zacznie go używać.
- w danym kraju podaje się głównie kursy walut obcych do waluty lokalnej
- kurs krosowy → kurs między dwoma obcymi walutami, musi w stosunku do waluty lokalnej (np. PLN) spełniać warunek

$$S_{CUR_1/CUR_2} = \frac{S_{CUR_1/PLN}}{S_{CUR_2/PLN}} = S_{CUR_1/PLN} S_{PLN/CUR_2}$$

- Warunek ten wynika z założenia braku arbitrażu na lokalnym rynku walutowym
- Cena kupna (BID Price) – ale którą walutę „kupujemy”? Reguła „trzech B” (Buy, Base, Bid) – kupujemy (Buy) walutę bazową (Base) po cenie BID (tej niższej)
- Przykład: nasze kwotowanie 4.1390/490 USD/PLN oznacza, że jesteśmy gotowi kupić USD po 4.1390 PLN za 1 USD, lub sprzedać USD po 4.1490 PLN za 1 USD.
- Ta zasada jest spójna z zasadami kwotowania cen kupna/sprzedaży akcji – w powyższym przykładzie USD „gra rolę akcji”.

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 1.1 (*Wycena pozycji a wynik na tej pozycji na przykładzie portfela akcji*). Dealer Banku Miejskiego utworzył portfel akcji spółki *wuwu.com* w następujący sposób:

- w poniedziałek kupił 200 akcji po 10 PLN,
- we wtorek dokupił 300 akcji po 9 PLN,
- w środę kupił jeszcze 500 akcji po 9.50 PLN.

Od czwartku zaczął stopniowo zamykać pozycję:

- we czwartek sprzedał 300 akcji po 9.75 PLN,
- w piątek sprzedał 400 akcji po 10.25 PLN.

Wyceń portfel tych akcji oraz oblicz wynik na tym portfelu

- (a) we czwartek,
- (b) w piątek.

Wynik podziel na wynik zrealizowany i wynik niezrealizowany. Licząc wynik zastosuj

- (i) kolejkę FIFO (ang. *First In First Out*),
- (ii) metodę średniej ceny.

Portfel akcji był finansowany (ang. *cost of carry*) stopą ON (ang. *Over Night*), która wynosiła

- w poniedziałek – 6%,
- we wtorek – 6.25%,
- we środę – 6.50%,
- we czwartek – 6.20%,
- w piątek – 6.10%.

Skoryguj wynik na tym portfelu o koszty finansowania pozycji.

Uwagi i wyjaśnienia:

1. W metodzie średniej ceny wynik liczony jest względem średniej ceny akcji w portfelu wyliczonej dla dnia realizacji zysku/straty.
2. Koszt finansowania pozycji z danego dnia to odsetki od kwoty „pożyczonych” funduszy użytych dla otwarcia pozycji, zbilansowanych wpływami z zamkniętych części portfela, i uwzględniających narosłe do danego dnia koszty finansowania. Koszty finansowania nalicza się na bazie dziennej.

Ćwiczenie 1.2 (*Portfel bonów skarbowych*). Dealer Banku Miejskiego otworzył portfel bonów skarbowych kupując bony o wartości nominalnej 10 mln PLN po cenie 85. W chwili otwarcia portfela termin wykupu bonów przypadał za 100 dni. Po 10 dniach dealer dokupił 5 mln PLN bonów tej samej emisji po cenie 86. Po kolejnych 20 dniach zamknął część pozycji sprzedając bony o wartości nominalnej 12 mln PLN po cenie 90, po czym założył że będzie trzymał pozostałą pozycję aż do wykupu bonów.

- (a) Wyceń ten portfel na 50 dni przed terminem wykupu, kiedy cena bonów wynosiła 92.
- (b) Oblicz wynik na tym portfelu i podziel go na wynik zrealizowany i niezrealizowany.
- (c) Oblicz koszt finansowania portfela przy założeniu, że stopa ON używana do naliczania kosztów finansowania była stała w tym okresie i wynosiła 5%.

Wyjaśnienie: Wynik zrealizowany na papierze dyskontowym (np. na bonie skarbowym) kupionym po cenie $p < 100$ wynosi

$$N \frac{100 - p}{100} \frac{d}{d_{\text{mat}}},$$

gdzie N jest wartością nominalną papieru, d jest liczbą dni od daty dostawy dla daty zakupu papieru do daty dostawy dla daty wyceny, a d_{mat} jest liczbą dni od daty dostawy dla daty zakupu papieru do daty zapadalności papieru. Takie określenie wyniku zrealizowanego jest zabiegiem księgowym i służy tylko do „wygodnej dla księgowych” prezentacji wyniku i w zasadzie nie ma nic wspólnego z rzeczywistą realizacją zysku/straty. Z tego powodu wynik zrealizowany z tytułu rozliczenia dyskonta nie jest uwzględniany przy wyliczaniu kosztu finansowania pozycji.

Ćwiczenie 1.3 (*Portfel obligacji*). Dealer Banku Miejskiego kupił obligacje o wartości nominalnej 100 mln PLN. W chwili zawarcia transakcji rezydualny termin do wykupu tych obligacji wynosił 2 lata i 3 miesiące licząc od daty dostawy. Obligacje płać kupon 8% (semi-annual, 30/360). Cena czysta obligacji wynosiła 95. Po 4 miesiącach dealer sprzedał 40 mln PLN z tego portfela kiedy cena czysta obligacji wynosiła 96. Oblicz wynik na tym portfelu i podziel go na wynik zrealizowany i wynik niezrealizowany. Oblicz koszty finansowania portfela przy założeniu, że stopa ON była stała w rozpatrywanym okresie i wynosiła 6%.

Wyjaśnienie: Do wyniku zrealizowanego na obligacji kuponowej, prócz rozliczenia dyskonta lub premii (analogicznie jak w przypadku bonów; jest to znów zabieg księgowy!), zalicza się otrzymane kupony oraz narosłe odsetki AI za bieżący okres odsetkowy (ang. *accrued interest*). Narosłe odsetki AI oblicza się następującym wzorem

$$AI = C \frac{d}{d_{cp}},$$

gdzie C oznacza wartość najbliższego kuponu, d_{cp} liczbę dni w bieżącym okresie odsetkowym, a d liczbę dni od początku okresu odsetkowego do daty rozliczenia (dostawy) dla bieżącego dnia.

Ćwiczenie 1.4 (*Przykład złożonego instrumentu finansowego (Lokata schodkowa)*). Bank oferuje klientom lokatę na następujących warunkach:

- walutą lokaty jest waluta obca CUR (klient deponuje ustaloną sumę pieniędzy w tej walucie)
- oprocentowanie lokaty jest następujące
 - r_0 jeśli $S_{CUR/PLN} \geq K$, przy czym zwrot kapitału i odsetek odbędzie się w PLN przeliczonych po kursie K
 - r_1 jeśli $K_1 \leq S_{CUR/PLN} < K$
 - r_2 jeśli $K_2 \leq S_{CUR/PLN} < K_1$
 - r_3 jeśli $K_3 \leq S_{CUR/PLN} < K_2$
 - r_4 jeśli $S_{CUR/PLN} < K_3$

przy czym w przypadku $S_{CUR/PLN} < K$ wypłata następuje w oryginalnej walucie lokaty oraz $r_0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4$

- kursem referencyjnym jest fixing NBP z dnia zakończenia lokaty

Zidentyfikuj opcje wbudowane w strukturę tego instrumentu.

Ćwiczenie 1.5 (*Lokata z wbudowaną opcją*). Bank oferuje klientom lokatę na następujących warunkach:

- walutą lokaty jest PLN,
- czas trwania lokaty wynosi T ,
- odsetki z lokaty wynoszą $r_0 T + \alpha \max(r_{WIG20}, 0)$ gdzie $r_{WIG20} = (S_T - S_0)/S_0$ jest stopą zwrotu z indeksu WIG20 w okresie od rozpoczęcia lokaty do chwili jej zakończenia (S_0 oznacza wartość indeksu z chwili rozpoczęcia lokaty, a S_T wartość indeksu z chwili zakończenia lokaty), a α jest tak zwanym współczynnikiem partycypacji.

(a) Zidentyfikuj opcję wbudowaną w ten instrument.

(b) Wyznacz wartość współczynnika partycypacji α przy następujących danych liczbowych

- $T = \frac{1}{4}$ (lokata trzymiesięczna)
- $r_0 = 2\%$
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat wynosi $r_{3M} = 4\%$
- wartość indeksu WIG20 w chwili rozpoczęcia lokaty wynosi $S_0 = 2400$
- cena trzymiesięcznej opcji kupna na WIG20 z ceną wykonania $K = S_0 = 2400$ wynosi 60 (w jednostkach indeksu)

przy którym lokata będzie zawarta na „sprawiedliwych” warunkach.

(c) Ile kontraktów opcyjnych powinien kupić Bank by zabezpieczyć wypłatę części odsetek zależną od wartości indeksu WIG20 dla lokaty o nominale $N = 100000$ PLN.

Uwaga: Nominał kontraktu opcyjnego na WIG20 wynosi 10, to znaczy jest to opcja na 10 sztuk indeksu. Jednostka indeksu jest warta 10 PLN (można powiedzieć, że indeks WIG20 wynoszący S_0 (jednostek indeksowych, punktów) jest „akcją” o wartości $10S_0$ PLN). Zatem wartość gotówkowa wypłaty jednego kontraktu opcyjnego kupna indeksu wynosi $10 \times 10 \times \max(S_T - K, 0)$

PLN, gdzie K jest ceną wykonania. Cena kontraktu opcyjnego na WIG20 jest podawana w jednostkach indeksowych za jedną sztukę indeksu. Tak więc cena gotówkowa jednego kontraktu opcyjnego, którego kwotowana cena wynosi c_0 (jednostek indeksowych), wynosi $10 \times 10 \times c_0$ PLN.

Ćwiczenie 1.6 (*Widelki kupna/sprzedaży dla kursu krosowego*). W dniu 5 października 2004 około godziny 15:40 Bank X kwotował

— GBP/PLN – 6.2538 / 6.2598

— CHF/PLN – 2.7751 / 2.7791

(a) Oblicz kursy kupna/sprzedaży GBP/CHF, które powinien zakwotować Bank X w tym czasie.

(b) Przypuśćmy, że w tym samym czasie kwotowanie Banku Y kursu GBP/CHF wynosiło 2.2520 / 2.2580. Czy i w jaki sposób można było tę sytuację wykorzystać by uzyskać wolny od ryzyka dochód.

Ćwiczenie 1.7 (*Kredyt hipoteczny*). Utwórz schemat spłat kredytu hipotecznego w którym „równe” raty, na które składają się odsetki i spłata kapitału, są płacone co miesiąc przez 10 lat. Jeśli kredyt jest udzielony na stopę stałą, raty są rzeczywiście równe. Jeśli kredyt jest udzielony na stopę zmienną (powiększoną o marżę), raty będą się zmieniały wraz ze zmianą stopy zmiennej. Oblicz jak zmieni się rata takiego kredytu jeśli stopa zmienna wzrośnie o 1 punkt procentowy. Załóż że bieżąca stopa zmienna wynosi 3.5% a marża banku 1.5%.

2. Stopy procentowe

2.1. Podstawowe stopy procentowe

Na rynku obserwujemy wiele różnych stóp procentowych, z których każda na swój sposób określa cenę pieniądza w czasie i ewentualnie premię za ryzyko kredytowe:

- *stopy skarbowe* – stopy po których rządy państw pożyczają pieniądze w swoim kraju – rentowności bonów skarbowych (w przypadku amerykańskich bonów skarbowych (T-bills) stopa dyskonta), stopy dochodowości obligacji skarbowych (T-bonds),
- *stopy repo* – stopy transakcji repo (ang. *repurchase agreement*), to jest transakcji, która polega na sprzedaży papieru wartościowego z przyrzeczeniem odkupu (różnica między ceną odkupu a ceną sprzedaży to odsetki),
- *stopy międzybankowe* – stopy lokat i depozytów na rynku międzybankowym – w tym stopy referencyjne typu LIBOR, WIBOR, EURIBOR.

Dla transakcji o takim samym czasie trwania mamy następującą nierówność

$$r_{\text{Trate}} < r_{\text{Repo}} < r_{\text{LIBOR}},$$

przy założeniu, że stopy te zostały sprowadzone do tej samej „bazy” (są wyrażone w tej samej konwencji – o tym będzie mowa później). Nierówność powyższa wynika z różnych poziomów ryzyka kredytowego, zawartego w transakcjach którym te stopy odpowiadają.

Prócz tych stóp mamy jeszcze na rynku międzybankowym

- *stopy swapowe* – stopy kontraktów wymiany procentowej IRS,
- *stopy FRA* – to są de facto stopy forward.

Wyżej wymienione stopy są bezpośrednio obserwowane na rynku, to znaczy są kwotowane lub są ogłaszane. Jest też grupa instrumentów finansowych, których (kwotowane) ceny implikują odpowiedniego rodzaju stopy procentowe. Na przykład mamy

- stopy dochodowości obligacji skarbowych, papierów komercyjnych (bonów, obligacji emitowanych przez podmioty gospodarcze) (ang. *yield to maturity, internal rate of return*),
- stopy forward implikowane przez kontrakty futures na depozyty (Eurodollar futures).

W matematyce finansowej i w inżynierii finansowej używa się również wielu stóp teoretycznych, które nie są obserwowalne na rynku.

Mówiąc o stopie procentowej na ogół odnosimy ją do okresu czasu, w którym „żyje” instrument finansowy związany z tą stopą. Oznaczenia dla czasu będziemy często stosować w podwójnych znaczeniach:

- raz zmienne czasowe, np. t , T , będą oznaczać daty (dni),
- innym razem t , T będą punktami (liczbami rzeczywistymi) na osi czasu, które odpowiadają odległości chwil t , T od pewnego ustalonego dnia (początku osi czasu), przy czym odległości te będą liczone według pewnego sposobu (konwencji).

Zwykle będziemy przyjmować, że bieżący dzień jest początkiem osi czasu.

Odległość między dwoma chwilami czasu mierzymy w latach, bowiem stopy procentowe będziemy zawsze podawać *zannualizowane*, tzn. w skali roku (rok jest jednostką czasu). Należy jeszcze zwrócić uwagę na sprecyzowanie co to znaczy „rok”. I tak, odległość między T_1 a T_2 , którą będziemy oznaczać symbolem $T_2 - T_1$, może być zdefiniowana

— w konwencji ACT/365 jako

$$T_2 - T_1 = \frac{\text{liczba dni od } T_1 \text{ do } T_2}{365},$$

— w konwencji ACT/360 jako

$$T_2 - T_1 = \frac{\text{liczba dni od } T_1 \text{ do } T_2}{360},$$

— w konwencji 30/360 jako

$$T_2 - T_1 = \frac{\max(30 - d_1, 0) + \min(d_2, 30) + 30(m_2 - m_1 - 1) + 360(y_2 - y_1)}{360},$$

gdzie T_1 potraktowane jako data zapisaliśmy w postaci $d_1/m_1/y_1$, i analogicznie T_2 w postaci $d_2/m_2/y_2$ – w tej konwencji liczba dni między dwoma dniami jest liczona przy założeniu, że każdy miesiąc ma 30 dni.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

- t – chwila czasu (dzień), w której instrument finansowy (stopa z nim związana) jest „obserwowany”,
- T – data zapadalności instrumentu (stopy),
- $T - t$ – czas trwania (czas do zapadalności).

2.2. Obligacje zerokuponowe, czynniki dyskontowe

Obligacja zerokuponowa o terminie zapadalności T to instrument finansowy, który gwarantuje posiadaczowi wypłatę w wysokości 1 (w danej walucie) w chwili czasu T . Niech

$$B(t, T)$$

oznacza wartość tego instrumentu w chwili t , gdzie $0 \leq t \leq T$.

Tak zdefiniowane obligacje zerokuponowe są teoretycznym instrumentem finansowym i w rzeczywistości występują na rynku rzadko. Na przykład, bony skarbowe są obligacjami zerokuponowymi i w danej chwili na rynku jest tylko skończona liczba tych bonów o czasach trwania, które nie przekraczają roku. Obligacje zerokuponowe są fundamentalnym pojęciem używanym w teorii stóp procentowych, które pozwala powiązać lub wyznaczyć większość stóp procentowych: te występujące na rynku, oraz stopy teoretyczne, nieobserwowalne na rynku.

Własności $B(t, T)$

- $B(t, T) < 1$ dla $0 \leq t < T$,
- $B(T, T) = 1$,
- obserwując w chwili $t \geq 0$:
 - $B(t, T_1) > B(t, T_2)$ dla każdych $t \leq T_1 < T_2$, tj. funkcja $B(t, \cdot)$ jest malejąca,
 - $B(t, \cdot)$ jest różniczkowalna (to jest założenie),
- dla każdego T : $(0, T) \ni t \rightarrow B(t, T)$ jest procesem stochastycznym.

Czynniki dyskontowe

Czynnik dyskontowy, który sprowadza do chwili t wartość przepływu pieniężnego następującego w T , będziemy oznaczać symbolem $DF(t, T)$. Wartość (cena) w chwili t obligacji zero-kuponowej o terminie zapadalności $T \geq t$ może być używana do dyskontowania na chwilę t wartości przepływu pieniężnego następującego w chwili T . Zatem, w szczególności, jeżeli istnieje obligacja zerokuponowa zapadalna w T , to $DF(t, T) = B(t, T)$ i wówczas te dwa pojęcia możemy używać wymiennie. By zaznaczyć walutę (CUR) w której dyskontowany jest przepływ pieniężny będziemy czasami stosować notację $DF_{\text{CUR}}(t, T)$. Wartości czynników dyskontowych można

wyznaczyć również na podstawie kwotowań innych instrumentów finansowych, na przykład na podstawie stóp depozytowych, stóp kontraktów FRA oraz stóp kontraktów IRS (patrz Wykłady 3 i 4).

Uwaga 2.1. W teorii modeli stóp procentowych definiuje się również stochastyczny czynnik dyskontowy

$$D(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r_u du \right),$$

gdzie r_t jest krótkoterminową (chwilową) stopą natychmiastową (o tej stopie będziemy mówić w dalszej części wykładu). W ramach tej teorii pokazuje się, że

$$B(t, T) = \mathbf{E}^Q (D(t, T) | \mathcal{F}_t),$$

gdzie $\mathcal{F}_t$ jest tzw. filtracją (zasobem informacji dostępnej do chwili t włącznie).

2.3. Wartość strumienia przepływów pieniężnych

Niech $C(t_i)$ oznacza przepływ pieniężny, który następuje w chwili $t_i \geq t$. Wartość strumienia (portfela) przepływów $\{C(t_i)\}_{i=1, \dots, n}$ (następujących w tej samej walucie) w chwili t wynosi

$$P(t) = \sum_{i=1}^n DF(t, t_i) C(t_i). \quad (2.1)$$

Jeśli $t = 0$ (chwila bieżąca), $P(0)$ nazywamy wartością bieżącą strumienia $\{C(t_i)\}_{i=1, \dots, n}$. Ponieważ wiele instrumentów finansowych można przedstawić w postaci strumienia przepływów pieniężnych, wzór (2.1) jest podstawowym modelem wyceny takich instrumentów. Nawet jeśli instrumenty tego typu mają cenę rynkową i formalnie nie ma potrzeby dokonywania wyceny na podstawie modelu (wzorem (2.1)), model wyceny jest niezbędny od wyznaczania miar ryzyka takiego instrumentu – na przykład duracji (inaczej: średniego czasu trwania), czy też BPV (ang. *Basis Point Value*) – patrz Zadanie 2.8.

2.4. Zerokuponowe stopy procentowe (spotowe, natychmiastowe)

Zerokuponowa stopa prosta dla okresu $[t, T]$ to wewnętrzna stopa zwrotu obligacji zerokuponowej zapadalnej w chwili T wyznaczona jako stopa o tzw. prostej kapitalizacji odsetek

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + (T - t)L(t, T)}, \quad (2.2)$$

skąd

$$L(t, T) = \frac{1}{T - t} \cdot \frac{1 - B(t, T)}{B(t, T)}. \quad (2.3)$$

Wzór (2.2) jest tożsamy z warunkiem

$$1 + (T - t)L(t, T) = \frac{1}{B(t, T)}, \quad (2.2')$$

który można zinterpretować jako założenie braku arbitrażu. Lewa strona (2.2') jest kumulacją kapitału (kapitałem wraz z odsetkami) złożonego na lokacie, której oprocentowanie wynosi $L(t, T)$, na okres od t do T . Prawa strona jest wypłatą w chwili T z inwestycji polegającej na

zakupie w chwili t $1/B(t, T)$ jednostek zerokuponowej obligacji, która zapada w T . By nie było arbitrażu, obie te inwestycje muszą dać ten sam dochód. Stąd musi zachodzić (2.2').

Zerokuponowa stopa kapitalizowana w sposób ciągły dla okresu $[t, T]$ to wewnętrzna stopa zwrotu obligacji zerokuponowej zapadalnej w chwili T wyznaczona jako stopa o tzw. ciągłej kapitalizacji odsetek

$$B(t, T) = \frac{1}{\exp((T-t)R(t, T))}, \quad (2.4)$$

skąd

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T-t}. \quad (2.5)$$

Wzór (2.4) jest tożsamy z warunkiem

$$\exp((T-t)R(t, T)) = \frac{1}{B(t, T)}, \quad (2.4')$$

który znów można zinterpretować jako założenie braku arbitrażu, przy czym tym razem kumulacja kapitału jest wyrażona przez stopę kapitalizowaną w sposób ciągły.

Zerokuponowa stopa kapitalizowana m -krotnie w ciągu roku dla okresu $[t, T]$ to wewnętrzna stopa zwrotu obligacji zerokuponowej zapadalnej w chwili T wyznaczona jako stopa o tzw. m -krotnej (w ciągu roku) kapitalizacji odsetek

$$B(t, T) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Y_m(t, T)}{m}\right)^{m(T-t)}}, \quad (2.6)$$

skąd

$$Y_m(t, T) = m \left(\frac{1}{B(t, T)^{1/(m(T-t))}} - 1 \right). \quad (2.7)$$

Wzór (2.6) jest tożsamy z warunkiem

$$\left(1 + \frac{Y_m(t, T)}{m}\right)^{m(T-t)} = \frac{1}{B(t, T)}, \quad (2.6')$$

który znów można zinterpretować jako założenie braku arbitrażu, przy czym kumulacja kapitału jest wyrażona przez stopę kapitalizowaną m -krotnie w ciągu roku.

Korzystając z definicji (2.2), (2.4), oraz (2.6) możemy wyprowadzić formuły wiążące wzajemnie stopy $L(t, T)$, $R(t, T)$, oraz $Y_m(t, T)$. Wszystkie te stopy wyrażają to samo, tj. koszt pieniądza w czasie, z tym że każda na swój sposób.

Określenie stopy $R(t, T)$ jako stopa kapitalizowanej w sposób ciągły jest uzasadnione przez następujący fakt (Zadanie na Ćwiczenia). Mianowicie, jeśli granica $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(t, T)$ istnieje, to

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(t, T) = R(t, T).$$

Odnosząc się do stopy procentowej, należy jeszcze zwrócić uwagę na to w jaki sposób obliczana jest długość okresu czasu (wielkość $T-t$). Stopom procentowym o tym samym schemacie kapitalizacji odsetek można (i tak bywa dla różnych walut) przypisać różne konwencje, według których obliczana jest długość okresu czasu $T-t$.

Które z tych stóp widać na rynku ?

— Stopy proste $L(t, T)$ są bezpośrednio obserwowalne na rynku – stopy lokat / depozytów na rynku międzybankowym.

- Stopy $Y_m(t, T)$ są czasem widoczne jako stopy implikowane – na przykład, jako stopy dochodowości obligacji zerokuponowych. Dla obligacji amerykańskich standardem jest stopa kapitalizowana co pół roku, tj. dla $m = 2$.
- Stopy $R(t, T)$ kapitalizowane w sposób ciągły nie są bezpośrednio widoczne na rynku. Są one natomiast bardzo użyteczne w matematyce finansowej.

2.5. Struktura stóp procentowych

Struktura stóp procentowych to nic innego jak funkcja

$$(t, +\infty) \ni T \rightarrow Y(t, T),$$

gdzie $Y(t, T)$ oznacza jedną ze stóp $L(t, T)$, $R(t, T)$, $Y_m(t, T)$. Wykres tej funkcji nazywamy *krzywą stóp procentowych*.

Bywa, że określając strukturę stóp procentowych używa się dwóch rodzajów stóp, na przykład

$$(t, +\infty) \ni T \rightarrow \begin{cases} L(t, T), & \text{dla } t < T \leq t + 1, \\ Y_1(t, T), & \text{dla } T > t + 1. \end{cases}$$

Często mówiąc o strukturze stóp procentowych, mamy na myśli de facto strukturę czynników dyskontowych, to jest funkcję

$$[t, +\infty) \ni T \rightarrow DF(t, T) = B(t, T).$$

Aspekty praktyczne

Mamy dwa podstawowe typy struktur czynników dyskontowych

- krzywą obligacyjną („bondową”), ang. *government curve* → wygenerowaną z cen obligacji (skarbowych),
- krzywą międzybankową („swapową”), ang. *swap (intermarket) curve* → wygenerowaną na podstawie stóp na rynku międzybankowym (stóp typu LIBOR, stóp FRA, stóp IRS, cen kontraktów Futures na depozyty – patrz Wykłady 3 i 4).

Krzywa swapowa jest określona przez

- wartości czynników dyskontowych $DF(t, T_i)$ dla chwil czasu T_i ($i = 1, \dots, p$), które odpowiadają czasom trwania instrumentów użytych do ich wygenerowania,
- metody interpolacji i ekstrapolacji, przy pomocy których wyznacza się wartości $DF(t, T)$ dla T leżących pomiędzy punktami węzłowymi T_i ; na przykład dla $T_i \leq T \leq T_{i+1}$ (interpolacja) określamy

$$DF(t, T) = \left(DF(t, T_i)\right)^{1-\tau} \left(DF(t, T_{i+1})\right)^{\tau} \quad (2.8a)$$

gdzie

$$\tau = \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i},$$

a dla $t \leq T < T_1$ lub $T > T_p$ (ekstrapolacja),

$$DF(t, T) = \left(DF(t, T_i)\right)^{T/T_i}, \quad \text{gdzie } i = 1 \text{ lub } p. \quad (2.8b)$$

Uwaga: Nie jest to jedyny możliwy sposób interpolacji czynników dyskontowych (patrz Zadanie 2.5). Ten sposób interpolacji ma pewne zalety (patrz Zadanie 2.3.(a) oraz Zadanie 2.4) ale ma też i wady (Zadanie 2.3.(b)).

2.6. Chwilowa stopa natychmiastowa

W matematycznym modelowaniu stóp procentowych operuje się również pewnymi abstrakcyjnymi stopami procentowymi. Jedną z takich stóp jest **krótkoterminowa (chwilowa) stopa natychmiastowa** (ang. *spot short interest rate*), zdefiniowana w następujący sposób

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T).$$

Dla oznaczenia tej stopy będziemy również używać symbolu r_t .

Z powyższej definicji, oraz z własności funkcji $B(t, \cdot)$ wynika, że

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} -\frac{\ln B(t, T) - \ln B(t, t)}{T - t} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T)|_{T=t}.$$

Można również pokazać (Zadanie na Ćwiczenia), że

$$\lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) = r(t).$$

Z tego powodu za rynkowy odpowiednik stopy chwilowej czasami przyjmuje się krótkoterminową stopę lokat / depozytów na rynku międzybankowym. Ze względu na czas trwania najbardziej odpowiednią stopą byłaby stopa ON (ang. *OverNight*). Jednakże, na wielu rynkach, w tym i na polskim, stopa ON ma zbyt dużą zmienność w stosunku do innych stóp rynkowych i nie jest dostatecznie skorelowana z tymi stopami rynkowymi, by mogła „tłumaczyć” ich zachowanie. Czasami za surogat stopy chwilowej bierze się trzymiesięczną stopę typu LIBOR.

Dynamikę struktury stóp procentowych próbuje się modelować formułując stochastyczne równania różniczkowe dla odpowiednio dobranych stóp procentowych. Podstawowa klasa modeli stóp procentowych dotyczy stopy chwilowej $r_t = r(t)$. Jednym z takich modeli jest następujący model Hull-White’a

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t,$$

gdzie

- a i σ są stałymi,
- $\theta(t)$ pewną funkcją deterministyczną.

Model Hull-White’a jest modelem z powrotem do średniej – stopa krótkoterminowa powraca do średniej $\theta(t)/a$ w tempie a . Parametry modelu (funkcję θ , stałe a i σ) dobiera się w taki sposób by dopasować go bieżącej struktury stóp procentowych.

2.7. Stopy forward

Określenie stopy forward przy użyciu (prostych) stóp depozytowych

Dla uproszczenia założmy, że rozpatrujemy okresy do 1Y (wtedy możemy stosować konwencje rynku pieniężnego, to jest stopy proste).

Stopa forward obserwowana w chwili t na okres czasu od T do S , gdzie $t < T < S$, to stopa $F(t, T, S)$ w okresie od T do S przy której następujące dwie transakcje dają taki sam wynik w chwili S :

- Transakcja 1 – w chwili t lokujemy jednostkę pieniężną na okres $[t, S]$ po stopie $L(t, S)$
- Transakcja 2 – w chwili t lokujemy jednostkę pieniężną na okres $[t, T]$ po stopie $L(t, T)$ oraz jednocześnie zawieramy umowę na ulokowanie kwoty $1 + L(t, T)(T - t)$ na okres czasu $[T, S]$ po stopie $F(t, T, S)$

Te dwie transakcje dają ten sam wynik jeśli

$$1 + L(t, S)(S - t) = (1 + L(t, T)(T - t)) \cdot (1 + F(t, T, S)(S - T)), \quad (2.9)$$

skąd otrzymamy następujący **wzór na stopę forward**

$$F(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{1 + L(t, S)(S - t)}{1 + L(t, T)(T - t)} - 1 \right) \quad (2.10)$$

Stopa forward zdefiniowana (z pozoru) inaczej

Stopa forward obserwowana w chwili t na okres czasu od T do S ($t < T < S$) to stopa zwrotu którą można zrealizować w okresie od T do S na transakcji wolnej od ryzyka zawartej w t bez początkowych kosztów. Taką transakcję przeprowadzamy w następujący sposób:

- w chwili t sprzedajemy jedną obligację zerokuponową o terminie zapadalności T - otrzymujemy sumę $B(t, T)$, i jednocześnie,
- w chwili t kupujemy obligację zero-kuponową o terminie zapadalności S o nominale $B(t, T)/B(t, S)$ - płacimy sumę $B(t, T)$.

Następnie,

- w chwili T realizujemy zobowiązanie z tytułu sprzedanej obligacji zerokuponowej o terminie zapadalności T - płacimy 1,
- w chwili S otrzymujemy wypłatę z obligacji zerokuponowej o terminie zapadalności S - otrzymujemy sumę $B(t, T)/B(t, S) \cdot 1$.

Zatem w okresie od T do S zrealizujemy wolny od ryzyka zwrot w wysokości

$$\frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1.$$

Z tym zwrotem możemy związać następujące stopy:

- Prostą stopę forward $F(t, T, S)$ ustaloną w chwili t na okres czasu $[T, S]$, która jest określona przez następujący warunek

$$1 + (S - T)F(t, T, S) = \frac{B(t, T)}{B(t, S)},$$

skąd mamy następującą definicję

$$F(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \cdot \frac{B(t, T) - B(t, S)}{B(t, S)}. \quad (2.11)$$

Uwaga: Jeśli założyć, że między rynkiem depozytowym a rynkiem papierów wartościowych (w tym przypadku obligacji zerokuponowych) nie ma arbitrażu, czyli, że spełniony jest warunek (2.3), to stopy forward określone wzorami (2.10) i (2.11) są identyczne.

- Stopę forward kapitalizowaną w sposób ciągły $F^*(t, T, S)$ ustaloną w chwili t na okres czasu $[T, S]$, określoną w następujący sposób

$$\exp((S - T)F^*(t, T, S)) = \frac{B(t, T)}{B(t, S)},$$

skąd mamy następującą definicję

$$F^*(t, T, S) = -\frac{\ln B(t, S) - \ln B(t, T)}{S - T}. \quad (2.12)$$

Korzystając z definicji (2.12) można łatwo pokazać, że

$$F^*(t, T, S) = R(t, S) + (R(t, S) - R(t, T)) \frac{T - t}{S - T}. \quad (2.13)$$

Z tego wzoru wynika następująca obserwacja:

— jeśli w okresie czasu $[T, S]$ krzywa stóp procentowych $R(t, \cdot)$ jest rosnąca (malejąca), to $F^*(t, T, S) > R(t, S)$ ($F^*(t, T, S) < R(t, S)$).

Które ze stóp forward widać na rynku?

Proste stopy forward – jako kwotowania kontraktów FRA (patrz Wykład 3) oraz jako stopy implikowane z kwotowań kontraktów Futures na depozyty (patrz Wykład 5).

2.8. Chwilowa stopa forward

Chwilowa stopa forward obserwowana w chwili t o terminie zapadalności T jest zdefiniowana jako następująca granica

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S), \quad (2.14)$$

gdzie stopa $F(t, T, S)$ jest określona przez warunek (2.11). Korzystając z (2.11) obliczamy

$$\begin{aligned} f(t, T) &= - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{B(t, S)} \frac{B(t, S) - B(t, T)}{S - T} \\ &= - \frac{1}{B(t, T)} \frac{\partial}{\partial S} B(t, S)|_{S=T} = - \frac{\partial}{\partial S} \ln B(t, S)|_{S=T}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\lim_{S \rightarrow T^+} F^*(t, T, S) = - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{\ln B(t, S) - \ln B(t, T)}{S - T} = - \frac{\partial}{\partial S} \ln B(t, S)|_{S=T} = f(t, T).$$

Ponadto, jeżeli założymy, że funkcja $R(t, \cdot)$ jest różniczkowalna, to przechodząc w równaniu (2.13) do granicy $S \rightarrow T^+$ (lub podstawiając w (2.15) wzór (2.5) i wykonując różniczkowanie), otrzymamy następujący związek między stopą chwilową forward $f(t, T)$ a stopami natychmiastowymi kapitalizowanymi w sposób ciągły:

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial}{\partial S} R(t, S)|_{S=T}.$$

Całkując (2.15) otrzymujemy następujący związek

$$B(t, S) = B(t, T) \exp \left(- \int_T^S f(t, \tau) d\tau \right). \quad (2.16)$$

W szczególności

$$B(t, S) = \exp \left(- \int_t^S f(t, \tau) d\tau \right). \quad (2.17)$$

Z (2.17) napisanego dla $S = T$ i z definicji (2.4) stopy $R(t, T)$ wynika następujący związek

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, \tau) d\tau, \quad (2.18)$$

Czyli stopa $R(t, T)$ jest średnią chwilowych stóp forward w okresie czasu $[t, T]$. Na koniec zauważmy, że

$$f(t, t) = r(t).$$

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 2.1. Na rynku kwotowane są następujące stopy (proste, ACT/365)

- (i) spot $L(3M)=5.00\%$,
- (ii) forward $F(3M,6M)=5.10\%$, $F(3M,9M)=5.15\%$, $F(6M,1Y)=5.20\%$.

Oblicz

- (a) stopy spot $L(6M)$, $L(9M)$, $L(1Y)$,
- (b) stopy forward $F(6M,9M)$, $F(9M,1Y)$,
- (c) czynniki dyskontowe $DF(3M)$, $DF(6M)$, $DF(9M)$, $DF(1Y)$.

Założ, że okres 3M ma 91 dni (od daty spot), 6M 183 dni, 9M 273 dni, oraz 1Y 365 dni.

Ćwiczenie 2.2. Pokazać, że jeśli granica $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(t, T)$ istnieje, to $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(t, T) = R(t, T)$.

Ćwiczenie 2.3. (a) Sprawdzić, że jeżeli ciąg $DF(t, T_i)$ ($i = 1, \dots, p$) jest malejący, to funkcja $T \rightarrow DF(t, T)$ określona formułami (2.8) jest malejąca.

(b) Pokazać, że stopy forward kapitalizowane w sposób ciągły dla każdego okresu czasu $[S_1, S_2]$ zawartego w $[T_i, T_{i+1}]$ są takie same.

Ćwiczenie 2.4. Wyprowadzić wzory na interpolację i ekstrapolację stóp $R(t, \cdot)$, które odpowiadają interpolacji i ekstrapolacji czynników dyskontowych określonym formułami (2.8). Pokazać że, przy tej metodzie interpolacji i ekstrapolacji stóp $R(t, \cdot)$, przesunięciu równoległemu stóp $R(t, T_i)$ ($i = 1, \dots, p$) odpowiada równoległe przesunięcie krzywej $T \rightarrow R(t, T)$. Jak zmienia się struktura czynników dyskontowych przy przesunięciu równoległym stóp procentowych?

Ćwiczenie 2.5. Wyprowadzić wzory na interpolację czynników dyskontowych analogiczne do (2.8a), które odpowiadają liniowej interpolacji stóp $R(t, \cdot)$, to jest

$$R(t, T) = R(t, T_i) + \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i} (R(t, T_{i+1}) - R(t, T_i))$$

dla $T_i \leq T \leq T_{i+1}$. Przedyskutować problem monotoniczności tak zdefiniowanej krzywej czynników dyskontowych $DF(t, T)$ względem zmiennej T .

Wskazówka. $T_1 = 6/12$ i $R(0, T_1) = 30\%$, oraz $T_2 = 9/12$ i $R(0, T_2) = 20\%$. Sprawdź czy dla $T = 8/12$ zachodzi $DF(0, T) > DF(0, T_2)$.

Ćwiczenie 2.6. Załóżmy, że krzywa zerokuponowych stóp (kapitalizowanych w sposób ciągły) jest rosnąca. Co jest większe

- stopa zerokuponowa dla terminu T ,
- wewnętrzna stopa zwrotu z obligacji stałokuponowej o terminie wykupu T ?

Co można powiedzieć, jeśli krzywa stóp procentowych jest malejąca lub stała?

Ćwiczenie 2.7. Na rynku kwotowane są następujące papiery skarbowe

- (i) sześciomiesięczny bon – po 97,
- (ii) obligacja kuponowa o kuponie 5.00% płatnym co pół roku zapadająca za rok – po cenie 99,
- (iii) obligacja kuponowa o kuponie 5.50% płatnym co rok zapadająca za rok i sześć miesięcy – po cenie (czystej) 96.75,
- (iv) obligacja kuponowa o kuponie 6% płatnym raz w roku zapadająca za dwa lata – po cenie 98.

Oblicz

- (a) czynniki dyskontowe $DF(6M)$, $DF(1Y)$, $DF(18M)$, $DF(2Y)$,
- (b) stopy $R(6M)$, $R(1Y)$, $R(18M)$, $R(2Y)$,

(c) stopy forward $F^*(6M, 1Y)$, $F^*(1Y, 18M)$, $F^*(18M, 2Y)$ (kapitalizowane w sposób ciągły). W celu uproszczenia obliczeń przyjmij, że ułamek roku dla każdego okresu sześciomiesięcznego wynosi $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2.8. Rozwiąż Zadanie 2.7 mając dane tylko (i), (iii) oraz (iv).

Wskazówka. Brakujące dane będziesz musiał zastąpić założeniem co do postaci czynnika dyskontowego dla okresu 1Y.

Ćwiczenie 2.9. Dane są dwie obligacje, których czas trwania jest taki sam i wynosi 5 lat (obligacje zapadają za 5 lat od chwili bieżącej). Obie obligacje płacą kupon w dokładnie tych samych terminach, ale w różnych wysokościach. Jedna z nich płaci kupon 7.5% i jej cena bieżąca wynosi 95. Druga, o 5% kuponie, kosztuje 92.50. Oblicz wartość czynnika dyskontowego dla okresu 5Y oraz zero-kuponową stopę procentową $Y_2(0, 5Y)$ (kapitalizowaną półrocznie) w konwencji ACT/360.

Ćwiczenie 2.10. Na rynku są w obrocie dwie obligacje zerokuponowe

- (i) skarbowa w cenie 98,
 - (ii) korporacyjna (emitowana przez korporację) w cenie 95,
- obie zapadające w ciągu 91 dni. Oblicz
- (a) wewnętrzne stopy zwrotu tych obligacji.
 - (b) spread kredytowy papieru komercyjnego, to jest różnicę między wewnętrzną stopą zwrotu papieru komercyjnego a stopą papieru skarbowego (wolnego od ryzyka kredytowego).

Ćwiczenie 2.11. Wewnętrzna stopa zwrotu dwuletniej obligacji, która płaci 6% kupon co pół roku, wynosi 8% (kapitalizacja półroczna, 30/360).

- (a) Oblicz cenę tej obligacji.
- (b) Wiedząc, że
 - 26- i 52-tygodniowe bony skarbowe są sprzedawane i kupowane z dyskontem 5 i odpowiednio 8,
 - cena czysta obligacji o czasie trwania 18 miesięcy, która płaci 10% kupon raz w roku, wynosi 90,oblicz wartość czynnika dyskontowego dla okresu 2Y oraz zerokuponową stopę procentową $Y_2(0, 2Y)$ (kapitalizowaną półrocznie, ACT/360).

Ćwiczenie 2.12. Dane są następujące wielkości

- cena 3M bonu skarbowego – 97,
- cena 9M bonu skarbowego – 92,
- cena czysta obligacji o czasie trwania 15M z półrocznym 6% kuponem – 95,
- cena czysta obligacji o czasie trwania 21M z półrocznym 8% kuponem – 94.

Spółka **wuwu.com** emituje obligację o czasie trwania 18M, która będzie płacić kupon w wysokości 2.5 kwartalnie. Stopa dochodowości obligacji emitowanych przez spółki z sektora **.com** jest średnio wyższa o 200 punktów bazowych niż stopa dochodowości papierów skarbowych o podobnej strukturze. Przy tym założeniu wyceń obligację spółki **wuwu.com**.

Uwagi: (i) Przyjmij że stopy procentowe obligacji, o których mowa w zadaniu, są podane na bazie 30/360. (ii) Przy poprawnym rozwiązywaniu tego zadania zajdzie potrzeba obliczenia stopy dochodowości. W tym celu możesz się posłużyć np. arkuszem kalkulacyjnym. Sprawdź jak by się zmieniła cena obligacji gdybyś „uproszczył” rozwiązanie tak by nie obliczać stopy dochodowości, a obliczając cenę tej obligacji po prostu nałożył ten spread na strukturę stóp zerokuponowych.

Ćwiczenie 2.13 (Duracja vel średni czas trwania.). Rozpatrzmy strumień (portfel) przepływów pieniężnych $\{C(t_i)\}_{i=1,\dots,n}$ (następujących w tej samej walucie) i założmy, że jego wartość w chwili t

$$P(t) = \sum_{i=1}^n DF(t, t_i) C(t_i) \neq 0.$$

Wówczas, możemy określić wielkość

$$D(t) = \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^n (t_i - t) DF(t, t_i) C(t_i),$$

którą zwykle określa się jako durację Macaulay'a (ang. *Macauley duration*).

(a) Pokaż, że jeżeli wszystkie przepływy pieniężne $C(t_i)$ są dodatnie, to

$$\min\{t_i - t\} < D(t) < \max\{t_i - t\}.$$

(b) Niech $R_\Delta(t, \cdot)$ oznacza strukturę stóp procentowych $R(t, \cdot)$ **kapitalizowanych w sposób ciągły** przesuniętą równolegle o wielkość Δ , to znaczy $R_\Delta(t, T) = R(t, T) + \Delta$ dla każdego $T > t$. Niech $P_\Delta(t)$ oznacza wartość strumienia $\{C(t_i)\}$ obliczoną przy tak przesuniętej strukturze stóp, to jest, dla czynników dyskontowych określonych wzorem

$$DF_\Delta(t, T) = e^{-(T-t)R_\Delta(t, T)} = e^{-(T-t)R(t, T)} e^{-(T-t)\Delta} = e^{-(T-t)\Delta} DF(t, T).$$

Pokaż, że

$$P_\Delta(t) - P(t) = -D(t)P(t)\Delta + o(\Delta).$$

Wskazówka. Określ funkcję $g(\Delta) = P_\Delta(t) - P(t)$ dla ustalonej struktury stóp $R(t, \cdot)$. Oblicz $g'(0)$.

(c) Rozpatrzmy teraz zależność wartości strumienia od wielkości równoległego przesunięcia stóp $Y(t, T)$ **kapitalizowanych rocznie**. Niech $Y_\Delta(t, \cdot)$ oznacza strukturę stóp procentowych $Y(t, \cdot)$ przesuniętą równolegle o wielkość Δ , to znaczy $Y_\Delta(t, T) = Y(t, T) + \Delta$ dla każdego $T > t$. Niech $P_\Delta(t)$ oznacza wartość strumienia $\{C(t_i)\}$ obliczoną przy tak przesuniętej strukturze stóp, to jest, dla czynników dyskontowych określonych wzorem

$$DF_\Delta(t, T) = \frac{1}{(1 + Y_\Delta(t, T))^{T-t}} = \frac{1}{(1 + Y(t, T) + \Delta)^{T-t}}.$$

Pokaż, że

$$P_\Delta(t) - P(t) = -D_{\text{mod}}(t)P(t)\Delta + o(\Delta),$$

gdzie $D_{\text{mod}}(t)$ jest tak zwaną zmodyfikowaną duracją Macaulay'a (ang. *modified Macauley duration*) określoną wzorem

$$D_{\text{mod}}(t) = \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + Y(t, t_i)} (t_i - t) DF(t, t_i) C(t_i).$$

— (d) Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy struktura stóp procentowych jest *plaska*, to znaczy kiedy $R(t, T) = R(t)$ dla każdego $T > t$ i analogicznie $Y(t, T) = Y(t)$ dla $T > t$, gdzie oczywiście $R(t) = \ln(1 + Y(t))$. Pokaż, że wówczas

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1 + Y(t)}.$$

Uwaga: W praktyce duracje obligacji oblicza się względem wewnętrznej stopy zwrotu tej obligacji. Oznacza to, że, na przykład, jeśli do obliczenia wewnętrznej stopy zwrotu przyjęto mechanizm rocznej kapitalizacji, to czynniki dyskontowe $DF(t, T)$ w definicji duracji (zmodyfikowanej) są postaci

$$DF(t, T) = \frac{1}{(1 + Y_{IRR})^{T-t}},$$

gdzie Y_{IRR} jest wewnętrzną stopą zwrotu tej obligacji (o rocznej kapitalizacji). Gdy dla wewnętrznej stopy zwrotu przyjęto inny mechanizm kapitalizacji, np. kapitalizację ciągłą lub półroczną (przypadek obligacji amerykańskich), to wówczas należy odpowiednio adaptować definicję czynnika dyskontowego użytego do obliczenia duracji i sam wzór na durację. Jak widać tak określona duracja nie jest pojęciem jednolitym, w tym sensie, że zależy ona od wewnętrznej stopy zwrotu obligacji (łącznie z całym bagażem konwencji użytych do określenia tej stopy). Trudno jest więc porównywać tak liczone duracje dla różnych obligacji, szczególnie tych których wewnętrzne stopy zwrotu różnią się istotnie.

(e) BPV to nic innego jak zmiana wartości strumienia (portfela przepływów pieniężnych) odpowiadająca przesunięciu równoległemu struktury stóp procentowych o 1 punkt bazowy (0.01%, od ang. *basis point* oznaczany jako bp), zwykle w dół. Tak więc

$$BPV = P(\tilde{y} + \Delta y) - P(\tilde{y}),$$

gdzie $\tilde{y}$ oznacza bieżącą strukturę stóp procentowych, a $\Delta y = -1 \text{ bp} = -0.0001$. Wyprowadź związek pomiędzy BPV a duracją.

Ćwiczenie 2.14 (BPV obligacji zerokuponowej.). Wyprowadź wzór na BPV obligacji zerokuponowej.

Ćwiczenie 2.15 (Addytywność BPV.). Niech

$$BPV_i = P(\tilde{y} + \Delta_i \tilde{y}) - P(\tilde{y}),$$

gdzie $\Delta_i \tilde{y} = [0, \dots, \Delta y, \dots, 0]$ (przesunięcie tylko i -tej stopy, to jest stopy o tenorze T_i). Pokaż, że

$$BPV \simeq \sum_i BPV_i.$$

Ćwiczenie 2.16. W portfelu mamy 100 mln PLN (wartości nominalnej) w obligacji o następujących parametrach: 8% kupon płatny co pół roku, termin wykupu za 2 lata i trzy miesiące, YTM (semi-annual, 30/360) wynosi 8.488%. Oblicz

- cenę czystą tej obligacji,
- średni czas trwania tej obligacji,
- zmodyfikowaną durację,
- przybliżoną zmianę wartości portfela przy wzroście YTM o 5 bp.

Ćwiczenie 2.17. Dealer zarządza dwoma portfelami:

- portfelem pięcioletnich obligacji zerokuponowych o wartości nominalnej 100 mln PLN,
- portfelem dwuletnich obligacji zerokuponowych o wartości nominalnej 150 mln PLN.

Dwuletnia stopa zerokuponowa (o rocznej kapitalizacji) wynosi 4%, a pięcioletnia stopa zerokuponowa (o rocznej kapitalizacji) wynosi 5%.

- Oblicz BPV tych portfeli.
- Dealer szacuje, że stopa dwuletnia wzrośnie z dnia na dzień o 25 bp a stopa pięcioletnia wzrośnie o 30 bp. Na którym z portfeli dzienna zmiana wyniku będzie większa? Jaka będzie całkowita zmiana wyniku na obu tych portfelach?

- (c) W drugim scenariuszu dealer szacuje, że stopa dwuletnia wzrośnie z dnia na dzień o 15 bp, a stopa pięcioletnia spadnie o 20 bp. Jaka będzie całkowita zmiana wyniku na obu tych portfelach?

Ćwiczenie 2.18. Dealer zarządza portfelem, którego BPV wynosi -1000 PLN, przy czym

- BPV odpowiadające zmianie stóp krótkoterminowych (do dwóch lat) wynosi -4000 PLN,
- BPV odpowiadające zmianie stóp średnioterminowych (miedzy dwoma a pięcioma latami) wynosi 2000 PLN,
- BPV odpowiadające zmianie stóp długoterminowych (powyżej pięciu lat) wynosi 1000 PLN.

Jak zmieni się wynik na tym portfelu jeśli

- (a) krzywa stóp procentowych przesunie się równolegle o -25 bp?
- (b) krzywa stóp procentowych zmieni kąt nachylenia w ten sposób, że stopy krótkoterminowe wzrosną o 10 bp, stopy średnioterminowe nie zmienią się, a stopy długoterminowe spadną o 15 bp?
- (c) krzywa stóp procentowych zmieni wypukłość w ten sposób, że stopy krótkoterminowe spadną o 5 bp, stopy średnioterminowe wzrosną o 10 bp, a stopy długoterminowe spadną o 15 bp?

Ćwiczenie 2.19 (Duracja portfela.). Wyprowadź wzór na durację portfela w zależności od duracji składowych portfela.

Ćwiczenie 2.20 (Wynik na lokacie/depozycie.). Wynik na lokacie (i analogicznie na depozycie) zwykle liczy się metodą narosłych odsetek. Załóżmy, że bank zrobił lokatę (udzielił klientowi kredytu) na kwotę N na okres czasu T . Stopa oprocentowania lokaty wynosi R , a odsetki w kwocie $C = RTN$ będą zapłacone wraz ze zwrotem ulokowanej kwoty N w chwili T . Wynik na tej transakcji w chwili czasu $t \in [0, T]$ liczony metodą narosłych odsetek wynosi

$$W_{AI}(t) = C \frac{d(t)}{d_{cp}},$$

gdzie d_{cp} jest liczbą dni na którą lokata została zrobiona, a $d(t)$ jest liczbą dni od początku okresu odsetkowego lokaty do chwili wyceny t . Przy założeniu że stopa R jest na bazie ACT/365, czyli, że $T = d_{cp}/365$, narosłe odsetki możemy wyrazić w następujący sposób:

$$W_{AI}(t) = C \frac{d(t)}{d_{cp}} = R \frac{d(t)}{365} N = RtN,$$

gdzie przyjęliśmy, że $t = d_t/365$. Wynik liczony w powyższy sposób przyrasta w czasie liniowo i nie zależy od bieżących stóp procentowych.

Wynik na lokacie (i analogicznie na depozycie) można również liczyć w sposób ekonomiczny, to znaczy jako wynik który byłby zrealizowany w rezultacie zamknięcia tej lokaty po stopach obowiązujących w chwili wyceny t . Tak rozumiany wynik ekonomiczny dany jest wzorem (dla czego?)

$$W_E(t) = DF(t, T)(1 + RT)N - N.$$

Założmy, że $DF(t, T) = \frac{1}{1+r(T-t)}$ – tzn. r jest stopą depozytową dla okresu $[t, T]$.

Pokaż, że

$$W_E - W_{AI} \simeq (R - r)(T - t)N$$

z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu. Stąd wynika w szczególności, że jeżeli $R = r$, to wynik ekonomiczny pokrywa się (w przybliżeniu) z wynikiem liczonym metodą narosłych odsetek.

3. Kontrakt FRA

3.1. Struktura kontraktu FRA

Terminologia:

- ang. *Forward Rate Agreement* – FRA,
- kontrakt na przyszłą stopę procentową.

Oznaczenia

- T_1 oznacza początek okresu depozytowego, który jest również datą rozliczenia (ang. *settlement date*),
- T_2 oznacza koniec okresu depozytowego,
- T_{fix} oznacza datę ustalenia stopy referencyjnej (ang. *fixing date*) – to jest, zwykle dwa dni robocze przed początkiem okresu depozytowego,
- $L = L(T_1, T_2)$ oznacza wartość stopy referencyjnej zaobserwowaną na rynku w dniu ustalenia stopy - najczęściej są to 1, 3 lub 6 miesięczne stopy lokat/depozytów na rynku międzybankowym – stopy WIBOR lub LIBOR,
- $\Delta = T_2 - T_1$ oznacza długość okresu depozytowego kontraktu FRA obliczoną według właściwej dla danej waluty konwencji (ACT/360 dla USD, EUR; ACT/365 dla PLN, GBP),
- R_{FRA} oznacza stopę kontraktu FRA, to jest zakontraktowaną wysokość stopy procentowej, tzw. cena kontraktu FRA,
- N oznacza nominal kontraktu,
- Symbole używane na rynku do oznaczania kontraktu: $\text{FRAT}_1 \times T_2$ lub $\text{FRAT}_1 \vee T_2$ (na przykład: FRA6x9, gdzie „6” odpowiada $T_1 = 6M$ (6 miesięcy od dnia spot), a „9” to $T_2 = 9M$).

Kwota rozliczenia (wyплата z kontraktu FRA) od strony nabywcy kontraktu, znana od momentu ustalenia stopy referencyjnej, płatna w dacie rozliczenia, wynosi

$$\frac{(L - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N}{1 + L \cdot \Delta}. \quad (3.1)$$

Warto zauważyć, że kwota rozliczenia (3.1) nie jest liniową funkcją stopy L , choć ta nieliniowość nie jest silna bowiem wartości iloczynu $L \cdot \Delta$ są zwykle małe w stosunku do 1.

W sensie ekonomicznym (w sensie wartości bieżącej na chwilę T_1) wartość kwoty rozliczenia (3.1) kontraktu FRA płatnej w chwili T_1 jest równoważna wartości rozliczenia wymiany w następującej w chwili T_2 odsetek liczonych według stopy zmiennej $L = L(T_1, T_2)$ na odsetki liczone według stopy kontraktu R_{FRA} , czyli kwoty

$$(L - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N. \quad (3.2)$$

Strony kontraktów FRA

- Kupno FRA (długi FRA, ang. *long* FRA) – kupno pieniędzy (pożyczenie pieniędzy) – płaconie odsetek – płacenie stopy kontraktu FRA
- Sprzedaż FRA (krótki FRA, ang. *short* FRA) – sprzedaż pieniędzy (ulokowanie pieniędzy) – otrzymywanie odsetek – otrzymywanie stopy kontraktu FRA

Rola kontraktów FRA

- Nabywca kontraktu FRA zapewnia sobie określoną w umowie wysokość referencyjnej stopy procentowej, po której będzie mógł się finansować (pożyczyć pieniądze) przez ustalony w kontrakcie przyszły okres czasu.
- Sprzedawca kontraktu FRA zapewnia sobie możliwość ulokowania po stopie kontraktu FRA swoich funduszy na ustalony w kontrakcie okres czasu.

Jak to działa? Wyjaśnimy to od strony kupującego kontrakt FRA.

- Zawieramy kontrakt FRA w którym będziemy płacić ustaloną kontraktem stopę R_{FRA} (tzn. kupujemy kontrakt FRA ze stopą R_{FRA}). Zawarcie kontraktu nic nas nie kosztuje.
- W chwili T_{fix} zostaje ustalona wartość L stopy rynkowej na okres od T_1 do T_2 . Przypuśćmy, że $L > R_{\text{FRA}}$. To oznacza, że od sprzedawcy kontraktu otrzymujemy kwotę V określoną w (3.1). Wówczas
 - kwotę V lokujemy po stopie L na okres od T_1 do T_2 , oraz
 - kwotę N pożyczamy po stopie L na ten sam okres.
- W chwili T_2

— z lokaty dostajemy kwotę $(L - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N$, oraz

— zwracamy pożyczony kapitał N i płacimy należne odsetki w wysokości $L \cdot \Delta \cdot N$.

W efekcie, po zbilansowaniu płatności, od pożyczonego kapitału płacimy odsetki po stopie R_{FRA} . Gdy $L < R_{\text{FRA}}$, musimy wypłacić sprzedawcy kwotę $-V$, którą w tym celu pożyczamy na rynku po stopie L . Wtedy w T_2 oddajemy kwotę $N + L \cdot \Delta \cdot N$ oraz kwotę $(R_{\text{FRA}} - L) \cdot \Delta \cdot N$, co znów daje nam efekt taki sam, jak w poprzednim przypadku.

Kontrakty FRA mogą być i są używane przez spekulantów. Spekulant, który przypuszcza, że stopy procentowe w przyszłości

- wzrosną – kupuje kontrakt FRA,
 - spadną – sprzedaje kontrakt FRA,
- bowiem jeśli spełnią się jego spekulacje, to zgodnie ze wzorem (3.1) zyska.

3.2. Wartość kontraktu FRA

(długiej pozycji FRA, kupiony FRA)

- (a) Wartość zapadłego kontraktu FRA – wartość w dacie lub po dacie ustalenia stopy referencyjnej ($T_{\text{fix}} \leq t \leq T_1$)

Wartość kontraktu FRA jest równa wartości zdyskontowanej do momentu wyceny ustalonej kwoty rozliczenia (3.1)

$$P_{\text{FRA}} = DF(t, T_1) \cdot \frac{(L - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N}{1 + L \cdot \Delta} \quad (3.3)$$

- (b) Wartość kontraktu przed datą ustalenia stopy referencyjnej ($t < T_{\text{fix}}$)

Pokażemy, że wartość w chwili t niezapadłego kontraktu FRA wynosi

$$P_{\text{FRA}} = N \cdot (DF(t, T_1) - (1 + R_{\text{FRA}} \Delta) \cdot DF(t, T_2)) \quad (3.4)$$

W tym celu rozpatrzmy następującą strategię inwestycyjną, która w sposób statyczny replikuje wymianę odsetek

$$(L - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N,$$

która (hipotetycznie) będzie miała miejsce w chwili T_2 i która ekonomicznie jest równoważna kwocie rozliczenia kontraktu FRA. Ta strategia polega na

- sprzedaży w chwili t obligacji zerokuponowej zapadalnej w chwili T_2 o nominale $(1 + R_{\text{FRA}} \Delta)N$,

- kupnie w chwili t obligacji zerokuponowej zapadalnej w chwili T_1 o nominale N ,
- zainwestowaniu w chwili T_1 kwoty N (otrzymanej z zapadającej w T_1 obligacji zerokuponowej) na okres czasu od T_1 do T_2 w lokatę oprocentowaną według rynkowej stopy $L = L(T_1, T_2)$.

Jak łatwo sprawdzić, wartość tej strategii w chwili t dana jest wzorem

$$N \cdot (DF(t, T_1) - (1 + R_{\text{FRA}} \Delta) \cdot DF(t, T_2)).$$

Ponieważ ta strategia replikuje kwotę (hipotetycznego) rozliczenia w T_2 równoważnego rzeczywistemu rozliczeniu kontraktu FRA w chwili T_1 , to z prawa jednej ceny wynika, iż musi zachodzić równość (3.4).

3.3. Stopa kontraktu FRA

W dniu zawarcia kontraktu (ang. *trade date*) wartość kontraktu wynosi zero. Niech t_0 oznacza chwilę zawarcia kontraktu. Stopa R_{FRA} z jaką kontrakt został zawarty musiała być taka, by

$$DF(t_0, T_1) - (1 + R_{\text{FRA}} \Delta) \cdot DF(t_0, T_2) = 0,$$

czyli stopa ta powinna była wynosić

$$R_{\text{FRA}} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{DF(t_0, T_1)}{DF(t_0, T_2)} - 1 \right) \quad (3.5)$$

Jak widać ze wzoru (3.5), w dniu zawarcia kontraktu (w dniu bieżącym t_0) stopa kontraktu FRA jest równa stopie forward dla okresu depozytowego kontraktu FRA obserwowanej w chwili t_0

$$R_{\text{FRA}} = F(t_0, T_1, T_2), \quad (3.6)$$

gdzie, przypomnijmy, stopa $F(t_0, T_1, T_2)$ spełnia warunek

$$\frac{1}{DF(t_0, T_1)} (1 + F(t_0, T_1, T_2) \cdot \Delta) = \frac{1}{DF(t_0, T_2)}. \quad (3.7)$$

Inne uzasadnienie równości (3.6). Kupiony kontrakt FRA pozwala na ustalenie stopy procentowej po której będziemy mogli pożyczać pieniądze na okres czasu od T_1 do T_2 . Z drugiej strony ten sam efekt możemy uzyskać wykonując w chwili t_0 dwie transakcje: pożyczanie pieniędzy na okres czasu od t_0 do T_2 (sprzedaż obligacji zero-kuponowej o czasie zapadalności T_2) oraz jednoczesne ulokowanie tych pieniędzy na okres czasu od t_0 do T_1 (kupno obligacji zero-kuponowej o czasie zapadalności T_1) - patrz uzasadnienie definicji stopy forward (Wykład 2). Efektem tych transakcji na obligacjach zero-kuponowych jest zapewnienie sobie stopy forward $F(t_0, T_1, T_2)$ na okres czasu od T_1 do T_2 przy zerowych kosztach początkowych. Ekonomicznie transakcja FRA i te dwie transakcje depozytowe dają ten sam efekt przy tych samych (zerowych) kosztach. Tak więc, musi zachodzić warunek (3.6), gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy przeprowadzić transakcję arbitrażową.

Powyższy mechanizm opisany w celu uzasadnienia wzoru (3.6) przedstawia również sposób replikacji kontraktu FRA przy pomocy lokaty i depozytu. Kupiony FRA (płacimy stopę FRA) replikujemy pożyczaniem pieniędzy na okres czasu do chwili T_2 po stopie $L(t_0, T_2)$ i ulokowaniem pożyczonych pieniędzy na depozycie do chwili T_1 po stopie $L(t_0, T_1)$. W przypadku replikacji sprzedanego kontraktu FRA postępujemy odwrotnie: pieniądze pożyczamy na okres do T_1 i robimy depozyt na okres do T_2 . W tym języku wzór na stopę kontraktu FRA możemy zapisać następująco

$$(1 + L(t_0, T_1) \cdot \Delta_1) (1 + R_{\text{FRA}} \cdot \Delta) = (1 + L(t_0, T_2) \cdot \Delta_2),$$

gdzie Δ_i jest długością okresu depozytowego, który zaczyna się w dacie spot dla chwili bieżącej t_0 i kończy w T_i ($i = 1, 2$).

3.4. Wyznaczanie wartości kontraktu FRA na podstawie stopy forward

Wartość kontraktu FRA jest równa wartości zdyskontowanej do momentu wyceny kwoty przyszłego rozliczenia którą, obliczamy wzorem (3.1) wstawiając w nim zamiast stopy L stopę forward $F = F(t, T_1, T_2)$ dla okresu od T_1 do T_2 implikowaną przez strukturę stóp procentowych z chwili wyceny t

$$P_{\text{FRA}} = DF(t, T_1) \cdot \frac{(F - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N}{1 + F \cdot \Delta}, \quad (3.8)$$

gdzie

$$F = F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{DF(t, T_1)}{DF(t, T_2)} - 1 \right) \quad (3.9)$$

Dlaczego można tak postąpić? Podamy dwa uzasadnienia.

Otóż w chwili t możemy bez kosztów początkowych zawrzeć kontrakt FRA na okres od T_1 do T_2 zamykający nasz oryginalny (wyceniany) kontrakt. Stopa tego zamykającego kontraktu FRA jak wiemy musi wynosić $F(t, T_1, T_2)$. Ekonomiczny rezultat tego zamknięcia to wymiana w chwili T_2 stopy $F = F(t, T_1, T_2)$ na stopę R_{FRA} wycenianego kontraktu FRA. Bieżąca wartość tej wymiany, która jest de facto wartością oryginalnego kontraktu FRA, wynosi zatem

$$P_{\text{FRA}} = DF(t, T_2) \cdot (F - R_{\text{FRA}}) \cdot \Delta \cdot N. \quad (3.10)$$

Korzystając ze wzoru (3.9) na stopę forward, wyrażenie po prawej stronie równości (3.10) możemy zapisać w postaci (3.8), co uzasadnia tę metodę wyceny kontraktu FRA.

Drugie uzasadnienie polega na sprawdzeniu, że po wstawieniu do (3.8) (lub (3.10)) wyrażenia na stopę F wyliczoną z warunku (3.9) i po przeprowadzeniu uproszczeń, otrzymujemy wzór (3.4) na wycenę kontraktu FRA.

3.5. FRA jako instrument zabezpieczający

Jak widać, kontrakt FRA może służyć do zabezpieczania określonych płatności odsetkowych. Jeśli mamy otrzymać płatność odsetkową za przyszły okres czasu od T_1 do T_2 zależną od stopy rynkowej $L(T_1, T_2)$, która będzie ustalona na ten okres przez rynek, możemy sprzedać kontrakt FRA na ten okres czasu ze stopą $R_{\text{FRA}} = F(t, T_1, T_2)$. W efekcie, możemy uważać, że bez żadnych kosztów zamieniliśmy nieznaną w chwili t stopę rynkową na stopę $F(t, T_1, T_2)$ ustaloną w t .

Wniosek 3.1. *Z powyższej analizy wynika, że wyceniając w chwili t (licząc wartość bieżącą na chwilę t) przepływ pieniężny postaci*

$$C(T_2) = A \cdot L(T_1, T_2)$$

następujący w chwili T_2 (A jest stałą niezależną od $L(T_1, T_2)$), możemy zastąpić stopę $L(T_1, T_2)$ stopą forward $F(t, T_1, T_2)$. Wtedy wartość w chwili t takiego przepływu wynosi

$$P = DF(t, T_2) \cdot A \cdot F(t, T_1, T_2).$$

W szczególności, dla przepływu będącego odsetkami za okres od T_1 do T_2

$$C(T_2) = \Delta \cdot L(T_1, T_2)$$

po skorzystaniu ze wzoru (3.9) na stopę forward, otrzymujemy

$$P = DF(t, T_1) - DF(t, T_2).$$

3.6. Reprezentacja FRA w postaci strumienia pieniężnego

Jak widać ze wzoru (3.4), wycena kupionego kontraktu FRA jest identyczna jak wycena strumienia pieniężnego

- $+N$ w chwili T_1 ,
- $-(1 + R_{\text{FRA}}\Delta)N$ w chwili T_2 .

Podobnie, ze wzoru (3.10) wynika, że wycena kupionego kontraktu FRA jest identyczna jak wycena strumienia pieniężnego

- $+F(t, T_1, T_2) \cdot \Delta \cdot N$ w chwili T_2 ,
- $-R_{\text{FRA}} \cdot \Delta \cdot N$ w chwili T_2 .

Uwaga: Powyższe przepływy pieniężne (oraz przepływy pieniężne odpowiadające wzorowi (3.8)) są jedynie przepływami *syntetycznymi* i w rzeczywistości żadne z tych przepływów nie występują w związku z realizacją kontraktu FRA.

3.7. Aspekty praktyczne

1. Kontrakty FRA są kwotowane ze spreadem kupna – sprzedaży. Cena kupna kontraktu FRA to stopa $R_{\text{FRA}}^{\text{bid}}$, którą kwotujący jest skłonny „płacić” w tym kontrakcie. Analogicznie, cena sprzedaży kontraktu FRA to stopa $R_{\text{FRA}}^{\text{offer}}$, którą kwotujący jest gotów „otrzymywać” w tym kontrakcie. Jasne, że $R_{\text{FRA}}^{\text{bid}} < R_{\text{FRA}}^{\text{offer}}$.
2. Spready kupna – sprzedaży kontraktów FRA są relatywnie małe (kilka lub kilkanaście bp), na ogół dużo mniejsze niż wynikałyby ze spreadów lokat/depozytów replikujących kontrakty FRA (patrz Zadanie 3.1). Jest to związane z różnymi poziomami ryzyka kredytowego w kontraktach FRA i w transakcjach depozytowych. Ponadto, kontrakty FRA, jako transakcje pozabilansowe, mają znacznie większą płynność niż transakcje depozytowe, które wymagają zaangażowania gotówki (są transakcjami bilansowymi).

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 3.1. W dniu 18 października 2004 Bank X kwotował: 3M PLN Depo – 6.65 / 6.85 oraz 6M PLN Depo – 6.80 / 6.95, oraz PLN FRA3x6 – 6.84 / 6.90 (kwotowania na bazie ACT/365). Oblicz ceny kupna / sprzedaży kontraktu FRA3x6, które wynikałyby ze stóp depozytowych. W obliczeniach przyjmij, że okres 3M ma 92 dni a 6M ma 183 dni (od dnia spot).

Ćwiczenie 3.2. Dane są następujące kwotowania rynkowe: FRA3x6 – 5.00%, bon skarbowy o terminie wykupu za 3 miesiące – 98.00, oraz bon skarbowy o terminie wykupu za 6 miesięcy – 97.50. Czy przy tych danych można przeprowadzić arbitraż? W obliczeniach załóż, że okres 3 miesięczny ma 91 dni, a 6 miesięczny 182 dni.

Ćwiczenie 3.3. Dane są dwie obligacje stałokuponowe, które płacą kupon co pół roku:

- OS1: kupon – 5%, termin zapadalności – za 4 miesiące, cena czysta – 99,58;
- OS2: kupon – 6%, termin zapadalności – za 7 miesięcy, cena czysta – 100,6.

Stopa procentowa 1M lokat/depozytów wynosi 5,50%. Kwotowanie FRA4x7 wynosi 6,00%. Czy w tej sytuacji jest możliwość przeprowadzenia arbitrażu. Jeśli tak, skonstruuj strategię arbitrażową i oblicz wartość zysku uzyskanego tą strategią.

Ćwiczenie 3.4 (*Trochę bardziej skomplikowany wariant poprzedniego zadania.*). Dane są dwie obligacje stałokuponowe, które płacą kupon co pół roku:

- OS1: kupon – 6.00%, termin zapadalności – za 7 miesięcy, cena czysta – 100.50;
- OS2: kupon – 6.60%, termin zapadalności – za 10 miesięcy, cena czysta – 100.57.

Stopy procentowe lokat/depozytów wynoszą: 1M – 5.50%, 4M – 5.75%. Kwotowanie kontraktu FRA7x10 wynosi 6.00%. Czy w tej sytuacji jest możliwość przeprowadzenia arbitrażu. Jeśli tak, skonstruuj i opisz strategię arbitrażową. Jaka jest wysokość zysku uzyskanego tym arbitrażem?

Ćwiczenie 3.5. Dwa miesiące temu sprzedaliśmy kontrakt FRA3x6 na nominal 10 mln PLN ze stopą 6.10%. W chwili obecnej kontrakt FRA1x4 ma kwotowanie 5.90/6.05, a WIBOR 1M wynosi 5.80%. Oblicz wartość naszego kontraktu.

Ćwiczenie 3.6. (a) Oblicz BPV kontraktów FRA 3x6, 3x9.

(b) Zbadaj jak BPV kontraktów FRA zmienia się wraz z upływem czasu pozostałego do wygaśnięcia (rozliczenia) kontraktu.

Ćwiczenie 3.7. Pokaż, że $BPV(\text{long FRA } T_1 \times T_2) \simeq -DF(t_0, T_1)N(T_2 - T_1) \cdot 0.0001$ dla nowo zawartego kontraktu (przy przesunięciu równoległym stóp procentowych w dół o 1 bp).

Ćwiczenie 3.8. Wycena obligacji o zmiennym kuponie – ang. *FRN – Floating Rate Note*

Obligacja o zmiennym kuponie płaci kupony, które są obliczane według pewnej referencyjnej rynkowej stopy procentowej (zwykle stopy typu LIBOR).

(a) Obligacja o stałym nominale N .

Kupon za okres odsetkowy $[t_{i-1}, t_i)$ płatny w chwili t_i wynosi

$$C(t_i) = \Delta(t_{i-1}, t_i) \cdot L(t_{i-1}, t_i) \cdot N,$$

gdzie $L(t_{i-1}, t_i)$ jest stopą rynkową, której wartość jest ustalana na rynku na początku okresu odsetkowego (w rzeczywistości, zwykle na dwa robocze przez rozpoczęciem tego okresu). Oblicz

(i) wartość tej obligacji w chwili $t \in (t_0, t_1)$ oraz jej cenę czystą,

(ii) wartość tej obligacji na początku okresu odsetkowego, tj. w chwili $t = t_0$.

(b) Obligacja z amortyzowanym nominalem.

Nominał obligacji zmienia się w trakcie jej trwania według z góry określonego harmonogramu. Niech N_i oznacza nominał obligacji w okresie odsetkowym $[t_{i-1}, t_i)$. Kupon za okres odsetkowy $[t_{i-1}, t_i)$ płatny w chwili t_i wynosi

$$C(t_i) = \Delta(t_{i-1}, t_i) \cdot L(t_{i-1}, t_i) \cdot N_i,$$

przy oznaczeniach takich samych jak w punkcie (a). Prócz tego kuponu, w chwili t_i , gdzie $i = 1, \dots, M - 1$, obligacja zwraca część nominalu odpowiadającą amortyzacji

$$A(t_i) = N_i - N_{i+1},$$

przy czym w terminie wykupu obligacji t_M następuje wypłata pozostałej po tych amortyzacjach ostatniej części N_M nominalu. Oblicz

(i) wartość tej obligacji w chwili $t \in (t_0, t_1)$ oraz jej cenę czystą,

(ii) wartość tej obligacji na początku okresu odsetkowego, tj. w chwili $t = t_0$.

Ćwiczenie 3.9. Obligacja z kapitalizowanymi odsetkami o zmiennym oprocentowaniu.

Jest to obligacja, która zamiast płacić odsetki kapitalizuje je co okres odsetkowy, przy czym odsetki są obliczane według rynkowej stopy procentowej $L(t_{i-1}, t_i)$ ustalonej przed rozpoczęciem każdego kolejnego okresu odsetkowego $[t_{i-1}, t_i)$, gdzie $i = 1, \dots, M$. W terminie wykupu t_M obligacja zwraca nominal wraz ze skapitalizowanymi odsetkami, czyli kwotę

$$N \cdot \prod_{i=1}^n (1 + \Delta(t_{i-1}, t_i) L(t_{i-1}, t_i)).$$

Oblicz wartość tej obligacji w chwili $t \in [t_{k-1}, t_k)$, gdzie $k = 1, \dots, M$.

Wskazówka. Wyceniając tę obligację możesz zastąpić przyszłe w stosunku do chwili wyceny t stopy $L(t_{i-1}, t_i)$ stopami forward $F(t, t_{i-1}, t_i)$ obserwowanymi w t . Dlaczego możemy tak postąpić? Pomyśl o serii odpowiednich kontraktów FRA, które musiał byś zawrzeć w chwili t by uzasadnić podstawienie w miejsce stóp przyszłych $L(t_{i-1}, t_i)$ bieżących stóp forward $F(t, t_{i-1}, t_i)$.

Ćwiczenie 3.10. Ile wynoszą duracje obligacji opisanych w Ćwiczeniu 3.8 i Ćwiczeniu 3.9?

Ćwiczenie 3.11. Rozważmy dwie obligacje.

- Obligacja A: płaci stały kupon 8%, płatny co pół roku, termin wykupu przypada za 2 lata i 3 miesiące. Cena czysta tej obligacji wynosi 98, a jej duracja jest równa 1.25.
- Obligacja B: płaci kupon liczony według 6M stopy rynkowej, płatny co pół roku, termin wykupu przypada za 7 lat i 3 miesiące. Stopa procentowa dla bieżącego okresu odsetkowego została ustalona w wysokości 6%. Cena czysta tej obligacji wynosi 99.

Oblicz o ile procent (w przybliżeniu) zmieni się (a) cena brudna, (b) cena czysta każdej z tych obligacji, jeżeli stopy procentowe zmienią się o +50 bp (punktów bazowych, 1 bp=0.01%). Załóż że stopy są wyrażone na bazie 30/360.

4. Kontrakty IRS / CCIRS

4.1. Struktura kontraktów wymiany stóp procentowych

Są dwa podstawowe rodzaje kontraktów wymiany stóp procentowych:

- ang. *Interest Rate Swap* (IRS):
 - w jednej walucie
 - strony kontraktu wymieniają między sobą (tylko) odsetki
- ang. *Cross Currency Interest Rate Swap* (CCIRS):
 - w dwóch różnych walutach
 - strony kontraktu wymieniają między sobą odsetki
 - oraz wymieniane są nominały na początku (na ogół, choć nie zawsze) i na końcu kontraktu, oraz w przypadku kontraktu z amortyzacją (ze zmieniającymi się w trakcie trwania kontraktu nominalami) wymieniane są kwoty, które dostosowują odpowiednio nominały kontraktu

Kontrakt wymiany procentowej (IRS/CCIRS) składa się z dwóch strumieni pieniężnych, tzw. nóg kontraktu. Strona kontraktu IRS/CCIRS otrzymuje/płaci płatności występujące na jednej nodze kontraktu w zamian za co płaci drugiej stronie/otrzymuje od drugiej strony kontraktu płatności drugiej nogi.

Wyróżniamy dwa rodzaje nóg kontraktów wymiany procentowej:

- nogę stałą (ang. *fixed leg*) – odsetki są liczone według stałej stopy,
- nogę zmienną (ang. *floating leg*) – odsetki są liczone według zmiennej stopy.

Ze względu na charakter nóg odsetkowych, możemy rozważać następujące typy kontraktów IRS/CCIRS:

- fixed/float – tzw. *coupon swap*,
- float/float – tzw. *basis swap*,
- fixed/fixed (ma sens tylko w przypadku kontraktów dwuwalutowych CCIRS).

Ponadto, dla każdego z typów kontraktu IRS/CCIRS możemy mieć kontrakt

- bez amortyzacji – nominały nóg kontraktu nie zmieniają się w trakcie trwania kontraktu,
- z amortyzacją – nominały nóg kontraktu zmieniają się w trakcie trwania kontraktu.

Noga stała

Noga stała (ang. *fixed leg*) kontraktu to strumień płatności $C(T_i)$ następujących w chwilach T_i , $i = 1, \dots, M$ (T_M jest terminem zapadalności kontraktu), na który składają się:

- w przypadku kontraktu IRS, odsetki wyliczone według stałej, ustalonej w kontrakcie, stopy (ang. *fixed rate*) R_{IRS}

$$C(T_i) = R_{\text{IRS}} \Delta_i N_i, \quad (4.1)$$

gdzie $\Delta_i = \Delta(T_{i-1}, T_i)$ jest długością okresu odsetkowego $[T_{i-1}, T_i)$ obliczoną według właściwej dla stopy kontraktu R_{IRS} konwencji, a N_i jest nominaliem od którego w okresie odsetkowym $[T_{i-1}, T_i)$ liczone są odsetki;

- w przypadku kontraktu CCIRS, odsetki wyliczone według stałej, ustalonej w kontrakcie, stopy (ang. *fixed rate*) R_{CCIRS} plus, w przypadku kontraktu o amortyzowanym nominale, przepływy wynikające z amortyzacji nominalu

$$C(T_i) = R_{\text{CCIRS}} \Delta_i N_i + A_i, \quad (4.2)$$

gdzie

$$A_i = N_i - N_{i+1},$$

przy czym końcową wypłatę nominalu, następującą w T_M , możemy dla spójności notacji uznać za końcową amortyzację, to znaczy przyjmujemy, że $A_M = N_M$.

Noga zmienna

Noga zmienna (ang. *floating leg*) kontraktu to strumień płatności $\tilde{C}(\tilde{T}_i)$ następujących w chwilach $\tilde{T}_i$, $i = 1 \dots, J$ ($\tilde{T}_J = T_M$ jest terminem zapadalności kontraktu), na które składają się

- w przypadku kontraktu IRS, odsetki wyliczone według, ustalonej w kontrakcie, zmiennej stopy rynkowej (ang. *floating rate*),

$$\tilde{C}(\tilde{T}_i) = (m_* L(\tilde{T}_{i-1}, \tilde{T}_i) + m) \tilde{\Delta}_i \tilde{N}_i, \quad (4.3)$$

gdzie m_* jest czynnikiem multiplikatywnym a m – marżą addytywną, $\tilde{\Delta}_i = \Delta(\tilde{T}_{i-1}, \tilde{T}_i)$ jest długością okresu odsetkowego $[\tilde{T}_{i-1}, \tilde{T}_i)$ obliczoną według właściwej dla stopy rynkowej konwencji, a $\tilde{N}_i$ jest nominałem od którego w okresie odsetkowym $[\tilde{T}_{i-1}, \tilde{T}_i)$ liczone są odsetki,

- w przypadku kontraktu CCIRS, odsetki wyliczone według, ustalonej w kontrakcie, zmiennej rynkowej stopy (ang. *floating rate*) plus, w przypadku kontraktu o amortyzowanym nominale, przepływy wynikające z amortyzacji nominalu

$$C(\tilde{T}_i) = (m_* L(\tilde{T}_{i-1}, \tilde{T}_i) + m) \tilde{\Delta}_i \tilde{N}_i + \tilde{A}_i, \quad (4.4)$$

gdzie

$$\tilde{A}_i = \tilde{N}_i - \tilde{N}_{i+1},$$

przy czym końcową wypłatę nominalu, następującą w $\tilde{T}_J$, możemy dla spójności notacji uznać za końcową amortyzację, to znaczy przyjmujemy, że $\tilde{A}_J = \tilde{N}_J - \tilde{N}_{J+1}$, gdzie $\tilde{N}_{J+1} = 0$.

Uwagi

- Częstotliwości płatności odsetkowych na obu nogach kontraktu wymiany procentowej nie muszą być takie same. Na przykład, w standardowych (ang. *plain vanilla swaps, generic swaps*) kontraktach IRS w PLN odsetki nogi stałej są płatne rocznie, a odsetki nogi zmiennej co pół roku po stopie WIBOR 6M.
- Częstotliwość płatności odsetkowych nogi stałej zwykle jest zgodna ze schematem płatności kuponów obligacji obowiązującym na danym segmencie rynku obligacji (na ogół punktem odniesienia jest rynek obligacji skarbowych), bowiem zgodność ta umożliwia tworzenie dopasowanych strategii zabezpieczających. Jednym z ważnych wyjątków od tej ogólnej reguły są standardowe kontrakty IRS dla USD, które płacą odsetki rocznie, podczas gdy obligacje skarbowe (USD T-bonds) płacą kupon co pół roku.
- Konwencje stóp procentowych nóg kontraktu IRS/CCIRS nie muszą być takie same i na ogół nie są. I tak:
 - Stopa kontraktu IRS/CCIRS (stopa na nogi stałej) zwykle ma konwencję zgodną z konwencją stóp obligacji o stałym kuponie, choć i tu też są wyjątki od tej ogólnej zasady – noga stała USD IRS jest na bazie ACT/360 podczas gdy USD T-bonds są na bazie ACT/ACT; oraz drugi wyjątek – noga stała EUR IRS ma bazę 30/360 a obligacje rządowe na rynku EU przeszły na konwencję ACT/ACT z chwilą wprowadzenia wspólnej waluty.

- Stopa zmienna nogi zmiennej ma konwencję rynku pieniężnego danej waluty.
- Na ogół pierwsze okresy odsetkowe na obu nogach kontraktu rozpoczynają się w tym samym momencie.
- Obie nogi kontraktu wymiany procentowej kończą się w tym samym momencie.
- Amortyzacje nominalów następują w tych samych chwilach czasu na obu nogach kontraktu.
- W przypadku kontraktów IRS z amortyzacją nie ma przepływów wynikających ze zmian nominalu. Formalnie można by wprowadzić takie przepływy, ale wówczas po zbilansowaniu przepływy te zniosły by się wzajemnie. Jednak czasami, na potrzeby pewnych rozważań i interpretacji będziemy przyjmować, że nogi kontraktu IRS z amortyzacją mają przepływy amortyzacyjne oraz, że następują końcowe wymiany (takich samych) nominalów.
- W przypadku kontraktów IRS, płatności odsetkowe obu nóg następujące w tej samej chwili czasu są bilansowane i kwota netto rozliczenia jest płacona / otrzymywana.

Kontrakt IRS/CCIRS jako Fixed Bond vs. Floating Rate Note

Zauważmy, że

- strumień nogi stałej kontraktu IRS/CCIRS (wraz z przepływami wynikającymi z ewentualnych amortyzacji i z nominalem w terminie zapadalności) możemy interpretować jako strumień odpowiedniej obligacji o stałym oprocentowaniu $R_{\text{IRS/CCIRS}}$,
- strumień nogi zmiennej kontraktu IRS/CCIRS w którym $m_* = 1$ (wraz z przepływami wynikającymi z ewentualnych amortyzacji i z nominalem w terminie zapadalności) możemy interpretować jako strumień obligacji o zmiennym oprocentowaniu.

Stąd kontrakt IRS w którym, na przykład, otrzymujemy nogę stałą i płacimy nogę zmienną, możemy utożsamiać z portfelem złożonym z kupionej obligacji o stałym kuponie (ang. *long fixed bond position*) i ze sprzedanej obligacji o zmiennym kuponie (ang. *short floating rate note position*):

$$\text{IRS}(\text{otrzymujemy } R_{\text{IRS}}) = + \text{obligacja z kuponem } R_{\text{IRS}} - \text{obligacja o zmiennym kuponie}$$

4.2. Wycena kontraktu IRS/CCIRS

Wartość kontraktu IRS/CCIRS (jego wycena) dla strony kontraktu jest różnicą pomiędzy wyceną nogi otrzymywanej przez stronę a wyceną nogi płaconej. Wyceną nogi kontraktu w chwili t jest przeliczona po kursie wymiany (waluty nogi na walutę wyceny) obowiązującym w chwili t wartość obecna przyszłych w stosunku do t przepływów pieniężnych tej nogi. Tak więc

$$P_{\text{IRS/CCIRS}} = S_{\text{receive}} \cdot NPV_{\text{receive}} - S_{\text{pay}} \cdot NPV_{\text{pay}},$$

gdzie

- S_{receive} jest kursem wymiany waluty przepływów nogi otrzymywanej na walutę wyceny,
- S_{pay} jest kursem wymiany waluty przepływów nogi płaconej na walutę wyceny.

Na przykład, dla strony, która otrzymuje odsetki po stopie stałej a płaci odsetki po stopie zmiennej w kontrakcie IRS denominowanym w PLN, wartość kontraktu w PLN wynosi

$$P_{\text{IRS}} = NPV_{\text{fixed}} - NPV_{\text{float}}.$$

Przedstawimy wycenę nóg kontraktów wymiany procentowej IRS/CCIRS. Do wyceny będziemy brać tylko *niezrealizowane* przepływy nóg kontraktu, to znaczy te przepływy, które nastąpią w przyszłości względem momentu wyceny t .

Wycena nogi stałej

Niech $C(T_1), \dots, C(T_M)$ będą *niezrealizowanymi* przepływami nogi stałej, to znaczy $T_i > t$ dla każdego $i = 1, \dots, M$ (po ewentualnym przenumеровaniu dat T_i , tak by T_1 oznaczało pierwszy przyszły termin płatności odsetek). Wartość nogi stałej kontraktu IRS/CCIRS (wyrażona w

walucie tej nogi), to jest wartość obecna na moment t strumienia przepływów $C(T_1), \dots, C(T_M)$, dana jest wzorem:

w przypadku kontraktu IRS

$$NPV_{\text{fixed}} = \sum_{i=1}^M DF(t, T_i) C(T_i) = R_{\text{IRS}} \sum_{i=1}^M \Delta_i N_i DF(t, T_i), \quad (4.5a)$$

w przypadku kontraktu CCIRS

$$NPV_{\text{fixed}} = \sum_{i=1}^M DF(t, T_i) C(T_i) = R_{\text{CCIRS}} \sum_{i=1}^M \Delta_i N_i DF(t, T_i) + \sum_{i=1}^M A_i DF(t, T_i), \quad (4.5b)$$

gdzie $DF(t, T)$ oznacza czynnik dyskontujący przepływ następujący w chwili T na moment wyceny t odpowiadający strukturze stóp procentowych waluty nogi kontraktu obowiązującej w dniu wyceny.

Uwaga: W pewnych sytuacjach wyceniając kontrakt IRS do obu nóg kontraktu dokładane są (wzajemnie znoszące się) przepływy amortyzacyjne oraz końcowe wymiany nominalów. Wówczas, wycena tak zmodyfikowanej nogi stałej kontraktu IRS jest dana wzorem (4.5b). W szczególności, dla kontraktów **bez amortyzacji** (w przypadku IRS z dołożoną końcową wymianą nominalów) mamy

$$NPV_{\text{fixed}} = \sum_{i=1}^M DF(t, T_i) C(T_i) = R_{\text{IRS/CCIRS}} N \sum_{i=1}^M \Delta_i DF(t, T_i) + N DF(t, T_M), \quad (4.6)$$

bowiem wtedy $A_i = 0$ i $N_i = N$ dla $i = 1, \dots, M - 1$ oraz $A_M = N$. Zauważmy, że wówczas (4.6) można interpretować jako wycenę obligacji o stałym kuponie równym $R_{\text{IRS/CCIRS}}$.

Wycena nogi zmiennej

Aby ujednolicić formuły na wycenę dla kontraktów IRS i CCIRS, założymy, że w przypadku kontraktów IRS dołożone zostały (wzajemnie znoszące się) przepływy amortyzacyjne oraz końcowe wymiany nominalów. Tak samo jak w przypadku wyceny nogi stałej, do wyceny nogi zmiennej bierzemy tylko *niezrealizowane* przepływy, to znaczy te które nastąpią w przyszłości w stosunku do daty wyceny t . Załóżmy, że pierwszym aktualnie trwającym okresem odsetkowym jest okres $[\tilde{T}_0, \tilde{T}_1]$, przy czym $t \in [\tilde{T}_0, \tilde{T}_1^{\text{fix}})$, gdzie $\tilde{T}_1^{\text{fix}}$ jest datą ustalenia (fixingu) stopy rynkowej na kolejny okres odsetkowy $[\tilde{T}_1, \tilde{T}_2]$. Wartość rynkowej stopy procentowej $L_1 = L(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1)$ jest znana i w związku z tym przepływ następujący w chwili $\tilde{T}_1$ ma dobrze określoną wielkość

$$\tilde{C}(\tilde{T}_1) = (m_* L_1 + m) \tilde{\Delta}_1 \tilde{N}_1 + \tilde{A}_1.$$

Z rozważań przeprowadzonych przy omawianiu kontraktów FRA i stóp forward (patrz Wniosek z Wykładu 3) wynika, że wyceniając przepływy pieniężne nogi zmiennej (ich części odsetkowe) następujące w chwilach $\tilde{T}_j > \tilde{T}_1$ możemy zastąpić stopy przyszłe $L(\tilde{T}_{j-1}, \tilde{T}_j)$ bieżącymi stopami forward, to znaczy stopami $F_j = F(t, \tilde{T}_{j-1}, \tilde{T}_j)$. Wówczas wycena nogi zmiennej (wyrażona w walucie tej nogi) dana jest wzorem

$$\begin{aligned} NPV_{\text{float}} = & ((m_* L_1 + m) \tilde{\Delta}_1 \tilde{N}_1 + \tilde{A}_1) DF(t, \tilde{T}_1) \\ & + \sum_{j=2}^J ((m_* F_j + m) \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j + \tilde{A}_j) DF(t, \tilde{T}_j), \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie przypomnijmy stopa forward F_j spełnia warunek

$$\frac{1}{DF(t, \tilde{T}_{j-1})} (1 + F_j \cdot \tilde{\Delta}_j) = \frac{1}{DF(t, \tilde{T}_j)}. \quad (4.8)$$

W przypadku, gdy $t \in [\tilde{T}_1^{\text{fix}}, \tilde{T}_1)$, stopa $L_2 = L(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ dla kolejnego okresu odsetkowego jest również ustalona na rynku. Wówczas, prócz przepływu następującego w $\tilde{T}_1$, ustaloną wartość ma także przepływ, który nastąpi w $\tilde{T}_2$. Zatem, w tym przypadku, wzór na wycenę ma następującą postać

$$\begin{aligned} NPV_{\text{float}} = & ((m_* L_1 + m) \tilde{\Delta}_1 \tilde{N}_1 + \tilde{A}_1) DF(t, \tilde{T}_1) + \\ & ((m_* L_2 + m) \tilde{\Delta}_2 \tilde{N}_2 + \tilde{A}_2) DF(t, \tilde{T}_2) + \\ & \sum_{j=3}^J ((m_* F_j + m) \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j + \tilde{A}_j) DF(t, \tilde{T}_j). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Uproszczone postaci wzorów na wycenę nogi zmiennej

Korzystając z warunku na stopę forward (4.8), wzory (4.7) i (4.9) możemy przekształcić tak, by nie zawierały odwołań do stóp forward. Pokażemy to w przypadku, gdy czynnik multiplikatywny m_* stopy nogi zmiennej wynosi 1 (wtedy bowiem wzory te przyjmują szczególnie prostą postać).

Rozpatrzmy wyrażenia postaci

$$\sum_{j=j_0}^J (F_j \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j + \tilde{A}_j) DF(t, \tilde{T}_j), \quad (4.10)$$

które są składowymi wzoru (4.7) dla $j_0 = 2$ i wzoru (4.9) dla $j_0 = 3$. Korzystając z definicji stopy forward (4.8), składniki sumy (4.10) odpowiadające przepływowi odsetkowym możemy przekształcić w następujący sposób

$$\tilde{\Delta}_j F_j \tilde{N}_j DF(t, \tilde{T}_j) = (DF(t, \tilde{T}_{j-1}) - DF(t, \tilde{T}_j)) \tilde{N}_j.$$

Stąd, po uwzględnieniu definicji amortyzacji $\tilde{A}_j = \tilde{N}_j - \tilde{N}_{j+1}$, wyrażenia pod sumą (4.10) możemy zapisać w postaci

$$(F_j \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j + \tilde{A}_j) DF(t, \tilde{T}_j) = DF(t, \tilde{T}_{j-1}) \tilde{N}_j - DF(t, \tilde{T}_j) \tilde{N}_{j+1}.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń pod znak sumy (4.10) i po przeprowadzeniu stosownych uproszczeń pamiętając, że $\tilde{N}_{J+1} = 0$, otrzymamy

$$\sum_{j=j_0}^J (F_j \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j + \tilde{A}_j) DF(t, \tilde{T}_j) = DF(t, \tilde{T}_{j_0-1}) \tilde{N}_{j_0}. \quad (4.11)$$

Równość (4.11) wykorzystujemy do uproszczenia wzorów na wycenę nogi zmiennej.

► Uproszczona postać wzoru (4.7).

Po wstawieniu (4.11) napisanego w przypadku $j_0 = 2$ do wzoru (4.7) i przeprowadzeniu stosownych uproszczeń, otrzymujemy

$$NPV_{\text{float}} = (1 + L_1 \tilde{\Delta}_1) \tilde{N}_1 DF(t, \tilde{T}_1) + m \sum_{j=1}^J \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j DF(t, \tilde{T}_j). \quad (4.12)$$

Zauważmy, że wzór (4.12) w przypadku $m = 0$ jest identyczny ze wzorem na wycenę obligacji o zmiennym kuponie, której okresy odsetkowe są takie same jak na zmiennej nodze kontraktu IRS.

► Uproszczona postać wzoru (4.9).

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, po wstawieniu (4.11) napisanego w przypadku $j_0 = 3$ do wzoru (4.9) i przeprowadzeniu stosownych uproszczeń, otrzymujemy

$$\begin{aligned} NPV_{\text{float}} = & (L_1 \tilde{\Delta}_1 \tilde{N}_1 + \tilde{A}_1) DF(t, \tilde{T}_1) + \\ & (1 + L_2 \tilde{\Delta}_2) \tilde{N}_2 DF(t, \tilde{T}_2) + m \sum_{j=1}^J \tilde{\Delta}_j \tilde{N}_j DF(t, \tilde{T}_j). \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3. Standardowy kontrakt IRS

(ang. *plain vanilla IRS, generic IRS*)

Na rynku kwotowane są stopy standardowych kontraktów IRS o szerokim zakresie terminów zapadalności: zwykle od 2Y do 10Y, 15Y, 20Y, 30Y oraz czasami 1Y (choć te na ogół mają nieco inną konstrukcję niż kontrakty IRS o dłuższych terminach zapadalności - noga zmienna kontraktu 1Y IRS płaci odsetki z większą częstotliwością niż kontrakty IRS o dłuższych czasach trwania).

Struktura standardowego kontraktu IRS jest następująca:

- jednowalutowy,
- wymiana samych odsetek: fixed/float,
- okresy odsetkowe nogi stałej mają taką samą długość: zwykle rok (dla PLN, USD, EUR), lub pół roku (dla GBP, JPY),
- bez marż nakładanych na stopę nogi zmiennej: $m_* = 1$ oraz $m = 0$,
- bez amortyzacji: nominal jest stały w trakcie trwania kontraktu,
- obie nogi zaczynają (i kończą) się w tych samych chwilach czasu.

Wycena standardowego kontraktu IRS (receive: fixed, pay: float)

Wycenę standardowego kontraktu IRS w chwili $t \in [\tilde{T}_0, \tilde{T}_1^{\text{fix}})$ uzyskujemy stosując wzór (4.6) do wyceny nogi stałej oraz wzór (4.12) z $m = 0$ i $\tilde{N}_1 = N$ do wyceny nogi zmiennej. Aby zastosować te wzory do przepływów nóg tego kontraktu dołożyliśmy w terminie zapadalności kontraktu $T_M = \tilde{T}_J$ dwa wzajemnie znoszące się przepływy odpowiadające końcowym wymianom nominalów N . Stąd wycena standardowego kontraktu IRS dana jest wzorem

$$\begin{aligned} P_{\text{IRS}} = & NPV_{\text{fixed}} - NPV_{\text{float}} \\ = & R_{\text{IRS}} N \sum_{i=1}^M \Delta_i DF(t, T_i) + N DF(t, T_M) - (1 + L_1 \tilde{\Delta}_1) N DF(t, \tilde{T}_1), \end{aligned} \quad (4.14)$$

Standardowy kontrakt IRS w chwili zawarcia kontraktu

Rozpatrzmy wycenę standardowego kontraktu IRS w chwili zawarcia kontraktu. Wówczas data wyceny t (będąca chwilą zawarcia kontraktu) jest równocześnie chwilą ustalenia stopy zmiennej $L_1 = L(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1)$ dla pierwszego okresu odsetkowego nogi zmiennej, to jest $t = \tilde{T}_0^{\text{fix}}$, a $\tilde{T}_0 = T_0$ jest bieżącą datą spot. Wartość kontraktu w chwili t dana jest wzorem (4.14), pomimo tego że wyceniamy kontrakt w dacie $t = \tilde{T}_1^{\text{fix}}$ ustalenia stopy rynkowej L_1 dla pierwszego okresu odsetkowego nogi zmiennej $[\tilde{T}_0, \tilde{T}_1)$ (bowiem w $\tilde{T}_0 = T_0$ nie ma płatności nogi zmiennej). Z własności stopy L_1 i sposobu wyznaczania czynników dyskontowych z kwotowań stóp depozytowych wynika, że

$$(1 + L_1 \tilde{\Delta}_1) DF(t, \tilde{T}_1) = DF(t, \tilde{T}_0) = DF(t, T_0).$$

Wtedy wzór (4.14) możemy zapisać w postaci

$$P_{\text{IRS}} = DF(t, T_0) N \left(R_{\text{IRS}} \sum_{i=1}^M \Delta_i DF(t, T_0, T_i) + DF(t, T_0, T_M) - 1 \right), \quad (4.15)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$DF(t, T_0, T) = \frac{DF(t, T)}{DF(t, T_0)}. \quad (4.16)$$

Czynniki dyskontowe

$$DF^*(t, T) = DF(t, T_0, T),$$

występujące w (4.15), określone wzorem (4.16), są czynnikami (obserwowanymi w chwili bieżącej t) dyskontującymi do daty spot.

Stopa standardowego kontraktu IRS

Standardowy kontrakt IRS jest zawierany ze stopą R_{IRS} dobraną tak by wartość kontraktu w chwili jego zawarcia wynosiła zero (strony kontraktu IRS nie ponoszą kosztów początkowych zawierając kontrakt). Ze wzoru (4.15) wynika, że stopa R_{IRS} spełnia równanie

$$R_{\text{IRS}} \sum_{i=1}^M \Delta_i DF^*(t, T_i) + DF^*(t, T_M) = 1, \quad (4.17)$$

skąd stopa ta wynosi

$$R_{\text{IRS}} = \frac{1 - DF^*(t, T_M)}{\sum_{i=1}^M \Delta_i DF^*(t, T_i)}.$$

Zauważmy, że warunek (4.17) oznacza, że obligacja o stałym oprocentowaniu R_{IRS} z terminem wykupu T_M , która płaci odsetki z taką samą częstotliwością jak noga stała kontraktu IRS, jest *at par*, to znaczy, cena tej obligacji jest równa jej wartości nominalnej. Stąd, stopy kontraktów IRS mogą być traktowane jako punkt odniesienia przy określaniu oprocentowania nowo emitowanych obligacji stałokuponowych.

Uwaga 4.1. Stopę $R_{\text{IRS/CCIRS}}$ niestandardowego kontraktu IRS/CCIRS na ogół wyznacza się również tak, by wartość tego kontraktu w chwili zawarcia wynosiła zero.

Stopa standardowego kontraktu IRS jako średnia stóp forward

Znów rozpatrzmy standardowy kontrakt IRS, w którym odsetki po obu nogach są płacone z taką samą częstotliwością. Ponieważ wartość kontraktu w chwili jego zawarcia wynosi zero, to

$$R_{\text{IRS}} \sum_{i=1}^M \Delta_i DF^*(t, T_i) = \sum_{i=1}^M F_i \tilde{\Delta}_i DF^*(t, T_i). \quad (4.18)$$

Zatem,

$$R_{\text{IRS}} = \frac{\sum_{i=1}^M F_i \tilde{\Delta}_i DF^*(t, T_i)}{\sum_{i=1}^M \Delta_i DF^*(t, T_i)}. \quad (4.19)$$

Ze wzoru (4.19) wynika, że jeśli stopy forward i stopa R_{IRS} są wyrażane w tej samej konwencji, czyli gdy $\Delta_i = \tilde{\Delta}_i$ dla każdego $i = 1, \dots, M$, to

$$\min\{F_i\} \leq R_{\text{IRS}} \leq \max\{F_i\}.$$

Ponadto, jak widać z (4.19), stopa R_{IRS} jest średnią ważoną stóp F_i . Jako przykład, weźmy dwuletni kontrakt IRS z odsetkami płaconymi co pół roku po obu nogach. Ponieważ

$$F_2 = R_{\text{FRA6x12}}, \quad F_3 = R_{\text{FRA12x18}}, \quad F_4 = R_{\text{FRA18x24}},$$

wzór (4.19) oznacza, że stopa $R_{\text{IRS 2Y}}$ jest, w przybliżeniu, średnią ważoną czynnikami dyskontowymi, obserwowalnymi na rynku: stopy LIBOR 6M oraz stóp FRA na kolejne 6-miesięczne okresy.

Standardowy kontrakt IRS vs. seria kontraktów FRA

Rozpatrzmy standardowy kontrakt IRS, w którym odsetki po obu nogach są płacone z taką samą częstotliwością. Wówczas taki kontrakt jest serią wymian odsetek

- $R_{\text{FRA}} \cdot \Delta_i \cdot N$ w chwili T_i ,
- $-F_i \cdot \tilde{\Delta}_i \cdot N$ w chwili T_i .

Każda taka wymiana (za wyjątkiem pierwszej) może być potraktowana jako syntetyczne przepływy (sprzedanego) kontraktu FRA $T_{i-1} \times T_i$ ze stopą R_{IRS} . Pierwsza wymiana w kontrakcie IRS jest wymianą odsetek według stopy R_{IRS} za odsetki według ustalonej już rynkowej stopy referencyjnej. Tak więc wartość takiego kontraktu IRS jest taka sama jak wartość serii sprzedanych kontraktów FRA $T_1 \times T_2, \dots, \text{FRA } T_{M-1} \times T_M$ z taką samą stopą równą R_{IRS} oraz pierwszej wymiany odsetek. Warto zauważyć, że te kontrakty FRA mają na ogół nierynkową stopę (ang. *off-market*), wszystkie taką samą równą R_{IRS} .

4.4. Bootstrapping czynników dyskontowych

W praktyce wzór (4.17) stosuje się raczej do wyznaczenia wartości czynników dyskontowych niż do wyznaczania stóp kontraktów IRS, bowiem to właśnie na podstawie kwotowań stóp standardowych kontraktów IRS wyznacza się strukturę stóp procentowych i czynników dyskontowych. Niech R_M oznacza stopę standardowego kontraktu IRS, który zapada w T_M . Terminy zapadalności standardowych kontraktów IRS, w których odsetki nogi stałej są płacone rocznie, są „wielokrotnościami lat”, co zaznaczamy pisząc $T_k = kY$ (gdzie Y symbolizuje okres roczny, a k jest liczbą naturalną). W przypadku gdy odsetki nogi stałej są płacone co pół roku, terminy zapadalności tych kontraktów są „wielokrotnościami sześciomiesięcznych okresów” i wówczas $T_k = kY$, gdzie $k = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \dots$.

Przekształcając (4.17) otrzymujemy

$$DF^*(t, T_M) = \frac{1 - R_M \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_i DF^*(t, T_i)}{1 + R_M \Delta_M} = \frac{1 - R_M Q_{M-1}}{1 + R_M \Delta_M}, \quad (4.20)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$Q_K = \sum_{i=1}^K \Delta_i DF^*(t, T_i).$$

Wzór (4.20) stosujemy rekurencyjnie przy założeniu, że mamy już wyznaczony (innymi metodami) czynnik dyskontowy $DF^*(t, T_1)$. Zauważmy również, że aby rekurencja była możliwa musimy założyć, że końce okresów odsetkowych kontraktu IRS użytego w (4.20) są zgodne z terminami zapadalności poprzednich kontraktów i wówczas mamy związek

$$Q_M = Q_{M-1} + \Delta_M DF^*(t, T_M).$$

Powyższe równanie ułatwia przeprowadzenie rekurencyjnych obliczeń wartości czynników dyskontowych.

Problem gładkości stóp forward

Jakość zbudowanej krzywej czynników dyskontowych (zerokuponowych stóp procentowych) jest oceniana na podstawie przebiegu implikowanych z tej krzywej stóp forward. Jednym z kryteriów takiej oceny jest gładkość (regularność) względem t stóp forward $f(t, t+h)$ o pewnym ustalonym tenorze h .

Na gładkość stóp forward wpływ mają

- wartości danych wejściowych użytych do wyznaczenia czynników dyskontowych – te przy czym można uznać za obiektywne,
- sposoby uzupełniania brakujących danych wejściowych, np. interpolacje stóp par,
- metody interpolacji i ekstrapolacji czynników dyskontowych,
- założenia odnośnie postaci funkcjonalnej krzywej czynników dyskontowych i sposobu jej estymacji.

Wyznaczanie krzywej czynników dyskontowych o gładkich stopach forward

Stopy forward implikowane z krzywej swapowej otrzymanej przez bootstrapping często mają nieregularny przebieg, który nie ma ekonomicznego uzasadnienia. Poniżej opiszemy sposób wyznaczania krzywej swapowej która dokładnie wycenia kontrakty IRS i dla której stopy implikowane zmieniają się w sposób regularny.

Idea wyznaczania takiej krzywej jest następująca

- czynniki dyskontowe są wyznaczane przez stopy forward o ustalonym relatywnie krótkim tenorze (np. trzy miesiące), które dobieramy tak, by
- kontrakty IRS były prawidłowo wycenione przez tą krzywą,
- stopy forward zmieniały się w sposób regularny.

Oznaczenia:

- $F_0 = L(3M)$ – znana (z rynku) stopa typu LIBOR dla okresu 3M
- $L(6M)$ – znana (z rynku) stopa typu LIBOR dla okresu 6M
- $F_1 = F(3M, 6M)$ – stopa forward implikowana ze znanych (z rynku) stóp $L(3M)$ oraz $L(6M)$; alternatywnie zamiast korzystać ze stopy $L(6M)$ można za F_1 przyjąć stopę kontraktu FRA3x6
- $F_j = f(j * 3M, (j + 1) * 3M)$ dla $j = 2, \dots, J$ – szukane 3M stopy forward dla kolejnych 3M okresów począwszy od 6M
- $\Delta_j = \Delta(j * 3M, (j + 1) * 3M)$ – długość okresu depozytowego stopy F_j
- R_n – rynkowe kwotowania stóp wybranego zestawu n -letnich kontraktów IRS, to jest dla $n \in \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$

Stopy forward F_j ($j = 2, \dots, J$) znajdujemy rozwiązując następujący problem optymalizacyjny

$$\min \sum_{j=2}^J \omega_j (F_j - F_{j-1})^2 \quad (4.21)$$

pod warunkiem, że dla każdego $n \in \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ zachodzi

$$R_n \sum_{k=1}^n \Delta((k-1)Y, kY) DF(kY) = 1 - DF(nY), \quad (4.22)$$

gdzie czynniki dyskontowe są obliczone następującym wzorem rekurencyjnym

$$DF((j+1) * 3M) = \frac{DF(j * 3M)}{1 + F_j \cdot \Delta_j} \quad \text{dla } j = 1, \dots, J, \quad (4.23)$$

przy czym

$$DF(6M) = \frac{1}{1 + L(6M) \cdot \Delta(0, 6M)} \quad \left(\text{lub } DF(6M) = \frac{DF(3M)}{1 + F_1 \cdot \Delta(3M, 6M)} \right).$$

W wyrażeniu (4.21) $\omega_j > 0$ są wagami, które określają relatywny wpływ poszczególnych składników na wartość sumy. Zwykle przyjmuje się, że $\omega_j = 1$ dla każdego j . Wartość sumy (4.21) mierzy stopień zmienności (wahanie) stóp forward. Im ta wartość jest mniejsza, tym stopy zmieniają się w bardziej regularny sposób. Dobierając wagi ω_j w specyficzny sposób, możemy wymusić w której części krzywej stopy forward zachowują się regularnie a w której dopuszczamy większe wahania tych stóp.

Warunek (4.22) gwarantuje, że kontrakty IRS z wybranego zestawu są poprawnie wyceniane przez krzywą. W odróżnieniu do standardowego bootstrappingu, zestaw kontraktów IRS nie musi się składać ze wszystkich kolejnych kontraktów. Zagadnienie optymalizacyjne (4.21) – (4.22) rozwiązuje się stosując standardowe algorytmy numeryczne, na przykład metodę gradientów

sprzężonych lub metodę Newtona (dostępne w narzędziu Solver arkusza kalkulacyjnego MS Excel).

Możliwe są jeszcze inne warianty powyższej metody. Na przykład,

- zamiast stóp forward, szukamy stóp zerokuponowych kapitalizowanych w sposób ciągły y_j dla określonych tenorów, na przykład, postaci $t_j = j * 3M$, takich, że jeżeli na ich podstawie wyliczyć czynniki dyskontowe i stopy forward, to spełnione są warunki (4.21) – (4.22).
- Wtedy w powyższym zadaniu zmieniamy tylko sposób wyznaczania czynników dyskontowych na następujący

$$DF(j * 3M) = \exp(-y_j \cdot t_j) \quad \text{dla } j = 2, 3, \dots, J,$$

a stopy forward występujące w (1) obliczamy wzorem

$$F_j = \frac{1}{\Delta_j} \left(\frac{DF(j * 3M)}{DF((j+1) * 3M)} - 1 \right).$$

4.5. Własności stóp kontraktów IRS

Korzystając ze związku (4.17) dla kontraktu IRS zapadalnego w T_{M-1} , który zapisaliśmy w postaci

$$R_{M-1} Q_{M-1} = 1 - DF^*(t, T_{M-1}),$$

wyrażenie (4.18) możemy przedstawić w postaci

$$DF^*(t, T_M) = \frac{1 - \frac{R_M}{R_{M-1}} (1 - DF^*(t, T_{M-1}))}{1 + R_M \Delta_M}. \quad (4.24)$$

Ze wzoru (4.24) wynikają dwa warunki na poprawność struktury czynników dyskontowych. Mianowicie, warunek $DF^*(t, T_M) > 0$ oznacza, że stopa R_M kontraktu IRS musi spełniać nierówność

$$\frac{R_M}{R_{M-1}} (1 - DF^*(t, T_{M-1})) < 1. \quad (4.25)$$

Z warunku na monotoniczność czynników dyskontowych $DF^*(t, T_M) < DF^*(t, T_{M-1})$ otrzymujemy natomiast następujące ograniczenie

$$1 - \frac{R_M}{R_{M-1}} (1 - DF^*(t, T_{M-1})) < (1 + R_M \Delta_M) DF^*(t, T_{M-1}). \quad (4.26)$$

Korzystając z tych dwóch warunków, można pokazać (Zadanie 4.6), że jeśli $DF^*(t, T) \rightarrow 0$ dla $T \rightarrow \infty$ oraz gdy ciąg stóp R_M jest ograniczony, to

$$\frac{R_M}{R_{M-1}} \longrightarrow 1 \quad \text{gdy } M \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 4.1 (Terminowy kontrakt IRS (ang. *forward starting IRS*)). W terminowym kontrakcie IRS rozpoczęcie okresów odsetkowych następuje w przyszłości w stosunku do daty spot dla daty zawarcia kontraktu (inaczej: data ustalenia wartości rynkowej stopy dla pierwszego okresu odsetkowego nogi zmiennej znajduje się w przyszłości w stosunku do daty zawarcia kontraktu).

- (a) Wycen standardowy kontrakt terminowy IRS w chwili t która znajduje się przed rozpoczęciem okresów odsetkowych kontraktu.

- (b) Przy założeniu, że wartość tego kontraktu w chwili jego zawarcia wynosi zero, znajdź wzór na wartość stopy tego kontraktu.

Ćwiczenie 4.2. Wyprowadź wzory uproszczone na wycenę nogi zmiennej kontraktu IRS/C-CIRS bez założenia $m_* = 1$.

Ćwiczenie 4.3. (a) Dane są następujące wielkości:

- sześciomiesięczna stopa depozytowa wynosi 6.00%,
- kwotowania kontraktów FRA na przyszłą stopę procentową wynoszą FRA6x12 – 6.20%, FRA12x18 – 6.30%,
- stopa dwuletniego kontraktu IRS wynosi 6.50%,
- ceny obligacji zerokuponowych, które zapadają za dwa i pół roku oraz za trzy lata, wynoszą odpowiednio $B(2\frac{1}{2}Y) = 85.00$ oraz $B(3Y) = 82.50$.

Wyznacz wartości czynników dyskontowych dla okresów czasu będących wielokrotnościami sześciomiesięcznych okresów do trzech lat włącznie. W obliczeniach, dla uproszczenia, przyjmij, że długość n -miesięcznego okresu czasu ($n = 6, 12, 18, 24, 30, 36$) wynosi $\frac{n}{12}$ lat.

(b) Rozpatrzmy jednowalutowy kontrakt wymiany procentowej typu fixed/float ze zmiennym nominałem o czasie trwania 3 lata. W trakcie trwania kontraktu nominal kontraktu jest redukowany o 20% początkowej wartości (tj. wartości w chwili zawarcia) po każdym rocznym okresie odsetkowym. Odsetki po stronie *stałej* (fixed leg) są płacone co roku, a po stronie *zmiennej* (float leg) co pół roku.

Przy danych rynkowych podanych w punkcie (a) oblicz stopę *stałej* strony kontraktu, przy której wartość tego kontraktu w chwili zawarcia wynosi zero.

Ćwiczenie 4.4 (Rollercoaster swap). Firma Y ma dług od którego płaci odsetki po stopie WIBOR 6M plus 50 bp marży. Struktura tego długu jest następująca: w pierwszym roku nominal długu wynosi 50 mln PLN, w drugim 80 mln PLN, w trzecim 100 mln PLN, w czwartym 60 mln PLN, i ostatnim piątym roku 40 mln PLN. Firma Y chce zrestrukturyzować płatności odsetkowe od tego długu w ten sposób by przez pięć lat płacić stopę WIBOR 6M powiększoną o marżę m od stałego nominalu w wysokości 65 mln PLN. W tym celu firma Y zawiera z bankiem X odpowiedni kontrakt IRS. Jaką minimalną wartość marży m Bank X powinien zakwotować firmie Y? W celu wykonania obliczeń przyjmij, że stopy kontraktów IRS (annual, ACT/365) wynoszą: 1Y – 5.50%, 2Y – 5.60%, 3Y – 5.70%, 4Y – 5.90%, 5Y – 6.00%, oraz dla uproszczenia obliczeń załóż, że każdy roczny okres ma 365 dni.

Ćwiczenie 4.5 (Asset swap). Rozpatrzmy dwuletnią obligację, która płaci co pół roku kupon według stopy zmiennej L (typu LIBOR) powiększonej o marżę m . Cena tej obligacji wynosi 101. Inwestor jest skłonny kupić tę obligację pod warunkiem że jednocześnie będzie mógł zawrzeć kontrakt IRS, który zamieni odsetki otrzymywane z tej obligacji na odsetki liczone według stopy stałej, przy czym stopa tego kontraktu IRS powinna być tak dobrana by cały pakiet (obligacja plus kontrakt IRS) był *at par*.

- (a) Oblicz wysokość marży m .
- (b) Oblicz wysokość stopy kontraktu IRS.
- (c) Oblicz oprocentowanie stałego kuponu, który w efekcie nabycia tego pakietu (asset swapa) będzie otrzymywał inwestor.

Do obliczeń użyj następującej krzywej czynników dyskontowych

$$\begin{pmatrix} T & 6M & 1Y & 1.5Y & 2Y & 2.5Y & 3Y \\ DF & 0.97 & 0.95 & 0.93 & 0.91 & 0.88 & 0.85 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 4.6. Pokaż, że jeśli $DF^*(t, T) \rightarrow 0$ dla $T \rightarrow \infty$ oraz gdy ciąg stóp R_M jest ograniczony, to $\frac{R_M}{R_{M-1}} \rightarrow 1$ przy $T_M \rightarrow \infty$.

Ćwiczenie 4.7. Niech R_n oznacza stopę n -letniego kontraktu IRS, który zapada w $T = nY$.

(a) Pokaż, że

$$DF(nY) = \frac{DF((n-1)Y) - (R_n - R_{n-1}) \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k DF(kY)}{1 + R_n \Delta_n}.$$

(b) Korzystając z wyniku punktu (a), pokaż, że jeśli $R_n = R_{n-1}$, to stopa prosta forward dla okresu czasu $[(n-1)Y, nY]$ wynosi R_n .

(c) W szczególności, pokaż, że jeśli struktura stóp procentowych kontraktów IRS jest płaska, tzn. $R_n = R$ dla każdego $n = 1, 2, \dots$, to proste stopy forward $F((n-1)Y, nY)$ są takie same dla każdego n i wynoszą R . Ponadto, pokaż że wówczas

$$DF(nY) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + R \Delta_k}.$$

Jeśli założyć dodatkowo, że $\Delta_k = 1$ dla każdego k , to powyższy wzór przyjmuje szczególnie czytelną postać, mianowicie

$$DF(nY) = \frac{1}{(1 + R)^n}.$$

Ćwiczenie 4.8. (a) *Inverse floater (bull floater)*

Inverse floater to papier wartościowy, w którym kupon jest liczony według stopy $R - L$, gdzie R jest stałą stopą, a L zmienną stopą rynkową (typu LIBOR, WIBOR), i oczywiście w terminie zapadalności zwraca nominal. Zwykle, stopa R jest istotnie większa niż stopa L ustalona na rynku w chwili emisji papieru i jest dobierana tak by w chwili emisji papier był *at par*. Ile powinna wynosić stopa R ?

(b) *Bear floater*

Bear floater to papier wartościowy, w którym kupon jest liczony według stopy $2 \cdot L - R$, gdzie R jest stałą stopą, a L zmienną stopą rynkową (typu LIBOR, WIBOR), i oczywiście w terminie zapadalności zwraca nominal. Zwykle, stopa R jest dobierana tak by w chwili emisji papier był *at par*. Ile powinna wynosić stopa R ?

Uwaga: W praktyce zwykle warunki *inverse floater* i *bear floater* ograniczają z dołu kupon tak by miał on zawsze nieujemną wartość. Wówczas, wyznaczając stopę R należy uwzględnić koszt opcji gwarantującej nieujemność kuponu. Wróćmy do tego problemu w wykładzie 12.

Ćwiczenie 4.9. Rozpatrzmy standardowy kontrakt IRS (receive fixed) o rezydualnym czasie trwania n lat, który był zawarty ze stopą $R(0)$. Bieżące kwotowanie standardowego kontraktu IRS nY (pay fixed) wynosi R_n . Pokaż, że koszt przedterminowego zamknięcia zawartego kontraktu (na jednostkę nominalu) wynosiłby

$$P = (R(0) - R_n) \sum_{i=1}^{M_n} \Delta_i DF^*(T_i),$$

gdzie Δ_i oznacza ułamek roku i -tego okresu odsetkowego nogi stałej kontraktu, T_i koniec tego okresu, a M_n jest liczbą okresów odsetkowych nogi stałej, $DF^*(T)$ jest czynnikiem dyskontującym do daty spot.

Ćwiczenie 4.10. Rozpatrzmy kontrakt IRS (pay fixed annual / receive float semi-annual) o zmiennym nominale o rezydualnym czasie trwania 3 lata zawarty ze stopa 5.00%. Nominał tego kontraktu IRS w ciągu kolejnych trzech lat jest następujący: w 1 roku – 120 mln PLN, w 2 roku – 80 mln PLN, w 3 roku – 100 mln PLN. Bieżące kwotowanie standardowego kontraktu IRS 3Y (fixed annual / float semi-annual) wynosi 5.00%. Czy zamykając w chwili bieżącej kontrakt IRS zrealizujemy zysk czy stratę?

5. Kontrakty Forward i Futures

5.1. Struktura kontraktów Forward

Kontrakt Forward to umowa kupna / sprzedaży pewnego aktywa (np. akcji, waluty, papieru wartościowego, towaru, etc.)

- w ustalonym umową terminie (data zapadalności kontraktu) T ,
- po ustalonej umową cenie (cena wykonania) K .

Główny obrót kontraktami Forward odbywa się na rynku nieregulowanym (OTC – ang. *Over The Counter*) i w związku z tym te kontrakty nie są wystandaryzowane. Warunki kontraktu, w szczególności nominal kontraktu (ilość aktywa będącego przedmiotem umowy), data zapadalności kontraktu, oraz sposób jego rozliczenia, są dopasowywane do potrzeb stron kontraktu (uzgadniane między stronami kontraktu).

Kontrakt Forward jest zawierany z ceną wykonania K , która jest dobrana tak by w chwili zawarcia kontraktu T_{trad} jego wartość wynosiła zero. Tak więc przy założeniu, że pomijamy wszelkie dodatkowe opłaty związane z transakcją (np. prowizje pośredników), strony kontraktu Forward nie ponoszą kosztów w chwili jego zawarcia.

Strona kontraktu Forward, która

- „kupi” aktywo w terminie zapadalności T , zajmuje *długą* pozycję w tym kontrakcie;
- „sprzeda” aktywo w terminie zapadalności T , zajmuje *krótką* pozycję w tym kontrakcie.

Realizacja kontraktu Forward w terminie zapadalności T następuje przez:

fizyczną dostawę aktywa – strona krótka dostarcza aktywo stronie długiej i otrzymuje od niej ustaloną umową kwotę pieniędzy

albo przez

rozliczenie gotówkowe – strona która traci na kontrakcie płaci drugiej stronie kwotę rozliczenia (taki kontrakt określa się często symbolem NDF od ang. *NonDeliverable Forward*).

Wynik z kontraktu Forward w terminie zapadalności T dla strony, która przyjęła długą pozycję wynosi

$$V_T = S_T - K \quad \text{na jednostkę aktywa,} \quad (5.1)$$

gdzie S_T jest ceną aktywa w chwili T . $|S_T - K|$ jest kwotą rozliczenia kontraktu w przypadku kontraktu realizowanego przez rozliczenie gotówkowe. W przypadku kontraktu realizowanego przez dostawę, taki sam wynik może zrealizować strona długa kontraktu przez natychmiastową w chwili T sprzedaż po cenie S_T dostarczonego aktywa.

Cena wykonania kontraktu Forward

Opiszemy cenę wykonania dla kilku charakterystycznych typów aktywów

- dla aktywa które daje posiadaczowi przychód pieniężny w z góry ustalonych wysokościach i chwilach czasu,
- dla aktywa które daje posiadaczowi ciągle przychód pieniężny wyrażony stopą kapitalizowaną w sposób ciągły,
- w szczególnym przypadku walutowych kontraktów Forward.

Cena wykonania jest wyliczana tak, by wartość kontraktu w chwili jego zawarcia wynosiła zero. Tak wyliczoną cenę wykonania kontraktu Forward nazywamy **ceną forward** aktywa na

dzień T i wtedy oznaczamy ją symbolem F_0 , a gdy zachodzi potrzeba zaznaczenia zależności od T symbolem $F_0(T)$.

Dla uproszczenia notacji przyjmijmy że $T_{\text{trad}} = 0$. W poniższych wzorach $DF(0, \cdot)$ oznacza krzywą czynników dyskontowych dla waluty w której denominowane jest aktywo obowiązującą w dniu zawarcia kontraktu T_{trad} dyskontujących do daty dostawy (zwykle do daty spot) dla transakcji kupna/sprzedaży tego aktywa zawieranej chwili T_{trad} .

► Aktywo daje posiadaczowi przychód pieniężny w z góry ustalonych wysokościach i chwilach czasu.

Niech $C(t_i)$ oznacza przepływ pieniężny następujący w chwili $t_i < T$, gdzie $i = 1, \dots, n$, generowany przez dane aktywo. Na przykład, gdy rozpatrywanym aktywem jest

- obligacja o stałym oprocentowaniu, $C(t_i)$ są kuponami które obligacja płaci jej posiadaczowi;
- akcja, $C(t_i)$ są dywidendami płaconymi przez tą akcję.

Wówczas, cena wykonania kontraktu Forward wynosi

$$K = DF(0, T)^{-1} \left(S_0 - \sum_{i=1}^n DF(0, t_i) C(t_i) \right), \quad (5.2)$$

gdzie S_0 jest ceną aktywa w chwili zawarcia kontraktu.

Uzasadnienie wzoru (5.2). Aby żadna ze stron kontraktu nie mogła przeprowadzić transakcji arbitrażowej używając, między innymi, kontraktu Forward z ceną wykonania K , cena bieżąca aktywa musi być równa sumie wartości bieżących przepływów generowanych przez to aktywo w czasie trwania kontraktu i bieżącej wartości ceny wykonania K . Zatem

$$S_0 = \sum_{i=1}^n DF(0, t_i) C(t_i) + DF(0, T) K$$

skąd po przekształceniu otrzymujemy wzór (5.2). Przypuśćmy, że równość (5.2) nie zachodzi. Na przykład, rozpatrzmy przypadek gdy K jest większe niż prawa strona (5.2). Pokażemy, że wówczas można przeprowadzić następującą transakcję arbitrażową:

- zajmujemy krótką pozycję w kontrakcie Forward z ceną K ,
- w chwili zawarcia kontraktu Forward, pożyczamy na okres czasu $[0, T]$ sumę równą aktualnej wartości aktywa S_0 po stopie $L(0, T)$,
- za S_0 kupujemy na rynku natychmiastowym jednostkę aktywa,
- zawieramy serię transakcji na przyszłą stopę procentową (FRA) dla okresów $[t_i, T]$ (ze stopami $F(0, t_i, T)$), które zagwarantują ulokowanie dochodów $C(t_i)$ na okres $[t_i, T]$ po tych stopach.

W chwili wygaśnięcia T kontraktu Forward nasz bilans wygląda następująco:

- płacimy sumę $S_0(1 + L(0, T)\Delta(0, T)) = DF(0, T)^{-1}S_0$ jako zwrot zaciągniętej pożyczki,
- otrzymujemy kwoty $C(t_i)(1 + F(0, t_i, T)\Delta(t_i, T)) = DF(0, T)^{-1}DF(0, t_i)C(t_i)$, jako wypłaty ze zrobionych lokat,
- otrzymujemy K za dostarczenie aktywa drugiej stronie kontraktu Forward, czyli netto otrzymamy

$$\begin{aligned} & K + \sum_{i=1}^n DF(0, T)^{-1}DF(0, t_i)C(t_i) - DF(0, T)^{-1}S_0 \\ & = K - DF(0, T)^{-1} \left(S_0 - \sum_{i=1}^n DF(0, t_i)C(t_i) \right) > 0 \end{aligned}$$

zgodnie z przyjętym założeniem. Mamy więc zysk bez ryzyka. Wówczas, działania arbitrażystów szybko doprowadzają do obniżenia ceny kontraktu Forward do poziomu, który nie daje możliwości bezryzykownego zysku.

W drugim przypadku, to jest, gdy cena kontraktu Forward jest niższa niż prawa strona (5.2), przeprowadzamy transakcję arbitrażową, która jest „odwróceniem” strategii wykonanej w poprzednim przypadku:

- zajmujemy długą pozycję w kontrakcie Forward z ceną K ,
- dokonujemy „krótkiej” sprzedaży jednostki aktywa,
- po sprzedaży aktywa, sumę S_0 otrzymaną ze sprzedaży składamy na depozycie na okres czasu $[0, T]$ ze stopą $L(0, T)$,
- zawieramy serię transakcji na przyszłą stopę procentową (FRA) dla okresów $[t_i, T]$ (ze stopami $F(0, t_i, T)$), które zagwarantują nam pożyczanie na okres $[t_i, T]$ po tych stopach kwot $C(t_i)$, które musimy wypłacić właścicielowi aktywa.

Łatwo sprawdzić że, przy naszym założeniu, ta strategia przynosi zysk. Znow mamy arbitraż.

► Aktywo daje posiadaczowi ciągły przychód pieniężny wyrażony stopą kapitalizowaną w sposób ciągły.

Podstawowym przykładem takiego aktywa jest akcja (indeks giełdowy), która płaci ciągłą dywidendę, bądź gotówka w walucie obcej.

Niech q oznacza stopę dochodu (dywidendy) płaconego przez aktywo (akcję). Załóżmy, że otrzymywany dochód jest natychmiast w sposób ciągły reinwestowany w to samo aktywo. Wówczas ilość posiadanego aktywa w chwili $t > 0$ wynosi $N_0 e^{q \cdot \Delta(0, t)}$, gdzie N_0 jest ilością aktywa w $t = 0$, a $\Delta(0, t)$ długością okresu czasu od chwili początkowej do t obliczoną zgodnie z konwencją stopy q . Pokażemy, że cena kontraktu Forward, który zapada w chwili T , na aktywo dające ciągły dochód ze stopą q wynosi

$$K = DF(0, T)^{-1} e^{-q \cdot \Delta(0, T)} S_0. \quad (5.3)$$

Aby uzasadnić (5.3), znow rozpatrujemy dwa przypadki – kiedy K jest większe lub mniejsze niż prawa strona (5.3) – pokazując, że w każdym z nich możemy skonstruować odpowiednie strategie arbitrażowe.

Gdy K jest większe niż prawa strona (5.3), przeprowadzamy w chwili początkowej następujące transakcje:

- zajmujemy krótką pozycję w kontrakcie Forward z ceną K ,
- w chwili zawarcia kontraktu Forward, pożyczamy na okres czasu $[0, T]$ sumę równą $S_0 e^{-q \cdot \Delta(0, T)}$ po stopie $L(0, T)$,
- kupujemy na rynku natychmiastowym $N_0 = e^{-q \cdot \Delta(0, T)}$ „jednostek” aktywa za kwotę $S_0 e^{-q \cdot \Delta(0, T)}$,
- dochody generowane przez aktywo w sposób ciągły reinwestujemy w aktywo.

W rezultacie w chwili wygaśnięcia kontraktu Forward bilans naszych transakcji wygląda następująco

- płacimy sumę $S_0 e^{-q \cdot \Delta(0, T)} (1 + L(0, T) \Delta(0, T)) = DF(0, T)^{-1} e^{-q \cdot \Delta(0, T)} S_0$ jako zwrot zaciągniętej pożyczki,
- posiadamy dokładnie jedną jednostkę aktywa (bo $e^{q \cdot \Delta(0, T)} N_0 = 1$), za którą
- otrzymujemy K po dostarczeniu jej drugiej stronie kontraktu Forward.

Tak więc mamy

$$K - DF(0, T)^{-1} e^{-q \cdot \Delta(0, T)} S_0 > 0,$$

czyli uzyskaliśmy zysk bez ryzyka.

W drugim przypadku, gdy K jest mniejsze niż prawa strona (5.3), przeprowadzamy transakcje w „przeciwną” stronę w stosunku do transakcji przeprowadzonych w poprzedniej sytuacji (→ Zadanie na Ćwiczenia).

► Cena wykonania walutowych kontraktów Forward (aktywem jest waluta).

Walutowy kontrakt Forward = FX forward = Outright Forward

Walutę, oznaczmy ją przez CUR_1 , możemy potraktować jak aktywo, które płaci dochód w postaci odsetek, które narastają na rachunku oprocentowanym stopą dla tej waluty. Jeśli bowiem posiadamy gotówkę w tej walucie, to możemy ją zdeponować na rachunku walutowym

i w ten sposób otrzymywać dochód z tytułu posiadania waluty. Oprocentowanie tego rachunku możemy wyrazić przez stopę kapitalizowaną w sposób ciągły i wtedy walutę możemy uznać za aktywo, które płaci dochód w sposób ciągły ze stopą q . Ceną natychmiastową S_0 waluty CUR_1 jest jej kurs wymiany na drugą walutę CUR_2 (kwotowany jako ilość CUR_2 za jednostkę CUR_1). Wówczas cenę walutowego kontraktu Forward, w którym wymieniamy walutę CUR_1 na drugą walutę CUR_2 (na przykład na PLN), otrzymamy ze wzoru (5.3), w którym

- S_0 jest kursem wymiany natychmiastowej (spot) CUR_1 na CUR_2 ,
- stopa dochodu $q = R_1(0, T)$ jest stopą kapitalizowaną w sposób ciągły waluty CUR_1 ,
- a czynnik dyskontowy odpowiada krzywej dla waluty CUR_2 .

Czynnik dyskontowy $DF(0, T)$ dla waluty CUR_2 możemy zapisać w postaci

$$DF(0, T) = e^{-R_2(0, T) \cdot \Delta_2(0, T)},$$

gdzie $R_2(0, T)$ jest stopą kapitalizowaną w sposób ciągły dla okresu $[0, T)$ (dla waluty CUR_2). Wówczas, wzór na cenę walutowego kontraktu Forward przyjmuje następującą formę

$$K = e^{R_2(0, T) \cdot \Delta_2(0, T) - R_1(0, T) \cdot \Delta_1(0, T)} S_0. \quad (5.4)$$

Zwykle, wzór na cenę walutowego kontraktu Forward podaje się w postaci w której występują stopy proste $L_1(0, T)$ i $L_2(0, T)$ (bo takie stopy są standardem kwotowania na rynku terminowych transakcji walutowych):

$$K = S_0 \frac{1 + L_2(0, T) \cdot \Delta_2(0, T)}{1 + L_1(0, T) \cdot \Delta_1(0, T)}. \quad (5.5)$$

Wzory (5.4) i (5.5) określają tak zwany, **kurs terminowy wymiany** walut CUR_1/CUR_2 , który zwykle oznaczamy symbolem F_0 . Upraszczając notację wzór na kurs terminowy napiszemy w następujący sposób

$$F_0 = S_0 \frac{1 + L_2 \cdot \Delta_2}{1 + L_1 \cdot \Delta_1}. \quad (5.6)$$

Związek (5.6) jest określany również jako tzw. **parytet stóp procentowych**. Z (5.6) wynika, że

$$S_0(1 + L_2 \cdot \Delta_2) = (1 + L_1 \cdot \Delta_1)F_0, \quad (5.7)$$

co możemy zinterpretować w następujący sposób: taki sam wynik w T uzyskamy

- (a) wymienając jednostkę waluty CUR_1 po kursie natychmiastowym na S_0 waluty CUR_2 i lokując tę kwotę po stopie L_2 na okres $[0, T)$ (lewa strona (5.7)),
albo

- (b) lokując jednostkę waluty CUR_1 kwotę po stopie L_1 na okres $[0, T)$ i w T wymienając kwotę $1 + L_1 \Delta_1$ waluty CUR_1 po kursie terminowym F_0 na walutę CUR_2 (prawa strona (5.7)).

Punkty swapowe to różnica między kursem terminowym a kursem spotowym:

$$F_0 - S_0 = S_0 \frac{L_2 \Delta_2 - L_1 \Delta_1}{1 + L_1 \Delta_1}. \quad (5.8)$$

Gdy $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, z (5.8) wynika, że

$$\frac{F_0 - S_0}{S_0} = \frac{(L_2 - L_1)\Delta}{1 + L_1 \Delta} \simeq (L_2 - L_1)\Delta,$$

co po przepisaniu do postaci

$$\frac{1}{\Delta} \frac{F_0 - S_0}{S_0} \simeq (L_2 - L_1)$$

oznacza iż zannualizowana stopa zwrotu na transakcji kupna waluty CUR_1 w $t=0$ po S_0 i jej sprzedaży po F_0 w T jest równa różnicy w oprocentowaniu walut.

Aspekty praktyczne dotyczące transakcji FX forward

- Kursy FX forward są kwotowane przez animatorów rynku (ang. *market makers*) dla standardowych okresów depozytowych, zwykle do 1Y.
- Kursy FX forward są kwotowane w postaci punktów swapowych, wyrażonych w tak zwanych pipsach, czyli w 1/10000 waluty niebazowej. Aby uzyskać faktyczny kurs FX forward dla terminów „powyżej” spot należy do bieżącego kursu spot dodać (z właściwym znakiem) odpowiednio przeskalowane punkty swapowe, przy czym należy pamiętać, że punkty swapowe mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne.
- Rynek kwotuje również punkty swapowe dla okresów ON i TN. Wówczas obliczając kursy wymiany dla tych terminów należy punkty swapowe odejmować (z właściwym znakiem) od kursu spot.
- Punkty swapowe są kwotowane w postaci pary sp_{bid}/sp_{ask} gdzie sp_{bid} (sp_{ask}) są punktami swapowymi dla transakcji FX forward w której kupujemy (sprzedajemy) walutę bazową.
- Jeżeli punkty swapowe są dodatnie, to $sp_{bid} < sp_{ask}$. Zdarza się, że ujemne punkty swapowe są kwotowane bez znaku i wtedy w kwotowanej parze sp_{bid}/sp_{ask} będziemy mieli nierówność przeciwną $sp_{bid} > sp_{ask}$. Wówczas, po tej relacji rozpoznajemy czy punkty swapowe są dodatnie czy ujemne.

Replikacja kontraktu FX forward

Pokażemy jak można zreplikować kontrakt FX forward przy pomocy

- pożyczania jednej waluty,
- natychmiastowej wymiany tej waluty na drugą walutę,
- lokaty drugiej waluty.

Ta replikacja pokazuje powiązania rynku transakcji wymian walutowych z rynkiem pieniężnym.

Rozpatrzmy kontrakt FX forward, w którym

- w terminie zapadalności T
- kupimy N_1 waluty CUR_1 , oraz
- sprzedamy N_2 waluty CUR_2 .

Oznacza to, że dokonamy wymiany waluty CUR_2 na walutę CUR_1 po kursie terminowym F_0 takim, że $N_2 = F_0 N_1$.

Effekt wymiany walut w T uzyskamy również w następujący sposób:

- pożyczamy na rynku pieniężnym kwotę $N_2^{(0)}$ taką by $N_2 = N_2^{(0)}(1 + L_2\Delta_2)$, gdzie L_2 jest stopą dla udzielonych pożyczek w walucie CUR_2 na okres czasu $[0, T)$, a Δ_2 długością tego okresu;
- kwotę $N_2^{(0)}$ w walucie CUR_2 wymieniamy na $N_1^{(0)}$ waluty CUR_1 po kursie spot S_0 , czyli $N_1^{(0)} = N_2^{(0)}/S_0$;
- kwotę $N_1^{(0)}$ w walucie CUR_1 lokujemy na rynku pieniężnym ze stopą L_1 dla przyjętych depozytów w walucie CUR_1 na okres czasu $[0, T)$.

Rezultatem tych transakcji w chwili T jest

- zwrot zaciągniętej pożyczki w walucie CUR_2 w kwocie N_2 (płacimy N_2 w walucie CUR_2),
 - otrzymana wypłata ze złożonego depozytu w walucie CUR_1 w kwocie $N_1^{(0)}(1 + L_1\Delta_1)$, gdzie Δ_1 jest długością tego okresu $[0, T)$ (otrzymujemy $N_1^{(0)}(1 + L_1\Delta_1)$ w walucie CUR_1),
- czyli dokonujemy wymiany N_2 w waluty CUR_2 na $N_1^{(0)}(1 + L_1\Delta_1)$ w waluty CUR_1 . Jeśli zatem ta strategia ma replikować kontrakt FX forward, musi zachodzić równość

$$N_1 = N_1^{(0)}(1 + L_1\Delta_1).$$

Stąd mamy

$$F_0 = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_2^{(0)}(1 + L_2\Delta_2)}{N_1^{(0)}(1 + L_1\Delta_1)} = \frac{N_2^{(0)}}{N_1^{(0)}} \cdot \frac{1 + L_2\Delta_2}{1 + L_1\Delta_1} = S_0 \cdot \frac{1 + L_2\Delta_2}{1 + L_1\Delta_1},$$

czyli znów otrzymaliśmy parytet stóp procentowych. Jeśli ten parytet jest spełniony, replikacja transakcji FX forward zestawem złożonym z dwóch transakcji depozytowych i transakcji wymiany natychmiastowej jest możliwa.

Transakcja FX forward jako FX spot plus FX swap

W wyniku połączenia przepływów pieniężnych transakcji depozytowych, które zostały użyte do replikacji transakcji FX forward, uzyskujemy transakcję FX swap (dokładniej, szczególnie przypadek transakcji FX swap). Ta transakcja FX swap, w notacji poprzedniego ustępu, polega na

— wymianie początkowej (w chwili spot): sprzedaży $N_1^{(0)}$ waluty CUR_1 i kupnie $N_2^{(0)}$ waluty CUR_2 , po kursie spot S_0 , tzn. tak, aby $S_0 N_1^{(0)} = N_2^{(0)}$,

oraz

— wymianie końcowej (w terminie wygaśnięcia): kupnie N_1 waluty CUR_1 i sprzedaży N_2 waluty CUR_2 , po kursie forward F_0 , tzn. tak, aby $F_0 N_1 = N_2$, przy czym $N_1 = N_1^{(0)}(1 + L_1 \Delta_1)$ oraz $N_2 = N_2^{(0)}(1 + L_2 \Delta_2)$.

Jak widać, wymiana początkowa w tej transakcji FX swap znosi się z transakcją FX spot wchodzącą w skład strategii replikującej FX forward. Wówczas z FX swap pozostaje pozostaje tylko wymiana końcowa, która jest oryginalną transakcją FX forward.

Uwagi

- Reprezentacja FX forward jako suma FX spot i (tego szczególnego) FX swap pozwala na rozdzielenie ryzyk: FX spot ma tylko ryzyko walutowe (ryzyko kursu wymiany walut), a ten FX swap (w chwili początkowej) – tylko ryzyko stopy procentowej.
- W praktyce rynkowej zawiera się kontrakty FX swap (tzw. *round* FX swap) w których kwota N_1 waluty obcej CUR_1 jest taka sama w wymianie początkowej i wymianie końcowej, a kwoty waluty lokalnej CUR_2 w chwili początkowej i końcowej różnią się „punktami swapowymi” (od nominału N_1)

$$N_2 - N_2^{(0)} = F_0 N_1 - S_0 N_1 = (F_0 - S_0) N_1.$$

Wycena kontraktu Forward

Rozpatrzmy kontrakt Forward, który został zawarty z ceną wykonania K . W chwili zawarcia kontraktu K było równe cenie forward aktywa na które wystawiony został kontrakt. Niech F_0 oznacza bieżącą (to jest w chwili wyceny) cenę forward aktywa. Wówczas wycena długiej pozycji w kontrakcie Forward (jego wartość) dana jest wzorem

$$V_0 = (F_0 - K)DF(0, T), \quad (5.9)$$

gdzie T jest terminem zapadalności kontraktu.

Uzasadnienie wzoru (5.9). Wartością bieżącą kontraktu Forward jest wartość bieżąca przepływów pieniężnych w T które powstałyby w wyniku zamknięcia pozycji w tym kontrakcie. W przypadku długiej pozycji należałoby zająć pozycję krótką w kontrakcie Forward na to samo aktywo i z tym samym terminem wykonania T co zamykany kontrakt. Cena wykonania tego zamykającego kontraktu Forward wynosi F_0 i jest określona jednym z wzorów (5.2), (5.3), (5.4)–(5.5) odpowiednio. W rezultacie, w chwili T zapłacilibyśmy K za kupione aktywo i jednocześnie otrzymalibyśmy F_0 w wyniku sprzedaży tego aktywa. Tak więc, netto nasz wynik w T na tych transakcjach wyniósłby $F_0 - K$, a jego wartość bieżąca wynosi $(F_0 - K)DF(0, T)$. Ponieważ wartość kontraktu Forward (w chwili zawarcia) zamykającego wyceniany kontrakt wynosi zero, to wartość wycenianego kontraktu Forward jest równa $(F_0 - K)DF(0, T)$, czyli mamy (5.9).

Po wstawieniu do (5.9) wyrażeń na cenę forward w poszczególnych przypadkach otrzymujemy następujące formuły na wycenę kontraktów:

- Forward na aktywo dające przychód pieniężny w z góry ustalonych chwilach czasu

$$V_0 = S_0 - \sum_{i=1}^n DF(0, t_i) C(t_i) - DF(0, T) K \quad (5.10)$$

- Forward na aktywo dające ciągły przychód pieniężny wyrażony stopą kapitalizowaną w sposób ciągły

$$V_0 = e^{-q \cdot \Delta(0, T)} S_0 - DF(0, T) K \quad (5.11)$$

- FX Forward

$$V_0 = e^{-R_1(0, T) \cdot \Delta_1(0, T)} S_0 - e^{R_2(0, T) \cdot \Delta_2(0, T)} K = DF_1(0, T) S_0 - DF_2(0, T) K, \quad (5.12)$$

przy czym wzory te podają wartość kontraktów na jednostkę aktywa (na nominal jednostkowy).

Interpretacja wzoru (5.12) dla transakcji FX forward o nominale N_1 (waluty CUR_1):

W wyniku realizacji tego kontraktu dojdzie do wymiany kwoty (nominału) N_1 w walucie CUR_1 na $N_2 = N_1 K$ waluty CUR_2 . Zatem, wycena kontraktu FX forward powinna sprowadzić się do wyceny strumienia przepływów $+N_1$ i $-N_2$ następujących w chwili T . Tak jest w istocie, bowiem

$$V_0 = N_1 (DF_1(0, T) S_0 - DF_2(0, T) K) = S_0 DF_1(0, T) N_1 - DF_2(0, T) N_2. \quad (5.13)$$

Jak widać, ostatnia część wzoru (5.13) jest różnicą dwóch składowych: pierwsza jest przeliczoną na walutę CUR_2 po kursie spotowym S_0 wartością bieżącą otrzymywanego w T nominału N_1 , a druga (odejmowana) jest wartością bieżącą nominału N_2 .

5.2. Kontrakty Futures

Kontrakty Futures są kontraktami terminowymi kupna/sprzedaży pewnego aktywa (towaru) przy czym w odróżnieniu od kontraktów Forward

- funkcjonują na rynku uregulowanym – obrót tymi kontraktami odbywa się przez giełdy
- są produktami wystandaryzowanymi, w tym sensie, że przedmiotem kontraktu są dobrze zdefiniowane aktywa (towary) – ustalone są:
 - ilość aktywa przypadająca na jeden kontrakt,
 - „jakość” aktywa,
 - warunki dostawy, termin dostawy,
 - termin wygaśnięcia kontraktu,
- są rozliczane w trybie dziennym, przez rachunek zabezpieczający,
- na ogół nie dochodzi do fizycznej dostawy aktywa w terminie wykonania kontraktu, a kontrakt jest zamykany przez zajęcie pozycji przeciwnej.

Te cechy kontraktów Futures powodują, że w porównaniu do kontraktów Forward, kontrakty Futures

- mają relatywnie małe ryzyko kredytowe i rozliczeniowe,
- dla niezbyt odległych terminów zapadalności są instrumentami o dużej płynności.

Główne rodzaje kontraktów Futures:

- na papiery skarbowe – T-bond Futures,
- na depozyty (na stopę procentową) – Eurodollar Futures,
- na indeksy giełdowe – Index Futures,
- na waluty – Currency Futures,
- na towary / surowce – Commodity Futures.

Rozliczanie kontraktu Futures dokonywane jest codziennie przez rachunek zabezpieczający (ang. *margin account*), na którym strona kontraktu Futures jest zobowiązana utrzymywać określony przez giełdę minimalny poziom zdeponowanej gotówki. Na ten rachunek zabezpieczający wpływają zyski z tytułu dziennego rozliczenia kontraktu Futures, lub z tego rachunku są pobierane kwoty odpowiadające stratom poniesionym w wyniku rozliczenia kontraktu. Kwota dziennego rozliczenia długiej pozycji w kontrakcie Futures, które następuje na zamknięcie k -tego dnia, wynosi (na jednostkę aktywa)

$$V_k = F_k - F_{k-1}, \quad (5.14)$$

gdzie F_j jest ceną wykonania kontraktu Futures na zamknięciu dnia t_j . W dniu zawarcia kontraktu rozliczenie kontraktu jest obliczane na podstawie ceny kontraktu Futures z jaką został on zawarty oraz ceny tego kontraktu na zamknięciu dnia, chyba że kontrakt został zamknięty jeszcze tego samego dnia (wtedy mówimy o tzw. *intraday trading*) i wtedy rozliczenie odbywa się po cenie faktycznego zamknięcia kontraktu. Wzór (5.14) jest również wynikiem realizowanym na zamknięciu w dniu t_k kontraktu otwartego w dniu t_{k-1} . W rezultacie takiego rozliczania kontraktu Futures można przyjąć że na zamknięcie dnia t_k następuje zamknięcie pozycji otwartej na końcu poprzedniego dnia z ceną F_{k-1} i jednocześnie otwarcie kontraktu Futures z ceną F_k . Oczywiście rozliczenie za ostatni dzień trzymywania otwartej pozycji w kontrakcie Futures odbywa się po cenie faktycznego zamknięcia kontraktu w tym dniu.

Teoretyczna cena kontraktu Futures jest równa cenie wykonania kontraktu Forward na to samo aktywo z tym samym terminem wykonania. W przypadkach gdy termin dostawy kontraktu Futures i dostarczane aktywo są jednoznacznie określone, można próbować porównywać rynkowe ceny Futures z ich cenami teoretycznymi, czyli z cenami forward aktywa na które te kontrakty opiewają. W przypadku kontraktów Futures, w których strona krótka ma możliwości wyboru terminu dostawy (w pewnym zakresie) oraz wyboru dostarczanego aktywa z grupy aktywów dopuszczonych do dostarczania, takie porównanie jest często utrudnione. Przykładem takiego kontraktu jest kontrakt Futures na papiery skarbowe (T-bond Futures).

Pokażemy, że jeżeli

- stopa procentowa według której oprocentowane są fundusze na rachunku zabezpieczającym jest stała w trakcie trwania kontraktu Futures, a wartość tej stopy jest zgodna z oprocentowaniem lokat/depozytów o czasie trwania T ,
 - termin dostawy (wygaśnięcia kontraktu) jest jednoznacznie określony,
 - dostarczane aktywo jest jednoznacznie określone w chwili zawarcia kontraktu,
- to teoretyczna cena kontraktu Futures jest równa cenie kontraktu Forward.

Niech

- T oznacza termin zapadalności kontraktów Futures i Forward,
- r oznacza stałą stopę procentową kapitalizowaną w sposób ciągły, która będzie stosowana w trakcie trwania kontraktu do lokowania/finansowania dziennych rozliczeń kontraktu Futures na rachunku zabezpieczającym – zakładamy, że $r = R(0, T)$, przy czym $DF(0, T) = e^{-R(0, T) \cdot \Delta(0, T)}$,
- K oznacza cenę kontraktu Forward zawartego na zamknięcie dnia $t = 0$,
- F_0 oznacza cenę kontraktu Futures zawartego na zamknięcie dnia $t = 0$.

Czas trwania kontraktów dzielimy na „jednodniowe” okresy $[t_{k-1}, t_k)$, gdzie $k = 1, 2, \dots, n$, przy czym $t_n = T$ a t_0 jest dniem zawarcia kontraktu.

Rozważmy następującą strategię:

- sprzedajemy kontrakt Forward na jednostkę aktywa,
- kupujemy kontrakt Futures na $N_0 = DF(0, T)$ jednostek aktywa, oraz w każdym dniu t_k , gdzie $k = 0, 1, \dots, n-1$, dokupujemy na jego zamknięciu taką ilość kontraktów Futures by

otwarta pozycja na rozpoczęciu kolejnego dnia t_{k+1} w tym kontrakcie Futures wynosiła

$$N_0 e^{r \cdot \Delta(0, t_{k+1})},$$

a wynik (rozliczenie) otwartej pozycji na koniec dnia t_k lokujemy/finansujemy ze stopą r na pozostały do wygaśnięcia kontraktu okres czasu.

Zawiązanie tej strategii w $t = 0$ nie wiąże się z żadnymi kosztami początkowymi. Natomiast efekt tej strategii w T jest następujący

— kontrakt Futures opiewa na dokładnie jedno aktywo, bowiem

$$N_0 e^{r \cdot \Delta(0, T)} = DF(0, T) e^{R(0, T) \cdot \Delta(0, T)} = 1,$$

— w wyniku realizacji kontraktu Futures kupujemy jedno aktywo po cenie $F_T (= S_T)$,

— na rachunku zgromadziliśmy (łącznie z odsetkami) kwotę

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n N_0 e^{r \cdot \Delta(0, t_k)} (F_k - F_{k-1}) e^{r \cdot \Delta(t_k, T)} \\ &= \sum_{k=1}^n N_0 e^{r \cdot \Delta(0, T)} (F_k - F_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (F_k - F_{k-1}) = F_T - F_0, \end{aligned}$$

— w wyniku realizacji kontraktu Forward dostarczamy jedno aktywo za które otrzymujemy K .
Zatem nasz bilans w T jest następujący:

$$K + (F_T - F_0) - F_T = K - F_0.$$

Ponieważ strategia prowadząca do tego wyniku nie wiązała się z żadnymi kosztami, to by nie było arbitrażu, ten wynik musi być zerowy, czyli musi zachodzić

$$F_0 = K.$$

W rzeczywistości, inwestorzy mogą lokować/finansować wynik dziennego rozliczenia kontraktu Futures po bieżących stopach rynkowych. To, między innymi, powoduje, że w określonych sytuacjach cena kontraktu Futures może odbiegać od ceny odpowiadającego mu kontraktu Forward. Na przykład, gdy cena aktywa, na które jest wystawiony kontrakt Futures, jest mocno dodatnio skorelowana ze stopami procentowymi, inwestor zajmujący długą pozycję może korzystnie lokować bieżące zyski z kontraktu lub odpowiednio taniej finansować straty poniesione na kontrakcie. Tak jest bowiem wzrostowi ceny aktywa, a więc zyskom inwestora, zwykle towarzyszy wzrost stopy procentowej po której może on ulokować swój dochód. Analogicznie, spadek ceny aktywa – strata inwestora – zwykle odbywa się w warunkach spadku stopy procentowej, co oznacza, że inwestor może taniej finansować swoje straty. Tak więc, w takim przypadku, kontrakt Futures jest korzystniejszy dla inwestora niż kontrakt Forward, i w związku z tym cena kontraktu Futures powinna być wyższa niż cena kontraktu Forward. Przeprowadzając podobne rozumowanie, można przypuszczać, że w przypadku gdy cena aktywa jest mocno ujemnie skorelowana ze stopami procentowymi, cena kontraktu Futures powinna być niższa niż cena kontraktu Forward.

3M Eurodollar Futures

Terminologia: Eurodollar – dolar amerykański deponowany w bankach poza USA. Stopa procentowa depozytów eurodolarowych jest utożsamiana ze stopą LIBOR.

- Giełda: CME (Chicago Mercantile Exchange)
- Nominał: 1 milion USD
- Termin zapadalności: trzecia środa miesiąca dostawy

- Miesiące dostawy: miesiące cyklu marzec, czerwiec, wrzesień, grudzień na około 10 lat na-przód
- Instrument podstawowy: stopa procentowa 3M USD LIBOR depozytu, który rozpocznie się w dniu zapadalności kontraktu Futures
- Kwotowanie: cena kontraktu Q oznacza iż stopa dla odpowiedniego depozytu wynosi $100 - Q$ w konwencji ACT/360
- Wartość kontraktu: $1\,000\,000 \left(1 - \frac{90}{360} \frac{100 - Q}{100}\right)$ - mamy tu „drobną” niespójność, bowiem, jak widać, przyjęto, że 3M okres ma 90 dni mimo iż stopa LIBOR jest podawana w konwencji ACT/360)
- Rozliczanie kontraktu: 25 USD za 1 punkt bazowy (0.01 ceny kontraktu); $25\text{ USD} = (1\,000\,000\text{ USD} \times 1\text{ bp} \times 90/360)$

Są też analogiczne kontrakty Futures na depozyty 3M w innych głównych walutach:

- Euribor Futures – na 3M EUR LIBOR – giełdy: LIFFE (London International Financial Futures Exchange), MATIF (Marche a Terme International de France),
- Euroswiss Futures – na 3M CHF LIBOR – giełda: LIFFE
- Euroyen Futures – na 3M JPY LIBOR – giełdy: CME, SGX (Singapore Exchange Ltd.).

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 5.1 (Cena forward obligacji). (a) Cena forward obligacji o stałym kuponie

Przypuśćmy, że rynkowa cena obligacji o stałym kuponie jest zgodna z wyceną modelową, tzn.

$$S_0 = \sum_{k=1}^M C(t_k) DF(0, t_k),$$

gdzie $C(t_k)$ są wypłatami z tej obligacji (kupony plus ewentualne częściowe zwroty nominalu, oraz końcowa wypłata nominalu). Pokaż, że wówczas wzór na cenę forward tej obligacji można przedstawić w następującej postaci

$$K = DF(0, T)^{-1} \sum_{k=n+1}^M C(t_k) DF(0, t_k),$$

gdzie t_{n+1} jest pierwszym momentem płatności kuponu następującym po terminie wygaśnięcia T kontraktu Forward.

(b) Cena forward obligacji o zmiennym kuponie

Uzasadnij następujący wzór na cenę forward obligacji o zmiennym kuponie:

$$K = DF(0, T)^{-1} (S_0 - DF(0, t_1)(1 + R_1 \Delta_1) + DF(0, t_n))$$

gdzie t_1 jest aktualnie pierwszym momentem płatności kuponu tej obligacji, Δ_1 jest długością aktualnie trwającego okresu odsetkowego, a R_1 stopą ustaloną na początku tego okresu, oraz t_n jest ostatnim przed terminem wygaśnięcia T kontraktu Forward momentem płatności kuponu. Oczywiście, S_0 jest aktualną ceną brudną obligacji. Zakładamy również, że nominal obligacji jest stały.

Ćwiczenie 5.2. Przeprowadź transakcję arbitrażową w przypadku gdy cena kontraktu Forward na aktywo płacące ciągle dochód jest mniejsza niż obserwowana w dniu zawarcia kontraktu cena forward tego aktywa (patrz (5.3)).

Ćwiczenie 5.3. Dane są następujące kwotowania:

- kurs wymiany USD/PLN: 4.0000,
- punkty swapowe USD/PLN wynoszą dla 3M: 0.0250, oraz dla 6M: 0.0500,
- PLN 3M Depo: 4.00%, PLN FRA3x6: 5.00%, USD FRA3x6: 2.00%.

- (a) Oblicz stopę 3M depozytu dolarowego przy założeniu, że w okresie 3M na rynku nie ma możliwości do arbitrażu.
- (b) Czy przy powyższych danych istnieją na rynku w okresie do 6M możliwości do arbitrażu? Jeśli tak, opisz strategię arbitrażową i oblicz dzisiejszą wartość wolnego od ryzyka zysku.

Ćwiczenie 5.4 (Kurs *bid/ask* (kupna/sprzedaży) transakcji FX forward). Wzory (5.4)–(5.6) na kurs forward zostały wyprowadzone przy założeniu, że stopy procentowe dla przyjętych depozytów i udzielonych pożyczek są takie same. W rzeczywistości stopy te są różne: dla przyjętych depozytów mamy stopy *bid*, które są niższe niż stopy *ask* dla udzielonych pożyczek.

Dostosuj wzory (5.4)–(5.6) tak, by wyrażały one wartość kursu *bid* (*ask*) transakcji FX forward. Dla przypomnienia terminologii: kurs *bid* (*ask*) transakcji wymiany odnosi się do transakcji FX, w której kupujemy (sprzedajemy) walutę bazową (tą, za jednostkę której podajemy ilość waluty niebazowej).

Uwaga: Animator rynku (ang. *market maker*) kwotuje kurs FX forward w taki sposób, by mógł zapewnić pokrycie swoich zobowiązań z tytułu zawarcia takiej transakcji FX transakcjami na rynku pieniężnym (lokatami i depozytami) oraz transakcją FX spot.

Ćwiczenie 5.5 (Transakcja par FX forward). W transakcji par FX forward strony kontraktu dokonują w określonych umową chwilach czasu $T_1 < T_2 < \dots < T_M$ wymian kwot $N_1^{(1)}, N_1^{(2)}, \dots, N_1^{(M)}$ w walucie CUR_1 na kwoty w walucie CUR_2 po jednym wspólnym kursie K . Wyprowadź wzór na kurs K przy którym w chwili zawarcia kontraktu jego wartość wynosi zero.

Ćwiczenie 5.6 (Skracanie (*rollback*) / wydłużanie (*rollover*) zawartej transakcji FX forward). Rozpatrzmy „żyjącą” transakcję FX forward, która została zawarta z ceną K i która zapadnie w chwili T . W trakcie trwania tego kontraktu w chwili bieżącej klient banku, który jest stroną tej transakcji, prosi o skrócenie (wydłużenie) kontraktu. To skrócenie (wydłużenie) kontraktu polega na

- anulowaniu oryginalnej transakcji, która miała zapaść w T ,
- zawarciu nowej transakcji FX forward (lub w szczególnym przypadku FX spot) z nowym, wcześniejszym (późniejszym) niż T , terminem zapadalności T_R .

Wyznacz sprawiedliwą cenę K_R (kurs) dla „zrolowanej” transakcji FX, którą bank powinien zaproponować klientowi. Oblicz różnicę $K_R - F$, gdzie F jest bieżącym kursem terminowym na chwilę T_R . Jaki sens ekonomiczny ma ta różnica?

6. Kontrakty opcyjne

6.1. Kontrakty opcyjne

Kontrakt opcyjny (krótko: opcja) to umowa na podstawie której

- jedna strona umowy (posiadacz opcji) nabywa prawo do zrealizowania opisanej umową transakcji lub do otrzymania określonej wypłaty, zaś
- druga strona (wystawca opcji, sprzedawca opcji) zobowiązuje się być stroną tej transakcji lub, odpowiednio, wypłacić posiadaczowi określoną kwotę.

Posiadacz kontraktu (który zajmuje tzw. długą pozycję) będzie realizował kontrakt tylko wtedy, gdy jest to dla niego korzystne lub otrzyma od wystawcy odpowiednią wypłatę jeśli tylko wypłata ta jest dodatnią wartością. Z tego względu strony kontraktu opcyjnego nie są „symetryczne”, w tym sensie, że posiadacz opcji w chwili realizacji opcji z pewnością nie poniesie straty, a wystawca opcji z pewnością nie będzie miał zysku. Z tego powodu wystawca opcji otrzymuje od nabywcy opcji tzw. premię, czyli opłatę, która ma zrekompensować wystawcy jego potencjalnie gorszą sytuację.

Dwa podstawowe problemy związane z kontraktami opcyjnymi są następujące:

- jaka jest „sprawiedliwa” wartość opcji, w szczególności ile powinna wynosić premia opcji,
- jak wystawca może zabezpieczać swoją pozycję wynikającą ze sprzedanej opcji.

Umowa opcji określa

- termin wygaśnięcia opcji T ,
- rodzaj transakcji, która będzie wykonywana w przypadku realizacji opcji, lub formułę, według której oblicza się wypłatę opcji; w szczególności wyspecyfikowany jest tzw. instrument podstawowy (ang. *underlying*) od wartości którego zależy wartość transakcji lub wypłaty opcji,
- termin lub terminy w których opcja może być realizowana.

Ze względu na instrument podstawowy opcji wyróżniamy w szczególności

- opcje na akcje,
- opcje na indeks (giełdowy),
- opcje walutowe (FX options, currency options) – instrumentem podstawowym jest kurs walutowy,
- opcje na obligacje (bond options),
- opcje na kontrakty Futures (Futures options),
- opcje na stopy procentowe, a wśród nich
 - opcje na poziom stopy procentowej – cap (seria caplet-ów, tj. pojedynczych opcji na górny poziom stopy procentowej) oraz floor (seria floorlet-ów, tj. pojedynczych opcji na dolny poziom stopy procentowej),
 - opcje na kontrakt IRS – swapcje (swaptions).

Ze względu na terminy realizacji opcji wyróżniamy

- opcje **europejskie** – realizacja opcji może nastąpić tylko w terminie wygaśnięcia opcji,
- opcje **amerykańskie** – realizacja opcji może nastąpić w dowolnym momencie przed terminem wygaśnięcia lub w terminie wygaśnięcia opcji,
- opcje **bermudzkie** – realizacja opcji może nastąpić w kilku ustalonych chwilach czasu w trakcie trwania opcji.

Niech

- V^e oznacza premię (wartość) opcji europejskiej,
- V^a oznacza premię (wartość) opcji amerykańskiej,
- V^b oznacza premię (wartość) opcji bermudzkiej.

Wówczas, dla opcji o tym samym terminie wygaśnięcia i o takim samym profilu wypłaty zachodzi

$$0 \leq V^e \leq V^b \leq V^a.$$

6.2. Opcje waniliowe

Opcja waniliowa (ang. *plain vanilla option*) jest kontraktem opcyjnym, w którym przedmiotem umowy opcji jest transakcja kupna/sprzedaży pewnego aktywa (instrumentu podstawowego) po ustalonej umową cenie wykonania K :

- opcja **kupna** (ang. *call*) – posiadacz opcji ma prawo do kupna aktywa po cenie K ,
- opcja **sprzedaży** (ang. *put*) – posiadacz opcji ma prawo do sprzedaży aktywa po cenie K .

Wówczas, wartości tych opcji w chwili ich realizacji t , od strony posiadacza opcji, wynoszą odpowiednio

- dla opcji kupna: $\max(S_t - K, 0)$,
- dla opcji sprzedaży: $\max(K - S_t, 0)$,

gdzie S_t jest ceną aktywa w chwili realizacji opcji.

6.3. Opcje egzotyczne

Modyfikacje opcji waniliowych doprowadziły do skonstruowania szeregu kontraktów opcyjnych o specyficznych właściwościach – opcji egzotycznych (ang. *exotic options*). Najważniejsze z nich to

- **opcje azjatyckie** – opcje w których zamiast ceny S_t aktywa w chwili realizacji t opcji do wyznaczenia kwoty wypłaty (rozliczenia) brana jest $\bar{S}_t$ – pewna średnia wartość cen aktywa, na przykład:
 - dyskretna średnia arytmetyczna: $\bar{S}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$, gdzie $t_1 < t_2, \dots, < t_n \leq t$ są ustalonymi chwilami czasu w których obserwowana jest wartość instrumentu podstawowego (przypadek najczęściej występujący w praktyce),
 - ciągła średnia arytmetyczna: $\bar{S}_t = \frac{1}{t-t_1} \int_{t_1}^t S_\tau d\tau$ – graniczny przypadek dyskretniej średniej arytmetycznej,
 - dyskretna średnia geometryczna: $\bar{S}_t = (\prod_{i=1}^n S_{t_i})^{1/n}$ (ma bardziej znaczenie teoretyczne niż praktyczne),
 - ciągła średnia geometryczna: $\bar{S}_t = \exp\left(\frac{1}{t-t_1} \int_{t_1}^t \ln S_\tau d\tau\right)$.
- **opcje lookback** – opcje w których zamiast ceny S_t aktywa w chwili realizacji t opcji do wyznaczenia kwoty rozliczenia brana jest wartość $\max\{S_t : t \in [t_1, t]\}$ lub $\min\{S_t : t \in [t_1, t]\}$, przy czym podobnie jak dla opcji azjatyckich możemy mieć warianty ciągłe i dyskretnie.
- **opcje barierowe** – opcje waniliowe z dodatkowym warunkiem uzależniającym wypłatę od tego czy w ustalonym przedziale czasu (zwykle w trakcie całego czasu trwania opcji) cena instrumentu podstawowego „dotknie” ustalonej w kontrakcie bariery H ; opcje te występują w dwóch (komplementarnych) rodzajach:
 - opcje deaktywujące (ang. *knock-out option*) – dotknięcie bariery wygasza opcję waniliową,
 - opcje aktywujące (ang. *knock-in option*) – dotknięcie bariery powoduje uaktywnienie opcji waniliowej,
- **opcje binarne** typu *Cash-or-Nothing* – opcje, których wypłata wynosi

- dla opcji kupna: $\mathcal{H}(S_t - K)$,
- dla opcji sprzedaży: $\mathcal{H}(K - S_t)$,
- gdzie $\mathcal{H}$ jest funkcją Heaviside'a.
- **opcje binarne** typu *Asset-or-Nothing* – opcje, których wypłata wynosi
 - dla opcji kupna: $S_t \mathcal{H}(S_t - K)$,
 - dla opcji sprzedaży: $S_t \mathcal{H}(K - S_t)$.
- jest jeszcze wiele innych rodzajów opcji egzotycznych – patrz np. podręcznik Hull'a.

6.4. Własności opcji waniliowych

Wprowadźmy następującą notację:

- C_t – wartość opcji kupna (*call*) w chwili t ,
 - P_t – wartość opcji sprzedaży (*put*) w chwili t ,
- przy czym $t = 0$ jest momentem zawarcia opcji.

Typ wykonania opcji będziemy zaznaczać odpowiednim górnym indeksem: e – dla opcji europejskiej, a – dla opcji amerykańskiej, b – dla opcji bermudzkiej.

Zauważmy, że wartości opcji waniliowych spełniają następujące oczywiste ograniczenia:

$$\begin{aligned} 0 \leq C_0^e \leq C_0^b \leq C_0^a \leq S_0 \\ 0 \leq P_0^e \leq P_0^b \leq P_0^a \leq K, \end{aligned}$$

przy czym dla europejskiej opcji sprzedaży mamy lepsze oszacowanie

$$0 \leq P_0^e \leq DF(0, T)K,$$

gdzie $DF(0, T)$ jest czynnikiem dyskontowym dla waluty w której wyrażona jest cena aktywa (i cena wykonania K), który odpowiada wolnej od ryzyka stopy procentowej (tj. odzwierciedlającej czysty koszt pieniądza w czasie).

6.5. Parytet opcji kupna/sprzedaży

- Parytet dla opcji europejskich których instrument podstawowy nie przynosi dochodu

Twierdzenie 6.1. *Wartości europejskich opcji kupna/sprzedaży, w przypadku instrumentu podstawowego, który w trakcie trwania opcji nie przynosi dochodu, spełniają następujący związek, zwany parytetem opcji kupna/sprzedaży,*

$$C_0^e - P_0^e = S_0 - DF(0, T)K. \quad (6.1)$$

Dowód. Rozpatrzmy następującą strategię (portfel):

- kupno opcji kupna z ceną wykonania K ,
- sprzedaż opcji sprzedaży z ceną wykonania K ,
- lokata kwoty $DF(0, T)K$ na czas trwania opcji po stopie wolnej od ryzyka.

Koszt tej strategii w chwili jej zawiązania (w $t = 0$) wynosi

$$C_0^e - P_0^e + DF(0, T)K.$$

Natomiast w chwili T wynik naszej strategii będzie następujący:

- (a) w przypadku gdy $S_T \geq K$:

- z kupionej opcji kupna: $S_T - K$
- ze sprzedanej opcji sprzedaży: 0
- zwrot z lokaty: K

razem otrzymamy S_T ;

b) w przypadku gdy $S_T < K$:

- z kupionej opcji kupna: 0
- ze sprzedanej opcji sprzedaży: $-(K - S_T)$
- zwrot z lokaty: K

razem znów otrzymamy S_T .

Tak więc, niezależnie od sytuacji na rynku, w chwili T nasza strategia przyniesie dochód równy S_T . Aby nie było możliwości do przeprowadzenia arbitrażu początkowy koszt tej strategii musi być równy cenie aktywa w chwili początkowej, czyli musi zachodzić

$$C_0^e - P_0^e + DF(0, T)K = S_0,$$

co kończy uzasadnienie. □

► Parytet dla opcji europejskich których instrument podstawowy daje „dyskretny” dochód.

Twierdzenie 6.2. *Parytet opcji kupna/sprzedaży, w przypadku instrumentu podstawowego, który w trakcie trwania opcji przynosi dochód $C(t_i)$ płatny w kilku ustalonych chwilach czasu $t_i < T$, $i = 1, \dots, n$, ma następującą postać*

$$C_0^e - P_0^e = S_0 - D_0 - DF(0, T)K, \quad (6.2)$$

gdzie $D_0 = \sum_{i=1}^n DF(0, t_i)C(t_i)$ jest wartością bieżącą strumienia dochodów generowanych przez aktywo w trakcie trwania opcji.

Dowód. Patrz Ćwiczenia – Zadanie 6.1. □

► Parytet dla opcji europejskich których instrument podstawowy daje „ciągły” dochód.

Twierdzenie 6.3. *Parytet opcji kupna/sprzedaży, w przypadku instrumentu podstawowego, który w trakcie trwania opcji przynosi dochód płatny w sposób ciągły ze stopą q , ma następującą postać*

$$C_0^e - P_0^e = e^{-q\Delta(0, T)} S_0 - DF(0, T)K. \quad (6.3)$$

Stwierdzenie 6.1. *W przypadku **opcji amerykańskich** różnicę wartości opcji kupna i opcji sprzedaży możemy jedynie oszacować w następujący sposób:*

$$S_0 - D_0 - K \leq C_0^a - P_0^a \leq S_0 - DF(0, T)K, \quad (6.4)$$

gdzie instrument podstawowy generuje „dyskretny” dochody i wtedy D_0 jest wartością bieżącą tych dochodów (patrz Ćwiczenia – Zadanie 6.2). Gdy aktywo generuje „ciągły” strumień dochodu płatny ze stopą q , oszacowanie to przyjmuje następującą postać

$$S_0 e^{-q\Delta(0, T)} - K \leq C_0^a - P_0^a \leq S_0 - DF(0, T)K. \quad (6.5)$$

Uwaga 6.1. Nierówności (6.4) i (6.5) są prawdziwe przy dodatkowym założeniu, że struktura stóp procentowych wolnych od ryzyka jest płaska i nie zmienia się w czasie trwania opcji.

6.6. Ograniczenia na wartość opcji

W poniższym Twierdzeniu zebrane są nierówności na wartość opcji których instrument podstawowy daje „dyskretny” dochód.

Twierdzenie 6.4. *Wartości opcji spełniają następujące nierówności:
Dla opcji europejskich*

$$\max(S_0 - D_0 - DF(0, T)K, 0) \leq C_0^e \leq S_0, \quad (6.6)$$

$$\max(DF(0, T)K - (S_0 - D_0), 0) \leq P_0^e \leq DF(0, T)K. \quad (6.7)$$

Dla opcji amerykańskich

$$\max(S_0 - K, S_0 - D_0 - DF(0, T)K, 0) \leq C_0^a \leq S_0, \quad (6.8)$$

$$\max(K - S_0, DF(0, T)K - (S_0 - D_0), 0) \leq P_0^a \leq K. \quad (6.9)$$

Dowód. Nierówności (6.6), (6.7) dla opcji europejskich wynikają z nieujemności wartości opcji i parytetu opcji kupna/sprzedaży (6.2). Ograniczenia dolne w (6.8), (6.9) dla opcji amerykańskich wynikają w części z odpowiednich nierówności dla opcji europejskich i relacji między wartością opcji amerykańskiej a wartością opcji europejskiej, oraz w pozostałej części z charakteru tych opcji (opcje amerykańskie można w każdej chwili wykonać). $\square$

6.7. Wczesne wykonanie w opcjach amerykańskich

Twierdzenie 6.5. *Jeżeli aktywo, które jest instrumentem podstawowym waniliowej opcji amerykańskiej, nie daje dochodu w trakcie trwania opcji, to wczesne wykonanie opcji kupna nie jest optymalne.*

Dowód. Rozważmy dwie strategie w chwili t :

- Wczesne wykonanie opcji
- Trzymanie opcji do terminu zapadnięcia opcji

Zbadamy jaki jest rezultat obu strategii w T (w chwili wygaśnięcia opcji).

Aby przeprowadzić wczesne wykonanie opcji, pożyczamy kwotę K i za te pieniądze kupujemy aktywo. W chwili T mamy aktywo warte S_T oraz zobowiązanie (dług) w kwocie $DF(t, T)^{-1}K$, czyli ta strategia ma wartość

$$S_T - DF(t, T)^{-1}K.$$

Trzymanie opcji do chwili T : wartość opcji w chwili T wynosi

$$\max(S_T - K, 0).$$

Przy założeniu, że stopy procentowe są dodatnie, czyli gdy $DF(t, T)^{-1} > 1$, mamy

$$S_T - DF(t, T)^{-1}K < S_T - K \leq \max(S_T - K, 0),$$

co oznacza iż bardziej opłaca się trzymać taką opcję do terminu wygaśnięcia opcji niż skorzystać możliwości wczesnego wykonania opcji. $\square$

Wniosek 6.1. *Jeżeli aktywo nie daje dochodu w trakcie trwania opcji, to amerykańska opcja kupna jest równoważna europejskiej opcji kupna i wartości tych opcji są takie same.*

Uwaga 6.2. Dla amerykańskiej opcji kupna zachodzi następujące oszacowanie

$$C_t^a > S_t - K,$$

gdzie t jest dowolną chwilą czasu w trakcie trwania opcji. Warunek ten oznacza, że chcąc zrealizować wynik na inwestycji w opcję w chwili t przed terminem wykupu, bardziej opłaca się sprzedać posiadaną opcję niż ją wykonać i natychmiast sprzedać aktywo po cenie S_t .

Uwaga 6.3. Gdy instrument podstawowy generuje dochód w trakcie trwania opcji amerykańskiej wcześniejsze wykonanie opcji może być korzystne. Na przykład rozpatrzmy amerykańską opcję kupna na akcję, która płaci dywidendę. Niech cena wykonania wynosi $K = 100$. Przypuśćmy, że akcja, która kosztuje $S = 105$, wypłaci dywidendę w wysokości $D = 10$ w chwili dostatecznie bliskiej terminowi wygaśnięcia opcji. Przed wypłatą dywidendy opcję możemy zrealizować z zyskiem. Natomiast po wypłacie dywidendy, kiedy cena akcji spadnie do 95, opcja staje się bezwartościowa.

Uwaga 6.4. W przypadku amerykańskiej opcji sprzedaży wcześniejsze wykonanie opcji, nawet dla instrumentów, które nie generują dochodu w trakcie trwania opcji, może być opłacalne. Na przykład, tak będzie gdy $DF(0, T)^{-1}(K - S) > K$ (dlaczego?).

6.8. Zależność wartości opcji europejskiej od ceny wykonania

Mamy następujące

Twierdzenie 6.6. *Rozpatrzmy opcje europejskie na ten sam instrument podstawowy o ustalonym czasie trwania T . Niech $C^e(K)$ ($P^e(K)$) oznacza cenę opcji kupna (sprzedaży) przy cenie wykonania K dla ustalonej wartości instrumentu podstawowego.*

- (a) Funkcja $K \rightarrow C^e(K)$
 - jest malejąca,
 - spełnia warunek Lipschitza ze stałą $DF(0, T)$,
 - jest wypukła.
- (b) Funkcja $K \rightarrow P^e(K)$
 - jest rosnąca,
 - spełnia warunek Lipschitza ze stałą $DF(0, T)$,
 - jest wypukła.

Dowód. Niech $K_1 < K_2$. Mamy udowodnić, że wówczas

$$C^e(K_1) > C^e(K_2), \tag{6.10a}$$

$$P^e(K_1) < P^e(K_2). \tag{6.10b}$$

Rozpatrzmy przypadek opcji kupna. Przypuśćmy, że nierówność (6.10a) nie zachodzi, czyli, że $C^e(K_1) \leq C^e(K_2)$. W tej sytuacji przeprowadzamy następujące transakcje:

- sprzedajemy opcję kupna z ceną wykonania K_2 ,
- kupujemy opcję kupna z ceną wykonania K_1 .

Różnicę $C^e(K_2) - C^e(K_1) \geq 0$ lokujemy na rachunku bankowym. Ponadto, w chwili wygaśnięcia opcji mamy następujące możliwości:

- (i) $S_T < K_1 < K_2$ – obie opcje są bezwartościowe,
- (ii) $K_1 \leq S_T \leq K_2$ – opcja sprzedana jest bezwartościowa, a z kupionej opcji realizujemy zysk $S_T - K_1 \geq 0$,
- (iii) $K_1 < K_2 < S_T$ – na sprzedanej opcji mamy stratę $S_T - K_2$, na kupionej zysk $S_T - K_1$, czyli w sumie mamy zysk $K_2 - K_1 > 0$.

Tak więc z dodatnim prawdopodobieństwem ta strategia daje zysk. Zatem jest to strategia arbitrażowa, a to oznacza że musi zachodzić (6.10a).

Analogiczny dowód przeprowadzamy dla opcji sprzedaży.

Korzystając z parytetu opcji kupna/sprzedaży raz dla opcji z ceną wykonania K_1 , a drugi raz dla opcji z ceną wykonania K_2 , otrzymamy

$$(C^e(K_1) - C^e(K_2)) + (P^e(K_2) - P^e(K_1)) = DF(0, T)(K_2 - K_1). \quad (6.11)$$

Z (6.11) oraz z monotoniczności funkcji $K \rightarrow C^e(K)$ i $K \rightarrow P^e(K)$ wynika iż funkcje te spełniają warunek Lipschitza ze stałą równą $DF(0, T)$.

Wypukłość funkcji $K \rightarrow C^e(K)$ oznacza że dla każdych $K_1 < K_2$ oraz każdego $\alpha \in (0, 1)$ zachodzi

$$C^e(\alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2) \leq \alpha C^e(K_1) + (1 - \alpha)C^e(K_2). \quad (6.12)$$

Przypuśćmy, że (6.12) nie zachodzi. Wówczas, dla pewnych $K_1 < K_2$, $\alpha \in (0, 1)$, oraz dla $K = \alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2$ mamy nierówność

$$C^e(K) > \alpha C^e(K_1) + (1 - \alpha)C^e(K_2). \quad (6.13)$$

Wtedy następująca strategia:

- sprzedajemy opcję kupna z ceną wykonania K ,
- kupujemy α opcji kupna z ceną wykonania K_1 ,
- kupujemy $(1 - \alpha)$ opcji kupna z ceną wykonania K_2 ,

jest strategią arbitrażową (Zadanie na Ćwiczenia).

Wypukłość funkcji $K \rightarrow P^e(K)$ wynika z wypukłości funkcji $K \rightarrow C^e(K)$ i parytetu opcji kupna/sprzedaży. $\square$

Uwaga 6.5. Monotoniczność funkcji $C^e(K)$ i $P^e(K)$ można również uzasadnić racjonalnie w następujący sposób. Na przykład w przypadku opcji kupna, wraz ze wzrostem ceny wykonania K maleją: (a) prawdopodobieństwo tego, że w chwili wygaśnięcia opcji $S_T > K$, oraz (b) wartość wypłaty opcji.

6.9. Zależność wartości opcji europejskiej od ceny instrumentu podstawowego

Twierdzenie 6.7. *Rozpatrzmy opcje europejskie na ten sam instrument podstawowy o ustalonym czasie trwania T i ustalonej cenie wykonania K . Niech teraz $C^e(S)$ ($P^e(S)$) oznacza cenę opcji kupna (sprzedaży) przy bieżącej cenie instrumentu podstawowego S .*

- (a) Funkcja $S \rightarrow C^e(S)$
 - jest rosnąca,
 - spełnia warunek Lipschitza ze stałą równą L ,
 - jest wypukła.
- (b) Funkcja $S \rightarrow P^e(S)$
 - jest malejąca,
 - spełnia warunek Lipschitza ze stałą równą L ,
 - jest wypukła,

gdzie $L = e^{-q \cdot \Delta(0,t)}$ dla opcji na instrument podstawowy, który generuje ciągły dochód ze stopą q , lub $L = 1$ w pozostałych przypadkach.

Dowód. Dowód tego twierdzenia przebiega w sposób podobny do dowodu przeprowadzonego w przypadku poprzedniego twierdzenia. Jednakże, aby móc przeprowadzić analogiczne rozumowania arbitrażowe musimy wprowadzić instrumenty podstawowe, które, poza tym że różnią się bieżącymi cenami, są identyczne z instrumentem podstawowym. Na przykład, w dowodzie monotoniczności zakładamy, że mamy dwa instrumenty podstawowe, jeden o cenie bieżącej S_1 i drugi identyczny ale o cenie bieżącej S_2 . $\square$

Można pokazać, że własności opcji europejskich opisane w Twierdzeniach 6.6 i 6.7 zachodzą również w przypadku **opcji amerykańskich**, przy czym warunki Lipschitza sformułowane w tych twierdzeniach zachodzą jedynie ze stałymi $L = 1$. Jednakże, dowody tych twierdzeń dla opcji amerykańskich są bardziej skomplikowane.

6.10. Wartość czasowa opcji

Wartość wewnętrzna opcji waniliowej w chwili $t < T$, gdzie T jest terminem wygaśnięcia opcji, to

- dla opcji kupna wielkość $\max(S_t - K, 0)$,
- dla opcji sprzedaży wielkość $\max(K - S_t, 0)$.

Wartość czasowa opcji waniliowej w chwili $t < T$, gdzie T jest terminem wygaśnięcia opcji, to różnica między wartością opcji w chwili t a jej wartością wewnętrzną, czyli

- dla opcji kupna: $C_t - \max(S_t - K, 0)$,
- dla opcji sprzedaży: $P_t - \max(K - S_t, 0)$.

Terminologia

Opcja kupna jest w chwili t

- w cenie (ang. *in the money*, *ITM*), jeżeli $S_t > K$,
- po cenie (ang. *at the money*, *ATM*), jeżeli $S_t = K$,
- poza ceną (ang. *out of the money*, *OTM*), jeżeli $S_t < K$.

Opcja sprzedaży jest w chwili t

- w cenie (ang. *in the money*, *ITM*), jeżeli $S_t < K$,

- po cenie (ang. *at the money, ATM*), jeżeli $S_t = K$,
 - poza ceną (ang. *out of the money, OTM*), jeżeli $S_t > K$.
- Wartość czasowa europejskiej opcji kupna na aktywo nie dające dochodu:
- Dla opcji poza ceną, to znaczy gdy $S_t < K$, wartość czasowa jest równa wartości opcji.
 - Dla opcji w cenie, to znaczy gdy $S_t > K$, wartość czasowa jest większa niż $K - DF(t, T)K > 0$, bowiem jak wynika z Twierdzenia 6.4,

$$C(S_t) - (S_t - K) \geq K - DF(t, T)K.$$

Wartość czasowa europejskiej opcji sprzedaży na aktywo nie dające dochodu:

- Dla opcji poza ceną, to znaczy gdy $S_t > K$, wartość czasowa jest równa wartości opcji.
- Dla opcji w cenie, to znaczy gdy $S_t < K$, wartość czasowa opcji może być ujemna. Jeśli cena bieżąca S_t jest dostatecznie mała to, jak wynika z Twierdzenia 6.4

$$P(S_t) - (K - S_t) \leq (DF(t, T) - 1)K + S_t < 0.$$

Twierdzenie 6.8. *Wartość czasowa opcji w chwili jest największa dla opcji po cenie, to znaczy gdy $S_t = K$.*

Dowód. Rozpatrzmy przypadek opcji kupna. Na przedziale $[0, K]$ wartość wewnętrzna opcji kupna jest zerowa i wartość czasowa opcji pokrywa się z wartością opcji. Ponieważ wartość opcji kupna jest funkcją rosnącą ceny instrumentu podstawowego to wartość czasowa opcji dla $[0, K]$ będzie największa dla $S_t = K$.

Teraz wystarczy udowodnić, że na przedziale $[K, \infty)$ wartość czasowa opcji kupna jest funkcją malejącą ceny instrumentu podstawowego. Niech $S_t^{(1)} < S_t^{(2)}$. Wówczas, na mocy Twierdzenia 6.7

$$C(S_t^{(2)}) - C(S_t^{(1)}) < S_t^{(2)} - S_t^{(1)}.$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$C(S_t^{(2)}) - (S_t^{(2)} - K) < C(S_t^{(1)}) - (S_t^{(1)} - K),$$

co oznacza, że $[K, \infty) \ni S_t \rightarrow C(S_t) - \max(S_t - K, 0)$ jest malejąca.

W przypadku opcji sprzedaży dowód jest analogiczny. □

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 6.1. Udowodnij równość (6.2) (parytet kupna/sprzedaży opcji, których instrument podstawowy daje „dyskretny” dochód). W tym celu:

- (a) Przypuśćmy, że $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + DF(0, T)K > 0$. Pokaż, że strategia
 - kupno opcji sprzedaży,
 - kupno instrumentu podstawowego,
 - sprzedaż opcji kupna,
 - pożyczka kwoty $DF(0, T)K$ na czas trwania opcji po stopie wolnej od ryzyka,
 - pożyczka kwoty $DF(0, t_i)C(t_i)$ na okres kończący się w t_i opcji po stopie wolnej od ryzyka (dla każdego $i = 1, \dots, n$),
 zawiązana w $t = 0$, jest strategią arbitrażową.
- (b) Przypuśćmy, że $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + DF(0, T)K < 0$. Pokaż, że strategia

- sprzedaż opcji sprzedaży,
 - krótka sprzedaż instrumentu podstawowego,
 - kupno opcji kupna,
 - ulokowanie kwoty $DF(0, T)K$ na czas trwania opcji po stopie wolnej od ryzyka,
 - ulokowanie kwoty $DF(0, t_i)C(t_i)$ na okres kończący się w t_i opcji po stopie wolnej od ryzyka (dla każdego $i = 1, \dots, n$),
- zawiązana w $t = 0$, jest strategią arbitrażową.

Ćwiczenie 6.2. Udowodnij nierówności (6.8) w przypadku gdy instrument podstawowy nie przynosi dochodu w trakcie trwania opcji, oraz gdy struktura stóp procentowych wolnych od ryzyka jest płaska i nie zmienia się w czasie trwania opcji:

- (a) Przypuśćmy, że $C_0^a - P_0^a - S_0 + DF(0, T)K > 0$. Pokaż, że strategia
- kupno opcji sprzedaży,
 - kupno instrumentu podstawowego,
 - sprzedaż opcji kupna,
 - pożyczka kwoty $DF(0, T)K$ na czas trwania opcji po stopie wolnej od ryzyka,
- zawiązana w $t = 0$, jest strategią arbitrażową.
- (b) Przypuśćmy, że $C_0^a - P_0^a - S_0 + K < 0$. Pokaż, że strategia
- sprzedaż opcji sprzedaży,
 - krótka sprzedaż instrumentu podstawowego,
 - kupno opcji kupna,
 - ulokowanie kwoty K na czas trwania opcji po stopie wolnej od ryzyka,
- zawiązana w $t = 0$, jest strategią arbitrażową.

Ćwiczenie 6.3. Dokończyć dowód wypukłości funkcji $K \rightarrow C^e(K)$ (patrz Twierdzenie 6.6).

Ćwiczenie 6.4. Przeprowadź dowód Twierdzenia 6.8 w przypadku opcji sprzedaży.

Ćwiczenie 6.5 (Delt europejskich opcji waniliowych). Załóżmy, że funkcje $S \rightarrow C^e(S)$ i $S \rightarrow P^e(S)$ są różniczkowalne. Pierwsze pochodne tych funkcji, tzw. „delt” opcji

$$\Delta_C = \frac{\partial C^e}{\partial S} \quad \text{oraz} \quad \Delta_P = \frac{\partial P^e}{\partial S}$$

są podstawowymi współczynnikami wrażliwości, które określają „ryzyko” opcji (portfeli opcji). Pokaż, że

- $\Delta_C - \Delta_P = e^{-q \cdot \Delta(0, T)}$,
- $0 \leq \Delta_C \leq e^{-q \cdot \Delta(0, T)} \leq 1$,
- $-1 \leq -e^{-q \cdot \Delta(0, T)} \leq \Delta_P \leq 0$.

Ćwiczenie 6.6 (Gamma europejskich opcji waniliowych). Załóżmy, że funkcje $S \rightarrow C^e(S)$ i $S \rightarrow P^e(S)$ są dwukrotnie różniczkowalne. Drugie pochodne tych funkcji, tzw. „gammy” opcji

$$\Gamma_C = \frac{\partial^2 C^e}{\partial S^2} \quad \text{oraz} \quad \Gamma_P = \frac{\partial^2 P^e}{\partial S^2}$$

są współczynnikami wrażliwości drugiego rzędu, które określają wrażliwość „delt” opcji (delt portfela opcji) na zmianę ceny instrumentu podstawowego. Pokaż, że $\Gamma_C = \Gamma_P \geq 0$.

Ćwiczenie 6.7 (Vega europejskich opcji waniliowych). Wartość opcji zależy również od wielkości σ , która określa poziom zmienności ceny instrumentu podstawowego. Załóżmy, że funkcje $\sigma \rightarrow C^e(\sigma)$ i $\sigma \rightarrow P^e(\sigma)$ są różniczkowalne. Pochodne tych funkcji, tzw. „vegi” opcji

$$\text{Vega}_C = \frac{\partial C^e}{\partial \sigma} \quad \text{oraz} \quad \text{Vega}_P = \frac{\partial P^e}{\partial \sigma}$$

są współczynnikami wrażliwości, które określają wrażliwość wartości opcji (portfela opcji) na zmianę zmienności ceny instrumentu podstawowego. Pokaż, że $Vega_C = Vega_P$ i uzasadnij dlaczego $Vega > 0$.

Ćwiczenie 6.8 (Europejskie opcje binarne typu Cash-or-Nothing). (a) Wyprowadź parytet opcji kupna/sprzedaży dla europejskich opcji binarnych typu Cash-or-Nothing.
 (b) *Call spread*. Statyczna replikacja opcji binarnej kupna typu Cash-or-Nothing, która daje wypłatę jeśli cena instrumentu podstawowego jest *ostro* większa niż cena wykonania K . Pokaż, że strategia złożona opcji waniliowych o czasie trwania identycznym jak opcja binarna typu Cash-or-Nothing, kupionej z ceną wykonania K i sprzedanej z ceną wykonania $K + \epsilon$ o wartościach nominalnych $1/\epsilon$ (sztuk instrumentu podstawowego) ma wypłatę która w przybliżeniu pokrywa się z wypłatą opcji binarnej kupna dla dostatecznie małej wartości ϵ . Wówczas z prawa jednej ceny wynika, że

$$\text{binary call} \simeq \frac{C^e(K) - C^e(K + \epsilon)}{\epsilon}.$$

Uwaga: W praktyce ϵ musi być co najmniej tak małe jak minimalna wielkość zmiany ceny instrumentu podstawowego.

(c) Jak wygląda replikacja opcji binarnej kupna typu Cash-or-Nothing, jeśli wypłata następuje gdy cena instrumentu podstawowego jest większa lub równa cenie wykonania K ?

W praktyce rynkowej opcję typu Cash-or-Nothing wycenia się z *call spreadu*.

Ćwiczenie 6.9 (Europejskie opcje binarne typu Asset-or-Nothing). (a) Wyprowadź parytet opcji kupna/sprzedaży dla europejskich opcji binarnych typu Asset-or-Nothing.

(b) Przetwórz opcję waniliową jako portfel złożony z opcji binarnej typu Cash-or-Nothing oraz binarnej typu Asset-or-Nothing o odpowiednich nominalach.

(c) Korzystając z (b) sformułuj związek pomiędzy ceną opcji waniliowej a cenami opcji binarnych typu Cash-or-Nothing oraz typu Asset-or-Nothing.

W praktyce rynkowej opcję Asset-or-Nothing wycenia się za pomocą związku opisanego w

(c) powyżej, w którym opcja Cash-or-Nothing jest wyceniana z *call spreadu* (patrz Zadanie 6.8).

Ćwiczenie 6.10 (Strategia motyla (*Butterfly strategy*)). Strategia motyla to portfel europejskich opcji waniliowych o następującym składzie:

- dwóch kupionych opcji o cenach wykonania $K - \Delta K$ oraz $K + \Delta K$ odpowiednio,
- dwóch sprzedanych opcji o cenie wykonania K .

Wykreśl profil wypłaty tej strategii. W jaki sposób zbudować tę strategię korzystając z opcji sprzedaży?

Uwaga: Niech $\alpha \in (0, 1)$ oraz $K = \alpha K_1 + (1 - \alpha) K_2$ gdzie $K_1 < K_2$ są ustalonymi cenami wykonania. Strategia motyla jest szczególnym przypadkiem strategii polegającej na kupnie α sztuk opcji z ceną wykonania K_1 , kupnie $1 - \alpha$ sztuk opcji z ceną wykonania K_2 , oraz sprzedaży jednej opcji z ceną wykonania K , wszystkie o tym samym terminie wykonania. Strategię tego typu można wykorzystać w dowodzie wypukłości ceny opcji względem ceny wykonania.

Ćwiczenie 6.11 (*Risk reversal strategy*). Strategia *risk reversal* to portfel europejskich opcji waniliowych o następującym składzie:

- sprzedanej (kupionej) opcji sprzedaży z ceną wykonania K_1 ,
- kupionej (sprzedanej) opcji kupna z ceną wykonania K_2 ,

gdzie $K_1 < K_2$. Na rynku OTC opcji walutowych, to jest opcji, których instrumentem podstawowym jest kurs wymiany walut, kwotuje się strategię *risk reversal*, w których obie opcje mają taką samą deltę (co do wartości bezwzględnej), standardowo 0.25. Taką strategię nazywa się wtedy 25 delta *risk reversal strategy*.

Wykreśl profil wypłaty tej strategii.

Ćwiczenie 6.12 (Europejskie opcje „zapłać później” (*Paylater options*)). Wartość europejskiej opcji kupna „zapłać później” z ceną wykonania K w chwili wygaśnięcia T wynosi

- $S_T - K - X$, jeśli $S_T > K$,
- 0, jeśli $S_T \leq K$,

gdzie X jest premią opcji płaconą w chwili T , ustalaną zwykle tak, by w chwili zawarcia opcji jej wartość wynosiła zero.

Analogicznie, wartość europejskiej opcji sprzedaży zapłać później z ceną wykonania K w chwili wygaśnięcia T wynosi

- $K - S_T - X$, jeśli $S_T < K$,
- 0, jeśli $S_T \geq K$.

Wykreśl profil wypłat tych opcji. Przedstaw te opcje jako portfele złożone z opcji waniliowej i opcji binarnej.

Ćwiczenie 6.13 (Opcja wyboru (*Chooser option*)). Europejska opcja wyboru (*chooser option*) zapadalna w chwili T to opcja waniliowa, w której dodatkowo posiadacz opcji w chwili $T_0 < T$ określa, czy posiadana przez niego opcja jest opcją kupna czy opcją sprzedaży. Tak więc w chwili T_0 ta opcja ma wartość

$$V_{T_0} = \max(C_{T_0}, P_{T_0}),$$

gdzie C_{T_0} , P_{T_0} są wartościami opcji kupna i sprzedaży, odpowiednio. Załóżmy, że cena wykonania obu opcji jest taka sama i wynosi K . Załóżmy, dla uproszczenia, że instrument podstawowy opcji daje dochód płacony w sposób ciągły ze stałą stopą δ (np. indeks giełdowy).

- (a) Pokaż, że V_{T_0} można przedstawić jako sumę wartości opcji kupna zapadalnej w chwili T o cenie wykonania K oraz wypłaty z opcji sprzedaży zapadalnej w T_0 z odpowiednio dobraną ceną wykonania K_0 . Ile wynosi K_0 ?
- (b) Przedstaw opcję wyboru w postaci portfela odpowiednio dobranych waniliowej opcji kupna oraz waniliowej opcji sprzedaży. Korzystając z tego przedstawienia wyprowadź formuły na wycenę opcji wyboru w zależności od wartości odpowiednio dobranych opcji waniliowych.

Ćwiczenie 6.14. Dane są następujące kwotowania:

- cena 3M opcji ATM (at-the-money) kupna 1 miliona USD za PLN (to jest opcji *call* na kurs wymiany USD/PLN o nominale 1 milion USD) wynosi: 106 061.57 PLN,
- bieżący kurs USD/PLN wynosi: 4.0000 (PLN za 1 USD),
- 3M punkty swapowe USD/PLN wynoszą: 0.0503,
- 3M stopa (kapitalizowana w sposób ciągły) dla PLN wynosi: 7.00%.

Przy założeniu, że na rynku nie ma możliwości do arbitrażu,

- (a) oblicz cenę 3M opcji ATM (at-the-money) kupna 1 000 000 PLN za USD,
- (b) 3M depozytową stopę (wolną od ryzyka) dla USD.

Przypomnienie: Mówimy, że opcja jest ATM (at-the-money) jeśli bieżąca cena instrumentu podstawowego opcji jest równa cenie wykonania opcji.

Ćwiczenie 6.15. Wyprowadź parytet opcji kupna/sprzedaży dla europejskich opcji azjatyckich na dyskretną średnią arytmetyczną

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i},$$

gdzie $t_1 < t_2, \dots, < t_n = T$ są ustalonymi chwilami czasu, w których obserwowana jest wartość instrumentu podstawowego, a T jest terminem zapadalności opcji. Załóż, że struktura stóp procentowych jest płaska i stała w czasie trwania opcji. Parytet wyznacz dla chwili czasu $t \in [t_m, t_{m+1})$, to znaczy w trakcie trwania opcji, po ustaleniu m pierwszych wartości instrumentu podstawowego.

Wskazówka. Oblicz wartość kontraktu forward na średnią arytmetyczną $\bar{S}$ z ceną wykonania K , który zapada w T . W tym celu, pokaż, że wyceniając ten kontrakt, wartość każdego nieustalonego składnika S_{t_i} , gdzie $i > m$, sumy określającej średnią $\bar{S}$, można zastąpić ceną forward $F(t, t_i)$ wyznaczoną w chwili t kontraktu zapadalnego w t_i .

Ćwiczenie 6.16. Bank Miejski oferuje klientom lokatę w PLN, która po upływie terminu lokaty T wypłaci kwotę

$$N \left(1 + \max(0, \min(r_{\max} T, \alpha R_T)) \right),$$

gdzie

- N jest nominałem lokaty w PLN,
- $r_{\max}$ – maksymalną stopą oprocentowania lokaty,
- $R_T = \frac{S_T - S_0}{S_0}$ jest stopą zwrotu z indeksu WIG20 w okresie lokaty,
- α jest tak zwanym współczynnikiem partycypacji.

Jakie opcje waniliowe na WIG20 są wbudowane w tą lokatę?

Ćwiczenie 6.17 (*Europejska opcja z barierą europejską*). Niech $\omega = 1$ dla opcji kupna oraz $\omega = -1$ dla opcji sprzedaży, oraz niech $\omega K < \omega B$. Wypłata europejskiej opcji kupna/sprzedaży z barierą europejską B i ceną wykonania K wynosi

$$\max(\omega(S_T - K), 0) \cdot \mathbf{1}_{\{\omega S_T < \omega B\}}$$

Wykreśl profil wypłat tych opcji. Przedstaw te opcje jako portfele złożone z opcji waniliowych i opcji binarnej *Cash-or-Nothing* o odpowiednich nominałach.

Ćwiczenie 6.18 (*Lokata dwuwalutowa*). Inwestor lokuje w banku kwotę N_1 w walucie CUR_1 na okres czasu T . Niech S oznacza kurs wymiany $\text{CUR}_1/\text{CUR}_2$. W chwili T zakończenia lokaty inwestor otrzymuje

- $(1 + R \cdot \tau(0, T))N_1$ w walucie CUR_1 , jeśli $S_T \leq K$,
- $(1 + R \cdot \tau(0, T))N_1 \cdot K$ w walucie CUR_2 , jeśli $S_T > K$,

gdzie K jest ustalonym kursem wymiany (tzw. kurs konwersji), zaś $\tau(0, T)$ jest ułamkiem roku odpowiadającym bazie stopy R .

Jaka opcja jest wbudowana w ten instrument? Załóżmy, że $r(T)$ jest stopą procentową dla standardowej lokaty złożonej na okres czasu T . Jaka jest największa wartość stopy R w zależności od cen instrumentów wbudowanych w tą lokatę dwuwalutową, którą bank może zaoferować inwestorowi nie tracąc na takim instrumencie?

Ćwiczenie 6.19 (*Jednorodność ceny opcji jako funkcji ceny bieżącej i ceny wykonania*). Uzasadnij dlaczego cena V opcji waniliowej jest jednorodną funkcją ceny bieżącej instrumentu podstawowego i ceny wykonania, to znaczy

$$V(\alpha S, \alpha K) = \alpha V(S, K) \quad \forall \alpha > 0. \quad (*)$$

Wskazówka. Zauważ, że dla $\alpha > 0$ zachodzi tożsamość

$$\max(\omega(\alpha S - \alpha K), 0) = \alpha \max(\omega(S - K), 0),$$

gdzie $\omega = 1$ dla opcji kupna i $\omega = -1$ dla opcji sprzedaży. Korzystając z $(*)$ pokaż, że jeśli V jest funkcją różniczkowalną względem S i K , to

$$S \frac{\partial V}{\partial S} + K \frac{\partial V}{\partial K} = V(S, K).$$

Uwaga: Pochodna ceny opcji V względem ceny wykonania K jest określana jako tak zwana delta dualna.

7. Model dwumianowy – jednookresowy

7.1. Model dwumianowy

Model dwumianowy jest prostym modelem za pomocą którego

- opiszemy proces stochastyczny ceny aktywa,
- skonstruujemy portfele replikujące instrumenty pochodne,
- sformułujemy i uzasadnimy metodę wyceny instrumentów pochodnych.

Model opiszemy w dwóch etapach:

- zaczniemy od modelu jednookresowego (Wykład 7),
który następnie rozszerzymy na
- model wielookresowy (Wykład 8).

W modelu jednookresowym rozpatrujemy tylko dwa punkty w czasie

- dziś – $t = 0$ w którym znamy stan rynku,
- jutro – $t = T$ w którym stan rynku z dzisiejszej perspektywy nie jest znany – ceny aktywów w T są zmiennymi losowymi.

Na rynku mamy dwa aktywa

- obligację zerokuponową (rachunek bankowy na którym lokaty/depozyty są oprocentowane według stopy zerokuponowej) $\rightarrow$ proces (zmienna) deterministyczna,
- aktywo obciążone ryzykiem (np. akcja), które **nie przynosi dochodu w okresie** $[0, T] \rightarrow$ proces stochastyczny.

► Proces wartości obligacji zerokuponowej (rachunku bankowego) – B_t

- $B_0 = 1$,
- $B_T = DF(0, T)^{-1} = 1 + L\tau = e^{R\tau}$, gdzie $\tau = \Delta(0, T)$.

► Proces ceny aktywa – S_t

- S_0 dane, znana wartość,
- S_T jest zmienną losową o następującym rozkładzie

$$S_T = \begin{cases} S_0 U, & \text{z prawdopodobieństwem } p \text{ (stan „up”)}, \\ S_0 D, & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - p \text{ (stan „down”)}. \end{cases}$$

gdzie U i D są dane, przy czym $0 < D < U$. Później pokażemy jak te wielkości powiązać z innymi parametrami aktywa, w szczególności ze zmiennością aktywa. Okaże się również, że wartość prawdopodobieństwa p nie będzie istotna przy wycenie instrumentów pochodnych wystawionych na S (istotna będzie miara prawdopodobieństwa w tzw. świecie wolnym od ryzyka).

Zmienną S_T możemy zapisać w postaci

$$S_T = S_0 Z,$$

gdzie Z jest następującą zmienną losową

$$Z = \begin{cases} U, & \text{z prawdopodobieństwem } p, \\ D, & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - p. \end{cases}$$

► Europejski instrument pochodny X , wystawiony na ryzykowne aktyw S , to instrument finansowy, którego wartość wypłaty w chwili zapadalności T jest zmienną losową postaci

$$X_T = \Phi(S_T),$$

gdzie Φ jest pewną funkcją.

Na przykład, dla europejskiej opcji kupna akcji S z ceną wykonania K , która wygasa w T , mamy

$$X_T = \Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) = \max(S_0 Z - K, 0) = \begin{cases} S_0 U - K, & \text{w stanie „up”,} \\ 0, & \text{w stanie „down”.} \end{cases}$$

przy założeniu, że $S_0 D < K < S_0 U$.

Jedną z metod wyceny instrumentów pochodnych będzie polegała na konstrukcji portfela replikującego dany instrument pochodny, to znaczy portfela którego wartość w terminie zapadalności instrumentu pochodnego będzie taka sama jak wypłata, którą da instrument pochodny. Sformalizujemy pojęcie portfela w następujący sposób.

► **Portfel** na rynku, na którym dostępne są obligacja (rachunek bankowy) i jedno ryzykowne aktyw, to para $h = (x, y)$, gdzie x oznacza kwotę pieniędzy zainwestowaną w obligację (złożoną na rachunku bankowym), a y oznacza ilość ryzykownego aktywa w portfelu.

Założenia

- krótka sprzedaż jest dozwolona $\rightarrow x$ i y mogą być ujemne,
- jest nieskończona podzielność aktywów $\rightarrow x$ i y nie muszą być całkowite,
- nie ma widełek kupna-sprzedaży,
- jest pełna płynność obu aktywów.

► Wartość portfela h :

- w chwili $t = 0$ utworzenia portfela wynosi $V_0^h = xB_0 + yS_0$ i jest znaną wartością, jeśli x i y są dane,
- w przyszłej chwili $t = T$ jest zmienną losową $V_T^h = xB_T + yS_T = x(1 + L\tau) + yS_0 Z$.

Sprawiedliwa cena instrumentu pochodnego będzie ceną, przy której arbitraż nie będzie możliwy. Sprecyzujemy pojęcie portfela arbitrażowego.

► **Portfel arbitrażowy** to portfel h , który spełnia następujące warunki:

- $V_0^h = 0 \rightarrow$ nie ponosimy żadnych kosztów początkowych by utworzyć portfel,
- $P(V_T^h \geq 0) = 1$,
- $P(V_T^h > 0) > 0$.

W jakich warunkach nasz model rynku nie dopuszcza arbitrażu? Odpowiedź na to pytanie zawarta jest w następującym lemacie:

Lemat 7.1. *Model jednookresowy rynku z parametrami (U, D, L, T) nie dopuszcza arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy*

$$D < 1 + L\tau < U, \tag{7.1}$$

gdzie $\tau = \Delta(0, T)$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Przypuśćmy, że (7.1) nie zachodzi. Wówczas, $D \geq 1 + L\tau$ lub $1 + L\tau \geq U$. Rozpatrzmy przypadek $1 + L\tau \geq U$. Wtedy mamy także $1 + L\tau > D$. Skąd wynika, że zawsze (niezależnie od stanu rynku) inwestycja w obligację (lokatę na rachunku bankowym) nie będzie mniej opłacalna niż inwestycja w aktyw. Tak więc, tworzymy portfel $h = (S_0, -1)$, to znaczy krótko sprzedajemy aktyw i pieniądze uzyskane ze sprzedaży aktywa inwestujemy w obligację. Jasne, że $V_0^h = 0$ oraz że

$$V_T^h = xB_T + yS_T = S_0(1 + L\tau) - S_0 Z = S_0((1 + L\tau) - Z) \geq 0$$

w każdym stanie rynku. Ponadto, w stanie „down” $S_0((1+L\tau)-Z) = S_0((1+L\tau)-D) > 0$. Tak więc h jest portfelem arbitrażowym. Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić w przypadku gdy $D \geq 1 + L\tau$.

($\Leftarrow$) Niech h będzie dowolnym portfelem takim, że $V_0^h = 0$. Wówczas $h = (-yS_0, y)$, a jego wartość w T wynosi

$$V_T^h = \begin{cases} yS_0(U - (1 + L\tau)), & \text{w stanie „up”,} \\ yS_0(D - (1 + L\tau)), & \text{w stanie „down”.} \end{cases}$$

Przypuśćmy, że arbitraż jest możliwy. W przypadku $y > 0$ h jest portfelem arbitrażowym wtedy i tylko wtedy, gdy $U \geq 1 + L\tau$ oraz $D \geq 1 + L\tau$, i przynajmniej jedna z tych nierówności jest ostra. Wtedy mamy sprzeczność z (7.1). W przypadku $y < 0$ do sprzeczności dochodzimy w podobny sposób. $\square$

Warunek z Lematu 7.1 możemy przeformułować w następujący sposób:

Lemat 7.2. (7.1) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy istnieją dodatnie q_d, q_u , $q_d + q_u = 1$, takie że

$$1 + L\tau = q_d D + q_u U. \quad (7.2)$$

Dowód. ($\Leftarrow$) Oczywiście.

($\Rightarrow$) Definiujemy (rozwiązujemy równanie (7.2) przy warunku $q_d + q_u = 1$):

$$q_d = \frac{U - (1 + L\tau)}{U - D} \quad \text{oraz} \quad q_u = \frac{(1 + L\tau) - D}{U - D}. \quad (7.3)$$

Łatwo sprawdzić, że są to szukane wartości. $\square$

7.2. Świat wolny od ryzyka

(q_d, q_u) zadają nowe prawdopodobieństwo Q na przestrzeni stanów rynku w $t = T$. Niech E^Q oznacza wartość oczekiwaną względem miary prawdopodobieństwa Q . Wówczas, jak łatwo można pokazać

$$E^Q(S_T) = q_d S_0 D + q_u S_0 U = (1 + L\tau) S_0, \quad (7.4)$$

czyli w świecie z miarą Q oczekiwany zwrot z **ryzykownego** aktywa jest równy zwrotowi z aktywa wolnego od ryzyka. Z tego powodu miarę Q określa się terminem **miara wolna od ryzyka**, a przestrzeń stanów rynku z tą miarą nazywamy światem wolnym od ryzyka.

Wzór (7.4) możemy przepisać w następującej postaci

$$S_0 = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(S_T) = \frac{1}{B_T} E^Q(S_T) \quad (7.5)$$

i wtedy oznacza on, że bieżąca cena ryzykownego aktywa jest równa zdyskontowanej po stopie wolnej od ryzyka wartości oczekiwanej (względem miary Q) przyszłej ceny S_T . Niech

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t}$$

będzie procesem zdyskontowanej ceny aktywa. Wówczas (7.5) możemy przeformułować w następujący sposób:

$$S_0^* = E^Q(S_T^*),$$

co matematycznie możemy wyrazić mówiąc iż zdyskontowany proces cen jest martyngałem. Dlatego też o mierze Q mówimy że jest to wolna od ryzyka miara martyngałowa.

Równanie (7.4) można zinterpretować również w inny sposób. Mianowicie, (7.4) stwierdza, że wartość oczekiwana ceny aktywa S_T (w mierze wolnej od ryzyka) jest równa cenie forward F_0 tego aktywa (bowiem $F_0 = DF(0, T)^{-1} S_0$).

7.3. Wycena instrumentów pochodnych

Niech

$$\Pi_t(X)$$

oznacza cenę instrumentu pochodnego X w chwili czasu t . Jasne, że w chwili zapadalności $t = T$ instrumentu X jego cena pokrywa się z wartością wypłaty, czyli że $\Pi_T(X) = X_T = \Phi(S_T)$.

Jak natomiast wyznaczyć sprawiedliwą cenę X w chwili bieżącej $t = 0$? Zrobimy to tak:

- zreplikujemy instrument pochodny X portfelem $h(X)$ złożonym z obligacji zerokuponowej (lokaty/depozytu) i aktywa S ,
- za cenę instrumentu pochodnego X przyjmujemy wartość portfela replikującego, to znaczy przyjmujemy, że

$$\Pi_t(X) = V_t^{h(X)}.$$

W szczególności, będziemy mieli (**zasada wyceny instrumentów pochodnych**)

$$\Pi_0(X) = V_0^{h(X)}, \quad (7.6)$$

bowiem każda inna cena prowadziłaby do arbitrażu.

Będzie to dobry model wyceny, jeżeli będziemy wiedzieli, że każdy instrument pochodny możemy tak wycenić, czyli gdy każdy instrument pochodny będziemy w stanie zreplikować w naszym modelu rynku. W tym kontekście wprowadzimy następujące definicje:

- Instrument pochodny X jest **osiągalny**, jeżeli istnieje portfel $h(X)$ taki że

$$V_T^{h(X)} = X_T \quad \text{z prawdopodobieństwem 1.}$$

Portfel $h(X)$ nazywamy portfelem **replikującym**, a $-h(X)$ portfelem **zabezpieczającym**.

- Jeżeli każdy instrument pochodny X jest osiągalny na danym rynku, to mówimy, że rynek jest **zupelny**.

W naszym prostym przypadku mamy następujące

Twierdzenie 7.1. *Jeżeli model jednookresowy jest wolny od arbitrażu, to ten model rynku jest zupełny, to znaczy, każdy instrument pochodny na tym rynku jest osiągalny.*

Dowód. Niech $X = \Phi(S)$ będzie dowolnym instrumentem pochodnym zapadalnym w T , którego instrumentem podstawowym jest aktywo S . Pokażemy, że istnieje portfel $h(X)$ taki, że

$$\begin{aligned} V_T^{h(X)} &= \Phi(S_0 U) \quad \text{w stanie „up”,} \\ V_T^{h(X)} &= \Phi(S_0 D) \quad \text{w stanie „down”.} \end{aligned}$$

Niech $h(X) = (x, y)$. Wówczas z powyższego warunku wynika następujący układ równań na niewiadome x, y :

$$\begin{aligned} (1 + L\tau)x + S_0 U y &= \Phi(S_0 U) \quad \text{w stanie „up”} \\ (1 + L\tau)x + S_0 D y &= \Phi(S_0 D) \quad \text{w stanie „down”} \end{aligned}$$

Ponieważ $U > D$, układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 + L\tau} \frac{U \Phi(S_0 D) - D \Phi(S_0 U)}{U - D} \\ y &= \frac{1}{S_0} \frac{\Phi(S_0 U) - \Phi(S_0 D)}{U - D} = \frac{\Phi(S_0 U) - \Phi(S_0 D)}{S_0 U - S_0 D} \end{aligned} \quad (7.7)$$

A więc istnieje portfel $h(X)$ replikujący $X = \Phi(S)$. □

Niech $X = \Phi(S)$ będzie instrumentem pochodnym, a $h(X) = (x, y)$ jego portfelem replikującym skład którego dany jest wzorami (7.7). Wówczas zgodnie z zasadą wyceny instrumentów pochodnych (7.6), cena X w $t = 0$ dana jest wzorem

$$\begin{aligned}\Pi_0(X) &= V_0^{h(X)} = x + S_0 y = \\ &= \frac{1}{1 + L\tau} \frac{U \Phi(S_0 D) - D \Phi(S_0 U)}{U - D} + \frac{\Phi(S_0 U) - \Phi(S_0 D)}{U - D} = \\ &= \frac{1}{1 + L\tau} \left(\frac{(1 + L\tau) - D}{U - D} \Phi(S_0 U) + \frac{U - (1 + L\tau)}{U - D} \Phi(S_0 D) \right) = \\ &= \frac{1}{1 + L\tau} (q_u \Phi(S_0 U) + q_d \Phi(S_0 D)) = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(\Phi(S_T)) = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(X_T).\end{aligned}$$

Dotychczasowe rezultaty zbierzemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli model jednookresowy nie dopuszcza arbitrażu, to sprawiedliwa cena instrumentu pochodnego $X = \Phi(S)$ dana jest wzorem*

$$\Pi_0(X) = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(X_T),$$

gdzie Q jest wolną od ryzyka miarą martyngałową wyznaczoną przez warunek

$$S_0 = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(S_T).$$

Instrument pochodny X można zreplikować portfelem $h(X) = (x, y)$, gdzie

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{1 + L\tau} \frac{U \Phi(S_0 D) - D \Phi(S_0 U)}{U - D}, \\ y &= \frac{1}{S_0} \frac{\Phi(S_0 U) - \Phi(S_0 D)}{U - D} = \frac{\Phi(S_0 U) - \Phi(S_0 D)}{S_0 U - S_0 D}.\end{aligned}$$

7.4. Alternatywne wyprowadzenie wzorów na wycenę instrumentu pochodnego

Rozpatrzmy instrument pochodny $X = \Phi(S)$ wygasający w chwili T , którego instrumentem podstawowym jest aktywo S . Tworzymy portfel który składa się z

- Δ jednostek aktywa,
- wystawionego (sprzedanego) instrumentu pochodnego X .

Wartość tego portfela w chwili T wynosi

$$\begin{aligned}S_0 U \Delta - \Phi(S_0 U) &\quad \text{w stanie „up”,} \\ S_0 D \Delta - \Phi(S_0 D) &\quad \text{w stanie „down”}.\end{aligned}$$

Chcemy by ten portfel był pozbawiony ryzyka, to znaczy, by niezależnie od stanu rynku jego wartość była taka sama, czyli by zachodziła równość

$$S_0 U \Delta - \Phi(S_0 U) = S_0 D \Delta - \Phi(S_0 D).$$

Rozwiązując to równanie ze względu na zmienną Δ otrzymujemy

$$\Delta = \frac{\Phi(S_0U) - \Phi(S_0D)}{S_0U - S_0D} = \frac{1}{S_0} \frac{\Phi(S_0U) - \Phi(S_0D)}{U - D}. \quad (7.8)$$

Zauważmy, że $\Delta = y$, gdzie y określa ilość aktywa w portfelu replikującym $h(X)$ (patrz (7.7)). Gdy Δ jest wyznaczone wzorem (7.8), nasz portfel jest pozbawiony ryzyka. Dochód, który da ten portfel, musi być taki sam jak dochód z inwestycji w obligację zerokuponową (lokata/depozyt) ze stopą L . Ponieważ koszt utworzenia tego portfela w $t = 0$ wynosi

$$S_0\Delta - \Pi_0(X),$$

w chwili T musi zachodzić

$$(1 + L\tau)(S_0\Delta - \Pi_0(X)) = S_0U\Delta - \Phi(S_0U).$$

Z tego równania możemy wyliczyć wartość $\Pi_0(X)$. Otrzymamy

$$\Pi_0(X) = S_0\Delta - \frac{1}{1 + L\tau}(S_0U\Delta - \Phi(S_0U)), \quad (7.9)$$

a po podstawieniu do (7.9) formuły (7.8) na Δ i wykonaniu odpowiednich przekształceń, wzór (7.9) przedstawimy znów w postaci

$$\Pi_0(X) = \frac{1}{1 + L\tau} (q_u\Phi(S_0U) + q_d\Phi(S_0D)) = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(X_T).$$

Uwaga 7.1. Często do wyrażenia stopy dochodu z inwestycji wolnej od ryzyka, zamiast stopy prostej L , używa się stopy kapitalizowanej w sposób ciągły (stopy logarytmicznego zwrotu) R . Podobnie, zamiast czynnika dyskontowego postaci $1/(1 + L\tau)$, używa się ceny obligacji zerokuponowej zapadalnej w T . Wtedy w odpowiednich wyrażeniach należy zastąpić $1 + L\tau$ przez $\exp(R\tau)$ lub $1/B_T$.

Przykład 7.1. Niech cena akcji w chwili $t = 0$ wynosi $S_0 = 20$, a stopa wolna od ryzyka kapitalizowana w sposób ciągły $R = 12\%$. Rozpatrzmy trzymiesięczną opcję kupna z ceną wykonania $K = 21$. Dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy, że $T = 3/12 = 0.25$. Załóżmy, że cena akcji albo wzrośnie o 10% albo zmaleje o 10%, czyli że $U = 1.1$ oraz $D = 0.9$. Tak więc w $T = 3/12$, cena akcji wynosi

$$S_T = 22 \text{ (w stanie „up”)} \quad \text{albo} \quad S_T = 18 \text{ (w stanie „down”)},$$

a wartość wypłaty z opcji

$$C_T = 1 \text{ (w stanie „up”)} \quad \text{albo} \quad C_T = 0 \text{ (w stanie „down”)}. \quad (7.10)$$

Wyznaczamy miarę wolną od ryzyka, czyli prawdopodobieństwo

$$q_u = \frac{e^{RT} - D}{U - D} = 0.6523.$$

Uwaga: wartość q_u możemy również obliczyć z równania

$$q_u \cdot 22 + (1 - q_u) \cdot 18 = e^{0.12 \cdot 0.25} \cdot 20.$$

Zgodnie z zasadą wyceny instrumentów pochodnych cena opcji w $t = 0$ wynosi

$$C_0 = e^{-RT} (q_u\Phi(S_0U) + q_d\Phi(S_0D)) = e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.6523 \cdot 1 + 0.3477 \cdot 0) = 0.633.$$

Tą samą wartość otrzymamy obliczając wartość portfela replikującego w $t = 0$. Mianowicie, skład portfela replikującego jest następujący

$$x = e^{-0.12 \cdot 0.25} \cdot \frac{1.1 \cdot 0 - 0.9 \cdot 1}{1.1 - 0.9} = -4.367,$$

$$y = \frac{1}{20} \cdot \frac{1 - 0}{1.1 - 0.9} = 0.25,$$

a jego wartość w $t = 0$ wynosi

$$x + S_0 y = -4.367 + 20 \cdot 0.25 = 0.633.$$

Wróćmy do świata realnego. Przypuśćmy, że oczekiwana logarytmiczna (kapitalizowana w sposób ciągły) stopa zwrotu z akcji wynosi 16%. Prawdopodobieństwo p_u wzrostu ceny akcji w świecie realnym obliczamy z równania

$$p_u \cdot 22 + (1 - p_u) \cdot 18 = e^{0.16 \cdot 0.25} \cdot 20,$$

skąd $p_u = 0.7041$. W świecie realnym oczekiwana wypłata z opcji wynosi

$$p_u \cdot 1 + (1 - p_u) \cdot 0 = 0.7041.$$

Jaką stopą R^* należy zdyskontować tę oczekiwaną wypłatę opcji, by otrzymać cenę opcji? Obliczamy ją z warunku

$$e^{-R^* \cdot 0.25} \cdot 0.7041 = 0.633,$$

skąd $R^* = 42.58\%$, a więc dużo więcej niż 16%, i słusznie bowiem opcja jest instrumentem bardziej ryzykownym niż akcja.

7.5. Wyznaczanie wartości współczynników U i D

Chcemy powiązać wartości współczynników U i D z podstawowymi parametrami procesu cen aktywa S . Tymi parametrami będą

— μ – logarytmiczna stopa oczekiwanego zwrotu z aktywa, czyli liczba taka, że

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu\tau},$$

— σ – odchylenie standardowe logarytmicznej stopy zwrotu z aktywa – tzw. zmienność aktywa – liczba taka, że

$$\text{Var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu\tau} (e^{\sigma^2\tau} - 1), \quad (7.10)$$

przy czym obie wielkości są podane w skali roku (zannualizowane). Oczywiście, w przypadku tworzenia drzewa dwumianowego w celu wyceny instrumentu pochodnego przyjmujemy $\mu = R$, gdzie R jest stopą wolną od ryzyka (bowiem wycena odbywa się w świecie wolnym od ryzyka).

Niech p oznacza prawdopodobieństwo wzrostu ceny aktywa w modelu dwumianowym rynku w którym stopa oczekiwanego zwrotu wynosi μ . Wówczas, parametry modelu muszą być tak dobrane by

$$E(S_T) = S_0 U p + S_0 D (1 - p) = S_0 e^{\mu\tau}. \quad (7.11a)$$

Wariancja ceny aktywa w naszym modelu dwumianowym wynosi natomiast

$$E((S_T)^2) - (E(S_T))^2 = (S_0 U)^2 p + (S_0 D)^2 (1 - p) - (S_0 U p + S_0 D (1 - p))^2.$$

Z drugiej strony wariancja ceny w okresie od $t = 0$ do $t = T$ dana jest wzorem (7.10). Dla małych τ i μ , w przybliżeniu mamy

$$\text{Var}(S_T) \simeq S_0^2 \sigma^2 \tau.$$

Stąd musi być spełnione (przybliżone) równanie

$$U^2 p + D^2(1 - p) - (Up + D(1 - p))^2 = \sigma^2 \tau. \quad (7.11b)$$

Równania (7.11) tworzą układ dwóch równań na trzy niewiadome p , U , oraz D . Musimy więc dołożyć dodatkowy warunek, który umożliwi nam rozwiązanie układu. Przedstawimy dwa rozwiązania, które uzyskamy przy dwóch różnych warunkach dodatkowych.

► Rozwiązanie I (Model CRR – Cox, Ross, Rubinstein)

Warunek dodatkowy jest następujący – zakładamy, że

$$UD = 1. \quad (7.12)$$

Ten warunek upraszcza tworzenie procesu cen aktywa na wielookresowym drzewie dwumianowym. Wówczas rozwiązanie układu równań (7.11), (7.12) ma następującą postać:

$$p = \frac{e^{\mu\tau} - D}{U - D}, \quad (7.13)$$

co wynika wprost z (7.11a), oraz

$$U = e^{+\sigma\sqrt{\tau}}, \quad D = e^{-\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (7.14)$$

przy czym wielkości U i D spełniają równanie (7.11b) z dokładnością do wyrażen rzędu τ .

Uwagi

1. Można pokazać, że jeżeli U i D są określone równaniami (7.14), a p równaniem (7.13), to spełnianie warunku (7.11b) nie zależy od wartości stopy μ . To oznacza, że w modelu dwumianowym zmienność aktywa jest taka sama niezależnie od tego czy model opisuje świat realny czy świat wolny od ryzyka (ma to związek z Twierdzeniem Girsanowa).
2. Jeżeli zamiast przybliżonego równania (7.11b), do wyznaczania wartości współczynników U i D użyć dokładnego równania

$$U^2 p + D^2(1 - p) - (Up + D(1 - p))^2 = e^{2\mu\tau} (e^{\sigma^2\tau} - 1),$$

to wartości tych współczynników wyniosą

$$\begin{aligned} U &= \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \\ D &= 1/U = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \end{aligned}$$

gdzie

$$\beta = \frac{1}{2} \left(e^{-\mu\tau} + e^{(\mu+\sigma^2)\tau} \right).$$

Można pokazać, że wówczas

$$U = e^{\sigma\sqrt{\tau}} + O((\sqrt{\tau})^3),$$

tak więc z dokładnością do wyrazów wyższego rzędu $U \simeq e^{\sigma\sqrt{\tau}}$, tak jak w oryginalnym rozwiązaniu CRR.

► Rozwiązanie II – Model „równych prawdopodobieństw”

Warunek dodatkowy jest następujący – przyjmujemy, że

$$p = \frac{1}{2}. \quad (7.15)$$

Ten warunek upraszcza obliczanie wartości oczekiwanej przy obliczaniu ceny instrumentu pochodnego w wielookresowym modelu dwumianowym. Wówczas rozwiązanie układu równań (7.11), (7.15) ma następującą postać:

$$U = e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}}, \quad (7.16)$$

$$D = e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau - \sigma\sqrt{\tau}}, \quad (7.17)$$

przy czym wielkości U i D spełniają równanie (7.11) z dokładnością od wyrażen rzędu τ .

7.6. Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

W poniższych zadaniach przyjmijmy następujące definicje i określenia

— Prosta stopa zwrotu R z aktywa S

$$R = \frac{1}{\tau} \frac{S_T - S_0}{S_0},$$

gdzie τ jest ułamkiem roku dla okresu $[0, T]$.

— Stopa logarytmicznego zwrotu r z aktywa S

$$r = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right),$$

gdzie τ jest ułamkiem roku dla okresu $[0, T]$.

— $E^{(p)}(Y)$ – wartość oczekiwana zmiennej Y w modelu dwumianowym, w którym prawdopodobieństwo stanu „Up” wynosi p .

— $\sigma^{(p)}(Y)$ – odchylenie standardowe zmiennej Y w modelu dwumianowym, w którym prawdopodobieństwo stanu „Up” wynosi p .

Ćwiczenie 7.1. Pokaż, że

$$(a) \quad E^{(q)}(R) = L,$$

$$(b) \quad E^{(p)}(R) - L = \frac{1}{\tau}(p - q)(U - D),$$

$$(c) \quad \sigma^{(p)}(R) = \sqrt{p(1-p)}(U - D),$$

$$(d) \quad E^{(p)}(R) - L = \frac{p-q}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma^{(p)}(R) = \frac{p-q}{\sqrt{q(1-q)}} \sigma^{(q)}(R),$$

gdzie L jest stopą prostą opisującą kumulację kapitału na rachunku bankowym – tzw. stopa wolna od ryzyka, a q jest prawdopodobieństwem (martynałowym) w tym świecie wolnym od ryzyka.

Ćwiczenie 7.2. Pokaż, że wartość aktywa S w chwili $t = 0$ można wyrazić w następujący sposób

$$S(0) = \frac{E^{(p)}(S_T)}{1 + \tau(L + \lambda(p)\sigma^{(p)}(R))},$$

gdzie

$$\lambda(p) = \frac{p - q}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

Ćwiczenie 7.3. Pokaż, że

(a) $\sigma^{(p)}(r) = \sqrt{p(1-p)} \ln(U/D)$

(b) W modelu CRR: $\sigma^{(p)}(r) = 2\sqrt{p(1-p)} \sigma\sqrt{\tau}$

(c) W modelu równych prawdopodobieństw: $\sigma^{(p)}(r) = \sigma\sqrt{\tau}$

8. Model dwumianowy – wielookresowy

W modelu wielookresowym czas trwania instrumentu pochodnego, który zapada w chwili T , jest podzielony na N okresów o długości $\tau = \Delta(0, T/N)$ każdy.

Na rynku mamy dwa aktywa

- obligację zerokuponową (rachunek bankowy na którym lokaty/depozyty są oprocentowane według stopy zerokuponowej) $\rightarrow$ proces (zmienna) deterministyczna,
- aktywo obciążone ryzykiem, które nie przynosi dochodu $\rightarrow$ proces stochastyczny.

► Proces wartości obligacji zerokuponowej (rachunku bankowego) – B_t , gdzie $t = n\tau$, a $n = 0, 1, \dots, N$. Upraszczając notację będziemy pisać $B_n = B_{n\tau}$. Proces ten jest zdefiniowany w następujący sposób

- $B_0 = 1$,
- $B_{n+1} = (1 + L\tau)B_n = e^{R\tau}B_n$ dla $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Tak więc zakładamy, że stopa procentowa jest stała w rozpatrywanym okresie czasu.

► Proces ceny aktywa ryzykownego – S_t , gdzie $t = n\tau$, a $n = 0, 1, \dots, N$. Upraszczając notację będziemy pisać $S_n = S_{n\tau}$. Proces ten jest zdefiniowany w następujący sposób

- S_0 dane, znana wartość,
- $S_{n+1} = S_n \cdot Z_n$ dla $n = 0, 1, \dots, N - 1$, gdzie $Z_0, Z_1, \dots, Z_{N-1}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie

$$Z_n = \begin{cases} U, & \text{z prawdopodobieństwem } p; \\ D, & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - p. \end{cases}$$

przy czym U, D są dane oraz zakładamy, że $D < U$ (te wielkości są powiązane z innymi parametrami aktywa, w szczególności ze zmiennością aktywa – patrz Wykład 7).

Drzewo dwumianowe

Proces ceny ryzykownego aktywa oraz wycena instrumentów pochodnych będzie się odbywać na N –okresowym drzewie dwumianowym. n –ty okres składa się z n jednookresowych drzewek z których każde ma swój wierzchołek w końcowych węzłach poprzedniego okresu. Te n jednookresowych drzewek ma swoje zakończenia w $n + 1$ węzłach, które są wierzchołkami jednookresowych drzewek w kolejnym okresie. Będziemy zakładać, że drzewo rekombinuje się w tym sensie, że wzrost ceny w okresie i spadek ceny w następnym okresie prowadzi do tej samej wartości co spadek ceny w tym okresie i wzrost ceny w następnym okresie – tak będzie gdy iloraz U/D będzie taki sam w każdym okresie drzewa. Węzły drzewa będziemy oznaczać parą (n, k) , gdzie n odpowiada chwili czasu $n\tau$, a $k = 0, 1, \dots, n$ identyfikuje węzeł odpowiadający stanowi rynku, przy czym k oznacza liczbę wzrostów ceny na drodze od wierzchołka drzewa do tego węzła. Wierzchołek drzewa oznaczamy parą $(0, 0)$. Tak więc cena aktywa w chwili $n\tau$ w k – tym węźle wynosi

$$S_n^{(k)} = S_0 U^k D^{n-k}.$$

Strategia inwestycyjna to portfel

$$h_n = (x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie

- $x_n(k)$ – ilość pieniędzy zainwestowana w obligację zerokuponową (rachunek bankowy) w węźle $(n-1, k)$ trzymiana do chwili $n\tau$,
- $y_n(k)$ – ilość aktywa ryzykownego w portfelu stworzonym w węźle $(n-1, k)$ trzymiana do chwili $n\tau$.

Ponadto, w celu zapewnienia spójności formuł definiujemy $h_0 = h_1$.

Wielkości h_n są zmiennymi losowymi, tak więc możemy mówić, że strategia inwestycyjna jest procesem stochastycznym. Skład portfela h_n zależy od całej informacji o stanie rynku dostępnej do chwili $(n-1)\tau$ (włącznie) $\rightarrow h_n$ jest tzw. procesem prognozowalnym.

Proces wartości strategii. W chwili $n\tau$ portfel h ma wartość

$$V_n^h = x_n(1 + L\tau) + y_n S_n,$$

gdzie $h_n = (x_n, y_n)$ oraz $n = 0, 1, \dots, N$.

Strategia (portfel) h jest **samofinansująca(y) się** wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $n = 0, 1, \dots, N-1$ zachodzi

$$x_n(1 + L\tau) + y_n S_n = x_{n+1} + y_{n+1} S_n.$$

Ten warunek oznacza, że zmiana składu portfela w chwili czasu $n\tau$ odbywa się bez dopływu gotówki do portfela lub odpływu gotówki z portfela.

Samofinansujący się portfel h jest strategią arbitrażową, jeżeli

- $V_0^h = 0$,
- $P(V_N^h \geq 0) = 1$,
- $P(V_N^h > 0) > 0$.

Tak jak poprzednio w przypadku modelu jednookresowego, model nie dopuszcza arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy

$$D < 1 + L\tau < U. \quad (*)$$

Dowód tego faktu podamy w dalszej części wykładu (patrz Twierdzenie 8.3).

Na razie założmy, że warunek (*) jest spełniony. Wówczas, możemy określić miarę martynałową Q , taką, że

$$S = \frac{1}{1 + L\tau} E^Q(S_{n+1} | S_n = S),$$

a prawdopodobieństwa martyngałowe dane są wzorami

$$q_d = \frac{U - (1 + L\tau)}{U - D} \quad \text{oraz} \quad q_u = \frac{(1 + L\tau) - D}{U - D}. \quad (8.1)$$

Rozważamy europejskie instrumenty pochodne X , których wartość wypłaty w chwili zapadalności dana jest przez pewną funkcję Φ zmiennej S_N

$$X_N = \Phi(S_N).$$

Podobnie jak w przypadku modelu jednookresowego, instrument pochodny X jest **osiągalny** jeśli istnieje samofinansujący się portfel $h(X)$ replikujący X , to znaczy taki, że

$$V_N^{h(X)} = X_N = \Phi(S_N) \quad \text{z prawdopodobieństwem 1.}$$

Model rynku jest zupełny jeżeli każdy instrument pochodny da się zreplikować samofinansującym się portfelem utworzonym z aktywów dostępnych na tym rynku.

Zasada wyceny instrumentów pochodnych jest analogiczna jak w przypadku modelu jednookresowego. Jeżeli X jest osiągalny, to sprawiedliwa cena tego instrumentu, tj. cena, która uniemożliwia przeprowadzenie arbitrażu, w chwili $n\tau$ dana jest wzorem

$$\Pi(n\tau, X) = V_n^{h(X)},$$

gdzie $h(X)$ jest samofinansującą się strategią replikującą X .

Poniższe twierdzenie opisuje algorytm wyznaczania portfela replikującego i wyznaczania ceny instrumentu pochodnego. Wnioskiem z tego twierdzenia jest również zupełność rynku.

Twierdzenie 8.1. *Niech X będzie europejskim instrumentem pochodnym, zapadalnym w chwili $T = N\tau$, którego wartość wypłaty dana jest funkcją $X_N = \Phi(S_N)$. X można zreplikować samofinansującym się portfelem $h(X)$, którego wartości obliczamy następującym algorytmem rekurencyjnym*

$$V_N^{h(X)}(k) = \Phi(S_0 U^k D^{N-k}), \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, N, \quad (8.2)$$

oraz dla $n = N - 1, \dots, 1, 0$,

$$V_n^{h(X)}(k) = \frac{1}{1 + L\tau} \left(q_u V_{n+1}^{h(X)}(k+1) + q_d V_{n+1}^{h(X)}(k) \right) \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, n, \quad (8.3)$$

a q_u i q_d są określone w (8.1). Skład portfela replikującego dany jest następującymi wzorami

$$x_n(k) = \frac{1}{1 + L\tau} \frac{U V_n^{h(X)}(k) - D V_n^{h(X)}(k+1)}{U - D}, \quad (8.4)$$

$$y_n(k) = \frac{1}{S_{n-1}(k)} \frac{V_n^{h(X)}(k+1) - V_n^{h(X)}(k)}{U - D}, \quad (8.5)$$

gdzie $n = N, \dots, 1$, a $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

W szczególności, cena instrumentu pochodnego $\Pi(0, X)$ w $t = 0$ wynosi $V_0^{h(X)}(0)$. Wzór na tę cenę zawarty jest następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 8.2. *Sprawiedliwa cena europejskiego instrumentu pochodnego X w chwili $t = 0$ dana jest wzorem*

$$\Pi(0, X) = \frac{1}{(1 + L\tau)^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} q_u^k q_d^{N-k} \Phi(S_0 U^k D^{N-k}), \quad (8.6)$$

który możemy zapisać w postaci

$$\Pi(0, X) = \frac{1}{(1 + L\tau)^N} E^{Q_N}(X_N), \quad (8.7)$$

gdzie Q_N jest wolną od ryzyka miarą na przestrzeni stanów rynku w chwili T :

$$Q_N(\text{stanu } k) = \binom{N}{k} q_u^k q_d^{N-k} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, N.$$

Twierdzenie 8.3. *Wielookresowy model rynku nie dopuszcza arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy*

$$D < 1 + L\tau < U. \quad (**)$$

Dowód. Jeżeli arbitraż nie jest możliwy, to nierówność (**) uzyskujemy z analogicznego twierdzenia dla modelu jednookresowego. Załóżmy teraz, że nierówności (**) zachodzą. Niech h będzie samofinansującym się portfelem, który spełnia warunki

- $P(V_N^h \geq 0) = 1$,
- $P(V_N^h > 0) > 0$.

Wówczas, z twierdzenia (8.2) wynika, że $V_0^h = \frac{1}{(1+L\tau)^N} E^{Q_N}(V_N^h) > 0$. Tak więc h nie może być portfelem arbitrażowym. $\square$

8.1. Podsumowanie – algorytm wyceny na drzewie dwumianowym

Dla

- europejskiego instrumentu pochodnego,
- o wypłacie niezależnej od drogi,
- którego instrument podstawowy nie daje dochodu w czasie trwania kontraktu.

Na podstawie danych

- L – stopy procentowej (wolnej od ryzyka),
- σ – zmienności cen instrumentu podstawowego,

wyznaczamy

- współczynniki D i U ,
- odpowiednie wartości prawdopodobieństw martynałowych q_d oraz q_u .

► Etap pierwszy: wyznaczenie procesu cen instrumentu podstawowego na drzewie

Dla $n = 1, \dots, N$ wyznaczamy wartości instrumentu podstawowego w $(n+1)$ węzłach każdej warstwy czasowej $n\tau$ korzystając z wzoru

$$S_n^{(k)} = S_0 U^k D^{n-k} \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, n.$$

W przypadku instrumentu europejskiego niezależnego od drogi potrzebujemy wartości instrumentu podstawowego tylko w chwili $T = N\tau$.

► Etap drugi: indukcja wstecz – wyznaczenie wartości instrumentu pochodnego na drzewie

Obliczamy wartość wypłaty z instrumentu pochodnego w chwili zapadalności kontraktu $T = N\tau$

$$V_N(k) \equiv X_N(k) = \Phi(S_0 U^k D^{N-k}) \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, N.$$

Następnie, obliczamy kolejno dla $n = N-1, \dots, 1, 0$

$$V_n(k) = \frac{1}{1+L\tau} (q_u V_{n+1}(k+1) + q_d V_{n+1}(k)) \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, n.$$

Wartość instrumentu pochodnego X w chwili $t = 0$ wynosi $V_0(0)$.

Uwaga 8.1. Algorytm dwumianowy opisany w twierdzeniu 8.1 (lub w powyższym podsumowaniu) można przenieść na **przypadek instrumentów pochodnych typu amerykańskiego**. Niech wartość wypłaty takiego instrumentu w chwili $t \leq T$ będzie dana wzorem $X_t = \Phi(S_t)$. Taki instrument jest wyceniany również przez konstrukcję i wycenę strategii replikującej. Wyznaczając wartości strategii replikującej instrument amerykański musimy dodatkowo sprawdzać

w poszczególnych węzłach czy optymalne jest wcześniejsze wykonanie. W tym celu wystarczy zmodyfikować wzór (8.2) w następujący sposób:

$$V_n^{h(X)}(k) = \max \left(\Phi(S_n^{(k)}), \frac{1}{1 + L\tau} \left(q_u V_{n+1}^{h(X)}(k+1) + q_d V_{n+1}^{h(X)}(k) \right) \right), \quad (8.8)$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n$, oraz $n = N - 1, \dots, 1, 0$.

8.2. Dalsze uogólnienia i rozszerzenia algorytmu dwumianowego

► Uwzględnienie struktury stóp procentowych

Niech f_n oznacza stopę forward kapitalizowaną w sposób ciągły na okres czasu $[(n-1)\tau, n\tau]$. Wówczas, konstruując drzewo dwumianowe należy uwzględnić następujące modyfikacje.

- W modelu CRR wartości współczynników U i D są takie same w każdym podokresie drzewa (bo zależą tylko od zmienności σ – patrz wzór (7.3)), natomiast prawdopodobieństwa martyngałowe

$$q_u^{(n)} = \frac{e^{f_n \cdot \tau} - D}{U - D}, \quad q_d^{(n)} = 1 - q_u^{(n)}. \quad (8.9)$$

będą się zmieniać w kolejnych podokresach drzewa.

- W modelu „równych prawdopodobieństw” zmieniać się będą w kolejnych podokresach wartości współczynników U i D ; mianowicie wyniosą one

$$U^{(n)} = e^{(f_n - \sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}}, \quad (8.10a)$$

$$D^{(n)} = e^{(f_n - \sigma^2/2)\tau - \sigma\sqrt{\tau}}. \quad (8.10b)$$

Prawdopodobieństwa martyngałowe będą oczywiście takie same (równe $\frac{1}{2}$).

W obu metodach, mimo tych modyfikacji, drzewo dwumianowe w dalszym ciągu się rekombinuje, bowiem iloraz U/D ma stałą wartość w każdym z podokresów drzewa. Algorytm wyceny instrumentów pochodnych sformułowany w twierdzeniu 8.1 w zasadzie pozostaje bez zmian – należy jedynie pamiętać o uzmiennieniu odpowiednich parametrów w formułach (8.3)–(8.5). W szczególności, zamiast czynnika dyskontowego postaci $1/(1+L\tau)$, który nie zależy od podokresu, należy użyć czynników które są wyznaczone na podstawie stóp forward, na przykład mających postać $\exp(-f_n\tau)$.

Następne modyfikacje polegają na uwzględnieniu dochodów przynoszonych przez aktywo. Rozpatrzmy trzy przypadki:

- aktywo ryzykowne przynosi „ciągły” dochód,
- aktywo ryzykowne przynosi „dyskretny” dochód, który jest wyrażony jako procent bieżącej ceny aktywa,
- aktywo ryzykowne przynosi „dyskretny” dochód, który jest przedstawiony jako strumień płatności.

► Aktywo ryzykowne przynosi „ciągły” dochód (np. indeks giełdowy, kurs walutowy)

Niech δ oznacza stopę dochodu kapitalizowaną w sposób ciągły. Modyfikacje algorytmu dwumianowego polegają na zastąpieniu w odpowiednich wyrażeniach stopy wolnej od ryzyka R (lub ogólniej stóp forward f_n) przez różnicę tej stopy i stopy dochodu, czyli przez $R - \delta$ (lub odpowiednio przez $f_n - \delta$). I tak,

- W modelu CRR wartości współczynników U i D pozostają bez zmian (bo zależą tylko od zmienności σ – patrz wzór (7.3)), natomiast prawdopodobieństwa martyngałowe wynoszą

$$q_u^{(n)} = \frac{e^{(f_n - \delta) \cdot \tau} - D}{U - D}, \quad q_d^{(n)} = 1 - q_u^{(n)}. \quad (8.11)$$

— W modelu „równych prawdopodobieństw” wartości współczynników U i D wynoszą

$$U^{(n)} = e^{((f_n - \delta) - \sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}}, \quad (8.12a)$$

$$D^{(n)} = e^{((f_n - \delta) - \sigma^2/2)\tau - \sigma\sqrt{\tau}}. \quad (8.12b)$$

Prawdopodobieństwa martyngałowe będą oczywiście takie same (równe $\frac{1}{2}$).

W przypadku, gdy S jest kursem walutowym podanym jako ilość waluty CUR_2 za jednostkę waluty CUR_1 , R jest stopą waluty CUR_2 , a δ jest stopą waluty CUR_1 .

► Aktywo ryzykowne przynosi „dyskretny” dochód, który jest wyrażony jako procent bieżącej ceny aktywa

Zakładamy, że aktywo daje dochód w terminach zgodnych z podziałem czasu trwania instrumentu pochodnego na okresy drzewa. Wielkość tego dochodu jest wyrażona jako procent ceny bieżącej aktywa. Dokładniej, założmy że w chwili $n\tau$ aktywo wypłaca dochód w wysokości qS_n , gdzie S_n jest ceną aktywa w chwili $n\tau$, a $0 \leq q < 1$ określa procentową wysokość tego dochodu. Zakładamy, że wypłata tego dochodu powoduje spadek wartości ceny bieżącej o wartość wypłaty. Czyli tuż po wypłacie dochodu aktywo ma wartość $(1 - q)S_n$. Uwzględnienie takiego mechanizmu wypłat dochodu przy tworzeniu drzewa dwumianowego jest proste. Mianowicie, generując proces cen aktywa na drzewie, tak długo jak aktywo nie daje dochodu postępujemy według algorytmu dla aktywa nieprzynoszącego dochodu, po czym w momencie wypłaty dochodu w każdym węźle drzewa warstwy czasowej $n\tau$ obniżamy ceny aktywa o wartość qS_n (wartość $S_n(k)$ zastępujemy przez $(1 - q)S_n(k)$ dla $k = 0, 1, \dots, n$). Dalej, do następnego momentu wypłaty, postępujemy znów według algorytmu dla aktywa nieprzynoszącego dochodu startując w chwili $n\tau$ z wartości $(1 - q)S_n$. Wartości współczynników U i D oraz prawdopodobieństw martyngałowych są takie same jak dla aktywa nieprzynoszącego dochodu. Należy zauważyć, że „multiplikatywność” dochodu powoduje iż drzewo w dalszym ciągu się rekombinuje.

Aktywo ryzykowne przynosi „dyskretny” dochód będący strumieniem płatności (np. akcja z dywidendą)

Zakładamy że aktywo daje dochód w terminach zgodnych z podziałem czasu trwania instrumentu pochodnego na okresy drzewa. Wówczas, konstruując proces ceny aktywa na drzewie należy pamiętać o tym że po wypłacie dochodu cena aktywa skokowo spada o wielkość wypłaty. Obniżenie ceny aktywa w momencie wypłat dochodu o stałe wartości powoduje iż drzewo przestaje się rekombinować. Sposób obejścia tego problemu jest następujący.

1. Obliczamy D_0 – wartość bieżącą (na chwilę 0) strumienia wszystkich przyszłych (do chwili T) dochodów.
2. Tworzymy rekombinujące się drzewo procesu cen aktywa („obdartego” z części deterministycznej – tj. z wartości znanych z góry dochodów) startując z wartości $S_0 - D_0$ i używając współczynników U i D jak dla aktywa niepłacącego dochodu.
3. Tak otrzymane drzewo modyfikujemy dodając z powrotem składowe odpowiadające dochodom generowanym przez aktywo. Mianowicie do cen aktywa w chwili $n\tau$ utworzonych w kroku (2) dodajemy wartość bieżącą na chwilę $n\tau$ wszystkich przyszłych (względem chwili $n\tau$) dochodów generowanych przez aktywo. W szczególności, po tej modyfikacji proces cen ponownie startuje z ceny bieżącej aktywa S_0 oraz uwzględnia skokowe zmiany wartości aktywa będące konsekwencjami wypłat dochodu.

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 8.1. Wycenić opcję sprzedaży (*put*) akcji na dwuokresowym drzewie dwumianowym przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- $U = 1.1765$, $D = 1/U = 0.85$,
- czas trwania opcji wynosi 2 miesiące (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla jednomiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 12% (pa),
- cena wykonania wynosi $K = 110$.

Wycenę przeprowadź w dwóch przypadkach: (a) opcji europejskiej, (b) opcji amerykańskiej.

Ćwiczenie 8.2. Wycenić europejską opcję kupna (*call*) akcji na trzyokresowym drzewie dwumianowym przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- $U = 1.25$, $D = 1/U = 0.80$,
- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów wynosi 8% (pa), dla sześciomiesięcznych 9%, a dla dziewięciomiesięcznych 10%.
- cena wykonania wynosi $K = 120$.

Ćwiczenie 8.3. Rozpatrzmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty

$$X_T = 100 \max(R_T - K, 0),$$

gdzie $R_T = (S_T - S_0)/S_0$ jest stopą zwrotu z akcji w okresie $[0, T]$. Wycen ten instrument na trzyokresowym drzewie dwumianowym przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- $U = 1.15$, $D = 1/U = 0.87$,
- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (pa),
- cena wykonania wynosi $K = 7\%$.

Ćwiczenie 8.4. Wycenić europejską opcję sprzedaży (*put*) akcji na dwuokresowym drzewie dwumianowym przy następujących danych

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- $U = 1.25$, $D = 1/U = 0.80$,
- czas trwania opcji wynosi 6 miesięcy (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (pa),
- cena wykonania wynosi $K = 100$, przy czym jeśli na końcu trzeciego miesiąca cena akcji spadnie poniżej 85, to cena wykonania zostanie obniżona do $K = 85$.

Ćwiczenie 8.5. Rozpatrzmy europejską opcję kupna akcji. Cena wykonania opcji K zależy od ceny akcji w chwili zapadalności opcji w następujący sposób:

$$K = \begin{cases} 30, & \text{gdy } S_T < 30, \\ S_T, & \text{gdy } 30 \leq S_T \leq 60, \\ 60 + \frac{1}{10}(S_T - 60), & \text{gdy } 60 < S_T. \end{cases}$$

Wycen ten instrument na trzyokresowym drzewie dwumianowym przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 50$,
- $U = 1.25$, $D = 1/U = 0.80$,
- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (pa).

Ćwiczenie 8.6. Rozpatrzmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty:

$$X_T = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S_T \leq K, \\ S_T - K - A, & \text{gdy } K < S_T. \end{cases}$$

Wyznacz wartość A , tak by cena tego instrumentu pochodnego przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- $U = 1.25$, $D = 1/U = 0.80$,
- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (pa),
- cena wykonania wynosi $K = 100$,

wynosiła zero. Posłuż się trzykresowym drzewem dwumianowym.

Ćwiczenie 8.7. Rozpatrzmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty:

$$X_T = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S_T \leq K, \\ \alpha S_T - K, & \text{gdy } K < S_T. \end{cases}$$

Wyznacz cenę tego instrumentu pochodnego w zależności od parametru α przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- $U = 1.25$, $D = 1/U = 0.80$,
- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy (można przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (pa),
- cena wykonania wynosi $K = 100$.

Posłuż się trzykresowym drzewem dwumianowym.

Ćwiczenie 8.8. Rozpatrzmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty

$$X_T = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S_T \leq K, \\ (S_T - K)^2, & \text{gdy } K < S_T. \end{cases}$$

Wyznacz cenę tego instrumentu pochodnego przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S_0 = 100$,
- zmienność akcji wynosi $\sigma = 30\%$,
- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy (można przyjąć, że 1 miesiąc = $1/12$ roku),
- struktura stóp procentowych jest płaska i stopa procentowa kapitalizowana w sposób ciągły wynosi 6% (pa),
- cena wykonania wynosi $K = 100$.

Posłuż się trzykresowym drzewem dwumianowym.

Ćwiczenie 8.9. Rozpatrzmy europejską trzymiesięczną opcję kupna $N = 100$ mln USD po cenie $K = 4.20$ PLN za 1 USD. Wyznacz cenę tej opcji przy następujących danych:

- bieżący kurs wymiany wynosi $S_0 = 4.00$ PLN za 1 USD,
- zmienność kursu wynosi $\sigma = 20\%$,
- struktura stóp procentowych dla obu walut jest płaska i stopy procentowe kapitalizowane w sposób ciągły wynoszą: dla USD – 3% (pa), a dla PLN – 6% (pa).

Posłuż się trzykresowym drzewem dwumianowym. Dla uproszczenia obliczeń możesz przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku.

Ćwiczenie 8.10. (a) Rozpatrzmy europejską trzymiesięczną azjatycką opcję kupna $N = 100$ mln USD po cenie $K = 4.20$ PLN za 1 USD, w której średnia arytmetyczna występująca w funkcji wypłaty

$$X_T = N \max(\bar{S}_T - K, 0)$$

jest postaci

$$\bar{S}_T = \frac{1}{4} (S_0 + S_{1M} + S_{2M} + S_{3M}).$$

Wyznacz cenę tej opcji przy następujących danych:

- bieżący kurs wymiany wynosi $S_0 = 4.00$ PLN za 1 USD,
- zmienność kursu wynosi $\sigma = 20\%$,
- struktura stóp procentowych dla obu walut jest płaska i stopy procentowe kapitalizowane w sposób ciągły wynoszą: dla USD – 3% (pa), a dla PLN – 6% (pa).

Posłuż się trzyokresowym drzewem dwumianowym. Dla uproszczenia obliczeń możesz przyjąć że 1 miesiąc = $1/12$ roku. Porównaj cenę tej opcji z ceną opcji waniliowej obliczoną w Zadaniu 8.9.

(b) Przy tych samych danych wycen europejską trzymiesięczną azjatycką opcję kupna, w której cena wykonania jest średnią arytmetyczną cen instrumentu podstawowego, to jest opcję o następującej funkcji wypłaty:

$$X_T = N \max(S_T - \bar{S}_T, 0).$$

Porównaj cenę tej opcji z ceną opcji waniliowej obliczoną w Zadaniu 8.9.

Ćwiczenie 8.11. Uzasadnij wzory na prawdopodobieństwo martyngałowe oraz wycenę instrumentów pochodnych w przypadku modelu dwumianowego dla instrumentów pochodnych na kurs walutowy S wyrażony jako ilość waluty CUR_2 za jednostkę waluty CUR_1 (ogólniej na aktywo płaćące ciągłą dywidendę). W tym modelu mamy trzy aktywa: dwa aktywa wolne od ryzyka odpowiadające rachunkom pieniężnym w walucie CUR_2 oraz w walucie CUR_1 odpowiednio, oraz aktywo ryzykowne – kurs walutowy S . Wyznacz na drzewie jednookresowym portfel replikujący instrument pochodny i przedstaw jego cenę jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną wypłaty w odpowiedniej mierze martyngałowej.

9. Model Blacka-Scholesa

Model dwumianowy był prostym modelem za pomocą którego opisaliśmy proces stochastyczny ceny aktywa. Był to tak zwany model dyskretny, bowiem zmienna czasowa przyjmowała wartości dyskretne oraz wartości przyjmowane przez ceny aktywa w tych chwilach czasu tworzyły zbiory dyskretne. Mimo swojej prostoty, model ten przy dostatecznie dużej liczbie kroków czasowych na danym odcinku czasu (to jest, dla danego czasu trwania instrumentu) daje stosunkowo dokładną wycenę szerokiej klasy instrumentów pochodnych. Gdy liczba kroków czasowych na ustalonym odcinku czasu dąży do nieskończoności (długość okresu na drzewie dwumianowym dąży do zera), model dwumianowy przechodzi w model ciągły. W wyniku przejścia granicznego rozkład dwumianowy „przechodzi” w rozkład log-normalny, natomiast zasada wyceny instrumentów pochodnych w modelu ciągłym pozostaje taka sama jak w modelu dyskretnym.

9.1. Model dynamiki cen aktywa

Będziemy zakładać, że S spełnia następujące stochastyczne równanie

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (9.1)$$

gdzie

- μ jest stopą zwrotu S (współczynnikiem dryfu),
- σ jest zmiennością S (współczynnikiem dyfuzji),
- W_t jest tak zwanym procesem Wienera.

W naszym prostym modelu o μ i σ zakładamy, że są stałe, to jest nie zależą od czasu t i procesu S . Równanie (9.1) jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej klasy równań stochastycznych postaci

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t, \quad (9.2)$$

gdzie a i b są procesami o odpowiednich własnościach, które często zależą od t i procesu X . Nasz prosty przypadek uzyskujemy kładąc w (9.2) $a_t = \mu S_t$ oraz $b_t = \sigma S_t$ i zamieniając X na S .

Proces Wienera W_t to proces stochastyczny o następujących własnościach:

- $W_0 = 0$,
- W_t ma niezależne przyrosty, to znaczy, dla każdych $r < s \leq t < u$ zmienne losowe $W_u - W_t$ i $W_s - W_r$ są niezależne,
- dla każdych $0 \leq s < t$ $W_s - W_t \sim N(0, t - s)$,
- W ma ciągle trajektorie (z prawdopodobieństwem 1).

W szczególności z tych warunków wynika, że

$$W_t \sim N(0, t)$$

oraz

$$\text{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s).$$

Uwaga 9.1. Wbrew pozorom równanie (9.2) (ani (9.1)) nie jest równaniem różniczkowym. A to dlatego że pochodna trajektorii procesu Wienera nie istnieje (z prawdopodobieństwem 1 są one nigdzie nieróżniczkowalne). Tak naprawdę równanie (9.2) należy rozumieć jako równanie całkowe

$$S_t = S_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \int_0^t b_\tau dW_\tau, \quad (9.3)$$

gdzie druga całka jest tak zwaną całką stochastyczną Itô, która jest już dobrze zdefiniowanym obiektem matematycznym.

Nie podamy definicji całki stochastycznej Itô (proszę poczekać cierpliwie na wykład z procesów stochastycznych – zainteresowanym przystępnym wprowadzeniem do rachunku stochastycznego polecam podręcznik STEVEN'A E. SHREVE'A *Stochastic Calculus for Finance II* (Springer 2004) [2]). Zadowolimy się natomiast wybranymi szczególnymi technikami rachunku stochastycznego, które powinny nam wystarczyć dla naszych rozważań. Mamy następujący

Lemat 9.1. *Dla deterministycznej funkcji $b(t)$ całkownej z kwadratem,*

$$X_t = \int_0^t b(\tau) dW_\tau \sim N\left(0, \int_0^t b^2(\tau) d\tau\right).$$

Będą nas również interesować funkcje postaci $G(t, X_t)$ gdzie X jest procesem spełniającym równanie (9.2). W szczególności chcielibyśmy wiedzieć jakie równanie stochastyczne spełnia proces G . Na to pytanie odpowiada następujący

Lemat 9.2 (Lemat Itô). *Załóżmy, że proces X spełnia równanie stochastyczne*

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t, \quad (9.4)$$

gdzie a i b są adaptowalnymi procesami (o odpowiednich własnościach by całki miały sens). Niech $G \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Wówczas proces $G(t, X)$ spełnia następujące równanie

$$dG_t = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a_t \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + b_t \frac{\partial G}{\partial x} dW_t. \quad (9.5)$$

W szczególnym przypadku, gdy $a_t = \mu X_t$ oraz $b_t = \sigma X_t$, to jest gdy X spełnia równanie (9.1), teza Lematu Itô przyjmuje następującą postać:

$$dG_t = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mu X_t \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + \sigma X_t \frac{\partial G}{\partial x} dW_t.$$

Przykłady zastosowania Lematu Itô:

1. Niech $F_t = S_t e^{r(T-t)}$ będzie ceną kontraktu Forward (ceną teoretyczną kontraktu Futures) na aktywo, które nie przynosi dochodu w trakcie trwania kontraktu $[t, T]$. Wówczas $F_t = G(t, S_t)$, gdzie $G(t, x) = x e^{r(T-t)}$. Jeżeli cena aktywa S spełnia (9.1), to na mocy lematu Itô, proces F spełnia następujące równanie

$$dF_t = \left(-r S_t e^{r(T-t)} + \mu S_t e^{r(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \cdot 0 \right) dt + \sigma S_t e^{r(T-t)} dW_t,$$

które po uporządkowaniu przyjmuje następującą postać

$$dF_t = (\mu - r) F_t dt + \sigma F_t dW_t. \quad (9.6)$$

2. Korzystając z Lematu Itô obliczymy całkę stochastyczną

$$\int_0^t W_\tau dW_\tau.$$

Niech $G(t, x) = x^2$. Rozpatrzmy proces $X = W$, czyli $dX_t = dW_t$ (a więc w równaniu (9.2) $a_t \equiv 0$ oraz $b_t \equiv 1$). Badamy proces $Z_t = W_t^2 = G(t, W_t)$. Na mocy lematu Itô, proces Z spełnia równanie

$$dZ_t = dt + 2W_t dW_t,$$

co w postaci całkowej oznacza, że

$$W_t^2 = t + 2 \int_0^t W_\tau dW_\tau,$$

skąd otrzymujemy

$$\int_0^t W_\tau dW_\tau = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Rozwiązanie równania (9.1) i jego własności

Niech $G(t, x) = \ln(x)$. Wówczas, na mocy Lematu Itô, proces $G_t = \ln S_t$, gdzie S jest dane przez (9.1), spełnia następujące równanie

$$dG_t = \left(0 + \mu S_t \frac{1}{S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \cdot \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) \right) dt + \sigma S_t \frac{1}{S_t} dW_t,$$

które po uporządkowaniu przyjmuje następującą postać:

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \quad (9.7)$$

W postaci całkowej (9.7) oznacza, że

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) d\tau + \int_0^t \sigma dW_\tau \\ &= \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t, \end{aligned} \quad (9.8)$$

skąd otrzymujemy

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right). \quad (9.9)$$

W ten sposób „otrzymaliśmy” rozwiązanie równania stochastycznego (9.1). Przedstawiona powyżej metoda rozwiązania nie jest w pełni poprawna, bo po pierwsze zakłada istnienie rozwiązania, a po drugie zakłada jego dodatniość. O ile istnienie rozwiązania możemy uzyskać stosunkowo łatwo, powołując się na stosowne twierdzenie o istnieniu rozwiązań równania typu (9.2), to dodatniość rozwiązania nie jest taka oczywista. Możemy jednak naprawić nasze „rozwiązanie” w następujący sposób. Po prostu wystarczy sprawdzić czy proces S_t zdefiniowany równaniem (9.9) spełnia równanie (9.1) (Zadanie na Ćwiczenia).

Z równania (9.8) wynika, że

$$\ln S_t \sim N \left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right), \quad (9.10)$$

czyli że S_t ma tak zwany rozkład log-normalny.

9.2. Rozkład logarytmicznej stopy zwrotu

Z równania (9.10) wynika, że logarytmiczna stopa zwrotu

$$\nu = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \sim N \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \frac{\sigma^2}{t} \right).$$

Stąd wynika, że „łatwiej” jest przewidzieć logarytmiczną stopę zwrotu w długim okresie czasu niż w krótszym okresie.

Logarytmiczna stopa oczekiwanego zwrotu

Korzystając z (9.9) i własności procesu Wienera można pokazać (Zadanie na Ćwiczenia), że

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t} \quad (9.11)$$

oraz

$$\text{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (9.12)$$

Z (9.11) wynika, że

$$\mu = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{E(S_t)}{S_0} \right)$$

jest logarytmiczną stopą oczekiwanego zwrotu z inwestycji w aktywo S .

9.3. Zasada wyceny instrumentów pochodnych w modelu ciągłym

Podobnie jak w modelu dyskretnym wycena instrumentów pochodnych polega na przejściu do świata wolnego od ryzyka, w którym aktywa ryzykowne mają taką samą stopę zwrotu jak inwestycje wolne od ryzyka – stopę wolną od ryzyka. To podejście jest oparte na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 9.1. *Jeżeli proces S spełnia równanie*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (9.1)$$

to spełnia również równanie

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t, \quad (9.13)$$

gdzie r jest stopą wolną od ryzyka, a przy przejściu do równania (9.13) (to jest, przy przejściu do świata wolnego od ryzyka) dokonaliśmy odpowiedniej zmiany procesu W_t na proces Wienera $\tilde{W}_t$. Ponadto istnieje miara probabilistyczna Q (tzw. miara martyn-gałowa) taka, że

$$e^{-rT} E^Q(S_T) = S_0,$$

a sprawiedliwa (wolna od arbitrażu) cena instrumentu pochodnego o funkcji wypłaty $X_T = X(S_T)$ dana jest wzorem

$$\Pi_0 = e^{-rT} E^Q(X(S_T)). \quad (9.14)$$

9.4. Wycena instrumentów pochodnych w modelu Blacka-Scholesa

Lemat 9.3. *Jeżeli zmienna losowa S ma rozkład log-normalny, to*

$$E(\max(S - K, 0)) = E(S)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \quad (9.15)$$

gdzie Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego, oraz

$$d_1 = \frac{\ln(E(S)/K) + \frac{1}{2}\eta^2}{\eta}, \quad (9.16)$$

$$d_2 = \frac{\ln(E(S)/K) - \frac{1}{2}\eta^2}{\eta}, \quad (9.17)$$

a η jest odchyleniem standardowym zmiennej $\ln S$.

Dowód. Zapiszmy S w postaci

$$S = e^{\ln S} = e^{\eta Y + m},$$

gdzie m jest wartością oczekiwaną zmiennej $\ln S$, η odchyleniem standardowym $\ln S$, a $Y \sim N(0, 1)$. Wówczas

$$S > K \Leftrightarrow Y > -d_2 = \frac{\ln K - m}{\eta}$$

i wtedy

$$\begin{aligned} E(\max(S - K, 0)) &= \int_{-d_2}^{+\infty} (e^{\eta y + m} - K) \phi(y) dy \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} e^{\eta y + m} \phi(y) dy - K \int_{-d_2}^{+\infty} \phi(y) dy, \end{aligned} \quad (9.18)$$

gdzie $\phi(y) = e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}$ jest gęstością standardowego rozkładu normalnego.

Ponieważ

$$e^{\eta y + m} \phi(y) = e^{m + \eta^2/2} \phi(y - \eta),$$

wyrażenie na wartość oczekiwaną (9.18) zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} E(\max(S - K, 0)) &= e^{m + \eta^2/2} \int_{-d_2}^{+\infty} \phi(y - \eta) dy - K \int_{-d_2}^{+\infty} \phi(y) dy \\ &= e^{m + \eta^2/2} \int_{-d_2 - \eta}^{+\infty} \phi(y) dy - K \int_{-d_2}^{+\infty} \phi(y) dy. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Korzystając z symetrii gęstości standardowego rozkładu normalnego, wyrażenie (9.19) przekształcamy do następującej postaci:

$$\begin{aligned} E(\max(S - K, 0)) &= e^{m + \eta^2/2} \int_{-\infty}^{d_1} \phi(y) dy - K \int_{-\infty}^{d_2} \phi(y) dy \\ &= e^{m + \eta^2/2} \Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \end{aligned} \quad (9.20)$$

gdzie $d_1 = d_2 + \eta$, a Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Z własności zmiennych losowych o rozkładzie log-normalnym wynika, że

$$m = \ln(E(S)) - \frac{1}{2}\eta^2. \quad (9.21)$$

Wykorzystując ten związek pokazujemy, że d_1 i d_2 są określone wyrażeniami (9.16) i (9.17) odpowiednio. Ponadto $E(S) = e^{m + \eta^2/2}$, co, po uwzględnieniu w (9.20) daje nam ostatecznie (9.15). $\square$

9.5. Formuły Blacka-Scholesa dla europejskich opcji waniliowych

► Opcje kupna

Wycenimy europejską opcję kupna aktywa, które nie przynosi dochodu w trakcie trwania opcji. Zakładamy, że cena aktywa S spełnia równanie (9.1). Zgodnie z zasadą wyceny instrumentów pochodnych wartość opcji kupna dana jest wzorem

$$C_0 = e^{-rT} E^Q(\max(S_T - K, 0)),$$

gdzie Q jest miarą martyngałową w świecie wolnym od ryzyka. W tym świecie cena aktywa jest procesem opisanym równaniem

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \quad (9.22)$$

gdzie r jest stopą zwrotu z inwestycji wolnych od ryzyka (która pojawia się w miejsce stopy μ w (9.1)), a $\widetilde{W}_t$ jest odpowiednio zmodyfikowanym procesem Wienera, który pojawia się w miejsce procesu Wienera W_t w (9.1) przy przejściu do świata wolnego od ryzyka. Wówczas, S_T ma rozkład log-normalny (patrz (9.10)) oraz jak wynika z (9.11)

$$E^Q(S_T) = S_0 e^{rT}. \quad (9.23)$$

Po wstawieniu równości (9.23) do wzoru (9.15) z Lematu 9.3 otrzymujemy

$$C_0 = e^{-rT} \left(E^Q(S_T) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right) = S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2), \quad (9.24)$$

gdzie wyrażenia na d_1 i d_2 przyjmują postać

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (9.25)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (9.26)$$

przy przekształceniu których uwzględniliśmy fakt, że odchylenie standardowe $\ln S_T$ wynosi $\sigma\sqrt{T}$ (patrz (9.10)).

► Opcje sprzedaży

Europejską opcję sprzedaży możemy wycenić stosując podobne podejście jak w przypadku opcji kupna – przez obliczenie wyrażenia

$$P_0 = e^{-rT} E^Q(\max(K - S_T, 0)),$$

korzystając z odpowiednio zmodyfikowanego Lematu 9.3. Możemy też posłużyć się parytetem opcji kupna-sprzedaży dla wyliczenia wartości opcji sprzedaży z wartości opcji kupna. Postępując w ten drugi sposób otrzymujemy

$$P_0 = C_0 - (S_0 - e^{-rT} K) = S_0(\Phi(d_1) - 1) - e^{-rT} K(\Phi(d_2) - 1),$$

co, po skorzystaniu z tożsamości $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, zapiszemy w następującej postaci

$$P_0 = -S_0 \Phi(-d_1) + e^{-rT} K \Phi(-d_2). \quad (9.27)$$

Wzory (9.24) i (9.27) przedstawiają wycenę opcji w chwili $t = 0$, których czas trwania wynosił T . Przyjęcie $t = 0$ było tylko kwestią wygody. Wycenę opcji w chwili $t \in [0, T)$ uzyskujemy traktując t jako chwilę początkową, w której znamy wartości argumentów funkcji C i P , a $T - t$ jako pozostały do wygaśnięcia opcji czas trwania. W szczególności, jako wartość początkową

aktywa bierzemy S_t – jego wartość ustaloną w chwili $t < T$. Wówczas wzory na wycenę opcji waniliowych przyjmują postać

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \quad (9.28)$$

$$P_t = -S_t \Phi(-d_1) + e^{-r(T-t)} K \Phi(-d_2), \quad (9.29)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{oraz} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (9.30)$$

We wzorach (9.28)–(9.30) stopa procentowa r oraz zmienność σ oznaczają ich wartości ustalone w chwili wyceny t na pozostały do wygaśnięcia opcji czas trwania, przy czym dla czytelności zapisu zaznaczenie zależności tych zmiennych od t zostało pominięte.

Uwaga 9.2. Wzory: (9.28) na wartość opcji kupna i (9.29) na wartość opcji sprzedaży możemy zapisać jedną formułą z dodatkowym parametrem ω , który będzie określał która opcja, kupna czy sprzedaży, jest wyceniana. Mianowicie formuła

$$V_t = \omega \left(S_t \Phi(\omega d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(\omega d_2) \right) \quad (9.31)$$

dla $\omega = 1$ daje wycenę opcji kupna, a dla $\omega = -1$ wycenę opcji sprzedaży.

I n t e r p r e t a c j e:

1. Wartość dystrybucyjności $\Phi(d_2)$ określa prawdopodobieństwo (w świecie wolnym od ryzyka) wykonania opcji kupna.
2. Na wzór (9.24) na wycenę opcji kupna możemy spojrzeć jak na wartość portfela, który składa się z
 - $\Delta = \Phi(d_1)$ „sztuk” aktywa ryzykownego, oraz
 - inwestycji w instrument wolny od ryzyka (rachunek bankowy) na kwotę równą $e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2)$.
 Zbadamy teraz zachowanie się formuł na wycenę w kilku skrajnych przypadkach. Zrobimy to w przypadku opcji kupna.

► $S_t \gg K$ (opcja kupna mocno w cenie)

Wówczas d_1, d_2 są duże i wtedy $\Phi(d_1)$ oraz $\Phi(d_2)$ są bliskie jedności. Zatem, w tym przypadku

$$C_t \simeq S_t - e^{-r(T-t)} K,$$

czyli wartość opcji kupna jest w przybliżeniu równa wartości kupionego kontraktu Forward. Możemy powiedzieć, że opcja kupna mocno w cenie jest równoważna kupionemu kontraktowi Forward.

► $S_t \ll K$ (opcja kupna mocno poza ceną)

Wówczas $d_1 \ll 0$ oraz $d_2 \ll 0$ i wtedy $\Phi(d_1)$ oraz $\Phi(d_2)$ są bliskie zera. Zatem, w tym przypadku

$$C_t \simeq 0,$$

czyli opcja jest prawie bezwartościowa.

► $\sigma \rightarrow 0$

Niech $F_t = e^{-r(T-t)} S_t$ oznacza cenę forward w chwili t aktywa dla kontraktu, który zapada w T .

(a) Dla $S_t > e^{-r(T-t)} K$, czyli gdy $F_t > K$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/e^{-r(T-t)} K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \rightarrow +\infty,$$

oraz

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/e^{-r(T-t)}K)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \rightarrow +\infty,$$

przy $\sigma \rightarrow 0$. Wówczas

$$C_t \rightarrow S_t - e^{-r(T-t)}K.$$

(b) Dla $S_t < e^{-r(T-t)}K$, czyli gdy $F_t < K$

$$d_1 \rightarrow -\infty \quad \text{oraz} \quad d_2 \rightarrow -\infty.$$

Zatem

$$C_t \rightarrow 0.$$

(c) Dla $S_t = e^{-r(T-t)}K$, czyli gdy $F_t = K$

$$d_1 = +\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad d_2 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \rightarrow 0.$$

Wówczas

$$C_t \rightarrow S_t\Phi(0) - e^{-r(T-t)}K\Phi(0) = 0.$$

Pokazaliśmy więc, że gdy $\sigma \rightarrow 0$, to

$$C_t \rightarrow \max(S_t - e^{-r(T-t)}K, 0) = e^{-r(T-t)}\max(F_t - K, 0).$$

► $t \rightarrow T$ (warunek brzegowy dla opcji)

(a) Dla $\lim_{t \rightarrow T} S_t = S_T > K$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\sqrt{T-t} \rightarrow +\infty,$$

oraz

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\sqrt{T-t} \rightarrow +\infty$$

przy $t \rightarrow T$. Wówczas

$$C_t \rightarrow S_T - K.$$

(b) Dla $\lim_{t \rightarrow T} S_t = S_T < K$

$$d_1 \rightarrow -\infty \quad \text{oraz} \quad d_2 \rightarrow -\infty.$$

Zatem

$$C_t \rightarrow 0.$$

(c) Dla $\lim_{t \rightarrow T} S_t = S_T = K$

$$\lim_{t \rightarrow T} d_1 = \lim_{t \rightarrow T} d_2,$$

o ile istnieje granica $\lim_{t \rightarrow T} \ln(S_t/K)/\sigma\sqrt{T-t}$, i wtedy

$$C_t \rightarrow 0.$$

Pokazaliśmy więc, że spełniony jest warunek brzegowy, w tym sensie, że

$$\lim_{t \rightarrow T} C_t = \max(S_T - K, 0).$$

9.6. Proste uogólnienia formuł Blacka-Scholesa

► Aktywo ryzykowne przynosi „dyskretny” dochód (np. akcja z dywidendą)

Niech D_0 oznacza wartość bieżącą dochodu, który da aktywo w trakcie pozostałego do wygaśnięcia opcji okresu. Wówczas wartość opcji dana jest wzorami (9.24) – (9.27), w których w miejsce S_0 podstawiamy $S_0 - D_0$. Jeżeli zmienność σ jest estymowana na podstawie zaobserwowanych historycznych wartości aktywa, to zmienność którą należy użyć przy obliczaniu d_1 i d_2 jest w przybliżeniu tą wyestymowaną zmiennością historyczną przemnożoną przez współczynnik $S_0/(S_0 - D_0)$. Natomiast zmienność implikowana (patrz Wykład 11), jeśli jest stosowana do wyceny opcji, nie wymaga żadnej korekcji.

► Aktywo ryzykowne przynosi „ciągły” dochód (np. indeks giełdowy, kurs walutowy)

Zakładamy, że S spełnia (w świecie wolnym od ryzyka) następujące równanie

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \quad (9.32)$$

gdzie r jest stopą wolną od ryzyka, a δ jest stopą dochodu (stopą dywidendy), kapitalizowanymi w sposób ciągły. Korzystając z Lematu Itô, można łatwo pokazać, że wówczas proces $S_t^* = S_t e^{-\delta(T-t)}$ spełnia równanie

$$dS_t^* = rS_t^* dt + \sigma S_t^* d\widetilde{W}_t. \quad (9.33)$$

Ponadto, w chwili wygaśnięcia opcji $S_T^* = S_T$. Zatem, opcje, których instrumentem podstawowym jest S płacące ciągłą dywidendę, możemy traktować jak opcje których instrumentem podstawowym jest aktywo S^* niepłacące dywidendy i wycenić je wzorami (9.24)–(9.27) dla wartości początkowej aktywa $S_0^* = S_0 e^{-\delta T}$. Wzory te przyjmują wówczas następującą postać

$$C_0 = e^{-\delta T} S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2), \quad (9.34)$$

$$P_0 = -e^{-\delta T} S_0 \Phi(-d_1) + e^{-rT} K \Phi(-d_2), \quad (9.35)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \delta)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{oraz} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (9.36)$$

Analogicznie, jak poprzednio wzory na wycenę w dowolnej chwili czasu $t < T$ mają postać

$$C_t = e^{-\delta(T-t)} S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \quad (9.37)$$

$$P_t = -e^{-\delta(T-t)} S_t \Phi(-d_1) + e^{-r(T-t)} K \Phi(-d_2), \quad (9.38)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \delta)(T - t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad \text{oraz} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (9.39)$$

Jeżeli w formułach Blacka-Scholesa (9.37)–(9.39) cenę bieżącą S_t instrumentu podstawowego wyrazimy przez cenę forward

$$F_t = e^{(r-\delta)(T-t)} S_t,$$

otrzymamy tak zwane formuły Blacka

$$C_t = e^{-r(T-t)} (F_t \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)), \quad (9.40)$$

$$P_t = e^{-r(T-t)} (-F_t \Phi(-d_1) + K \Phi(-d_2)), \quad (9.41)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(F_t/K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad \text{oraz} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (9.42)$$

9.7. Wycena instrumentów pochodnych metodą Monte Carlo

Uzyskanie jawnych wzorów analitycznych na wycenę waniliowych opcji europejskich było możliwe dzięki szczególnej postaci funkcji wypłaty tych opcji i rozkładu zmiennej S_T , które umożliwiały obliczenie wartości oczekiwanej we wzorze na wycenę instrumentu pochodnego

$$\Pi_0 = e^{-rT} E^Q(X(S_T)). \quad (9.43)$$

W przypadku, gdy obliczenie całki występującej w (9.43) jest niemożliwe lub trudne do przeprowadzenia, jedynym ze sposobów na uzyskanie przybliżonej wartości Π_0 jest zastosowanie symulacji Monte Carlo.

Naiwny **algorytm symulacji Monte Carlo** dla opcji o europejskim typie wykonania:

1. Dla $i = 1, \dots, N$
 - Generuj trajektorię $S^{(i)}$ procesu S w świecie wolnym od ryzyka startując z wartości początkowej S_0 aż do chwili zapadalności instrumentu pochodnego T zgodnie z przyjętym modelem stochastycznym.
 - Dla wygenerowanej trajektorii $S^{(i)}$ wyznacz wartość wypłaty instrumentu pochodnego $X^{(i)} = X(S^{(i)})$.
2. Oblicz przybliżoną wartość instrumentu pochodnego

$$\Pi_0 \simeq e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)} \quad (9.44)$$

W przypadku gdy S spełnia równanie (9.13), generowanie trajektorii jest proste, bowiem znamy dokładne rozwiązanie tego równania – patrz (9.9) z $\mu = r$. Korzystając z tego rozwiązania, wartości S w chwilach czasu $t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ generujemy w następujący sposób

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_k - t_{k-1}) + \sigma \sqrt{t_k - t_{k-1}} \xi_k \right), \quad \text{dla } k = 1, \dots, m, \quad (9.45)$$

gdzie $t_0 = 0$ a ξ_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.

Uwagi

1. Jeżeli wypłata instrumentu pochodnego zależy tylko od wartości instrumentu podstawowego w chwili T i dysponujemy dokładnym rozwiązaniem równania opisującego proces S , nie musimy symulować wartości S_{t_k} dla $t_k < T$. Możemy od razu generować wartości S_T . Na przykład, gdy S spełnia równanie (9.13), S_T generujemy korzystając ze wzoru

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} \xi \right), \quad \text{gdzie } \xi \sim N(0, 1). \quad (9.46)$$

2. Jeżeli wypłata instrumentu pochodnego zależy od trajektorii procesu S (zależy od drogi) – jak np. przypadku opcji azjatyckich – musimy symulować wartości S_{t_k} (w chwilach czasu $t_k \leq T$) od których zależy wartość wypłaty.
3. W przypadku, gdy nie mamy dokładnego rozwiązania równania stochastycznego, które opisuje proces S , symulując ten proces musimy się posłużyć zdyskretyzowaną postacią równania stochastycznego. Na przykład, dla równania (9.2) napisanego dla procesu S , wartości S symulujemy korzystając z

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} + a_{t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) + b_{t_{k-1}} \sqrt{t_k - t_{k-1}} \xi_k, \quad \text{dla } k = 1, \dots, m, \quad (9.47)$$

gdzie ξ_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ i poruszając się dostatecznie małymi krokami czasowymi $\tau_k = t_k - t_{k-1}$.

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 9.1. Pokaż, że proces S_t zdefiniowany równaniem (9.9) spełnia równanie (9.1).

Ćwiczenie 9.2. Pokaż, że jeżeli $S = e^{m+\eta Y}$, gdzie $Y \sim N(0, 1)$, (inaczej $\ln S \sim N(m, \eta^2)$), to

$$E(S) = e^{m+\eta^2/2}$$

oraz

$$\text{Var}(S) = e^{2m+\eta^2} (e^{\eta^2} - 1).$$

Korzystając z tych wzorów, wykaż równości (9.11) i (9.12).

Wskazówka. Jeżeli $X \sim N(0, 1)$ to funkcja tworząca momenty $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{t^2/2}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 9.3. Niech $Z_t = e^{\alpha X_t}$, gdzie X spełnia równanie

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

a α , μ i σ są stałymi. Wyprowadź równanie na proces Z .

Ćwiczenie 9.4. Niech $Z_t = X_t^\alpha$, gdzie X spełnia równanie

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

a α , μ i σ są stałymi. Wyprowadź równanie na proces Z .

Ćwiczenie 9.5. (a) *Cash-or-Nothing Options*

Wycen europejskie opcje binarne, których wypłaty dane są funkcjami:

— $\mathcal{H}(S_T - K)$ dla opcji kupna,

oraz

— $\mathcal{H}(K - S_T)$ dla opcji sprzedaży,

gdzie $\mathcal{H}$ jest funkcją Heaviside'a.

(b) *Asset-or-Nothing Options*

Wycen europejskie opcje binarne, których wypłaty dane są funkcjami:

— $S_T \mathcal{H}(S_T - K)$ dla opcji kupna,

oraz

— $S_T \mathcal{H}(K - S_T)$ dla opcji sprzedaży,

gdzie $\mathcal{H}$ jest funkcją Heaviside'a.

Wskazówka. Jeśli dobrze zrozumiałeś wyprowadzenie wzorów Blacka-Scholesa, to będziesz umiał z nich „odczytać” rozwiązanie.

Ćwiczenie 9.6. Wycen europejską opcję „zapłać później”, to jest opcję europejską za którą nabywca płaci premię w chwili wygaśnięcia opcji tylko wtedy gdy opcja wygasa w cenie.

Ćwiczenie 9.7. Wycen europejską opcję, której ceną wykonania będzie ustalona wielokrotność zaobserwowanej ceny aktywa w ustalonej chwili czasu T_0 w trakcie trwania opcji. Na przykład, dla opcji kupna wartość wypłaty tej opcji dana jest wzorem $\max(S_T - \alpha S_{T_0}, 0)$, gdzie $0 \leq T_0 < T$, a $\alpha > 0$ jest dane.

Ćwiczenie 9.8. Dla opcji sprzedaży sformułuj i udowodnij lemat analogiczny do Lematu 9.3.

Ćwiczenie 9.9. Rozpatrzmy europejskie opcje azjatyckie o ustalonej cenie wykonania K , których wartość wypłaty zależy od średniej geometrycznej

$$\bar{S}_T = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_\tau d\tau \right).$$

Przy założeniu że proces S spełnia równanie (9.1), oblicz

- (a) wariancję $\ln \bar{S}_T$,
- (b) wartość oczekiwaną $\bar{S}_T$,
- (c) cenę azjatyckiej opcji kupna.

Ćwiczenie 9.10. Rozpatrzmy opcje europejskie o czasie trwania T , które są w chwili bieżącej *at-the-money forward*, to znaczy takie, których cena wykonania K i bieżąca cena akcji S spełniają warunek

$$S = K \exp(-(r - \delta)T),$$

gdzie r jest stopą wolną od ryzyka, a δ stopą (ciągłą) dywidendy.

Pokaż, że w tym przypadku ceny opcji *call* i *put* są takie same i wynoszą

$$V = e^{-\delta T} S \left(\Phi\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) \right).$$

Ponadto, pokaż, że dla małych wartości $\sigma\sqrt{T}$, zachodzi przybliżony wzór

$$V \approx 0.4 e^{-\delta T} S \sigma \sqrt{T}.$$

W powyższych wzorach σ oznacza zmienność akcji, a Φ – dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$.

10. Analiza wrażliwości

Analiza wrażliwości instrumentu pochodnego (portfela instrumentów pochodnych zależnych od tego samego instrumentu podstawowego) polega na analizowaniu zmian wartości instrumentu (portfela) następujących w skutek zmian wartości zmiennych będących argumentami funkcji wyceniającej instrument (portfel) na podstawie obserwacji kilku pochodnych tej funkcji względem odpowiednich zmiennych. W uproszczeniu, można powiedzieć, że jest to próba zastosowania wzoru Taylora (dla funkcji wielu zmiennych) do oszacowania zmiany wartości instrumentu (portfela). Ponadto, z informacji o wartościach współczynników wrażliwości oraz kierunku i wielkości zmian tych współczynników pod wpływem zmian argumentów funkcji wyceniającej instrument (portfel) wynikają dla zarządzającego instrumentem (portfelem) istotne wskazówki co do sposobu potencjalnego zabezpieczania instrumentu (portfela).

Analizę wrażliwości omówimy szczegółowo dla waniliowych opcji europejskich korzystając z rezultatów otrzymanych w modelu Blacka-Scholesa, bowiem w tym przypadku funkcje wyceniające opcje są dane w postaci analitycznych wyrażeń. Natomiast w przypadku portfeli instrumentów pochodnych przedstawimy jedynie ogólne zasady takiej analizy.

Niech

$$V(t, S, r, \delta, \sigma) \quad (10.1)$$

oznacza funkcję, która określa wartość instrumentu pochodnego. Argumentami tej funkcji są

- t – chwila czasu w której wyznaczamy wartość instrumentu pochodnego,
- S – wartość instrumentu podstawowego w chwili t ,
- r – wolna od ryzyka stopa procentowa,

oraz parametry związane z przyjętym modelem opisującym proces cen instrumentu podstawowego – w przypadku prostych modeli typu Blacka-Scholesa, są to

- δ – stopa dochodu generowanego przez instrument podstawowy (stopa dywidendy),
- σ – zmienność instrumentu podstawowego.

Funkcja V na ogół zależy jeszcze od innych parametrów charakteryzujących instrumenty pochodne, na przykład od

- terminów zapadalności T ,
- oraz, w szczególności,
- dla opcji waniliowych, od cen wykonania K ,
 - a dla opcji barierowych, dodatkowo i od barier H .

Nie będziemy analizować zależności V od tych parametrów ponieważ nie są one wielkościami zmiennymi (są ustalone w kontrakcie, nie są czynnikami ryzyka).

10.1. Współczynniki wrażliwości instrumentów pochodnych

Załóżmy, że funkcja $V = V(t, S, r, \delta, \sigma)$ jest dostatecznie gładka. Wówczas, zmianę wartości funkcji V

$$\Delta V = V(t + \Delta t, S + \Delta S, r + \Delta r, \delta + \Delta \delta, \sigma + \Delta \sigma) - V(t, S, r, \delta, \sigma),$$

która następuje przy zmianie

- ceny instrumentu podstawowego S o wielkość ΔS ,

- stopy procentowej r o wielkość Δr ,
 - stopy dywidendy δ o wielkość $\Delta \delta$,
 - zmienności σ o wielkość $\Delta \sigma$
- oraz na skutek
- upływu czasu o okres Δt ,
- możemy przybliżyć w następujący sposób

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial \delta} \Delta \delta, \quad (10.2)$$

gdzie wszystkie pochodne są obliczane dla bieżących wartości argumentów funkcji V w chwili t . W inżynierii finansowej te pochodne oznacza się zwykle symbolami greckich liter (za wyjątkiem pochodnej po zmienności σ). I tak mamy:

- deltę: $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
- gammę: $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
- wege: $\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ (Vega nie jest literą greckiego alfabetu)
- rho: $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$
- rho*: $\rho^* = \frac{\partial V}{\partial \delta}$
- teta: $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$

Przy tych oznaczeniach wzór (10.2) przybiera następującą postać

$$\Delta V \simeq \Theta \cdot \Delta t + \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma \cdot (\Delta S)^2 + \mathcal{V} \cdot \Delta \sigma + \rho \cdot \Delta r + \rho^* \cdot \Delta \delta \quad (10.3)$$

Zarządzający portfelem, prócz informacji o bieżącej wrażliwości instrumentów finansowych w portfelu, czyli o wartościach współczynników wrażliwości Δ , Γ , $\mathcal{V}$, ρ , ρ^* , oraz Θ , powinien analizować jak wartości tych współczynników zmieniają się gdy zmieniają się wartości instrumentu podstawowego, zmienności, oraz stóp procentowych. W przypadku portfeli instrumentów pochodnych na kurs walutowy lub na ceny akcji/indeksy giełdowe, dla których największy wpływ na zmianę wartości tych portfeli mają zmiany wartości instrumentu podstawowego oraz zmiany zmienności tego instrumentu, analizuje się współczynniki wrażliwości które są pierwszymi pochodnymi Δ , Γ oraz $\mathcal{V}$ po S i po σ . W szczególności obserwuje się następujące pochodne

- vanna: $Vanna = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}$
- volga: $Volga = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}$
- $\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^2 \partial \sigma} = \frac{\partial Vanna}{\partial S} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial S^2}$
- $\frac{\partial \Gamma}{\partial S} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$

Uwaga 10.1. Dla instrumentów pochodnych stopy procentowej odpowiednikiem Deltą jest BPV. W przypadku takiego instrumentu Deltę możemy określić jako pochodną funkcji

$$\tilde{V}(\Delta r) = V(\tilde{r} + \Delta r),$$

gdzie V jest funkcją wyceniającą ten instrument, względem przesunięcia równoległego Δr bieżącej krzywej stóp procentowych $\tilde{r}$

$$\Delta = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial (\Delta r)}(0).$$

Wówczas związek pomiędzy Deltą a BPV jest następujący

$$BPV = V(\tilde{r} - 0.01\%) - V(\tilde{r}) \simeq \Delta \cdot (-0.01\%).$$

Deltę możemy również powiązać z duracją D instrumentu, mianowicie mamy następujący związek

$$\Delta = -D \cdot V(\tilde{r}).$$

Analogicznie, jeśli zdefiniować Gammę instrumentu pochodnego stopy procentowej jako drugą pochodną

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial(\Delta r)^2}(0),$$

to

$$\Gamma = W \cdot V(\tilde{r}),$$

gdzie W jest tak zwaną *wypukłością* tego instrumentu.

10.2. Współczynniki wrażliwości opcji waniliowych

W przypadku opcji waniliowych wycenianych formułami Blacka-Scholesa możemy wypisać analityczne wyrażenia na te pochodne.

Delta

Korzystając z formuł (9.31) – (9.32) na wartość opcji kupna / sprzedaży otrzymujemy następujące wyrażenia na

deltę opcji kupna:

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1), \quad (10.4)$$

deltę opcji sprzedaży

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = -e^{-\delta(T-t)} \Phi(-d_1) = e^{-\delta(T-t)} (\Phi(d_1) - 1), \quad (10.5)$$

gdzie, przypomnijmy,

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta)(T - t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

a Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Wzór na deltę opcji sprzedaży (10.5) można również wyprowadzić z wyrażenia (10.4) na deltę opcji kupna i związku między tymi deltami, który wynika z parytetu opcji kupna-sprzedaży. Oczywiście, są to delty kupionych opcji (długich pozycji w tych opcjach).

Własności delt

- Delta mierzy wrażliwość (pierwszego rzędu) ceny opcji na zmianę wartości instrumentu podstawowego.
- Jak widać ze wzorów (10.4) i (10.5),

$$0 < \Delta_C < e^{-\delta(T-t)} \quad \text{oraz} \quad -e^{-\delta(T-t)} < \Delta_P < 0.$$

- Delta opcji kupna / sprzedaży ATM (to jest gdy $S = K$) wynosi w przybliżeniu ± 0.5 . Czasami opcje ATM definiuje się jako opcje z ceną wykonania K taką by delta tej opcji wynosiła dokładnie ± 0.5 .
- Funkcje $S \rightarrow \Delta_C$ oraz $S \rightarrow \Delta_P$ są ściśle rosnące (bo gamma, która jest pochodną delt jest dodatnia).
- Delta opcji, jako funkcja S , zmienia się najszybciej w otoczeniu ceny wykonania, a więc dla opcji które są (niemal) ATM – patrz własności gammy.
- Przy $t \rightarrow T$ $\Delta_C \rightarrow 0$ gdy $S < K$ oraz $\Delta_C \rightarrow 1$ gdy $S > K$. Natomiast, dla opcji sprzedaży $\Delta_P \rightarrow -1$ gdy $S < K$ oraz $\Delta_P \rightarrow 0$ gdy $S > K$.

Uwaga 10.2. W praktyce rynkowej funkcjonuje również pojęcie **forward delty**, która jest zdefiniowana wzorem

$$\Delta^{\text{fwd}} = e^{\delta(T-t)} \Delta = \omega \Phi(\omega d_1),$$

gdzie $\omega = 1$ dla opcji kupna i $\omega = -1$ dla opcji sprzedaży. Jednocześnie można określić **delteę względem ceny forward**:

$$\Delta^F = \frac{\partial V}{\partial F},$$

gdzie F jest ceną forward w chwili t instrumentu podstawowego dla kontraktu zapadalnego w T , a V jest formułą Blacka, to znaczy formułą Blacka-Scholesa w której cenę bieżącą S instrumentu podstawowego wyrażono przez cenę forward F , odpowiednio dla opcji kupna i opcji sprzedaży. Można pokazać (Zadanie 10.1), że

$$\Delta^F = \omega e^{-r(T-t)} \Phi(\omega d_1) = e^{-r(T-t)} \Delta^{\text{fwd}}.$$

Gamma

Korzystając z formuł (9.31) – (9.32) na wartość opcji kupna / sprzedaży otrzymujemy następujące wyrażenie na gammę opcji kupna / sprzedaży:

$$\Gamma_C = \Gamma_P = \frac{e^{-\delta(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}. \quad (10.6)$$

Równość gammy opcji kupna i gammy opcji sprzedaży wynika z parytetu opcji kupna – sprzedaży. Oczywiście, są to gammy kupionych opcji (długich pozycji w tych opcjach).

Własności gammy

- $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$ – Gamma mierzy wrażliwość delt na zmianę ceny instrumentu podstawowego oraz określa w jakim stopniu nieliniowość opcji jest istotna przy szacowaniu zmiany wartości opcji.
- Jak widać ze wzoru (10.6), gamma (długiej pozycji) jest dodatnia. Stąd delty są funkcjami ściśle rosnącymi względem S .
- Przy $t \rightarrow T$ $\Gamma \rightarrow 0$ dla opcji OTM / ITM oraz $\Gamma \rightarrow +\infty$ dla opcji ATM ($S = K$). Stąd wynika iż nieliniowość opcji jest najbardziej odczuwalna dla opcji ATM o krótkim rezydualnym czasie trwania. Zabezpieczanie takich opcji jest trudne (a raczej kłopotliwe i kosztowne), bowiem delta takich opcji zmienia się stosunkowo szybko.
- Gamma jest największa dla opcji dla których $d_1 = 0$ – czyli dla opcji które są niemal ATM.
- Pozycja o dodatniej gammie wolniej traci na wartości / szybciej zyskuje na wartości przy zmianach ceny instrumentu podstawowego. Pozycja o ujemnej gammie (np. wystawione opcje) szybciej traci na wartości / wolniej zyskuje na wartości przy zmianach ceny instrumentu podstawowego – patrz wzór (10.2).

Vega

Korzystając z formuł (9.31) – (9.32) na wartość opcji kupna / sprzedaży otrzymujemy następujące wyrażenie na vegę opcji kupna / sprzedaży:

$$\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_P = e^{-\delta(T-t)} S \sqrt{T-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \quad (10.7)$$

Równość vegi opcji kupna i vegi opcji sprzedaży wynika z parytetu opcji kupna-sprzedaży. Oczywiście, są to vegi kupionych opcji (długich pozycji w tych opcjach).

Własności Vegi

- Jak widać ze wzoru (10.7), vega (długiej pozycji) jest dodatnia.

- Vega mierzy wrażliwość wartości opcji na zmianę zmienności σ ceny instrumentu podstawowego.
- Inaczej: vega mierzy błąd w wycenie opcji popełniany na skutek niepewności co do wartości zmienności σ ceny instrumentu podstawowego.
- Przy $t \rightarrow T$ $\mathcal{V} \rightarrow 0$.
- Vega jest największa dla opcji dla których $d_1 = 0$ – czyli dla opcji które są niemal ATM.

Rho / Rho*

Korzystając z formuł (9.31) – (9.32) na wartość opcji kupna / sprzedaży otrzymujemy następujące wyrażenia na

rho opcji kupna:

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = Ke^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2), \quad (10.8)$$

rho opcji sprzedaży:

$$\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r} = -Ke^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(-d_2) = Ke^{-r(T-t)}(T-t)(\Phi(d_2) - 1) \quad (10.9)$$

gdzie, przypomnijmy,

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta)(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (10.10)$$

Wzór na rho opcji sprzedaży (10.9) można również wyprowadzić z wyrażenia (10.8) na rho opcji kupna i związku między ρ_C i ρ_P , który wynika z parytetu opcji kupna – sprzedaży. Oczywiście, są to rho kupionych opcji (długich pozycji w tych opcjach).

Analogicznie wyznaczamy

rho* opcji kupna:

$$\rho_C^* = \frac{\partial C}{\partial \delta} = -Se^{-\delta(T-t)}(T-t)\Phi(d_1) \quad (10.11)$$

rho* opcji sprzedaży:

$$\rho_P^* = \frac{\partial P}{\partial \delta} = Se^{-\delta(T-t)}(T-t)\Phi(-d_1) = Se^{-\delta(T-t)}(T-t)(1 - \Phi(d_1)). \quad (10.12)$$

Wzór na rho* opcji sprzedaży (10.12) można również wyprowadzić z wyrażenia (10.11) na rho* opcji kupna i związku między ρ_C^* i ρ_P^* , który wynika z parytetu opcji kupna – sprzedaży. Oczywiście, są to rho* kupionych opcji (długich pozycji w tych opcjach).

Analizowanie współczynnika rho* ma szczególny sens w przypadku opcji walutowych, kiedy w miejsce stopy dywidendy bierze się stopę waluty bazowej (która jest czynnikiem ryzyka).

Teta

Mimo iż czas nie jest czynnikiem ryzyka, analizując zmiany wartości opcji bada się jak cena tych opcji zmienia się z upływem czasu. Miarą tempa tej zmiany jest teta.

Korzystając z formuł (9.31) – (9.32) na wartość opcji kupna / sprzedaży otrzymujemy następujące wyrażenia na

tetę opcji kupna:

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Se^{-\delta(T-t)}\sigma\Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + \delta e^{-\delta(T-t)}S\Phi(d_1) - re^{-r(T-t)}K\Phi(d_2), \quad (10.13)$$

tetę opcji sprzedaży:

$$\Theta_P = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{Se^{-\delta(T-t)}\sigma\Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - \delta e^{-\delta(T-t)}S\Phi(-d_1) + re^{-r(T-t)}K\Phi(-d_2) \quad (10.14)$$

Własności tet

— Na ogół teta jest ujemna, bowiem zwykle wartość opcji maleje wraz z upływem czasu.

Wzór na tetę opcji sprzedaży (10.14) można również wyprowadzić z wyrażenia (10.13) na tetę opcji kupna i związku między tymi tetami, który wynika z parytetu opcji kupna – sprzedaży.

Uwaga 10.3. Zdarza się, że teta opcji jest definiowana jako pochodna funkcji wyceniającej opcję względem rezydualnego czasu trwania opcji $\tau = T - t$. Tak zdefiniowana teta różni się od tety określonej wzorami (10.13) – (10.14) znakiem, bowiem, na przykład

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau}.$$

10.3. Równanie Blacka-Scholesa (związek między tetą, deltą i gammą)

Stosując aparat analizy stochastycznej można pokazać, że funkcja wyceniająca instrument pochodny spełnia następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV. \quad (10.15)$$

Specyfikacja instrumentu pochodnego odbywa się przez postawienie warunków brzegowych które odpowiadają funkcji wypłaty instrumentu. Na przykład, w przypadku waniliowej opcji kupna tym warunkiem jest warunek końcowy, czyli warunek określający wypłatę w terminie zapadalności opcji, mianowicie

$$V(T, S) = \max(S - K, 0). \quad (10.16)$$

Można pokazać, że rozwiązaniem zagadnienia (10.15) – (10.16) jest funkcja C dana wzorem (9.31). Oczywiście, aby zagadnienie (10.15) – (10.16) było dobrze postawione należy jeszcze określić co rozumiemy przez rozwiązanie, bowiem jak widać rozpatrując je w klasycznym sensie będziemy mieli kłopot jako że funkcja występująca po prawej stronie (10.16) nie jest różniczkowalna w $S = K$.

Równanie Blacka-Scholesa (10.15) wiąże ze sobą współczynniki wrażliwości, mianowicie

$$\Theta + (r - \delta)S \cdot \Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV \quad (10.17)$$

i ten związek zarządzający portfelami instrumentów pochodnych powinni rozumieć i wykorzystywać analizując potencjalne zmiany wartości portfela. W szczególności, portfele są często tak konstruowane by były **delta neutralne**, czyli by ich delta wynosiła zero (w rzeczywistości by była bliska zera). Wówczas, dla takiego delta neutralnego portfela

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV. \quad (10.18)$$

Stąd, przy założeniu, że składnik rV po prawej stronie równania (10.18) jest zaniedbywalnie mały w porównaniu z pozostałymi wyrażeniami, wynika, że duża dodatnia gamma portfela implikuje iż teta portfela będzie duża co do wartości bezwzględnej i ujemna. Tak więc delta neutralny portfel o dużej dodatniej gammie będzie dużo tracił na wartości z tytułu upływu czasu. Podstawowym przykładem takiego portfela jest strategia opcyjna (*long straddle*) złożona z dwóch kupionych opcji ATM: opcji kupna i opcji sprzedaży, przy czym tu przez opcję call (put) ATM rozumie się opcję, której tzw. forward delta $e^{+\delta(T-t)}\Delta_C$ ($e^{+\delta(T-t)}\Delta_P$, odpowiednio) wynosi $\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$, odpowiednio), czyli opcje o takiej cenie wykonania by $d_1 = 0$.

10.4. Współczynniki wrażliwości portfela instrumentów pochodnych

Rozpatrzmy portfel złożony z N instrumentów pochodnych o takim samym instrumencie podstawowym. Niech $V_n = V_n(t, S, r_n, \delta_n, \sigma_n)$ oznacza funkcję, która wycenia n -ty instrument w portfelu. Mimo iż instrument podstawowy jest ten sam w każdym z tych instrumentów, stopy procentowe r_n i δ_n oraz zmienność σ_n mogą być specyficznymi zmiennymi dobranymi odpowiednio do parametrów instrumentu pochodnego – na przykład dla opcji waniliowych tenor stóp procentowych będzie odpowiadał czasowi trwania instrumentu pochodnego, a zmienność (implikowana) czasowi trwania i cenie wykonania. Niech

$$V(t, S, r_1, \dots, r_n, \delta_1, \dots, \delta_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{n=1}^N V_n(t, S, r_n, \delta_n, \sigma_n).$$

Wówczas

$$\Delta V \simeq \Theta \cdot \Delta t + \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma \cdot (\Delta S)^2 + \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n \cdot \Delta \sigma_n + \sum_{n=1}^N \rho_n \cdot \Delta r_n + \sum_{n=1}^N \rho_n^* \cdot \Delta \delta_n,$$

gdzie

$$\Theta = \sum_{n=1}^N \Theta_n = \sum_{n=1}^N \frac{\partial V_n}{\partial t} \quad \Delta = \sum_{n=1}^N \Delta_n = \sum_{n=1}^N \frac{\partial V_n}{\partial S} \quad \Gamma = \sum_{n=1}^N \Gamma_n = \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2 S}$$

oraz

$$\rho_n = \frac{\partial V_n}{\partial r_n} \quad \rho_n^* = \frac{\partial V_n}{\partial \delta_n} \quad \mathcal{V}_n = \frac{\partial V_n}{\partial \sigma_n}.$$

W przypadku gdy $\Delta r_n = \Delta r$, $\Delta \delta_n = \Delta \delta$ oraz $\Delta \sigma_n = \Delta \sigma$, mamy wzór analogiczny do (10.3):

$$\Delta V \simeq \Theta \cdot \Delta t + \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma \cdot (\Delta S)^2 + \mathcal{V} \cdot \Delta \sigma + \rho \cdot \Delta r + \rho^* \cdot \Delta \delta,$$

gdzie

$$\mathcal{V} = \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n \quad \rho = \sum_{n=1}^N \rho_n \quad \rho^* = \sum_{n=1}^N \rho_n^*.$$

10.5. Obliczanie współczynników wrażliwości metodą ilorazu różnicowego

Dla instrumentów pochodnych które, wycenia się za pomocą złożonych algorytmów numerycznych (na przykład: stosując model dwumianowy, metodę symulacji Monte-Carlo, czy też rozwiązując numerycznie równanie Blacka-Scholesa), współczynniki wrażliwości można obliczać w sposób przybliżony za pomocą odpowiednich ilorazów różnicowych (o ile te algorytmy wyceny nie dostarczają jednocześnie wartości tych współczynników). I tak, na przykład

$$\Delta \simeq \frac{V(S + \Delta S) - V(S - \Delta S)}{2 \Delta S} \quad (10.19)$$

dla dostatecznie małego przyrostu ΔS . Iloraz różnicowy po prawej stronie (10.19) przybliża deltę z dokładnością do wyrazów rzędu $O((\Delta S)^2)$. W uzupełnieniu do delty policzonej wzorem (10.19) rozważa się również delty kierunkowe (jednostronne), które odpowiadają wzrostowi / spadkowi ceny instrumentu podstawowego

$$\Delta^{(+)} = \frac{V(S + \Delta S) - V(S)}{\Delta S}, \quad (10.20a)$$

$$\Delta^{(-)} = \frac{V(S - \Delta S) - V(S)}{-\Delta S}, \quad (10.20b)$$

gdzie $\Delta S > 0$. Te delty mają zastosowanie w sytuacjach gdy oczekuje się zmiany ceny instrumentu podstawowego w określonym kierunku. Ponieważ

$$\Delta^{(\pm)} = \frac{V(S \pm \Delta S) - V(S)}{\pm \Delta S} = \Delta \pm \frac{1}{2} \Gamma \Delta S + O((\Delta S)^2), \quad (10.21)$$

w tych deltach odzwierciedlony jest efekt nieliniowości (wypukłości) opcji.

Analogicznie można obliczać pozostałe współczynniki pierwszego rzędu – vega i tetę.

Jak widać z (10.21), gammę można obliczyć następującym wyrażeniem:

$$\Gamma \simeq \frac{\Delta^{(+)} - \Delta^{(-)}}{\Delta S} = \frac{V(S + \Delta S) - 2V(S) + V(S - \Delta S)}{(\Delta S)^2}. \quad (10.22)$$

10.6. Zabezpieczanie portfela instrumentów pochodnych

Portfel instrumentów pochodnych jest

- **delta neutralny** jeżeli jego delta jest równa zero,
- **gamma neutralny** jeżeli jego gamma jest równa zero,
- **delta-gamma neutralny** jeżeli jego delta i gamma są równe zero,
- **vega neutralny** jeżeli jego vega jest równa zero,
- **delta-gamma-vega neutralny** jeżeli jego delta, gamma oraz vega są równe zero.

Poniżej opiszemy metody budowania portfeli neutralnych względem odpowiednich czynników ryzyka. Ogólnie mówiąc, metody te będą polegały na dołączeniu w odpowiedniej ilości do zabezpieczanego portfela wybranych instrumentów pochodnych, których instrument podstawowy jest identyczny z instrumentem podstawowym portfela.

Tworzenie portfela delta neutralnym

Rozpatrzmy portfel instrumentów pochodnych zależnych od tego samego instrumentu podstawowego, który nie jest delta neutralny, to jest

$$\Delta_{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial S} \neq 0,$$

gdzie $\Pi = \Pi(t, S, r, \delta, \sigma)$ jest funkcją wyceniającą ten portfel. Rozpatrzmy pewien instrument pochodny wyceniany funkcją $V = V(t, S, r, \delta, \sigma)$, którego delta $\Delta_V \neq 0$. Ten instrument będzie pełnił rolę instrumentu zabezpieczającego. Po dołączeniu do zabezpieczanego portfela x jednostek instrumentu zabezpieczającego wartość powiększonego portfela wyniesie

$$\Pi^* = \Pi + x \cdot V.$$

Ten powiększony portfel będzie delta neutralny (będzie uodporniony na małe zmiany ceny instrumentu podstawowego), to jest

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial S} = \Delta_{\Pi^*} = \Delta_{\Pi} + x \cdot \Delta_V = 0,$$

jeśli ilość instrumentu zabezpieczającego będzie wynosić

$$x = -\frac{\Delta_{\Pi}}{\Delta_V}.$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek kiedy zabezpieczany portfel składa się tylko z jednej wystawionej waniliowej opcji kupna, a instrumentem zabezpieczającym jest instrument podstawowy opcji. W naszej notacji $\Pi = -C$ oraz $V = S$. Zatem, kupno

$$x = -\frac{-\Delta_C}{1} = \Delta_C$$

jednostek instrumentu podstawowego razem z wystawioną opcją kupna tworzy portfel delta neutralny.

Tworzenie portfela gamma neutralnym

Postępujemy analogicznie jak w przypadku tworzenia portfela delta neutralnym. Jeżeli portfel ma niezerową gammę ($\Gamma_\Pi \neq 0$), to po dołączeniu do niego

$$y = -\frac{\Gamma_\Pi}{\Gamma_V}$$

jednostek instrumentu zabezpieczającego o niezerowej gammie Γ_V , otrzymamy portfel gamma neutralny.

Tworzenie portfela delta-gamma neutralnym

Portfel delta-gamma neutralny możemy zbudować w dwóch krokach – najpierw robimy portfel gamma neutralnym, a następnie dobierając odpowiednią ilość jednostek instrumentu podstawowego zerujemy deltę zabezpieczanego portfela.

W ogólnym przypadku do zabezpieczanego portfela dokładamy dwa instrumenty zabezpieczające o funkcjach wyceny V_1 i V_2 w ilościach x i y jednostek, odpowiednio. Wówczas wartość tak powiększonego portfela wynosi

$$\Pi^* = \Pi + x \cdot V_1 + y \cdot V_2.$$

Ten portfel będzie delta-gamma neutralny, jeśli

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial S} &= \Delta_{\Pi^*} = \Delta_\Pi + x \cdot \Delta_{V_1} + y \cdot \Delta_{V_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial S^2} &= \Gamma_{\Pi^*} = \Gamma_\Pi + x \cdot \Gamma_{V_1} + y \cdot \Gamma_{V_2} = 0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Układ równań (10.23) ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli wyznacznik tego układu jest różny od zera, to jest gdy

$$\Delta_{V_1} \cdot \Gamma_{V_2} - \Delta_{V_2} \cdot \Gamma_{V_1} \neq 0. \quad (10.24)$$

Wybierając instrumenty zabezpieczające musimy uważać by warunek (10.24) był spełniony. Jeżeli jednym z instrumentów zabezpieczających jest instrument podstawowy, to dla spełnienia warunku (10.24) wystarczy by gamma drugiego instrumentu zabezpieczającego była niezerowa i wówczas portfel zabezpieczony będzie identyczny z tym który uzyskalibyśmy stosując metodę zabezpieczania opisaną na początku tego ustępu.

Tworzenie portfela vega neutralnym

Postępujemy analogicznie jak w przypadku tworzenia portfela delta neutralnym. Jeżeli portfel ma niezerową vegę ($\mathcal{V}_\Pi \neq 0$), to po dołączeniu do niego

$$z = -\frac{\mathcal{V}_\Pi}{\mathcal{V}_V}$$

jednostek instrumentu zabezpieczającego o niezerowej vedze $\mathcal{V}_V$, otrzymamy portfel vega neutralny.

Tworzenie portfela delta-gamma-vega neutralnym

Tym razem do zabezpieczanego portfela musimy dołożyć trzy instrumenty zabezpieczające o funkcjach wyceny V_1 , V_2 i V_3 w ilościach x , y i z jednostek, odpowiednio. Wówczas wartość tak powiększonego portfela wynosi

$$\Pi^* = \Pi + x \cdot V_1 + y \cdot V_2 + z \cdot V_3.$$

Ten portfel będzie delta-gamma-vega neutralny, jeśli

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial S} &= \Delta_{\Pi^*} = \Delta_{\Pi} + x \cdot \Delta_{V_1} + y \cdot \Delta_{V_2} + z \cdot \Delta_{V_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial S^2} &= \Gamma_{\Pi^*} = \Gamma_{\Pi} + x \cdot \Gamma_{V_1} + y \cdot \Gamma_{V_2} + z \cdot \Gamma_{V_3} = 0 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \sigma} &= \mathcal{V}_{\Pi^*} = \mathcal{V}_{\Pi} + x \cdot \mathcal{V}_{V_1} + y \cdot \mathcal{V}_{V_2} + z \cdot \mathcal{V}_{V_3} = 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Układ równań (10.25) ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli wyznacznik tego układu jest różny od zera. Jeżeli jako pierwszy z instrumentów zabezpieczających wybierzemy instrument podstawowy, czyli gdy $V_1 = S$, to układ (10.25) upraszcza się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi} + x + y \cdot \Delta_{V_2} + z \cdot \Delta_{V_3} &= 0 \\ \Gamma_{\Pi} + y \cdot \Gamma_{V_2} + z \cdot \Gamma_{V_3} &= 0 \\ \mathcal{V}_{\Pi} + y \cdot \mathcal{V}_{V_2} + z \cdot \mathcal{V}_{V_3} &= 0. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Układ (10.26) ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Gamma_{V_2} \cdot \mathcal{V}_{V_3} - \Gamma_{V_3} \cdot \mathcal{V}_{V_2} \neq 0. \quad (10.27)$$

Wybierając dwa pozostałe (prócz instrumentu podstawowego) instrumenty zabezpieczające musimy uważać by warunek (10.27) był spełniony.

10.7. Dynamiczne zabezpieczanie portfela instrumentów pochodnych

Dynamiczne zabezpieczanie portfela instrumentów pochodnych polega na relatywnie częstym modyfikowaniu składu portfela tak by mimo zmieniającej się sytuacji rynkowej profil ryzyka portfela, widziany przez pryzmat jego wybranych współczynników wrażliwości, nie zmieniał się. Polega to na kupowaniu lub sprzedawaniu odpowiedniej ilości instrumentu podstawowego i/lub instrumentów pochodnych na ten instrument zgodnie z regułami wcześniej przedstawionymi.

Dynamiczny delta hedging portfela

Rozpatrzmy sytuację kiedy dealer, który wystawił instrument pochodny, zamierza całkowicie zabezpieczyć swoją pozycję tworząc portfel replikujący złożony z odpowiedniej pozycji w instrumencie podstawowym i pozycji w instrumencie wolnym od ryzyka (to jest w gotówce na rachunku bankowym oprocentowanym po stopie wolnej od ryzyka), a następnie dynamicznie modyfikować ten portfel w zależności od wartości instrumentu podstawowego. Przypuśćmy, że za wystawienie instrumentu pochodnego dealer otrzymał kwotę V_0 , delta tego instrumentu (długiej pozycji w tym instrumencie) wynosiła Δ_0 , a w momencie wystawienia tego instrumentu wartość jego instrumentu podstawowego wynosiła S_0 . Portfel replikujący stworzony w chwili wystawienia instrumentu pochodnego jest złożony z

- Δ_0 sztuk instrumentu podstawowego,
- kwoty $B_0 = V_0 - \Delta_0 S_0$ na rachunku bankowym.

Założmy, że dealer dokonuje modyfikacji tego portfela w chwili t_1 , kiedy wartość instrumentu podstawowego wynosi S_1 , a delta instrumentu pochodnego wynosi Δ_1 . W tym momencie portfel replikujący jest złożony z

- Δ_1 sztuk instrumentu podstawowego,
- kwoty $B_1 = (V_0 - \Delta_0 S_0)e^{r(t_1-t_0)} - (\Delta_1 - \Delta_0)S_1$ na rachunku bankowym,

bowiem dealer musiał zmodyfikować pozycję w instrumencie podstawowym o $\Delta_1 - \Delta_0$ sztuk instrumentu podstawowego, finansując to kwotą $(\Delta_1 - \Delta_0)S_1$ z rachunku bankowego.

Analogicznie, portfel replikujący w chwili t_n , kiedy wartość instrumentu podstawowego wynosi S_n , a delta instrumentu pochodnego wynosi Δ_n , złożony jest z

- Δ_n sztuk instrumentu podstawowego,
- kwoty $B_n = B_{n-1}e^{r(t_n-t_{n-1})} - (\Delta_n - \Delta_{n-1})S_n$ na rachunku bankowym.

Powyższa strategia powinna w chwili wygaśnięcia instrumentu pochodnego dać pozycję, która dostatecznie dobrze zreplikuje wypłatę z tego instrumentu – to jak dobrze zależy od częstotliwości z jaką portfel replikujący był modyfikowany. W krańcowym przypadku, kiedy modyfikacje portfela odbywałyby się w sposób ciągły, powinniśmy otrzymać dokładnie wypłatę z tego instrumentu pochodnego.

W praktyce delta hedging odbywa się co jakiś czas (jak jest on długi zależy od sytuacji na rynku – od kilku godzin do tygodnia) i związany jest kosztami transakcyjnymi kupna/sprzedaży instrumentu podstawowego, które wpływają na opłacalność tej strategii zabezpieczającej. Na ogół nie opłaca się prowadzić delta hedgingu dla pojedynczych instrumentów pochodnych, bo w tym przypadku koszty transakcyjne są zwykle znaczne w stosunku do wartości zabezpieczanego instrumentu. Natomiast, delta hedging portfela instrumentów pochodnych (na ten sam instrument podstawowy) o odpowiednio dużej wartości może być opłacalny.

Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 10.1. Oblicz delty względem ceny forward dla opcji waniliowych wycenianych w modelu Blacka-Scholesa.

Ćwiczenie 10.2. Oblicz współczynniki wrażliwości dla opcji binarnych wycenianych w modelu Blacka-Scholesa.

Ćwiczenie 10.3. Rozpatrzmy europejską opcję kupna o czasie trwania $T = 0.25$ (3 miesiące). Cena aktywa wynosi $S = 100$ PLN, stopa procentowa $r = 5\%$, stopa dywidendy $\delta = 3\%$, oraz zmienność $\sigma = 20\%$. Niech cena wykonania wynosi $K = 100$ PLN. Oblicz

- cenę opcji,
- wartości współczynników wrażliwości tej opcji,
- przybliżone wartości dziennej zmiany S , σ , r , δ odpowiadające 1.65 odchylenia standardowego tych wielkości – załóż, że zmienność stóp wynosi 24%, a zmienność zmienności wynosi 16%,
- wartości zmiany ceny opcji odpowiadające wyznaczonym powyżej zmianom S , σ , r , δ .

Ćwiczenie 10.4. Rozpatrzmy portfel złożony z następujących opcji na kurs USD/PLN:

- kupiony 3M call USD/put PLN o wartości nominalnej $N_1 = 10$ mln USD z ceną wykonania $K_1 = 3.30$ USD/PLN,
- sprzedany 1M call USD/put PLN o wartości nominalnej $N_2 = 5$ mln USD z ceną wykonania $K_2 = 3.15$ USD/PLN,
- sprzedany 6M put USD/call PLN o wartości nominalnej $N_3 = 5$ mln USD z ceną wykonania $K_3 = 3.20$ USD/PLN

oraz transakcji 3M FX forward na sprzedaż $N_4 = 7.5$ mln USD po kursie $K_4 = 3.25$ USD/PLN.

Przy założeniu, że bieżący kurs wynosi $S = 3.10$ USD/PLN, oraz dla

- 1M: $r_{\text{PLN}} = 6.50\%$, $r_{\text{USD}} = 3.00\%$, $\sigma = 12\%$,
- 3M: $r_{\text{PLN}} = 6.00\%$, $r_{\text{USD}} = 3.20\%$, $\sigma = 11\%$,
- 6M: $r_{\text{PLN}} = 5.50\%$, $r_{\text{USD}} = 3.50\%$, $\sigma = 10\%$,

oblicz deltę tego portfela. Jaką transakcję FX spot należy zawrzeć by portfel był delta neutralny?

Ćwiczenie 10.5. Rozpatrzmy delta neutralny portfel, którego gamma wynosi - 2000 a vega -4000. Na rynku w płynnym obrocie znajdują się opcje:

- jedna o delcie 0.6, gammie 0.5, i vedze 2.0,
- druga o delcie 0.4, gammie 0.8, i vedze 1.5.

Zabezpiecz ten portfel tak, by był on

- (a) delta-vega neutralny,
- (b) delta-gamma-vega neutralny.

Oczywiście zakładamy, że portfel oraz opcje zależą od tego samego instrumentu podstawowego.

Ćwiczenie 10.6. Zakładając, że funkcja wyceniająca instrument pochodny spełnia równanie Blacka-Scholesa (10.15), wyprowadź równanie na vegę $\mathcal{V}$ tego instrumentu pochodnego.

Ćwiczenie 10.7. Rozpatrzmy 3M opcję kupna na akcje spółki **wuwu.com** z ceną wykonania $K = 103.37$ PLN. Bieżąca cena akcji wynosi 100, a jej zmienność 36.47%. Wolna od ryzyka stopa procentowa dla 3M lokat/depozytów wynosi 6.67%. Zakładamy, że spółka nie płaci dywidendy w czasie trwania opcji. Jaką pozycję w akcjach tej spółki należy utworzyć by portfel złożony z tej pozycji oraz z 10-ciu wystawionych opcji kupna był delta neutralny? Jaką sumę pieniędzy należy pożyczyć by sfinansować ten portfel?

Ćwiczenie 10.8. Udowodnij, że dowolny delta neutralny portfel złożony z

- wystawionych opcji waniliowych (na ten sam instrument podstawowy),
- odpowiedniej pozycji zabezpieczającej w instrumencie podstawowym,
- pozycji gotówkowej finansującej ten portfel,

zyskuje na wartości z upływem czasu przy niezmiennych cenie i zmienności instrumentu podstawowego oraz przy niezmiennym stopie procentowej.

Ćwiczenie 10.9 (*Nieefektywność strategii stop-loss dla opcji kupna*). Rozpatrzmy sytuację kiedy dealer, który wystawił opcję kupna akcji po cenie K i zamierza zabezpieczać swoją pozycję kupując akcję po cenie K jak tylko cena akcji przekroczy wartość K i sprzedawać akcję po cenie K jak tylko cena akcji spadnie poniżej K . Dlaczego ta strategia nie może działać?

11. Zmienność

11.1. Rodzaje zmienności

W inżynierii finansowej funkcjonuje wiele rodzajów zmienności. Mamy

- zmienność historyczną,
- zmienność implikowaną,
- zmienność lokalną,
- zmienność stochastyczną.

Wszystkie one są używane w roli zmienności σ , która występuje w podstawowym modelu opisującym proces cen (w świecie wolnym od ryzyka)

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (11.1)$$

gdzie W_t jest procesem Wienera, a r jest stopą wolną od ryzyka. Zmienność historyczna jest również używana w niektórych metodach szacowania ryzyka (rynkowego) portfeli instrumentów finansowych (na przykład w tak zwanej metodzie delta-normalnej wyznaczania wartości zagrożonej).

Z równania (11.1) wynika, że jeśli σ **jest stała**, to

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right). \quad (11.2)$$

Konsekwencje przyjętego modelu (wzorów (11.1) – (11.2)):

- S_t ma rozkład log-normalny, bowiem W_t ma rozkład normalny (o średniej zero i wariancji t),
- log-normalność S_t umożliwia wyprowadzenie formuł Blacka-Scholesa (BS) na wycenę europejskich opcji waniliowych.

Uwaga 11.1 (proste uogólnienie modelu Blacka-Scholesa). Wzór (11.2) zachodzi również w przypadku, gdy σ zależy od czasu t , ale z małą jego modyfikacją. Mianowicie w miejsce zmienności σ należy wstawić we wzorze (11.2) średnią wartość zmienności na przedziale czasu $[0, t]$:

$$\sigma_{\text{avg}} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma^2(u) du}.$$

W tym przypadku formuły BS na wycenę opcji pozostają w mocy z $\sigma = \sigma_{\text{avg}}$.

11.2. Zmienność historyczna

Z (11.2) wynika, że

$$\text{Var} \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \right) = \sigma^2 t,$$

czyli że σ jest zannualizowanym odchyleniem standardowym (logarytmicznej) stopy zwrotu z S . W związku z tym obliczając cenę opcji z modelu BS, w określonych przypadkach za σ przyjmuje się wartość obliczoną statystycznym estymatorem odchylenia standardowego logarytmicznych stóp zwrotu. Tak obliczoną zmienność nazywamy zmiennością historyczną i na potrzeby naszego wykładu oznaczamy ją symbolem $\hat{\sigma}$.

Obliczanie zmienności historycznej

Zwykle najpierw oblicza się zmienność w skali jednego dnia σ_{1d} , po czym ta jednodniowa zmienność jest skalowana do zmienności rocznej wzorem

$$\hat{\sigma} = \sqrt{252} \sigma_{1d}. \quad (11.3)$$

U w a g i:

1. Magiczna liczba 252 we wzorze (11.3) wynika z założenia, że rok ma 252 dni handlowe. W zasadzie liczba ta zależy od kraju (waluty). W pobieżnych szacunkowych obliczeniach można zmienność dzienną skalować do rocznej mnożąc σ_{1d} przez 16.
2. Skalowanie „pierwiastkiem z czasu”, takie jak na przykład w (11.3), jest poprawne pod pewnymi warunkami (szereg czasowy zaobserwowanych wartości S jest realizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie), które w praktyce rzadko kiedy można uznać, że są spełnione.
3. Ponadto, zakładamy, że stopa zwrotu w skali rocznej jest sumą dziennych stóp zwrotu. Jeżeli stopy są zdefiniowane wzorem (11.5), to tak oczywiście jest. Natomiast proste stopy zwrotu określone w (11.7) nie są „addytywne”.
4. Ze względu na założenia wymienione w punkcie 2, skalowanie „pierwiastkiem z czasu” dziennych zmienności wyznaczonych modelami typu GARCH (patrz poniżej) nie ma sensu (bo te modele zakładają, że rozkład zmiennej losowej w danym dniu zależy od rozkładu z poprzedniego dnia!).

11.3. Metody wyznaczania zmienności dziennej

Estymacja zmienności średnią ruchomą (MA)

Załóżmy, że na koniec dnia t_{n-1} dysponujemy szeregiem czasowym zrealizowanych wartości procesu cen

$$\dots, S_{t_{n-m}}, \dots, S_{t_{n-2}}, S_{t_{n-1}}.$$

Prognozowana (estymowana) dzienna wariancja dla następnego dnia t_n obliczana jest w następujący sposób:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_{n-i} - \bar{r})^2, \quad (11.4)$$

gdzie

$$r_i = \ln \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) \quad (11.5)$$

są zrealizowanymi „jednodniowymi” (w okresie od t_{i-1} do t_i) stopami zwrotu, a

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{n-i} \quad (11.6)$$

jest estymatorem średniej (wartości oczekiwanej).

Aspekty praktyczne

1. Jak należy wybrać długość szeregu czasowego zrealizowanych cen S_{t_i} do estymacji zmienności?

- a) Czasami m wybiera się tak, by szereg czasowy pokrywał okres o tej samej długości jak czas trwania opcji. Nie zawsze to ma sens – w skrajnym przypadku opcji o kilkudniowym czasie trwania statystyczne własności estymatora obliczonego na podstawie krótkiego szeregu czasowego są złe.
- b) Ta uwaga jest adresowana do tych, którzy już wiedzą czym jest wartość zagrożona VaR (*Value at Risk*) i którzy wcześniej zetknęli się z analizą portfelową. Zmienność historyczną używa się także do obliczania VaR portfela. Mianowicie, w metodzie RiskMetrics obliczania VaR zakłada się, że zmienna losowa opisująca P&L portfela ma rozkład normalny o średniej zero. Wówczas, VaR portfela przy poziomie ufności c dane jest wzorem

$$\text{VaR} = -\Phi^{-1}(1 - c) \sigma,$$

gdzie Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego a σ jest odchyleniem standardowym (zmiennością) P&L tego portfela. Na przykład, przy poziomie ufności $c = 95\%$ mamy $\text{VaR} \simeq 1.65\sigma$. Zwykle przy obliczaniu odchylenia standardowego σ , na jednym z etapów obliczeń, estymowana jest macierz kowariancji pomiędzy czynnikami ryzyka od których zależy wartość portfela. Wówczas m powinno być takie samo dla wszystkich czynników ryzyka oraz powinno być dostatecznie duże – przy m zbyt małym w stosunku do liczby czynników ryzyka wyestymowana macierz kowariancji może nie być dodatnio określona.

2. Czasami we wzorze (11.4) na zmienność historyczną
 - a) pomijana jest wartość średnia $\bar{r}$, to znaczy zakłada się iż jest ona zaniedbywanie mała,
 - b) zamiast $m - 1$ bierzemy m ,
 - c) zamiast logarytmicznej stopy zwrotu (11.5) bierzemy prostą stopę zwrotu

$$r_i = \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \quad (11.7)$$

i wtedy wariancję dzienną obliczamy ze wzoru

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^2. \quad (11.8)$$

Estymacja zmienności według EWMA (stosowana przez J.P. Morgan w RiskMetrics)
W tym modelu zakłada się, że

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda)r_{n-1}^2 + \lambda\sigma_{n-1}^2, \quad (11.9)$$

gdzie $0 < \lambda < 1$ określa proporcje wkładu (kwadratu) bieżącej zmiany ceny i (kwadratu) zmienności za poprzedni dzień do bieżącej wartości (kwadratu) zmienności. Ze wzoru (11.9) wynika, że

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} r_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2 = \\ &= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{n-i}^2 \simeq (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} r_{n-i}^2. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Wzór (11.10) wyjaśnia dlaczego model ten nazywa się EWMA (wykładniczo ważona średnia ruchoma) i pokazuje, czym różni się ten sposób estymacji zmienności od estymatora (11.8).

Aspekty praktyczne

1. Wartość parametru λ można wyestymować metodą największej wiarygodności (patrz Hull, 5-th Ed., strony 378–382[1]).

2. J.P. Morgan w swoim modelu RiskMetrics przyjmuje $\lambda = 0.94$. Według nich estymatory zmienności obliczone przy tej wartości parametru λ są bliskie zrealizowanej zmienności wyliczonej jako średnia z 25 kolejnych „przyszłych” (w stosunku do dnia estymacji) wielkości r_i^2 .

Estymacja zmienności według GARCH(1,1)

W tym modelu zakłada się, że

$$\sigma_n^2 = \gamma v_\infty + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \quad (11.11)$$

gdzie

$$\gamma + \alpha + \beta = 1,$$

przy czym zwykle zakłada się, że

$$\alpha > 0,$$

$$\beta > 0,$$

$$\alpha + \beta \leq 1.$$

Wielkość v_∞ w (11.11) jest długoterminową średnią wariancją w tym sensie, że jeżeli $\alpha + \beta < 1$, to w średniej

$$\sigma_n^2 \rightarrow v_\infty \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty.$$

Gdy $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda$, GARCH(1,1) redukuje się do EWMA.

Aspekty praktyczne

1. Wartości parametrów α , β i $\omega = \gamma v_\infty$ można wyestymować metodą największej wiarygodności.
2. Proces estymacji parametrów można uprościć przyjmując za v_∞ długoterminową średnią obliczoną na przykład wzorem (11.4). Ustalenie v_∞ umożliwia wyznaczenie parametru ω przy danych α i β , bowiem $\omega = (1 - \alpha - \beta)v_\infty$.
3. Jeżeli stosujemy model GARCH(1,1) do wyznaczania zmienności, macierz kowariancji powinna być wyznaczana również w analogiczny sposób.

11.4. Zmienność implikowana

- Formuła Blacka-Scholesa (BS) jest wyprowadzona przy silnych założeniach, o których na ogół możemy z góry powiedzieć, że nie są w rzeczywistości spełnione.
- Tym niemniej, formuła BS przyjęła się w praktyce, choć jest używana inaczej niż było jej pierwotne przeznaczenie.
- W uproszczeniu, można powiedzieć, że formuła BS jest narzędziem do „interpolacji” rynkowej ceny opcji. Przy tej interpolacji kluczową rolę odgrywa zmienność implikowana.

Przypomnijmy podstawowe oznaczenia:

- S – bieżąca wartość instrumentu podstawowego,
- σ – zmienność,
- K – cena wykonania,
- T – czas trwania opcji,
- $C_{BS}(S, \sigma, K, T)$ – cena BS waniliowej opcji call,
- $P_{BS}(S, \sigma, K, T)$ – cena BS waniliowej opcji put,
- $C_{mkt}(S, K, T)$ – cena rynkowa waniliowej opcji call,
- $P_{mkt}(S, K, T)$ – cena rynkowa waniliowej opcji put.

Definicja 11.1. Zmienność implikowana (ang. *implied volatility*) σ_{imp} to liczba, która spełnia równanie

$$C_{\text{BS}}(S, \sigma_{\text{imp}}, K, T) = C_{\text{mkt}}(S, K, T) \quad (11.12)$$

dla danych S, K, T (zależność od stóp procentowych jest zaniedbywana).

Jak widać z (11.12),

$$\sigma_{\text{imp}} = \sigma_{\text{imp}}(S, K, T).$$

Sens zmienności implikowanej

σ_{imp} kalibruje formułę BS dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K do ceny rynkowej. Inaczej, zmienność implikowana to *specjalna* liczba, która wstawiona do *niewłaściwej* (bo obowiązującej przy założeniach, o których z góry można powiedzieć, że nie są spełnione) formuły (Blacka-Scholesa) daje *właściwą* (prawdziwą, rynkową) wartość opcji.

Uwagi

1. Ponieważ vega opcji $\mathcal{V}_C = \frac{\partial C_{\text{BS}}}{\partial \sigma} > 0$, zmienność σ_{imp} istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona przez (11.12), o ile $0 < C_{\text{mkt}}(S, K, T) < S$.
2. σ_{imp} spełnia również równanie

$$P_{\text{BS}}(S, \sigma_{\text{imp}}, K, T) = P_{\text{mkt}}(S, K, T), \quad (11.12a)$$

bowiem jak wynika z parytetu opcji call-put (który jest spełniony bez żadnych modelowych założeń),

$$P_{\text{BS}} - P_{\text{mkt}} = C_{\text{BS}} - C_{\text{mkt}}.$$

Inaczej: zmienność implikowana ITM (OTM) call jest taka sama jak zmienność OTM (ITM) put.

3. Jeśli zmienność implikowana nie jest bezpośrednio kwotowana na rynku, a kwotowane są ceny opcji, to zmienność implikowaną oblicza się rozwiązując równanie (11.12) lub równanie (11.12a) ze względu na σ_{imp} , zwykle korzystając, na przykład, z algorytmu Newtona rozwiązywania równań nieliniowych.

11.5. Uśmiech zmienności

Terminologia

- Zależność σ_{imp} od czasu trwania opcji T nazywamy strukturą terminową zmienności implikowanej (dla ustalonych S i K).
- Zależność σ_{imp} od ceny wykonania K (czy od ilorazu K/S , czy też od „delty” opcji) nazywamy uśmiechem zmienności implikowanej (dla ustalonego T).

Sposób prezentacji uśmiechu zmienności

- w zależności od ceny wykonania K – dla opcji na akcje/indeksy, dla zestawu opcji na stopę procentową (dla cap/floor), dla opcji na kontrakt IRS (dla swapcji),
- w zależności od „delty” (to jest wielkości blisko związanej z deltą opcji) – dla opcji walutowych,
- w zależności od wielkości

$$x = \ln \left(\frac{K}{S e^{(r-\delta)T}} \right),$$

która określa „poziom (stopień) bycia w pieniądzu” opcji (ang. *log-moneyness*) – w rozważaniach teoretycznych. I tak dla

- $x < 0$ – opcja call (put) jest ITM (OTM),
- $x = 0$ – opcja call (put) jest ATM-F (at the money forward),
- $x > 0$ – opcja call (put) jest OTM (ITM).

U w a g i:

1. Czasami x (*log-moneyness*) jest definiowane „z przeciwnym znakiem”. Jest to kwestia przyjęcia pewnej konwencji.
2. Wyjaśnienia wymaga pojęcie „delty” używane do opisu uśmiechu zmienności opcji walutowych. W tym kontekście „delta” jest liczbą przeciwna do delty forward opcji put, czyli wielkość

$$\hat{\Delta} = \Phi(-d_1),$$

gdzie Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego. Delta forward to (zwykła) delta przeniesiona na termin wygaśnięcia opcji czynnikiem $e^{+r_f T}$, gdzie r_f jest stopą waluty bazowej a T terminem zapadalności opcji. W szczególności, na przykład, będziemy mówić o opcji (czy też zmienności implikowanej) 25-delta put (co oznaczmy symbolem 25P) mając oczywiście na myśli opcję put (zmienność implikowaną opcji put), której delta forward wynosi -0.25.

3. Oś „delt” przy prezentacji uśmiechu zmienności bywa różnie oznaczana. Na przykład tak:
— 10P, 25P, ATM, 25C, 10C
lub
— 10P, 25P, 50P, 75P, 90P.

Kwotowanie uśmiechu zmienności dla opcji walutowych

W wersji podstawowej uśmiech zmienności jest wyznaczany przez trzy punkty wykresu:

- zmienność opcji 25-delta put — $\sigma_{25 P}$,
- zmienność opcji ATM — σ_{ATM} ,
- zmienność opcji 25-delta call — $\sigma_{25 C}$, przy czym dwie ostatnie wielkości są kwotowane pośrednio przez
- zmienność strategii 25-delta *risk reversal* (oznaczenie: 25-RR)

$$\sigma_{25 RR} = \sigma_{25 C} - \sigma_{25 P}, \quad (11.13)$$

- zmienność strategii 25-delta *butterfly* (oznaczenie: 25-BF)

$$\sigma_{25 BF} = \frac{1}{2}(\sigma_{25 C} + \sigma_{25 P}) - \sigma_{ATM}. \quad (11.14)$$

Z tych kwotowań wyliczamy

$$\begin{aligned} \sigma_{25 C} &= +\frac{1}{2}\sigma_{25 RR} + \sigma_{25 BF} + \sigma_{ATM} \\ \sigma_{25 P} &= -\frac{1}{2}\sigma_{25 RR} + \sigma_{25 BF} + \sigma_{ATM}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

U w a g i:

1. Zmienność strategii 25-delta *risk reversal* określa stopień „skośności” uśmiechu zmienności.
2. Zmienność strategii 25-delta *butterfly* określa stopień „wypukłości” uśmiechu zmienności.
3. Czasami do opisu struktury uśmiechu zmienności używa się również zmienności implikowanych strategii RR i BF przy innych deltach, na przykład 10-delta. Te zmienności, na ogół, nawet jeśli pochodzą z rynku (są kwotowane), są efektem pewnego procesu „przybliżania” dokonywanego na podstawie zmienności ATM, 25-RR i 25-BF, przy czym to „przybliżanie” może polegać na ocenie rynku przez „kwotującego” albo na zastosowaniu pewnych analitycznych metod interpolacji (i ekstrapolacji).

11.6. Struktura zmienności implikowanej opcji walutowych

Dyskretna struktura zmienności implikowanej jest przedstawiona w postaci dwuwymiarowej tablicy, tzn. jako macierz wartości indeksowanych dwiema zmiennymi:

- okresami, które odpowiadają pewnym „wystandaryzowanym” czasom trwania opcji,
- „deltami” opcji.

Indeksy czasowe

Standardowo przyjmuje się następujący układ T_i ($i = 1, \dots, 8$) czasów trwania opcji:

$$1D, 1W, 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 1Y.$$

Każdego dnia tym okresom są przypisane określone liczby dni odpowiadające czasom trwania opcji, które były by zawarte w danym dniu. Te liczby dni nie są wielkościami stałymi i z dnia na dzień zmieniają się w pewnym zakresie.

Indeksy „delta”

Standardowo przyjmuje się następujący układ $\hat{\Delta}_k$ ($k = 1, \dots, 5$) „delt”, określających stopień „bycia w pieniądzu lub poza pieniądzem” opcji (put):

$$0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90,$$

gdzie przypomnijmy znak ujemny delt (forward) opcji put został pominięty.

Dyskretna struktura zmienności implikowanej ma postać następującej tablicy

$$\begin{pmatrix} T_i / \hat{\Delta}_k & 10 & 25 & 50 & 75 & 90 \\ 1D & \sigma_{1D,10} & \sigma_{1D,25} & \sigma_{1D,50} & \sigma_{1D,75} & \sigma_{1D,90} \\ 1W & \sigma_{1W,10} & \sigma_{1W,25} & \sigma_{1W,50} & \sigma_{1W,75} & \sigma_{1W,90} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1Y & \sigma_{1Y,10} & \sigma_{1Y,25} & \sigma_{1Y,50} & \sigma_{1Y,75} & \sigma_{1Y,90} \end{pmatrix}$$

Przybliżanie zmienności implikowanej względem czasu

W praktyce rynkowej stosuje się jedną z dwóch metod przybliżania zmienności względem czasu trwania opcji, które różnią się sposobem obliczania liczby dni do wygaśnięcia opcji (ang. *expiry*):

- metoda podstawowa: uwzględnia się rzeczywistą liczbę dni od daty wyceny (włącznie) do daty wygaśnięcia (wyłącznie),
- metoda dni handlowych (metoda TD, TD – od ang. *Trade Day*): przy obliczaniu liczby dni między datą wyceny (włącznie) a datą wygaśnięcia (wyłącznie) dni weekendowe oraz dni świąteczne są uwzględniane z wagami, które mają odzwierciedlić mniejszą zmienność kursu walutowego w tych dniach.

Obliczanie liczby dni w okresie czasu metodą dni handlowych

Niech

- T_d oznacza liczbę dni handlowych w okresie,
- T_w oznacza liczbę dni weekendowych w okresie,
- T_h oznacza liczbę dni świątecznych w okresie,
- $\omega_w \in [0, 1]$ oznacza wagę z jaką uwzględniane będą dni weekendowe w okresie,
- $\omega_h \in [0, 1]$ oznacza wagę z jaką uwzględniane będą dni świąteczne w okresie.

Wówczas liczba dni dla okresu czasu od chwili początkowej (daty wyceny) do chwili T według metody dni handlowych dana jest wzorem

$$T^* = T_d + \omega_w T_w + \omega_h T_h.$$

Założmy, że mamy dane wartości σ_{ik} zmienności implikowanych dla czasów trwania T_i , $i = 1, \dots, 8$ i przy których delty opcji (put) wynoszą $\hat{\Delta}_k$ dla pewnego k . Wartość zmienności implikowanej $\sigma(T, \hat{\Delta}_k)$ opcji (put) z deltą $\hat{\Delta}_k$ dla czasu trwania:

— $T < T_1$ przyjmujemy następująco:

$$\sigma(T, \hat{\Delta}_k) = \sigma_{1k}, \quad (11.16)$$

— $T_i < T < T_{i+1}$ przybliżamy według następującego wzoru (interpolacja liniowa względem nieannualizowanej wariancji):

$$\sigma(T, \hat{\Delta}_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\sigma_{ik}^2 T_i + \tau(\sigma_{i+1,k}^2 T_{i+1} - \sigma_{ik}^2 T_i)}, \quad (11.17)$$

gdzie

— w przypadku metody podstawowej

$$\tau = \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i}$$

— w przypadku metody dni handlowych

$$\tau = \frac{T^* - T_i^*}{T_{i+1}^* - T_i^*}$$

z liczbami dni T^* , T_i^* , oraz T_{i+1}^* obliczonymi według metody dni handlowych,

— $T_8 < T$ przyjmujemy następująco:

$$\sigma(T, \hat{\Delta}_k) = \sigma_{8k}. \quad (11.18)$$

Przybliżenie zmienności względem „delt”

Przybliżenia dokonujemy dla ustalonego czasu trwania T , dla którego mamy dane (lub obliczone stosując przybliżenie zmienności względem czasu) wartości

$\sigma(T, \hat{\Delta}_k)$ zmienności implikowanej dla „delt” $\hat{\Delta}_k$ ($k = 1, \dots, 5$).

Przybliżoną wartość zmienności implikowanej $\sigma(T, \hat{\Delta})$

— dla czasu trwania T ,

— która odpowiada zadanej wartości „delt” $\hat{\Delta}$ leżącej pomiędzy $\hat{\Delta}_1$ a $\hat{\Delta}_5$

wyznaczamy stosując jedną z dwóch metod:

— **interpolację liniową** między punktami $(\hat{\Delta}_k, \sigma(T, \hat{\Delta}_k))$ ($k = 1, \dots, 5$), to jest

$$\sigma(T, \hat{\Delta}) = \sigma(T, \hat{\Delta}_k) + (\sigma(T, \hat{\Delta}_{k+1}) - \sigma(T, \hat{\Delta}_k)) \frac{\hat{\Delta} - \hat{\Delta}_k}{\hat{\Delta}_{k+1} - \hat{\Delta}_k}, \quad (11.19)$$

jeśli $\hat{\Delta}_k < \hat{\Delta} < \hat{\Delta}_{k+1}$,

— **interpolację splajnami**, to jest

$$\sigma(T, \hat{\Delta}) = Sp(\hat{\Delta}), \quad (11.20)$$

gdzie Sp jest naturalnym splejmem kubicznym wyznaczonym dla układu punktów $(\Delta_k, \sigma(T, \Delta_k))$ ($k = 1, \dots, 5$).

Prócz metod interpolacji należy jeszcze określić sposób **ekstrapolacji** zmienności, czyli wyznaczania zmienności $\sigma(T, \hat{\Delta})$ w przypadku gdy $\hat{\Delta} < \hat{\Delta}_1$ lub $\hat{\Delta}_5 < \hat{\Delta}$. W najprostszym podejściu stosuje się ekstrapolację stałymi wartościami, to jest:

dla $\hat{\Delta} < \hat{\Delta}_1$ (to jest dla opcji put/call mocno OTM/ITM) kładziemy

$$\sigma(T, \hat{\Delta}) = \sigma(T, \hat{\Delta}_1) \quad (11.21a)$$

dla $\hat{\Delta} > \hat{\Delta}_5$ (to jest dla opcji put/call mocno ITM/OTM) kładziemy

$$\sigma(T, \hat{\Delta}) = \sigma(T, \hat{\Delta}_5). \quad (11.21b)$$

Uwaga 11.2. Takie rozwiązanie może niedoszacowywać opcje o skrajnych wartościach delt, szczególnie opcje poza pieniądzem.

11.7. Wyznaczenie zmienności dla opcji o danej cenie wykonania

Założmy, że mamy dane wartości $\sigma(T, \hat{\Delta}_k)$ zmienności implikowanej dla „delt” $\hat{\Delta}_k$ ($k = 1, \dots, 5$) i pewnego ustalonego czasu trwania T . Wartość zmienności implikowanej $\sigma(T, K)$ dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K obliczamy następującym iteracyjnym algorytmem.

Niech

- ϵ oznacza zadaną wartość, która określa dokładność z jaką będziemy wyznaczać zmienność implikowaną.
- N_{max} oznacza maksymalną liczbę wykonywanych iteracji.

Start

- Kładziemy $\sigma^{(0)} = \sigma(T, \Delta_3)$ (bierzemy zmienność implikowaną opcji ATM, czyli takiej której delta forward wynosi 50).

Iteracje

- Dla $n = 0, 1, \dots, N_{max} - 1$ wykonujemy następujące kroki 1-3:
 1. Obliczamy „deltę” opcji ze zmiennością $\sigma^{(n)}$ dla ceny wykonania K i czasu trwania T :

$$\Delta^* = \hat{\Delta}(S, K, T, \sigma^{(n)}), \quad (11.22)$$

gdzie, przypomnijmy, $\hat{\Delta}(S, K, T, \sigma^{(n)}) = \Phi(-d_1)$.

2. Wyznaczamy nową wartość zmienności implikowanej $\sigma^{(n+1)}$ dla opcji z „deltą” Δ^* za pomocą jednej z metod przybliżania względem „delt”.
3. Jeśli $|\sigma^{(n+1)} - \sigma^{(n)}| < \epsilon$, to iteracje zostają zatrzymane.

Koniec.

Jako wartość zmienności implikowanej dla opcji z ceną wykonania K i czasem trwania T przyjmujemy

$$\sigma(T, K) = \sigma^{(n+1)}.$$

11.8. Zmienność dla opcji dowolnym czasie trwania i cenie wykonania

Wyznaczenie wartości zmienności dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K przebiega w dwóch etapach:

Etap 1

Wyznaczamy strukturę „uśmiechu” zmienności dla opcji o czasie trwania T stosując przybliżenie względem czasu.

Etap 2

Wyznaczamy wartość zmienności dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K stosując schemat iteracyjny względem „delt” na wyznaczonej w Etapie 1 strukturze „uśmiechu” zmienności dla opcji o czasie trwania T .

Tak wyznaczona zmienność jest następnie używana do obliczenia wartości opcji waniliowej z modelu BS.

11.9. Struktura zmienności implikowanej opcji na akcje/indeksy

Podobnie jak poprzednio dyskretna struktura zmienności implikowanej jest przedstawiona w postaci dwuwymiarowej tablicy

$$\begin{pmatrix} T_i / K_j & K_1 & K_2 & K_3 & \cdots & K_J \\ 1D & \sigma_{1D,1} & \sigma_{1D,2} & \sigma_{1D,3} & \cdots & \sigma_{1D,J} \\ 1W & \sigma_{1W,1} & \sigma_{1W,2} & \sigma_{1W,3} & \cdots & \sigma_{1W,J} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \text{dots} & \vdots \\ 1Y & \sigma_{1Y,1} & \sigma_{1Y,2} & \sigma_{1Y,3} & \cdots & \sigma_{1Y,J} \end{pmatrix}$$

indeksowanej dwiema zmiennymi:

- okresami, które odpowiadają pewnym „wystandaryzowanym” czasom trwania opcji,
- cenami wykonania opcji K_j .

Wśród cen wykonania K_j jest cena wykonania opcji ATM, która zwykle znajduje się w środku ciągu cen $K_1, \dots, K_J$.

Wyznaczenie wartości zmienności dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K przebiega podobnie jak poprzednio w dwóch etapach:

Etap 1 jest identyczny jak w przypadku opcji walutowych:

Dla każdej z cen wykonania K_j wyznaczamy strukturę „uśmiechu” zmienności dla opcji o czasie trwania T stosując przybliżenie względem czasu, czyli znajdujemy zmienności $\sigma(T, K_1)$, $\sigma(T, K_2)$, $\sigma(T, K_3)$, ...

Etap 2 jest prostszy, niż w przypadku opcji walutowych:

Wartość zmienności dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K wyznaczamy stosując interpolację (liniową / splajnami) lub ekstrapolację względem zmiennej K na wyznaczonej w Etapie 1 strukturze „uśmiechu” zmienności $\sigma(T, K_j)$ ($k = 1, \dots, J$).

Do czego używamy zmienności implikowanych?

- Do wyceny (z modelu BS) opcji **waniliowych**.
- **Nie ma uzasadnienia** (poza brakiem lepszego pomysłu) dla **bezpośredniego używania zmienności implikowanych przy wycenie opcji egzotycznych**, bo z definicji zmienności implikowane są skalibrowane tylko do opcji waniliowych. Za teoretyczną cenę opcji egzotycznych przyjmuje się cenę uzyskaną z odpowiedniego modelu BS obliczoną przy zmienności ATM opcji waniliowej.
- Współczynniki wrażliwości opcji (szczególnie delta) nie powinny być obliczane z wzorów analitycznych wynikających z formuł BS, bowiem w tych wzorach zakłada się że parametr σ nie zależy od S . Na przykład w przypadku obliczania delty, teoretycznie powinniśmy to zrobić w następujący sposób

$$\Delta_{\text{mkt}} = \Delta_{\text{BS}} + \frac{\partial C_{\text{BS}}}{\partial \sigma_{\text{imp}}} \cdot \frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial S} = \Delta_{\text{BS}} + \mathcal{V} \cdot \frac{\partial \sigma_{\text{imp}}}{\partial S}. \quad (11.23)$$

Problem polega na tym, że na ogół nie znamy postaci funkcji $\sigma_{\text{imp}}(S)$ i nie umiemy policzyć analitycznie jej pochodnej. Zwykle ratujemy się w ten sposób, że obliczamy deltę jako symetryczny iloraz różnicowy

$$\Delta_{\text{mkt}} = \frac{C_{\text{BS}}(S + \Delta S, \sigma_{\text{imp}}(S + \Delta S)) - C_{\text{BS}}(S - \Delta S, \sigma_{\text{imp}}(S - \Delta S))}{2 \Delta S} \quad (11.24)$$

dla odpowiednio małej wielkości ΔS , o ile dysponujemy metodą (numeryczną), która umożliwia modelowanie uśmiechu zmienności jako funkcji od ceny bieżącej.

- Płaszczyzna zmienności jest używana jako „input” do zbudowania modelu wyceny opcji egzotycznych spójnej z wyceną opcji waniliowych. W tych modelach wprowadza się nowe rodzaje zmienności:
 - **lokalną** (Derman-Kani),
 - **stochastyczną** (Hull-White, Heston),
 - **kombinację powyższych** (model zaimplementowany w J.P. Morgan).

Cechy charakterystyczne uśmiechów zmienności

- Dla opcji walutowych
 - (a) Dla par walutowych z rozwiniętych rynków
- Ma symetryczny kształt z ramionami skierowanymi ku górze.
 - (b) Dla par walutowych, w których jedna waluta jest walutą rozwiniętego rynku, a druga jest walutą wschodzącego rynku
 - W tym przypadku spotyka się „sprzeczne” opinie i obserwacje:
- Ma często kształt podobny do uśmiechu zmienności, który jest obserwowany dla opcji na akcje?
- Kształt uśmiechu zmienności podlega częstym zmianom?
 - Dla opcji na akcje (indeksy)
- Uśmiech zmienności ma zwykle wyraźną skośność.
- Zmienność maleje wraz ze wzrostem ceny wykonania.
- Kształt uśmiechu jest bardziej wyraźny dla opcji o krótkim czasie trwania. Dla opcji o dłuższym czasie trwania uśmiech zmienności jest „płytki”.

11.10. Zmienność lokalna

Zmienność lokalna to deterministyczna (niestochastyczna) funkcja $\sigma = \sigma(S, t)$, która występuje w równaniu opisującym proces S_t cen instrumentu podstawowego

$$dS_t = r(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t. \quad (11.25)$$

Uwagi

1. Jeśli S_t spełnia (11.25), to na ogół (po za kilkoma szczególnymi przypadkami) nie umiemy podać analitycznego rozwiązania na S_t i w związku z tym nie mamy wzorów będących odpowiednikami formuł BS.
2. Natomiast możemy wciąż powiedzieć, że cena instrumentu pochodnego wystawionego na S_t , spełnia równanie Blacka-Scholesa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S, t)S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad (11.26)$$

które możemy próbować rozwiązywać numerycznie

- po „wyspecyfikowaniu” funkcji $\sigma(S, t)$ w sposób zgodny z rynkiem,
- po postawieniu warunków brzegowych, które „specyfikują” instrument pochodny.

Zwykle nie rozwiązujemy równania (11.26) bezpośrednio, a raczej przekształcamy je tak, by otrzymać inne równanie na inną funkcję (przez którą C się wyraża), które się łatwiej rozwiązuje.

3. Teoretycznie jeśli znamy (z rynku) zależność ceny opcji waniliowych od T i K możemy wyznaczyć funkcję $\sigma(S, t)$ przez przejście do równania dualnego do (11.26) – tzw. równania Fokkera-Plancka. Z tego równania wyznaczamy zmienność lokalną w następujący sposób

$$\sigma^2(K, T) = 2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + (r - \delta)K \frac{\partial C}{\partial K} + \delta C}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}.$$

W praktyce są z tym problemy, bo mamy zbyt mało danych z rynku, by w sposób dostatecznie dobry wyliczyć pochodne C po T i K , które występują w równaniu Fokkera-Plancka.

4. Wykres funkcji $\sigma = \sigma(S, t)$ nazywa się płaszczyzną lokalnej zmienności (nie mylić z płaszczyzną zmienności implikowanej).

11.11. Zmienność stochastyczna

Jeśli nie wystarcza nam model (11.25), możemy spróbować skomplikować model jeszcze bardziej, to znaczy założyć że proces cen jest opisany równaniem

$$dS_t = r(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t \quad (11.27)$$

gdzie tym razem $\sigma = \sigma(S_t, t)$ jest wielkością stochastyczną, taką, że proces wariancji

$$V = \sigma^2$$

spełnia równanie

$$dV_t = \mu(V_t, S_t, t)dt + v(V_t, S_t, t)d\tilde{W}_t, \quad (11.28)$$

dla pewnych funkcji μ i v . Zakłada się również, że procesy Wienera W_t i $\tilde{W}_t$ są skorelowane, w tym sensie, że

$$E(dW_t, d\tilde{W}_t) = \rho dt.$$

Przykłady modeli dla zmienności

Model Hulla-White'a (1987)

$$dV_t = a(v_\infty - V_t)dt + \xi V_t^\alpha d\tilde{W}_t,$$

gdzie a , v_∞ , ξ , oraz α są stałymi.

Model Hestona (1993)

$$d\sigma_t = \gamma\sigma_t dt + \delta d\tilde{W}_t.$$

12. Instrumenty pochodne stopy procentowej

12.1. Proste instrumenty pochodne stopy procentowej

Instrumenty pochodne, których wypłaty zależą od struktury stóp procentowych, są na ogół instrumentami o znacznej złożoności. Ich wycena wymaga dużo bardziej zaawansowanych metod i modeli niż model Blacka-Scholesa, a zabezpieczanie takich instrumentów jest bardzo skomplikowane. Instrumenty pochodne stopy procentowej, w pewnym sensie, są wyeksponowane na wiele wzajemnie oddziaływujących czynników ryzyka. Podstawą do rozumienia inżynierii takich instrumentów są proste pochodne stopy procentowej (pochodne pierwszej generacji), które zależą jedynie od *poziomu* pewnych stóp procentowych. Na tym wykładzie omówimy najważniejsze takie instrumenty pochodne, mianowicie:

- opcje na górny / dolny poziom stopy procentowej – caplet / floorlet
- cap (seria capletów) / floor (seria floorletów)
- binarne opcje stopy procentowej
- opcje na kontrakty IRS – swapcje (*swaptions*)
- opcje na obligacje zerokuponowe

i pokażemy w jaki sposób te instrumenty są wbudowywane w złożone produkty finansowe, na przykład:

- inverse floater note,
- range accrual note.

Mimo potencjalnych trudności z wyceną tych instrumentów pochodnych, w praktyce rynkowej przyjęty został prosty model – tzw. model Blacka (analogiczny do modelu Blacka – Scholesa), w którym zakłada się że instrument podstawowy opcji (stopa procentowa, cena obligacji) ma w terminie wygaśnięcia opcji rozkład log-normalny. Jak już wiemy przy takim założeniu waniliowe opcje europejskie można w prosty sposób wycenić (o ile znamy parametry tych rozkładów; patrz Lemat 9.3) – otrzymujemy tzw. formuły Blacka⁷⁶.

12.2. Caplet / Floorlet

Caplet / Floorlet to pojedyncza opcja kupna / sprzedaży stopy rynkowej $L = L(T, T_M)$ (typu LIBOR), której okres depozytowy zaczyna się w terminie wygaśnięcia opcji T i kończy się w T_M . Wypłata tych opcji wynosi

$$\frac{\max(\omega(L - K), 0) \cdot \Delta}{1 + \Delta \cdot L} \cdot N, \quad (12.1)$$

gdzie

- $\omega = 1$ dla capleta i $\omega = -1$ dla floorleta,
- K jest ceną wykonania (określającą poziom stopy procentowej),
- $\Delta = \Delta(T, T_M)$ jest długością okresu depozytowego stopy $L = L(T, T_M)$,
- N jest nominałem opcji wyrażonym w walucie stopy L .

Struktura wypłaty (12.1) jest bardzo podobna do wypłaty kontraktu FRA do tego stopnia, że

$$\text{kupiony caplet} + \text{sprzedany floorlet} = \text{kupiony FRA}. \quad (12.2)$$

Stąd wynika **parytet dla capletów – floorletów**, mianowicie

$$V_{\text{caplet}} - V_{\text{floorlet}} = V_{\text{long FRA}} = N(DF(T) - DF(T_M)(1 + \Delta \cdot K)), \quad (12.3)$$

gdzie V_{caplet} oraz V_{floorlet} oznaczają bieżące ceny capleta oraz floorleta. Posiadacz capleta jest zabezpieczony przed wzrostem stopy procentowej powyżej stopy będącej ceną wykonania tej opcji. Dlatego capleta określa się jako opcję na górny poziom stopy procentowej. Podobnie floorlet jest opcją na dolny poziom stopy procentowej, która zabezpiecza posiadacza przed spadkiem stopy procentowej poniżej stopy będącej ceną wykonania tej opcji.

Wycena capleta / floorleta

Przy założeniu, że stopa $L = L(T, T_M)$ w chwili T ma rozkład log-normalny taki, że

- odchylenie standardowe $\ln(L(T, T_M))$ wynosi $\sigma\sqrt{T}$,
- wartość oczekiwana stopy $L(T, T_M)$ jest równa aktualnie obserwowanej stopie forward $F = F(0, T, T_M)$ na okres czasu $[T, T_M]$,

bieżąca cena capleta ($\omega = 1$) / floorleta ($\omega = -1$) o cenie wykonania K wynosi

$$V = N DF(T_M) \omega (F\Phi(\omega d_1) - K\Phi(\omega d_2)) \Delta(T, T_M), \quad (12.4)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{oraz} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad (12.5)$$

a $DF(T_M)$ jest czynnikiem, który dyskontuje z chwili T_M na chwilę bieżącą. Czynniki ten możemy oczywiście zapisać w postaci $e^{-r(T_M)T_M}$, gdzie $r(T_M)$ jest stopą wolną od ryzyka.

12.3. Związek capletów / floorletów z opcjami na obligacje zerokuponowe

Rozpatrzmy opcję sprzedaży obligacji zerokuponowej, która wypłaca jednostkowy nominal w chwili T_M . Opcja wygasając w chwili T , wypłaca

$$N_B \max(P_K - P(T), 0), \quad (12.6)$$

gdzie P_K jest ceną wykonania, $P(T)$ obserwowaną w chwili wygaśnięcia opcji ceną obligacji, a N_B jest nominałem opcji. Jeżeli cenę wykonania i cenę obligacji wyrazimy w terminach stóp procentowych, mianowicie

$$P_K = \frac{1}{1 + \Delta \cdot K} \quad \text{oraz} \quad P(T) = \frac{1}{1 + \Delta \cdot L},$$

gdzie $\Delta = \Delta(T, T_M)$ oraz $L = L(T, T_M)$, to po przekształceniu wyrażenia na wypłatę (12.6) otrzymamy następującą formułę

$$\frac{\max(L - K, 0) \cdot \Delta}{1 + \Delta \cdot L} \cdot N_B \cdot P_K,$$

która będzie identyczna z (12.1) w przypadku $\omega = 1$, czyli capleta, o ile $N = N_B P_K$. Analogiczny rezultat otrzymamy dla opcji kupna obligacji zerokuponowej i floorleta.

12.4. Cap / Floor

Cap / Floor to seria capletów / floorletów na stopy procentowe dla kolejnych jednakowych okresów depozytowych łącznie obejmujących czas trwania capa / floora, wszystkie z tą samą ceną wykonania K i jednakowym nominałem N . Standardowo capy / floory są kwotowane dla okresów czasu będących pełnymi krotnościami roku, przy czym stopą tych kontraktów jest 3M lub 6M stopa typu LIBOR.

Rozpatrzmy n -letni cap / floor na 3M stopę LIBOR. Ponieważ dla pierwszego 3M okresu stopa LIBOR jest ustalona przez rynek, n -letni cap / floor składa się z $4n - 1$ trzymiesięcznych capletów / floorletów. Podobnie, n -letni cap / floor na 6M stopę LIBOR składa się z $2n - 1$ sześciomiesięcznych capletów / floorletów. Cena capa / floora jest sumą cen poszczególnych (żyjących) capletów / floorletów. I tak, jeśli wycena odbywa się przed terminem zapadalności pierwszego capleta / floorleta, to

$$V_{\text{cap } nY} = \sum_{j=2}^{f \cdot n} V_{\text{caplet } j}, \quad (12.7)$$

gdzie f oznacza liczbę capletów / floorletów przypadającą na okres jednego roku.

Rynek kwotuje ceny capów / floorów podając wartość zmienności implikowanej $\bar{\sigma}(T, K)$, gdzie T oznacza długość kontraktu (w latach, to jest, $T = nY$) a K jest ceną wykonania. Jest to tak zwana płaska zmienność implikowana (ang. *flat implied volatility*). Ta wartość jest używana do obliczenia ceny capa / floora za pomocą wzoru (12.7), przy czym każdy caplet / floorlet wchodzący w skład jednego capa / floora jest wyceniany formułą (12.4) z tą samą wartością zmienności $\bar{\sigma}(T, K)$. Ceny gotówkowe capów i floorów są zwykle podawane jako procent nominału wyrażony w punktach bazowych (bp).

Mając do dyspozycji ceny (płaskie zmienności implikowane) dla serii capów / floorów o czasach trwania różniących się tenorem stopy (na przykład, każdy kolejny cap jest dłuższy od poprzedniego o 3M), można wyliczyć wartości zmienności implikowanej dla poszczególnych capletów / floorletów. Wartość zmienności implikowanej $\sigma(j, K)$ j -tego capleta / floorleta dla ceny wykonania K wyznaczamy z warunku

$$V_{\text{cap } j\Delta}(\bar{\sigma}(j\Delta, K)) = V_{\text{cap } (j-1)\Delta}(\bar{\sigma}((j-1)\Delta, K)) + V_{\text{caplet } j}(\sigma(j, K)), \quad (12.8)$$

gdzie Δ oznacza czas trwania capleta / floorleta. W rzeczywistości, rynek kwotuje capy / floory dla czasów trwania, które są pełnymi krotnościami roku i wówczas aby móc wyznaczyć zmienności implikowane $\sigma(j, K)$ korzystając z wzoru (12.8) trzeba przyjąć dodatkowe założenia, na przykład zinterpolować brakujące ceny capów / floorów zapadających pomiędzy pełnymi kolejnymi latami.

Ponieważ dla capletów i floorletów zachodzi związek (12.2), to dla capów i floorów mamy analogicznie

$$\text{kupiony cap} + \text{sprzedany floor} = \text{forward IRS (pay fixed)}, \quad (12.9)$$

gdzie kontrakt forward IRS zaczyna się w tej samej chwili czasu w której zapada pierwszy caplet / floorlet i kończy się w chwili w której teoretycznie byłaby płacona stopa LIBOR ostatniego capleta / floorleta. Ze związku (12.9) wynika natychmiast następujący **parytet cap – floor**

$$V_{\text{cap}} - V_{\text{floor}} = V_{\text{fwd IRS (pay fixed)}} = N \left(DF(T_1) - DF(T_M) - K \sum_{t=T_2}^{T_M} \Delta_t DF(t) \right), \quad (12.10)$$

gdzie T_1 i T_2 są odpowiednio początkiem i końcem pierwszego capleta / floorleta, T_M jest końcem ostatniego capleta / floorleta, a Δ_t oznacza długość okresu capleta / floorleta który wygasa w chwili t .

Collar jest strategią złożoną z kupionego capa z ceną wykonania K_{cap} i sprzedanego floora z ceną wykonania $K_{\text{floor}} < K_{\text{cap}}$, przy czym oba kontrakty opiewają na ten sam nominal. Kupując taką strategię inwestor zapewnia sobie finansowanie po stopie R nie większej niż K_{cap} ale jednocześnie by obniżyć koszt tego zabezpieczenia (to jest, koszt strategii collar) akceptuje, że poziom stopy po której się będzie finansował będzie wynosić co najmniej K_{floor} . Taki klient zwykle określa maksymalny poziom kosztu finansowania wyrażony stopą K_{cap} oraz koszt zabezpieczenia P_{hedge} i do tych wartości dobiera się cenę wykonania floora K_{floor} tak by

$$V_{\text{cap}}(K_{\text{cap}}) - V_{\text{floor}}(K_{\text{floor}}) = P_{\text{hedge}}.$$

Typowy collar jest tak konstruowany by w chwili jego zawarcia jego wartość wynosiła zero.

12.5. Binary cap / binary floor

Binarny caplet / floorlet wypłaca kwotę w chwili wygaśnięcia opcji T

$$\mathcal{H}(\omega(L - K)) \cdot \Delta \cdot N, \quad (12.11)$$

gdzie

- $\mathcal{H}(x) = 1$ jeżeli $x > 0$ oraz $\mathcal{H}(x) = 0$ jeżeli $x \leq 0$,
- $\omega = 1$ dla capleta i $\omega = -1$ dla floorleta,
- K jest ceną wykonania (określającą poziom stopy procentowej),
- $\Delta = \Delta(T, T_M)$ jest długością okresu depozytowego stopy $L = L(T, T_M)$,
- N jest nominałem opcji wyrażonym w walucie stopy L .

W modelu Blacka wycena binarnych capletów ($\omega = 1$) / floorletów ($\omega = -1$) dana jest wzorem

$$V = N DF(T) \Phi(\omega d_2) \Delta(T, T_M), \quad (12.12)$$

gdzie

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (12.13)$$

a $DF(T)$ jest czynnikiem, który dyskontuje z chwili T na chwilę bieżącą.

Binarny cap / floor jest serią pojedynczych capletów / floorletów i oczywiście cena tych kontraktów jest sumą poszczególnych opcji z których się one składają. Binarne capy / floory są najczęściej elementami składowymi finansowych produktów strukturalnych.

12.6. Swapcje – opcje na kontrakty IRS

Swapcja (ang. *swaption*) jest opcją na kontrakt IRS, który rozpocznie się w terminie wygaśnięcia opcji.

Swapcja charakteryzuje się dwoma parametrami czasowymi – pierwszy z nich oznacza termin wygaśnięcia (czas trwania) swapcji, a drugi to długość (tenor) kontraktu IRS będącego instrumentem podstawowym swapcji. W terminie wygaśnięcia, o ile będzie to korzystne dla posiadacza swapcji, wejdzie on w kontrakt IRS ze stopą określoną ceną wykonania opcji K . Drugą stroną kontraktu IRS będzie wystawca opcji. Są dwa rodzaje swapcji:

- *receiver's swaptions* – opcje na kontrakt IRS w którym (od strony posiadacza opcji) będziemy otrzymywać stałą stopę kontraktu IRS (stopę K) i płacić stopę zmienną typu LIBOR;

— *payer's swaptions* – opcje na kontrakt IRS w którym (od strony posiadacza opcji) będziemy płacić stałą stopę kontraktu IRS (stopę K) i otrzymywać stopę zmienną typu LIBOR. Jak wynika z określenia tych swapcji w chwili wygaśnięcia zachodzi następujący związek

$$\text{long payer's swaption} + \text{short receiver's swaption} = \text{pay fixed fwd IRS},$$

skąd otrzymujemy **parytet dla swapcji** w postaci

$$V_{\text{p.swap}} - V_{\text{r.swap}} = V_{\text{p.fwd irs}}(K), \quad (12.14)$$

gdzie $V_{\text{p.fwd irs}}(K)$ jest wartością w chwili wyceny kontraktu forward IRS, który płaci stałą stopą K i zaczyna się w chwili wygaśnięcia opcji.

Związek swapcji z opcjami na obligacje kuponowe

W chwili wygaśnięcia T wartość swapcji na jednostkę nominału kontraktu IRS wynosi

$$\max(V_{\text{irs}}(K), 0)$$

gdzie $V_{\text{irs}}(K)$ jest wartością w chwili T kontraktu IRS ze stopą K . Kontrakt IRS ze stopą K , w którym płacimy stopę stałą K , można (w sensie wyceny) uznać za kontrakt wymiany obligacji o stałym kuponie oprocentowanym K na obligację o zmiennym oprocentowaniu. Wartość obligacji o zmiennym kuponie na początku (każdego) okresu odsetkowego jest równa wartości nominalnej tej obligacji. W związku z tym, receiver's / payer's swapcja jest równoważna opcji kupna (call) / sprzedaży (put) obligacji o stałym kuponie K , której cena wykonania jest równa wartości nominalnej obligacji (swapcji).

Wycena swapcji

Rozpatrzmy payer's swaption o wartości nominalnej 1. Wówczas, wartość, w chwili T , kontraktu IRS będącego instrumentem podstawowym opcji wynosi

$$V_{\text{p.irs}}(K) = 1 - P_K, \quad (12.15)$$

gdzie P_K jest ceną obligacji, której kupon wynosi K . Z drugiej strony, kontrakty IRS zawierane w chwili T mają stopę $R(T)$ taką, że obligacja o kuponie $R(T)$ jest at par, to znaczy $P_{R(T)} = 1$. Zatem

$$V_{\text{p.irs}}(K) = P_{R(T)} - P_K = (R(T) - K) \sum_{j=1}^J \Delta_j DF_T(T_j), \quad (12.16)$$

gdzie Δ_j jest długością j -tego okresu odsetkowego nogi stałej kontraktu IRS, a $DF_T(T_j)$ czynnikiem, który dyskontuje z końca tego okresu T_j do chwili początkowej kontraktu IRS (według struktury stóp obowiązującej w chwili T). Z (12.16) wynika, że payer's swapcja będzie wykonywana jeżeli stopa kontraktów IRS w chwili wygaśnięcia opcji jest większa niż cena wykonania swapcji. Ponadto, wzór (12.16) pozwala nam uważać payer's swapcję za zestaw J opcji kupna na stopę $R(T)$ zapadalnych w chwili T o tej samej cenie wykonania K , wpłata których jest proporcjonalna do długości kolejnych okresów odsetkowych nogi stałej kontraktu IRS – dokładniej, wartość wypłaty j -tej takiej opcji w T wynosi

$$\max((R(T) - K), 0) \Delta_j DF_T(T_j). \quad (12.17)$$

Struktura wypłaty (12.17) jest niemal analogiczna jak wypłata capleta dana wzorem (12.1) dla $\omega = 1$.

Zatem, jeżeli założymy, że stopa $R(T)$ kontraktu IRS w chwili T ma rozkład log-normalny taki, że

— odchylenie standardowe $\ln(R(T))$ wynosi $\sigma\sqrt{T}$,

— wartość oczekiwana stopy $R(T)$ jest równa aktualnie obserwowanej stopie $F_0 = F_{\text{fwd irs}}(0, T)$ kontraktu forward IRS który zacznie się w T ,
to każdą z J opcji, które dają wypłatę payer's swapcji, można wycenić wzorem Blacka'76

$$DF(T_j)(F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))\Delta_j, \quad (12.18)$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{oraz} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad (12.19)$$

a $DF(T_j)$ jest czynnikiem, który dyskontuje z chwili T_j na chwilę bieżącą.

Tak więc **wartość payer's swapcji** wynosi

$$V_{\text{p.swap}} = \left(\sum_{j=1}^J DF(T_j) \Delta_j \right) \cdot (F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)). \quad (12.20a)$$

Analogicznie można pokazać, że **wartość receiver's swapcji** wynosi

$$V_{\text{r.swap}} = \left(\sum_{j=1}^J DF(T_j) \Delta_j \right) \cdot (-F_0\Phi(-d_1) + K\Phi(-d_2)). \quad (12.20b)$$

Wzory (12.20) możemy, podobnie jak w przypadku poprzednio omawianych opcji, zapisać jedną formułą – mianowicie wartość payer's ($\omega = 1$) / receiver's ($\omega = -1$) swapcji dana jest wzorem

$$V_{\text{swap}} = \left(\sum_{j=1}^J DF(T_j) \Delta_j \right) \cdot \omega \cdot (F_0\Phi(\omega d_1) - K\Phi(\omega d_2)). \quad (12.21)$$

Stopę kontraktu forward IRS, który zacznie się w chwili T i skończy się w T_J , obserwowaną w chwili wyceny swapcji obliczamy następującym wzorem:

$$F_0 = \frac{DF(T) - DF(T_J)}{\sum_{j=1}^J DF(T_j) \Delta_j}. \quad (12.22)$$

Rynek kwotuje swapcje dla głównych walut (USD, EUR, GBP, JPY) podając wartości zmienności σ , które wstawione do formuł Blacka'76 prowadzą do ceny gotówkowej. Kwotuje się głównie swapcje ATM, to znaczy swapcje z cenami wykonania równymi stopom odpowiednich kontraktów forward IRS.

12.7. Niespójność modelu Blacka'76

Model Blacka'76 zakłada, że instrument podstawowy opcji w chwili wygaśnięcia opcji ma rozkład log-normalny. W przypadku

— wyceny capów / floorów model zakłada, że stopy forward mają rozkład log-normalny,

— wyceny swapcji model zakłada, że stopy kontraktów IRS mają rozkład log-normalny.

Te dwa założenia są wzajemnie niespójne (sprzeczne), bowiem, jak wiemy (patrz Wykład 4), stopa kontraktu IRS jest w przybliżeniu średnią arytmetyczną stóp forward i jeśli te ostatnie mają rozkład log-normalny, to, na ogół, rozkład stopy kontraktu IRS nie jest log-normalny.

12.8. Finansowe produkty strukturalne z wbudowanymi opcjami na stopę procentową

Kredyt o zmiennej ale ograniczonej z góry stopie procentowej

Rozpatrzmy kredyt, w którym kredytobiorca płaci co ustalony okres (na przykład co 3M) odsetki obliczone według zmiennej stopy rynkowej typu LIBOR. Kredytobiorca chce ograniczyć z góry koszt tego kredytu (efektywnie płaconą stopę od pożyczonego kapitału). Niech K oznacza maksymalny poziom stopy rynkowej jaki chce on zaakceptować. W tym celu kupuje capa z ceną wykonania K o strukturze zgodnej z zaciągniętym kredytem (caplety mają czas trwania taki sam jak okresy odsetkowe kredytu) z nominałem identycznym jak kwota pożyczonego kapitału. Zawarty kontrakt cap będzie rekompensował kredytobiorcy potencjalnie wyższe koszty obsługi kredytu. Niech V_{cap} będzie ceną tego capa (na jednostkę nominału). Aby zobaczyć jaki jest efektywny koszt tego kredytu z uwzględnieniem zabezpieczenia, rozkładamy koszt capa na strumień dodatkowych płatności płaconych razem z odsetkami od kredytu. Ten strumień wyrazimy w postaci marży m powyżej płaconej stopy, a więc kredytobiorca płaci

$$\begin{aligned} &\text{LIBOR} + m \text{ jeżeli } \text{LIBOR} < K \\ &\text{lub} \\ &K + m \text{ jeżeli } \text{LIBOR} > K. \end{aligned}$$

Jeżeli wystawcą capa jest kredytodawca, to istotnie, zamiast przyjmować premię za capa w chwili zawierania umowy, może on rozłożyć premię capa na strumień płatności marżowych, które będzie otrzymywał razem z odsetkami. Wielkość marży m spełnia równanie

$$V_{\text{cap}} = m \left(\sum_{j=1}^J DF(T_j) \Delta_j \right), \quad (12.23)$$

gdzie Δ_j jest długością j -tego okresu odsetkowego kredytu (czasu trwania j -tego capletu), a T_j są terminami płatności odsetkowych. Tak obliczona marża m jest funkcją poziomu zabezpieczenia K .

Musimy obsłużyć jeszcze mały niuans. Jak wiemy, konstrukcja capa zakłada, że pierwszy caplet zaczyna się od pierwszego *przyszłego* okresu depozytowego (odsetkowego) stopy, która jest instrumentem podstawowym capa, czyli że *bieżący* okres nie jest objęty zabezpieczeniem. Wówczas, aby usunąć to niedopasowanie między strukturą kredytu a strukturą capa, do struktury capa dołącza się dodatkowego capleta na ten pierwszy *bieżący* okres o znanym już rozliczeniu, którego wartość bieżąca włącza się do ceny capa. Dalej, marżę m obliczymy z wzoru (12.23), gdzie w cenie capa po lewej stronie uwzględniono wartość bieżącą rozliczenia dodatkowego początkowego capleta.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że opisując powyższą strukturę zabezpieczania kredytu zakładaliśmy, że caplety wchodzące w skład tej struktury dają (niezdykontowane stopą LIBOR) wypłaty na końcu okresów depozytowych stopy LIBOR, a nie na początku, jak to opisaliśmy w (12.1). Ta modyfikacja capa nie wpływa na wycenę capa ani obliczenie marży.

Inverse floating rate note (reverse floater, bull floating rate note)

Inverse floater to papier wartościowy który płaci kupony liczone według stopy

$$K - \text{LIBOR}, \quad (12.24)$$

gdzie K jest ustalonym poziomem stopy procentowej, zwykle w chwili emisji papieru istotnie większym niż bieżący poziom stóp rynkowych LIBOR, z dodatkowym warunkiem, że stopa (12.24) nie może stać się ujemna – to znaczy w takiej sytuacji kupon jest zerowy. Jakie instrumenty pochodne są wbudowane w tą strukturę?

Range accrual note

Range accrual note to papier wartościowy który płaci kupon liczony według stopy obliczonej następującym algorytmem

$$\frac{d}{D} \cdot R, \quad (12.25)$$

gdzie

- R jest z góry ustaloną stopą tego papieru (ta stopa może być różna dla różnych okresów odsetkowych),
- D jest liczbą dni handlowych w okresie odsetkowym,
- d jest liczbą dni tego okresu odsetkowego w których stopa LIBOR miała wartość w ustalonym zakresie, tzn. kiedy

$$R_d \leq \text{LIBOR} \leq R_u \quad (12.26)$$

dla pewnych ustalonych $R_d < R_u$.

Jakie instrumenty pochodne są wbudowane w tę strukturę?

Uwaga 12.1. W innym wariantcie Range accrual note kupon liczony jest od stopy

$$\frac{d}{D} \cdot (\text{LIBOR}_{fix} + m), \quad (12.27)$$

gdzie

- LIBOR_{fix} jest stopą LIBOR ustaloną na początku okresu odsetkowego, niekoniecznie taką samą, która jest używana do sprawdzania warunku (12.26) celem wyznaczenia liczby d – na przykład, jeśli okresy odsetkowe są sześciomiesięczne to LIBOR_{fix} jest sześciomiesięczną stopą LIBOR, a stopa LIBOR używana w warunku (12.26) jest stopą trzymiesięczną,
- m jest marżą addytywną.

W tym wariantcie wycena jest istotnie trudniejsza niż w wariantcie ze stałą stopą. Zwykle musimy się posilkować metodami przybliżonymi, na przykład metodami Monte Carlo wraz z odpowiednio skalibrowanym modelem stóp procentowych.

12.9. Zagadnienia i zadania na Ćwiczenia

Ćwiczenie 12.1. Cena capleta 6x9 z górnym poziomem stopy 5% wynosi 15 bp. Oblicz cenę floorleta 6x9 z dolnym poziomem stopy 5% wiedząc, że stopa 6M LIBOR wynosi 4.5% a kwotowanie FRA6x9 wynosi 5.5%. Dla uproszczenia obliczeń można przyjąć, że stopy są na bazie 30/360.

Ćwiczenie 12.2. Firma wuwu.com może zaciągnąć kredyt na okres 3 lat w którym będzie płacić półroczne odsetki od pożyczonej kwoty według stopy rynkowej zmiennej LIBOR plus 150 bp (kwota kredytu będzie spłacona na końcu). Ponieważ firma wuwu.com chce uchronić się przed wysokimi kosztami tego kredytu, to jest, nie chce płacić więcej niż 6% w przypadku wzrostu stóp procentowych, bank, w którym firma zaciąga kredyt, proponuje jej kupno trzyletniego kontraktu cap na stopę 6M LIBOR. Bieżąca struktura stóp procentowych (kapitalizowanych w sposób ciągły) jest płaska i stopy te wynoszą 4%. Zmienność trzyletnich kontraktów cap wynosi 20%. Za wystawienie tej opcji firmie wuwu.com bank zamierza pobrać opłatę w formie prowizji. Oblicz wartość tej prowizji.

Ćwiczenie 12.3 (IRS z ograniczoną stopą zmienną). Rozpatrzmy n -letni kontrakt wymiany procentowej, w którym wysokość stopy zmiennej jest ograniczona z góry. Noga stała płaci odsetki co rok, a noga zmienna co sześć miesięcy. Odsetki nogi zmiennej (na jednostkę nominalu) za i -ty sześciomiesięczny okres odsetkowy w tym kontrakcie wynoszą

$$\Delta_i \min(L_i, L_{\max}),$$

gdzie L_i jest 6M stopą rynkową (typu LIBOR) ustaloną na początku okresu odsetkowego, Δ_i jest długością tego okresu, a $L_{\max}$ ustaloną kontraktem maksymalną wartością płaconej stopy rynkowej. Stopa R nogi stałej tego kontraktu jest tak dobierana, by w chwili rozpoczęcia kontraktu wartość kontraktu wynosiła zero. Oznaczmy ten kontrakt symbolem IRS*.

- (a) Przedstaw kontrakt IRS* jako portfel złożony pewnego kontraktu IRS oraz odpowiedniego instrumentu pochodnego.
- (b) Wyprowadź formułę na wartość stopy R kontraktu IRS* jako funkcję od stopy R_0 standardowego kontraktu IRS (o takim samym czasie trwania i takiej samej strukturze okresów odsetkowych jak w kontrakcie IRS*), ceny odpowiedniego instrumentu pochodnego (patrz (a)), bieżącej wartości L_0 sześciomiesięcznej stopy rynkowej oraz bieżącej wartości n -letniej zerokuponowej stopy procentowej $R(nY)$.
- (c) Wykonaj obliczenia dla następujących danych liczbowych:
 - $n = 3$ (to jest dla trzyletniego kontraktu),
 - stopa standardowego kontraktu IRS 3Y $R_0 = 6\%$,
 - 6M stopa (typu LIBOR) $L_0 = 5.70\%$,
 - górny poziom stopy $L_{\max} = 5.50\%$,
 - $DF(3Y) = 0.84$,
 - caps (ceny w bp, dla danych cen wykonania)

$$\begin{pmatrix} & 5.00 & 5.50 & 6.00 \\ 3Y & 210 & 150 & 100 \end{pmatrix}$$

- floors (ceny w bp, dla danych cen wykonania)

$$\begin{pmatrix} & 5.00 & 5.50 & 6.00 \\ 3Y & 38 & 78 & 138 \end{pmatrix}$$

Ćwiczenie 12.4. Bieżąca struktura stóp procentowych (kapitalizowanych w sposób ciągły) jest płaska i stopy te wynoszą 5%.

- (a) Oblicz stopę R pięcioletniego kontraktu IRS o rocznych okresach odsetkowych nogi stałej.
- (b) Oblicz premię, którą Bank powinien pobrać od klienta zawierającego z Bankiem kontrakt wymiany procentowej IRS, w którym Bank będzie płacił stałą stopę w wysokości R (obliczoną w punkcie (a)) rocznie przez 5 lat, za danie klientowi możliwości bezkosztowego
 - (i) przerwania kontraktu po 3 latach,
 - (ii) wydłużenia kontraktu w terminie zapadalności z tą samą stopą o kolejne 2 lata.

Przyjmij, że zmienność swapcji wynosi 20% niezależnie od terminu zapadalności i tenoru kontaktu swap, który jest instrumentem podstawowym swapcji.

Ćwiczenie 12.5. Oblicz cenę trzyletniej opcji kupna po cenie nominalnej pięcioletniej obligacji, która będzie płać rocznie kupon w wysokości 5%. Bieżąca struktura stóp procentowych (kapitalizowanych w sposób ciągły) jest płaska i stopy te wynoszą 5%. Przyjmij, że zmienność trzyletnich swapcji wynosi 20% niezależnie od tenoru kontaktu swap, który jest instrumentem podstawowym swapcji.

Literatura

- [1] J. C. Hull. *Futures, Options and Other Derivatives*. Prentice Hall, 2002.
- [2] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer, 2004.