Matematyka stosowana

Modele matematyczne rynków instrumentów pochodnych I

Jacek Jakubowski
jakub@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski, 2011

Streszczenie. Wykład jest wprowadzeniem do modelowania rynków finansowych. Zostanie zdefiniowany model rynku, wprowadzimy pojęcie portfela replikującego, za pomocą którego rozwiążemy zagadnienie wyceny i zabezpieczenia dowolnej wypłaty osiągalnej, w szczególności związanej z opcjami, także amerykańskimi. Wprowadzimy pojęcie miary martyngałowej - podstawowego narzędzia technicznego pomagającego w badaniu rynku. Rozważamy zagadnienie wyceny wypłat nieosiągalnych, wprowadzimy pojęcie ceny kupującego i sprzedającego. Zostanie także skonstruowany rynek kontraktów terminowych futures i opisana wycena instrumentów pochodnych na tym rynku. Zaczniemy od modeli z czasem dyskretnym, a następnie przedstawimy modele z czasem ciągłym na przykładzie rynku Blacka-Scholesa

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=ip1

(może zawierać dodatkowe materiały)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

1. Wprowadzenie . . . 5
1.1. Wstęp . . . 5
1.2. Ogólny opis rynku . . . 6
1.3. Opcje . . . 7
1.4. Rynek doskonały . . . 8
2. Rynek jednookresowy dwustanowy . . . 9
2.1. Model rynku jednookresowego dwustanowego . . . 9
2.2. Problem wyceny. Portfel replikujący, arbitraż. . . . 9
2.3. Wycena za pomocą miary martyngałowej. . . . 15
2.4. Kontrakt terminowy forward . . . 18
2.5. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 19
3. Rynki skończone . . . 24
3.1. Model rynku, portfel . . . 24
3.2. Arbitraż . . . 27
3.3. Wypłata europejska i jej wycena . . . 29
3.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 31
4. Miara martyngałowa dla rynku skończonego . . . 33
4.1. Dyskontowanie . . . 33
4.2. Miara martyngałowa, arbitraż . . . 34
4.3. Wycena, zupełność rynku, kontrakty forward . . . 37
4.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 42
5. Model dwumianowy (Coxa-Rossa-Rubinsteina) . . . 46
5.1. Model CRR . . . 46
5.2. Problemu maksymalizacji oczekiwanej użyteczności . . . 50
5.3. Aproksymacje za pomocą modeli dwumianowych . . . 52
5.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 54
6. Uogólnienia ceny arbitrażowej . . . 56
6.1. Cena sprzedającego i kupującego . . . 56
6.2. Uogólniona cena arbitrażowa . . . 59
6.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 60
7. Opcje amerykańskie . . . 62
7.1. Opcje amerykańskie, wycena, zabezpieczenie . . . 62
7.2. Porównanie opcji amerykańskich i europejskich . . . 65
7.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 66
8. Rynek kontraktów terminowych futures . . . 69
8.1. Opis kontraktów terminowych futures . . . 69
8.2. Model rynku . . . 70
8.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 73
9. Model Blacka-Scholesa . . . 76
9.1. Aksjomaty procesu cen . . . 76
9.2. Klasyczny model Blacka-Scholesa . . . 77
9.3. Rynkowa cena ryzyka. . . . 83
9.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia . . . 83

10. Wycena i zabezpieczenie w modelu Blacka-Scholesa 86
10.1. Wycena ogólnej wypłaty 86
10.2. Wycena opcji europejskich 90
10.3. Analiza wrażliwości cen opcji 92
10.4. Szukanie współczynnika zmienności ceny akcji. 93
10.5. Opcje na instrument bazowy płacący dywidendy. Opcje walutowe 95
10.6. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia 98
11. Opcje amerykańskie i egzotyczne w modelu Blacka-Scholesa 102
11.1. Opcje amerykańskie 102
11.2. Opcje egzotyczne 106
11.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia 109
12. Rynek Blacka-Scholesa kontraktów futures 112
12.1. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia 114
Literatura 115

1. Wprowadzenie

1.1. Wstęp

Prezentowany cykl wykładów stanowi elementarne wprowadzenie do modelowania rynków finansowych, do wyceny instrumentów pochodnych oraz zagadnień zabezpieczania wypłat. Celem jest przedstawienie podstawowych idei matematyki finansowej i rządzących nią mechanizmów. Zamierzam pokazać jak problemy praktyczne związane z wyceną aktywów bazowych i instrumentów pochodnych (a więc takich, których cena zależy od cen aktywów podstawowych) oraz zabezpieczeniem wypłat zapisać w języku matematyki, a następnie jak, korzystając z aparatu matematycznego, problemy te rozwiązać. Opis rynku, jak i praktyczne jego działanie, przedstawiono tylko w stopniu niezbędnym do konstrukcji modelu.

Przy badaniu instrumentów pochodnych skupimy się na wycenie i replikacji wypłat dających losowy zysk w ustalonej chwili końcowej w przyszłości. Przykładami takich wypłat są opcje europejskie i kontrakty terminowe. Korzystając z metod stochastycznych (teoria martyngałów i analiza stochastyczna) rozwiążemy postawione wyżej pytania.

W pierwszym rozdziale zostały opisane rynki finansowe i omówiono ważniejsze klasy instrumentów pochodnych. W drugim przeanalizowano najprostszy model rynku — model rynku jednookresowego dwustanowego.

W części drugiej, składającej się z 6 rozdziałów szczegółowo omówiono rynki skończone, czyli rynki z czasem dyskretnym i ze skończonym zbiorem stanów (scenariuszy). Na przykładzie tego rynku widać dobrze sens ekonomiczny założeń i myśl przewodnią koncepcji wyceny i replikacji. Do zrozumienia tej części skryptu wystarczająca jest znajomość elementarnej teorii martyngałów, np. z książki Jakubowskiego i Sztencla *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa* [J-Sz].

Część trzecia wykładów opisuje rynki z czasem ciągłym. Przedstawiono w niej klasyczny model Blacka-Scholesa w kontekście ogólnej teorii rynku z czasem ciągłym. Zostały m.in. wyprowadzone wzory Blacka-Scholesa. Omówiono metody szukania współczynnika zmienności σ. Przedstawiono modele zmienności, opcje amerykańskie, opcje egzotyczne, rynek kontraktów terminowych futures (wzory Blacka).

Wykłady bazują na podręczniku J. Jakubowskiego "Modelowanie rynków finansowych". Wybrana literatura składająca się z artykułów fundamentalnych dla dziedziny i wybranych podręczników jest podana w bibliografii umieszczonej na końcu prezentowanego cyklu wykładów. Jest to wybór subiektywny i niepełny, gdyż matematyka finansowa jest obecnie bardzo modną dziedziną i co roku powstaje wiele nowych podręczników i prac. Więcej informacji o praktycznym aspekcie działania rynków zawierają monografie Hulla *Options, Futures, and Other Derivatives* [Hull] oraz Jakubowskiego, Palczewskiego, Rutkowskiego i Stettnera *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne* [J-PRS]. Naturalnym uogólnieniem rynku skończonego jest odrzucenie założenia o skończonej liczbie scenariuszy. Otrzymujemy rynek z czasem dyskretnym, jednak do dowodów podstawowych faktów trzeba używać znacznie bardziej zaawansowanych technik. Czytelnik może zapoznać się z tym uogólnieniem w trzecim rozdziale książki [J-PRS] lub w książce Föllmera i Schieda *Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time* [Fol-S]. Dla opisu rynków z czasem ciągłym można polecić m.in. książki Shiryaeva Essentials of Stochastic Finance [Shi], Shrevea Stochastic calculus for finance II. Continuous-time models [Shreve].

1.2. Ogólny opis rynku

Istnieje wiele różnych rodzajów rynków finansowych, w zależności od instrumentów finansowych, którymi się na nich handluje. Najważniejsze to:
- Rynek kapitałowy (papiery wartościowe, akcje)
- Rynek pieniężny (kasowy) – instrumenty dłużne (lokaty/depozyty, bony, obligacje)
- Rynek instrumentów pochodnych
- Rynek walutowy – transakcje wymiany walut

Rynki możemy też podzielić na
— giełda, miejsce gdzie dokonuje się obrót akcjami,
— rynek obligacji,
— rynek walutowy,
— giełda towarowa — obejmuje m.in. takie towary, jak miedź, srebro, zboże, ropa naftowa.

Na wyżej wspomnianych rynkach handluje się papierami wartościowymi dwojakiego rodzaju: aktywami pierwotnymi i aktywami pochodnymi.

Aktywa, którymi bezpośrednio handluje się na rynku nazywać będziemy instrumentami pierwotnymi (aktywami, papierami). Używa się również terminu instrumenty bazowe. My skupimy się głównie na akcjach.

Akcje to papiery wartościowe dające posiadaczowi prawo do dywidendy (wypłaty z zysku) oraz do części majątku firmy. Ich wartość odzwierciedla rynkowe oczekiwania inwestorów co do prawdopodobnych przyszłych dywidend i przyszłego wzrostu kapitału firmy.

Aktywa pochodne definiuje się jako dowolne aktywa, których cena zależy od cen aktywów podstawowych. Zatem papiery pochodne to takie szczególne papiery wartościowe, których wartość jest ściśle związana z wahaniami ceny czynnika (instrumentu) bazowego. Czynnikiem owym mogą być np. ceny akcji, ceny obligacji rządowych, ceny obligacji hipotecznych, poziom stóp procentowych, giełdowe kursy walut.

Dwa podstawowe typy aktywów pochodnych to:

— Opcje: dają one posiadaczowi opcji *prawo* do wykonania opcji (wykonanie nie jest obligatoryjne). Na przykład opcja kupna akcji ustalonej firmy daje prawo do kupna akcji tej firmy w ściśle określonym terminie (np. za 2 miesiące) i po ściśle określonej cenie. Gdy ceny akcji wzrosną ponad tę określoną cenę, posiadacz opcji kupna korzysta ze swoich praw i wykonuje opcję zyskując na różnicy. Gdy ceny spadną poniżej ustalonego poziomu, opcje stają się bezwartościowe — posiadacz opcji nie wykonuje opcji.
— Kontrakty: obie strony transakcji *muszą* wypełnić swoje zobowiązanie.

Na rynkach finansowych można rozróżnić trzy podstawowe kategorie inwestorów, dzieląc ich według kryterium celu jaki chcą osiągnąć wchodząc na rynek:

1. Arbitrażyści, a więc inwestorzy, którzy chcą osiągnąć natychmiastowy zysk (zatem bez ryzyka zajścia niekorzystnego scenariusza mogącego zmienić ceny w przyszłości). Wychwytują oni i natychmiast wykorzystują wszelkie różnice cen instrumentów na rynku, które dają możliwości zarobku.
2. Inwestorzy, którzy chcą się zabezpieczyć przed niekorzystnymi zmianami cen na rynku.
3. Inwestorzy, którzy wchodzą na rynek chcąc zarobić więcej niż inwestując w lokatę bankową.

My zajmiemy się trzema rodzajami aktywów pochodnych, a mianowicie opcjami oraz kontraktami terminowymi forward i futures. Teraz zajmiemy się opisem opcji, kontrakty terminowe opiszemy dokładniej, gdy będziemy je wyceniać.

1.3. Opcje

Jak juz mówilismy, opcja jest to umowa między dwoma podmiotami.

Opcje *kupna* (*call*) dają posiadaczowi **prawo** do kupienia określonego w umowie aktywa w ustalonej chwili lub przez ustalony okres czasu za ustaloną cenę. Opcje *sprzedaży* (*put*) dają posiadaczowi **prawo** do sprzedaży określonego w umowie aktywa w ustalonej chwili (względnie przed ustalonym momentem) za ustaloną cenę.

Opcje mogą być wystawiane na akcje, indeksy akcji, towary, waluty obce, instrumenty dłużne, kontrakty terminowe itp. (możliwe są także opcje o charakterze zbliżonym do gry hazardowej, na przykład wystawione na warunki pogodowe). Opcje zawsze rozlicza się pieniężnie. Pierwszym elementem jaki opisuje się przy definiowaniu opcji jest *cena wykonania*. W kontrakcie kupna odnosi się ona do ceny, jaką płaci nabywca za aktywo, jeśli wykorzystuje swoje prawo do kupna. W kontrakcie sprzedaży jest to cena, za jaką właściciel opcji sprzedaje aktywo, jeśli wykorzystuje swoje prawo. Cena ta jest ustalana w chwili wystawienia opcji i nie podlega zmianie. Skorzystanie z prawa do zakupu lub sprzedaży określa się mianem *wykonania* lub *rozliczenia* opcji.

Opcja jest ważna do momentu wygaśnięcia. Termin wykonania opcji jest dokładnie zdefiniowany w kontrakcie. Przykładowo, jest równy momentowi wygaśnięcia w przypadku tzw. opcji *europejskich*, a tzw. opcje *amerykańskie* można wykonać w dowolnej chwili aż do momentu wygaśnięcia.

Opcja jest umową, w której występują dwie strony: wystawiający opcję (*writer*) i posiadacz opcji (*holder*). Posiadacz opcji dysponuje prawem, za które musi zapłacić wystawiającemu. Cena opcji, nazywana premią (*option premium*, *option price*) jest ceną rynkową, zmieniającą się w czasie. Dla wielu inwestowanie w opcje jest formą zabezpieczenia przed niekorzystnym ruchem cen, a więc jest swoistą polisą ubezpieczeniową. Opcja kupna zabezpiecza jej posiadacza, który chce w przyszłości kupić dany instrument finansowy, przed skutkami wzrostu cen ponad ustalony poziom — cena wykonania jest maksymalną ceną po jakiej posiadacz opcji kupna kupi dany instrument finansowy. Opcja sprzedaży zabezpiecza jej posiadacza przed spadkiem cen aktywa bazowego poniżej pewnego poziomu; ten poziom to znów cena wykonania. Rozważmy opcje europejskie. Zaczniemy od europejskiej opcji kupna, czyli opcji dającej prawo do zakupu aktywa w chwili T za ustaloną z góry cenę K. Niech S_T oznacza cenę aktywa w chwili T. Jeśli $S_T > K$, to w chwili T posiadacz europejskiej opcji kupna realizuje ją i otrzymuje $S_T - K$, a gdy $S_T \geqslant K$, to nic nie robi. W rezultacie otrzymuje wypłatę (*payoff*), którą można zapisać w postaci:

$$g(S_T) = \begin{cases} S_T - K, & \text{gdy } S_T > K, \\ 0, & \text{gdy } S_T \leqslant K, \end{cases} \tag{1.1}$$

czyli

$$g(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+. \tag{1.2}$$

Rozumując analogicznie otrzymujemy wzór opisujący wypłatę dla posiadacza europejskiej opcji sprzedaży:

$$h(S_T) = (K - S_T)^+. \tag{1.3}$$

Stąd widać, że wypłaty dla europejskich opcji kupna i sprzedaży spełniają prostą, acz pożyteczną równość:

$$g(S_T) - h(S_T) = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K. \tag{1.4}$$

Tożsamość ta przyda nam się przy obliczaniu cen opcji. Wiemy, ile można uzyskać posiadając opcje europejskie. Powstaje pytanie, ile powinniśmy zapłacić za opcje? W dalszej części spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czy można wycenić dowolną wypłatę w chwili T. Jeśli tak, to w jaki sposób i jaka powinna być cena? Gdy ograniczymy się do opcji, powstaje problem: czy można wycenić opcję, a jeśli tak, to za ile należy sprzedawać taki kontrakt? Zatem

1. Ile powinien nabywca zapłacić za opcję? Innymi słowy, ile powinien kosztować w chwili $t = 0$ instrument dający losową wypłatę $(S_T - K)^+$ w chwili T. Jest to problem wyceny opcji.
2. Jak wystawca opcji może zabezpieczyć się przed losową stratą w chwili T, którą by poniósł nie podejmując żadnych działań po sprzedaży opcji? Innymi słowy, w jaki sposób wystawca opcji powinien wygenerować wielkość $(S_T - K)^+$ w chwili T, dysponując zapłatą za opcję? Zagadnienie to możemy określić jako problem zabezpieczenia opcji (*hedging*).

W dalszej części omówimy także opcje o innych wypłatach i innych możliwych momentach wypłat tzw. opcje egzotyczne.

1.4. Rynek doskonały

Przyjmujemy założenie, obowiązujące w całym cyklu wykładów, że rynek, na którym chcemy wycenić ten kontrakt jest rynkiem idealnym (doskonałym), czyli:

— oprocentowanie kredytów i depozytów bankowych jest jednakowe (założenie to nieźle opisuje sytuację dużych dealerów),
— inwestorzy nie ponoszą żadnych kosztów, tj. kosztów transakcji, kosztów prowizji, nie płacą podatków, itp.,
— nie ma ograniczeń w dostępie do kredytów, wysokość kredytów udzielanych pojedynczemu inwestorowi jest nieograniczona,
— wszystkie operacje są realizowane natychmiast,
— rynek jest płynny, tj. możemy kupić lub sprzedać dowolną liczbę aktywów,
— dostęp do informacji jest taki sam dla wszystkich inwestorów,
— uczestnicy rynku są małymi inwestorami, ich samodzielne działanie na rynku nie zmienia cen.

Są to minimalne założenia, przy których można modelować, w miarę prosto, zachowanie rynku. W rzeczywistości ceny obliczone w takim modelu są korygowane, by dopasować je do rynku. Na przykład, dodanie do wyliczonej ceny prowizji pokrywającej koszty powoduje ominięcie modelowego założenia, że inwestorzy nie ponoszą żadnych kosztów. Najbardziej kontrowersyjne jest założenie, mówiące że nie ma ograniczeń w dostępie do kredytów, ale przy opisie dopuszczalnych strategii inwestycyjnych (a więc sposobu postępowania inwestora) wyklucza się możliwość nieograniczonego kredytu nakładając ograniczenie na całkowitą wartość strategii. Konstruowane są też modele celowo opuszczające niektóre z założeń np. założenie, że dostęp do informacji jest taki sam dla wszystkich inwestorów, ale wymagają one zastosowania znacznie bardziej zaawansowanych metod analizy stochastycznej niż używane podczas tego wykładu.

2. Rynek jednookresowy dwustanowy

2.1. Model rynku jednookresowego dwustanowego

Zaczniemy od odpowiedzi na postawione w rozdziale I pytania o wycenę i zabezpieczenie na przykładzie najprostszego rynku finansowego. Jest to rynku jednookresowy dwustanowy. Na tym rynku transakcje odbywają się w dwu chwilach: 0 i T oraz są możliwe dwa scenariusze wypadków, zatem przestrzeń zdarzeń elementarnych to $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Zwykle umawiamy się, że ω_1 oznacza sytuację interpretowaną jako korzystna, zaś ω_2 jako niekorzystna. Ponadto $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, a prawdopodobieństwo P (tzw. prawdopodobieństwo rzeczywiste) jest takie, że $P(\{\omega_1\}) = p > 0$, $P(\{\omega_2\}) = 1 - p > 0$.

Na rynku istnieją dwa papiery wartościowe: jeden ryzykowny (np. akcje) i drugi pozbawiony ryzyka — inwestycja polegająca na włożeniu pieniędzy na rachunek bankowy. Ryzyko rozumiemy tu jako niemożność przewidzenia ceny w przyszłości, zależy ona od zajścia konkretnego scenariusza. Niech:

S_t oznacza cenę papieru ryzykownego (za jedną jednostkę) w chwili t,

B_t oznacza cenę papieru bez ryzyka (za jedną jednostkę) w chwili t,

gdzie $t \in \{0, T\}$. Zakładamy, że stopa procentowa jest stała i nieujemna, zatem wynosi r ($r \geqslant 0$) w okresie czasu od 0 do T, czyli w naszym przypadku mamy

$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + r. \tag{2.1}$$

Natomiast

$$S_0 = s > 0, \qquad S_T(\omega) = \begin{cases} S^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

bowiem S_T przyjmuje dwie wartości, gdyż mamy do czynienia z dwoma scenariuszami. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $S^u > S^d$ (dlatego ω_1 nazwaliśmy scenariuszem korzystnym). Cenę S_T możemy zapisać w innej, przydatnej czasami postaci:

$$S_T = S_0 Z \ = s\, Z, \tag{2.3}$$

gdzie $Z - 1$ wskazuje, o ile procent zmieniła się cena początkowa,

$$Z\ (\omega) = \begin{cases} u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ d, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

2.2. Problem wyceny. Portfel replikujący, arbitraż.

Pierwsza próba wyceny kontraktu związana jest z wykorzystaniem metod matematyki ubezpieczeniowej. Zaprezentujemy ją na przykładzie.

Przykład 2.1. Aktywo ryzykowne kosztuje $S_0 = 3/2$ w chwili $t = 0$. Zakładamy, że możliwe (i jednakowo prawdopodobne) są dwa scenariusze wydarzeń do chwili T; cena aktywa ryzykownego w chwili $T = 1$ może wynieść $S_1(\omega_1) = 10$ lub $S_1(\omega_2) = 2$. Wiemy także, że cena aktywa bez ryzyka jest równa $B_0 = 1$ na początku okresu i $B_1 = 2$ na końcu. Interesuje nas, jak wycenić opcję kupna dającą wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 5$.

a) Skorzystamy z metod matematyki ubezpieczeniowej. Dla ustalonego scenariusza wartość dzisiejsza strumienia pieniędzy jest równa sumie zdyskontowanych przepływów. Zatem możemy przypuszczać, że cena opcji jest wartością obecną opcji, a tę liczymy jako wartość oczekiwaną zdyskontowanej wypłaty. Wobec tego cena opcji C_0 jest równa

$$C_0 = \frac{B_0}{B_1} E(C_1) = \frac{1}{2}[0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 0] = 5/4,$$

ponieważ $C_1(\omega_1) = 5$ i $C_1(\omega_2) = 0$.

Tak wyliczona cena opcji jest równa 5/4, ale nikt rozsądny nie będzie kupował opcji za tę cenę, gdyż lepiej kupić za te pieniądze 5/6 akcji. Wynika to z faktu, że gdy cena akcji wzrośnie, to 5/6 akcji jest warte 50/6, a opcja daje wypłatę 5, a gdy cena akcji wynosi 2, to opcja jest bezwartościowa. Inwestycja w akcje daje zawsze większy zysk niż opcja. Przy tej wycenie na rynku pojawiła się możliwość uzyskania zysku bez ryzyka. Sprzedajemy opcje i za uzyskane pieniądze kupujemy akcje. Nie zainwestowaliśmy żadnych własnych pieniędzy, a w chwili 1 mamy pewny zysk.

b) Poprzednia sytuacja wynikła z przyjęcia założenia, że oba scenariusze wydarzeń są równoprawdopodobne. Załóżmy, że scenariusze mają różne szanse realizacji. Niech scenariusz niekorzystny ma 3 razy większe szanse zajścia. Wtedy $P(\{\omega_1\}) = 1/4$, $P(\{\omega_2\}) = 3/4$ i

$$C_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} \cdot 5 + 0\right] = \frac{5}{8}.$$

Jeśli inny inwestor będzie miał inne wyobrażenie o rzeczywistości i przyjmie na przykład, że $P(\{\omega_1\}) = 1/5$, to wtedy $C_0 = 1/2$.

Tu oczywiście widać, że tak wyznaczona wielkość zależy od wyboru prawdopodobieństwa P, zatem od oszacowania rynku przez inwestora. Gdy dla innego inwestora oszacowanie szans zmian na rynku P jest inne, to i wartość zdyskontowana wypłaty będzie inna. Która wielkość uznać za cenę? Czym jest cena?

Zajmiemy się teraz znalezieniem właściwego sposobu wyceny opcji. Chcemy wycenić je w zgodzie z cenami aktywa bazowego danymi przez rynek, a więc szukamy ceny opcji w terminach cen rynkowych aktywa bazowego. Jak już zauważyliśmy, opcję europejską można utożsamiać z wypłatą. Od tej pory każde aktywo pochodne będziemy utożsamiali z wypłatą X generowaną przez to aktywo. Wypłata zależy od scenariusza, więc X jest zmienną losową.

Definicja 2.1. Dowolną zmienną losową określoną na Ω nazwiemy wypłatą X w chwili T.

W tym modelu jest oczywiste, że dowolna wypłata $X = f(S_T)$ dla pewnego f. Okazuje się, że można dobrze wycenić wypłatę korzystając z idei *portfela replikującego*. Portfelem nazwiemy parę liczb $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$, gdzie α_0 jest liczbą posiadanych akcji w chwili zero, zaś β_0 jest wysokością wkładu bankowego (ewentualnie wielkością kredytu, gdy $\beta_0 < 0$) w chwili zero. Dla przykładu, portfel $(4, -2)$ oznacza, że w portfelu są cztery akcje, czyli inwestor kupił 4 akcje i pożyczył 2 z banku (2 jednostki pieniądza). Każda para $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tworzy portfel, co odzwierciedla fakt, że można handlować dowolną liczbą aktywów (są one doskonale podzielne), dopuszczenie wartości ujemnych β oznacza, że możemy dowolnie dużo pożyczać, a dopuszczenie wartości ujemnych α oznacza, że rynek ten dopuszcza także *krótką sprzedaż* (*short-selling*) akcji. Krótka sprzedaż polega na pożyczeniu i sprzedaży akcji w chwili 0 oraz odkupieniu tej samej liczby akcji i ich zwrocie w chwili T. Posługując się żargonem finansowym, mówimy, że inwestor zajął pozycję krótką w akcjach. Zbiór wszystkich możliwych portfeli oznaczać będziemy przez Φ. W modelu, który przyjęliśmy $\Phi = \mathbb{R}^2$. Przy innych założeniach o rynku zbiór wszystkich rozważanych portfeli może mieć inną postać, np. gdy nie dopuszczamy krótkiej sprzedaży, a dopuszczamy możliwość wzięcia kredytu to $\Phi = \{(\beta, \alpha) : \ \alpha \geqslant 0, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Niech $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$ będzie portfelem inwestora. Wartość (bogactwo) portfela $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$ w chwili t, oznaczane przez $V_t(\varphi)$, wynosi dla $t = 0$ i $t = T$ odpowiednio:

$$\begin{aligned} V_0(\varphi) &= \alpha_0 S_0 + \beta_0, \\ V_T(\varphi) &= \alpha_0 S_T + \beta_0(1 + r). \end{aligned}$$

Tak jest, gdyż skład portfela ustaliliśmy w chwili początkowej ($t = 0$) i nie ulega on zmianie do chwili końcowej równej T.

Inwestor sprzedający wypłatę X musi umieć ją zabezpieczyć, co oznacza, że wartość portfela, który sprzedający wypłatę zbudował za otrzymane ze sprzedaży pieniądze musi być w chwili T równa X.

Definicja 2.2. Mówimy, że portfel φ replikuje wypłatę X, gdy wartość końcowa portfela jest równa X, czyli

$$V_T(\varphi)(\omega_i) = X(\omega_i)$$

dla $i = 1, 2$.

Portfel replikujący jest doskonałym zabezpieczeniem wypłaty X, gdyż eliminuje całkowicie ryzyko związane z niepewnością, który scenariusz się zrealizuje. Na pytanie, dla jakich wypłat istnieje portfel replikujący odpowiada

Twierdzenie 2.1. *Dla każdej wypłaty istnieje dokładnie jeden portfel replikujący. Dla wypłaty X ma on postać*

$$\alpha_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d}, \qquad \beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1 + r)(S^u - S^d)}, \tag{2.4}$$

gdzie $X^u = X(\omega_1)$, $X^d = X(\omega_2)$.

Dowód. Portfel replikujący $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$ dla wypłaty X jest zadany przez układ równości:

$$\alpha_0 S^u + (1 + r)\beta_0 = X^u, \tag{2.5}$$

$$\alpha_0 S^d + (1 + r)\beta_0 = X^d \tag{2.6}$$

i ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem (2.4) dla dowolnych X^u, X^d, zatem dla dowolnej wypłaty portfel jest wyznaczony jednoznacznie. □

Naturalnym jest zdefiniowanie *ceny racjonalnej (godziwej)* wypłaty X jako początkowej inwestycji potrzebnej do konstrukcji portfela replikującego, czyli:

Definicja 2.3. Racjonalną ceną w chwili 0 wypłaty X nazywamy liczbę

$$\Pi_0(X) := V_0(\varphi), \tag{2.7}$$

gdzie φ jest portfelem replikującym wypłatę X.

Z tej definicji wynika, że racjonalna cena wypłaty nie zależy od subiektywnych ocen prawdopodobieństw zmian cen akcji, nie zależy więc od prawdopodobieństwa P. Ta cecha ceny racjonalnej pozwala uznać ją za obiektywny miernik wartości wypłaty w przyjętym modelu. Należy podkreślić, że w tym modelu wszyscy inwestorzy zgadzają się co do przyszłych wielkości cen akcji, czyli do tego że ceny mogą przyjmować dwie znane z góry wartości.

Ćwiczenie 2.1. Znaleźć cenę racjonalną wypłaty X.

Rozwiązanie. Korzystając z tw. 2.1 otrzymujemy, że cena racjonalna wypłaty X jest równa

$$\Pi_0(X) = \alpha_0 S_0 + \beta_0 = \frac{X^u((1+r)S_0 - S^d) + X^d(S^u - (1+r)S_0)}{(1+r)(S^u - S^d)}. \tag{2.8}$$

Ćwiczenie 2.2. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Inwestor uważa, że prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji wynosi $P(\{\omega_1\}) = 0{,}2$, a spadku $P(\{\omega_2\}) = 0{,}8$. Akcja kosztująca teraz $S_0 = 260$ za 3 miesiące będzie miała cenę

$$S_T(\omega) = \begin{cases} S^u = 340, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d = 220, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Niech stopa procentowa na depozyt 3-miesięczny wynosi $r = 1\%$. Wycenić opcję kupna z ceną wykonania $K = 280$ i momentem wygaśnięcia za 3 miesiące.

Rozwiązanie. Wypłata z tej opcji ma postać

$$X = C_T = \begin{cases} 60, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Portfel φ replikuje opcję, gdy $V_T(\varphi) = C_T$, czyli gdy

$$V_T(\omega) = \alpha S_T(\omega) + (1+r)\beta = (S_T(\omega) - K)^+$$

dla $\omega = \omega_1$ i dla $\omega = \omega_2$. Zatem dla wartości podanych w przykładzie otrzymujemy, że portfel $\varphi = (\beta, \alpha)$ jest portfelem replikującym, gdy

$$\begin{aligned} 340\alpha + 1{,}01\beta &= 60, \\ 220\alpha + 1{,}01\beta &= 0. \end{aligned}$$

Ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = -\frac{110}{1{,}01} = -108{,}99.$$

Stąd cena racjonalna wypłaty X z opcji jest równa

$$C_0 = \Pi_0(X) = V_0(\varphi) = 1/2 \cdot 260 - 108{,}99 = 21{,}01.$$

Ćwiczenie 2.3. Opisać postępowanie inwestora sprzedającego opcję kupna i chcącego zabezpieczyć wypłatę z opcji. Co się dzieje, gdy opcja jest sprzedawana po cenie innej niż racjonalna?

Rozwiązanie. W chwili $t = 0$ inwestor postępuje następująco:

Działanie	rozliczenie
Sprzedaje jedną opcję	C_0
Kupuje α sztuk akcji	$-\alpha S_0$
Tworzy depozyt bankowy (ew. bierze kredyt)	$-\beta_0$

Na mocy definicji racjonalnej ceny mamy

$$C_0 - \alpha S_0 - \beta_0 = 0.$$

Zatem koszt początkowy takiego postępowania inwestora sprzedającego opcję jest równy zeru. W chwili $t = T$ inwestor postępuje następująco:

Działanie	rozliczenie
Realizuje opcję	$-C_T$
Sprzedaje akcje	αS_T
Podejmuje pieniądze z banku (ew. zwraca dług)	$(1+r)\beta_0$

Rozliczenie końcowe

$$-C_T + \alpha S_T + (1+r)\beta_0 = 0,$$

czyli do tej transakcji nikt nie dołożył. Cena racjonalna wypłaty jest do zaakceptowania dla obu stron.
Gdyby opcja nie była sprzedawana po cenie C_0, a po cenie $C \neq C_0$, to:
1. W przypadku, gdy $C_0 < C$, sprzedający ma pewny zysk $C - C_0 > 0$ w chwili 0, gdyż wystarczy wydać C_0 by zabezpieczyć wypłatę X dla kupującego, resztę sprzedający zachowuje dla siebie.
2. Gdy $C_0 > C$ (koszt zabezpieczenia jest większy niż cena C), to kupujący ma pewny zysk $C_0 - C > 0$ w chwili 0, gdyż aby otrzymać wypłatę X musiałby wydać C_0, a kupił ją za C.

W obu przypadkach, gdy $C \neq C_0$ (tj. cena różni się od ceny racjonalnej), znajdujemy portfel dający zysk bez żadnego ryzyka i zajmując odpowiednią pozycję mamy dodatni dochód.

W ten sposób opisaliśmy rynek podając ceny S instrumentu ryzykownego, wartość B jednostki rachunku bankowego i zbiór możliwych portfeli Φ. Rynek $\mathcal{M}$ jest zatem trójką

$$\mathcal{M} = (B, S, \Phi).$$

Na tym rynku potrafimy wycenić każdą wypłatę (czyli każdy instrument pochodny). Jednak powyższy model rynku trzeba jeszcze poprawić, gdyż dopuszcza on sytuację, że dla dodatniej wypłaty $X > 0$ może się okazać, że jej cena jest ujemna, czyli $\Pi_0(X) < 0$.

Ćwiczenie 2.4. Znaleźć przykład rynku i wypłaty $X > 0$, której cena racjonalna jest ujemna, tj. $\Pi_0(X) < 0$.

Rozwiązanie. Korzystamy z postaci ceny, czyli z (2.8). Ponieważ $X^u > 0, X^d > 0, r \geqslant 0, S^u > S^d$, więc gdy $\Pi_0(X) < 0$, to musi być $(1+r)S_0 < S^d$ lub $S^u < S_0(1+r)$. Teraz łatwo dobrać liczby spełniające warunki zadania, np. $S_0 = 10$, $r = 0{,}1$, $S^d = 12$, $S^u = 13$, $X^d = 5$, $X^u = 15$. Wtedy $\Pi_0(X) = -\frac{50}{11}$. Na tym rynku możemy osiągnąć zysk bez ryzyka pożyczając 10 jednostek z banku i kupując za tę kwotę akcję. Wtedy w chwili T sprzedając akcję otrzymujemy co najmniej 12, a do banku musimy zwrócić 11. W tej sytuacji można by osiągnąć zysk bez ryzyka za pomocą odpowiedniej strategii. Stąd

Definicja 2.4. Mówimy, że w modelu $\mathcal{M}$ nie ma możliwości arbitrażu (model nie dopuszcza możliwości arbitrażu), gdy nie istnieje portfel $\varphi \in \Phi$, taki że

$$V_0(\varphi) = 0, \quad V_T(\varphi) \geqslant 0, \quad \exists\, \omega \in \Omega \quad V_T(\varphi)(\omega) > 0.$$

Portfel φ, dla którego powyższe warunki są spełnione nazywamy możliwością arbitrażu.

Zatem model $\mathcal{M}$ rynku jest wolny od arbitrażu, gdy nie ma możliwości arbitrażu w klasie portfeli (strategii) Φ. Interpretacja portfela arbitrażowego jest klarowna: nie mając nic na początku, stosując strategię φ, na końcu operacji nic nie stracimy i mamy dodatni zysk dla pewnych scenariuszy.

Istnienie możliwości arbitrażu świadczy o serii poważnych błędów w wycenie instrumentów na rynku. Takie błędy są bardzo szybko wychwytywane przez arbitrażystów, skutkiem czego rynek szybko wraca do równowagi. Zatem model rynku powinien być modelem bez możliwości arbitrażu. Zbadamy wobec tego, jakie warunki trzeba narzucić na model rynku, by nie dopuszczał on możliwości arbitrażu.

Twierdzenie 2.2. *Rynek jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$S^d < (1+r)S_0 < S^u. \tag{2.9}$$

Dowód. Ze wzoru (2.3) widać, że warunek (2.9) jest równoważny warunkowi

$$d < (1+r) < u. \tag{2.10}$$

$\Leftarrow$ Chcemy pokazać, że nie istnieje arbitraż. Weźmy portfel $\varphi = (\beta, \alpha)$, taki że $V_0(\varphi) = 0$, czyli $\alpha S_0 + \beta = 0$. Gdy $\alpha = 0$, to $\beta = 0$, zatem $\varphi = (0,0)$, $V_T(\varphi) \equiv 0$ i ten portfel nie jest portfelem arbitrażowym. Gdy $\alpha \neq 0$, to ten portfel w chwili T ma wartość:

$$V_T(\varphi) = \alpha S_T + \beta(1+r) = \alpha S_T - \alpha S_0(1+r) = \begin{cases} \alpha s[u-(1+r)] & \text{dla } Z = u, \\ \alpha s[d-(1+r)] & \text{dla } Z = d. \end{cases}$$

Korzystając z (2.10) otrzymujemy, że portfel φ z zerowym kapitałem początkowym i $\alpha \neq 0$ w chwili końcowej T przyjmuje wartości różnych znaków, a mianowicie gdy $\alpha > 0$, to $V_T(\varphi)(\omega_1) > 0$ i $V_T(\varphi)(\omega_2) < 0$, a gdy $\alpha < 0$ to zachodzą nierówności przeciwne. Zatem portfel φ o zerowej wartości początkowej nie może być arbitrażem. $\square$

Ćwiczenie 2.5. Udowodnij implikację $\Rightarrow$.

Rozwiązanie. Nie wprost, niech jedna z powyższych nierówności nie zachodzi.
Załóżmy, że $(1+r) \geqslant u$. Weźmy portfel $\varphi = (-1, S_0)$, czyli sprzedajemy krótko akcję i inwestujemy uzyskane z tej sprzedaży pieniądze w rachunek bankowy. Wtedy proces bogactwa dla tej strategii φ spełnia ($S_0 = s$) następujące warunki:

$$\begin{aligned} V_0(\varphi) &= (-1)s + s \cdot 1 = 0, \\ V_T(\varphi) &= -sZ + s(1+r) = s[(1+r) - Z] \geqslant s((1+r) - u) \geqslant 0, \end{aligned}$$

oraz

$$V_T(\varphi)(\omega_2) = s[(1+r) - d] > 0.$$

Zatem φ jest arbitrażem. Sprzeczność.
Gdy $d \geqslant (1+r)$, to przeprowadzamy analogiczne rozumowanie.

Ćwiczenie 2.6. Udowodnić, że na rynku bez możliwości arbitrażu cena racjonalna wypłaty nieujemnej jest nieujemna, czyli $\Pi_0(X) \geqslant 0$, gdy $X \geqslant 0$. Gdy ponadto $X \neq 0$, to $\Pi_0(X) > 0$.

Wskazówka. Skorzystać z (2.8) *i z* (2.9).

Wykluczenie równości w (2.9) ma sens ekonomiczny, gdyż wtedy wykluczamy sytuację, w której na rynku są dwa aktywa, ale jednym z nich nikt nie handluje. Istotnie, gdy $S^d =$

$(1+r)S_0$, to zawsze należy inwestować w akcje, bo w najgorszym przypadku dadzą tyle, co depozyt w banku, a gdy $S^u = (1+r)S_0$, to zawsze należy wkładać pieniądze do banku, bo depozyt da większy zysk niż akcje i to bez żadnego ryzyka. W obu tych przypadkach rynek nie jest płynny i znika z niego jeden z rodzajów aktywów.

Na rynku bez możliwości arbitrażu cena wypłaty (instrumentu pochodnego X) jest dobrze określona. Wynika to z twierdzenia, którego dowód przebiega w analogiczny sposób, jak rozumowanie w ćwiczeniu 2.3.

Twierdzenie 2.3. *Cena w chwili $t = 0$ wypłaty X inna niż $V_0(\varphi)$, gdzie φ jest portfelem replikującym wypłatę X, prowadzi do arbitrażu.*

Stąd ma sens

Definicja 2.5. Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy cenę racjonalną instrumentu pochodnego X nazywamy ceną arbitrażową X w chwili $t = 0$ na rynku $\mathcal{M}$ i oznaczamy $\Pi_0(X)$.

Okazuje się, że rynek bez możliwości arbitrażu rozszerzony o instrument pochodny (np. o opcję) pozostaje dalej rynkiem, na którym nie istnieje arbitraż (patrz zad. 2.7).

2.3. Wycena za pomocą miary martyngałowej.

Przedstawimy teraz sposób wyliczania ceny instrumentów pochodnych na rynku bez możliwości arbitrażu, oparty na obliczaniu wartości oczekiwanej względem pewnej wyróżnionej miary probabilistycznej.

Przykład 2.2. Podobnie jak w rozważanym ćwiczeniu 2.2 przyjmijmy, że $S_0 = 260$, $S^d = 220$, $S^u = 340$, $K = 280$ i niech $r = 0$. Wtedy

$$X(\omega) = (S_T - K)^+(\omega) = \begin{cases} X^u = 60, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ X^d = 0, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Łatwo obliczyć, że portfel replikujący ma postać: $\alpha = 1/2$ i $\beta = -110$, a stąd $C_0 = 20$. Zatem $C_0 \in [0, 60]$, a więc istnieje jedno $q \in (0,1)$ takie, że

$$C_0 = qX(\omega_1) + (1-q)X(\omega_2)$$

czyli $C_0 = E_Q X$, gdzie $Q(\{\omega_1\}) = q = 1/3$, $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$. Okazuje się, że dla tego rozkładu prawdopodobieństwa Q zachodzi także

$$E_Q S_T = 1/3 \cdot 340 + 2/3 \cdot 220 = 260 = S_0.$$

Czy to jest przypadek wynikający ze szczególnego doboru danych? Czy cena jest wartością oczekiwaną wypłaty względem pewnego rozkładu?

W tym przykładzie q nie zależy od prawdopodobieństwa subiektywnego P, potencjalnie zależy zaś od wypłaty $X = f(S_T)$, a jednocześnie dla cen akcji zachodzi $S_0 = E_Q S_T$. Chciałoby się, aby w sytuacji ogólnej q (a więc rozkład Q) zależało tylko od cen S_T, a nie zależało od postaci funkcji f. Okazuje się, że taki rozkład można zawsze znaleźć. Pokazanie tego będzie naszym celem.

Rynek bez możliwości arbitrażu spełnia warunek (2.10) z którego wynika, że $1+r \in (d,u)$, więc $1+r$ jest kombinacją wypukłą końców odcinka, czyli istnieje $\gamma \in (0,1)$, takie że

$$(1+r) = \gamma u \ + (1-\gamma)d. \tag{2.11}$$

Liczby γ i $(1-\gamma)$ zadają nowe prawdopodobieństwo Q, takie że

$$Q(Z=u) = \gamma, \quad Q(Z=d) = 1-\gamma.$$

Wtedy korzystając z (2.11) otrzymujemy

$$E_Q(S_T) = su\gamma + sd(1-\gamma) = s(u\gamma + d(1-\gamma)) = s(1+r).$$

Zatem zachodzi

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E_Q S_T, \tag{2.12}$$

czyli otrzymaliśmy wzór przedstawiający cenę dzisiejszą jako zdyskontowaną wartość oczekiwaną ceny jutrzejszej względem prawdopodobieństwa Q. Zwykle ważne są nie wielkości cen, a proporcje pomiędzy nimi. Interesuje nas stosunek cen różnych aktywów. W tym celu wyrażamy wszystko w terminach wartości jakiegoś ustalonego aktywa. Najczęściej cenę jednostki w banku B (inwestycja bez ryzyka) uznajemy za jednostkę ceny na rynku i wszystkie inne ceny wyrażamy w tych jednostkach (czyli dyskontem jest rachunek bankowy). Wtedy jednostka na rachunku bankowym ma stałą wartość: jeśli B^* jest zdyskontowanym procesem wartości jednostki w banku, tj. $B_t^* = B_t/B_t$, to

$$B_0^* = B_T^* = 1.$$

Zamiast procesu cen rozważamy zdyskontowany proces cen $S_t^* = S_t/B_t$:

$$S_0^* = S_0, \quad S_T^* = \frac{S_T}{1+r}.$$

Jest to konwencja techniczna, bardzo ułatwiająca obliczenia. Jak było widać we wzorze (2.12), dla prawdopodobieństwa Q zachodzi równość:

$$S_0^* = E_Q S_T^*.$$

Dla rynku jednookresowego dwustanowego jest to równoważne faktowi, że S^* jest Q-martyngałem z czasem $\{0,T\}$ względem filtracji $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, gdyż $E_Q(S_T^*|\mathcal{F}_0) = E_Q(S_T^*)$. Stąd definicja:

Definicja 2.6. Miarę probabilistyczną P^* nazywamy miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy miara P^* jest równoważna z P oraz S^* jest P^*-martyngałem.

Przypomnijmy, że miara P^* jest równoważna z P, gdy obie mają te same zbiory miary zero. Z założenia $P(\{\omega_i\}) \in (0,1)$, dla $i=1,2$, więc miara P^* równoważna z P spełnia ten sam warunek: $P^*(\{\omega_i\}) \in (0,1)$, dla $i=1,2$.

Lemat 2.1. *Na rynku $\mathcal{M}$ istnieje miara martyngałowa P^* dla zdyskontowanego procesu cen S^* wtedy i tylko wtedy, gdy jedyne rozwiązanie równania*

$$S_0(1+r) = \gamma S^u + (1-\gamma)S^d, \tag{2.13}$$

względem γ należy do przedziału $(0,1)$.

Dowód. $\Rightarrow$ Gdy P^* jest miarą martyngałową, to zachodzi $S_0 = E_{P^*}S_T^*$, a stąd wynika (2.13) i $\gamma = P^*(\{\omega_1\}) \in (0,1)$.

$\Leftarrow$ Gdy (2.13) ma rozwiązanie $\gamma \in (0,1)$, to definiując miarę probabilistyczną P^* wzorem $P^*(\{\omega_1\}) = \gamma = 1-P^*(\{\omega_2\})$ otrzymujemy miarę P^* równoważną z P i spełniającą $S_0 = E_{P^*}S_T^*$. Stąd P^* jest miarą martyngałową. □

Uwaga 2.1. Jedyne rozwiązanie równania (2.13) jest postaci

$$\gamma = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d}, \tag{2.14}$$

więc miara martyngałowa P^* jest zadana przez wielkości wyznaczające cenę i przez wielkość stopy procentowej.

Obecnie możemy sformułować podstawowe twierdzenie tego paragrafu:

Twierdzenie 2.4. *Rynek $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara martyngałowa dla zdyskontowanego procesu cen S^*. Wtedy cena arbitrażowa w chwili* 0 *dowolnej wypłaty X w chwili T jest dana wzorem*

$$\Pi_0(X) = E_{P^*}\Big(\frac{X}{1+r}\Big), \tag{2.15}$$

gdzie P^* jest miarą martyngałową.

Dowód. Pierwsza część twierdzenia wynika z lematu 2.1, tw. 2.2, uwagi 2.1 oraz z tego, że

$$\gamma = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d} \in (0,1) \Longleftrightarrow S^d < (1+r)S_0 < S^u.$$

Został do udowodnienia wzór (2.15) podający cenę arbitrażową. Niech $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$ będzie jedynym portfelem replikującym X. Wówczas:

$$\begin{aligned} E_{P^*}\Big(\frac{X}{1+r}\Big) &= E_{P^*}\Big(\frac{V_T(\varphi)}{1+r}\Big) = E_{P^*}\Big(\frac{\alpha_0 S_T}{1+r} + \frac{(1+r)\beta_0}{1+r}\Big) = \\ &= \alpha_0 E_{P^*}(S_T^*) + \beta_0 = \alpha_0 S_0^* + \beta_0 = V_0(\varphi) = \Pi_0(X), \end{aligned}$$

przy czym trzecia od końca równość wynika z faktu, iż P^* jest miarą martyngałową, zaś ostatnia z definicji Π_0. □

Uwaga (ważna) 2.2. a) Cenę arbitrażową pochodnych obliczamy w świecie neutralnym wobec ryzyka, ale nie oznacza to, że żyjemy (lub uważamy, że żyjemy) w takim świecie.

b) Cena arbitrażowa wyliczona według wzoru (2.15) nie zależy od preferencji, czyli wyboru prawdopodobieństwa P dla modelu ewolucji cen instrumentu bazowego (stąd niektórzy nazywają ją miarą niezależną od preferencji. Zależy tylko od nośnika miary P — jest taka sama dla wszystkich miar równoważnych. Oznacza to, że inwestorzy zgadzają się co do wielkości przyszłych cen instrumentu bazowego, choć różnią się oceną prawdopodobieństwa wystąpienia konkretnych cen. Zatem rolą P jest określenie, jakie zdarzenia są możliwe, a jakie nie są możliwe. P wyznacza nam klasę miar równoważnych.

c) Jako czynnik dyskontujący wybraliśmy proces B, ale to nie jest istotne, można jako czynnik dyskontujący wybrać proces cen S (patrz ćw. 2.12).

d) Wzór (2.15) uzasadnia nazywanie miary martyngałowej P^* miarą wyceniającą. Z (2.15) wynika, że dzisiejsza cena arbitrażowa (tzn. dla $t = 0$) wypłaty X jest równa wartości średniej, przy mierze wyceniającej, zdyskontowanej wypłaty (a więc wypłaty liczonej przy dzisiejszej wartości pieniądza).

Parytet (formuła zgodności) dla cen opcji. Okazuje się, że ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży z tą samą ceną wykonania K na rynku bez możliwości arbitrażu są związane wzorem, tzw. parytetem kupna-sprzedaży:

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r}. \tag{2.16}$$

Wzór (2.16) wynika z podzielenia obu stron równości (1.4) przez $(1+r)$ i zastosowania wzoru (2.15) na cenę. Parytet (wzór (2.16)) pozwala natychmiast podać cenę opcji sprzedaży, gdy znamy cenę opcji kupna i vice versa.

Monotoniczność ceny. Na rynku rzeczywistym większa wypłata kosztuje więcej i sensowny model rynku musi to uwzględniać.

Twierdzenie 2.5. *Monotoniczność ceny Gdy rynek jest wolny od arbitrażu oraz wypłaty X i Y spełniają $X \geqslant Y$, to*

$$\Pi_0(X) \geqslant \Pi_0(Y).$$

Dowód. Twierdzenie wynika natychmiast ze wzoru (2.15) i własności wartości oczekiwanej

$$\Pi_0(X) = E_{P^*}\Big(\frac{X}{1+r}\Big) \geqslant E_{P^*}\Big(\frac{Y}{1+r}\Big) = \Pi_0(Y).$$

□

Stąd mamy intuicyjnie oczywisty

Wniosek 2.1. . *Niech na rynku bez możliwości arbitrażu $C_0(K)$ (odpowiednio $P_0(K)$) oznacza cenę opcji kupna (odpowiednio sprzedaży) z ceną wykonania K. Wtedy*

(i) $K_1 \leqslant K_2 \Rightarrow C_0(K_1) \geqslant C_0(K_2)$,

(ii) $K_1 \leqslant K_2 \Rightarrow P_0(K_1) \leqslant P_0(K_2)$.

Dowód. Teza wynika z Twierdzenia 2.5 i nierówności:

$$(x - K_1)^+ \geqslant (x - K_2)^+,$$
$$(K_1 - x)^+ \leqslant (K_2 - x)^+.$$

dla $0 < K_1 \leqslant K_2$, $x \in \mathbb{R}$. □

Warto zauważyć, że zarówno tw. 2.5, jak i wniosek 2.1 wynikają z postaci wzoru na cenę arbitrażową wypłaty, czyli ze wzoru (2.15), a więc są prawdziwe w każdym modelu w którym cenę potrafimy wrazić w ten sposób.

2.4. Kontrakt terminowy forward

Kontrakt terminowy forward jest umową zawartą w chwili początkowej t, w której jedna ze stron zobowiązuje się kupić, druga zaś sprzedać pewne dobro (zwykle papier wartościowy) w ustalonej chwili T w przyszłości (tj. $t < T$) za określoną z góry cenę. Kontrakty forward są zawierane wyłącznie na rynku pozagiełdowym kontraktów negocjowanych (*over-the-counter market*). Kontrakt taki może opiewać na dowolny instrument z indywidualnie negocjowaną ceną, datą i miejscem dostawy. Rzeczywiste dostarczenie towaru jest obiektem transakcji — wieńczy ono ponad 90% kontraktów. Są jednak kontrakty, które kończą się rozliczeniem pieniężnym, np. kontrakty forward na stopy procentowe (wynika to z faktu, że bazą kontraktu jest instrument nie będący przedmiotem bezpośredniego obrotu). W chwili zawarcia kontraktu w chwili t nie następuje żaden przepływ gotówki ani towaru — ma on miejsce dopiero w chwili T, w dniu realizacji kontraktu. Kontrakty forward są używane zarówno do spekulacji jak i do zabezpieczenia się.

Strona, która zobowiązuje się do zapłaty określonej w kontrakcie kwoty za dobro, zajmuje pozycję długą w kontrakcie forward, a strona, która zobowiązuje się dostarczyć to dobro, zajmuje pozycję krótką. Z punktu widzenia pozycji długiej wypłata jest równa różnicy pomiędzy wartością instrumentu bazowego (dobra) w chwili T, a ceną dostawy K uzgodnioną w kontrakcie, np. gdy kontrakt opiewa na akcje o cenie S, to

$$X = S_T - K.$$

Definicja 2.7. Cenę dostawy K taką, że wartość kontraktu w chwili t jest równa zeru, nazywamy ceną forward i oznaczamy $F_S(t,T)$.

Cenę tę opisuje:

Twierdzenie 2.6. *Załóżmy, że $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ jest rynkiem jednookresowym dwustanowym bez możliwości arbitrażu. Wtedy cena forward $F_S(0,T)$ instrumentu bazowego o cenie S z terminem dostawy T jest równa:*

$$F_S(0,T) = (1+r)S_0.$$

Dowód. Gdy $X = S_T - K$, to wartość kontraktu jest równa

$$\Pi_0(X) = E_{P^*}\Big(\frac{X}{1+r}\Big) = S_0 - \frac{K}{1+r}.$$

Cena forward to taka cena dostawy K, że $\Pi_0(X) = 0$, zatem

$$F_S(0,T) = (1+r)S_0.$$

□

2.5. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 2.7. Niech na rynku $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ bez możliwości arbitrażu, H będzie procesem ceny arbitrażowej wypłaty X, czyli $H_0 = \Pi_0(X)$, $H_T = X$. Niech Φ_H oznacza klasę portfeli składających się z akcji, jednostek rachunku bankowego i jednostek instrumentu pochodnego o cenie H. Udowodnić, że rynek (B, S, H, Φ_H) (czyli rynek $\mathcal{M}$ rozszerzony o instrument pochodny) jest rynkiem bez możliwości arbitrażu.

Rozwiązanie. (nie wprost). Załóżmy, że na rozszerzonym rynku występuje możliwość arbitrażu, czyli istnieją takie α, β, γ, że:

$$\alpha S_0 + \beta + \gamma H_0 = 0 \tag{2.17}$$

i dla każdego $\omega \in \Omega$

$$\alpha S_T(\omega) + \beta(1+r) + \gamma X(\omega) \geqslant 0 \tag{2.18}$$

oraz istnieje $\omega \in \Omega$ taka, że

$$\alpha S_T(\omega) + \beta(1+r) + \gamma X(\omega) > 0. \tag{2.19}$$

Ponieważ wypłata X jest osiągalna i $H_0 = \Pi_0(X)$, więc

$$\exists\ \alpha_0, \beta_0 \colon\ H_0 = \alpha_0 S_0 + \beta_0 \quad \text{oraz } X = \alpha_0 S_T + \beta_0(1+r).$$

Stąd i z (2.17) mamy

$$0 = \alpha S_0 + \beta + \gamma H_0 = (\alpha + \gamma\alpha_0)S_0 + \beta + \gamma\beta_0. \tag{2.20}$$

Ponadto z (2.18)

$$\begin{aligned}(\alpha + \gamma\alpha_0)S_T(\omega) &+ (\beta + \gamma\beta_0)(1+r) = \\ &= \alpha S_T(\omega) + \beta(1+r) + \gamma(\alpha_0 S_T(\omega) + \beta_0(1+r)) = \\ &= \alpha S_T(\omega) + \beta(1+r) + \gamma X(\omega) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Biorąc ω spełniające (2.19) mamy dla tej ω nierówność ostrą w (2.21), więc portfel $\varphi = (\alpha + \gamma\alpha_0, \beta + \gamma\beta_0)$ jest możliwością arbitrażu dla rynku (B, S, Φ) (bo z (2.20) $V_0(\varphi) = 0$), co przeczy założeniom.

Ćwiczenie 2.8. Załóżmy, że akcja kosztująca 200 będzie za trzy miesiące miała cenę 150 lub 300, a stopa procentowa na depozyt trzymiesięczny jest równa 10%. Znaleźć cenę europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania 270 i terminem wykonania za trzy miesiące korzystając z obu poznanych metod.

Rozwiązanie. Wypłata z tej opcji jest równa $P_T = (K - S_T)^+$ tzn.

$$P_T(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ 120, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Zatem portfel replikujący spełnia równania:

$$\begin{aligned} 300\alpha + 1{,}1\beta &= 0, \\ 150\alpha + 1{,}1\beta &= 120 \end{aligned}$$

(gdyż $S(\omega_1) = S^u = 300$), a stąd $\alpha = -4/5$, $\beta = 218{,}18$. Liczba akcji α jest liczbą ujemną, co oznacza, że wystawca opcji sprzedaży zabezpieczając wypłatę dokonuje krótkiej sprzedaży. Korzystając ze wzoru (2.8) otrzymujemy cenę arbitrażową opcji:

$$\Pi_0(P_T) = P_0 = -4/5 \cdot 200 + 218{,}18 = 58{,}18.$$

Gdy zastosujemy metodę martyngałową, to obliczamy cenę P_0 korzystając ze wzorów (2.15) i (2.14):

$$\begin{aligned} P_0 &= E_{P^*}\Big(\frac{P_T}{1+r}\Big) = (1-\gamma)(K - S^d) \cdot \frac{1}{1+r} = \\ &= (1 - \frac{1}{5}) \cdot 120 \cdot \frac{1}{1{,}1} = \frac{64}{1{,}1} = 58{,}18. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2.9. Udowodnić, że jeżeli istnieje portfel φ, taki że $V_0(\varphi) < 0$ oraz $V_T(\varphi) \geqslant 0$, to na rynku istnieje arbitraż.

Rozwiązanie. Gdy $\varphi = (\beta, \alpha)$ spełnia warunki zadania, to portfel $\psi = (\alpha, \beta - V_0(\varphi))$ jest arbitrażem, bo $V_0(\psi) = 0$ oraz $V_T(\psi) = V_T(\varphi) - V_0(\varphi)(1 + r) > 0$.

Ćwiczenie 2.10. [*Prawo jednej ceny*] Udowodnić, że na rynku jednookresowym dwustanowym bez możliwości arbitrażu portfele mające tę samą wartość w chwili T muszą mieć tę samą wartość w chwili 0.

Rozwiązanie. Niech φ, ψ będą takie, że $V_T(\varphi) = V_T(\psi) = X$. Wtedy, na mocy jedyności portfela replikującego na tym rynku, $\varphi = \psi$, zatem $V_0(\varphi) = V_0(\psi)$.

Ćwiczenie 2.11. Udowodnić parytet kupna-sprzedaży, czyli wzór (2.16), korzystając
a) z argumentów arbitrażowych,
b) z prawa jednej ceny (patrz zad. 1.2.10).

Rozwiązanie. a) Nie wprost. Gdy

$$C_0 - P_0 > S_0 - \frac{K}{1 + r}, \tag{2.22}$$

to strategia polegająca na kupnie akcji i opcji sprzedaży z ceną wykonania K i sprzedaniu opcji kupna z ceną wykonania K jest strategią arbitrażową. Istotnie, wartość tej operacji, która jest równa $C_0 - S_0 - P_0$ rozliczamy w banku (gdy jest ona dodatnia, to wkładamy tę sumę do banku, gdy ujemna, to pożyczamy ją z banku). W chwili T zawsze mamy zysk równy

$$K + (1 + r)(C_0 - P_0 - S_0) > 0,$$

którego dodatniość wynika z warunku (2.22). Gdy

$$C_0 - P_0 < S_0 - \frac{K}{1 + r},$$

to zajęcie pozycji przeciwnej do opisanej wyżej jest strategią arbitrażową.
b) Portfel φ składający się z jednej akcji i pożyczki w wysokości $\frac{K}{1+r}$ i portfel ψ powstały w wyniku zakupu opcji kupna i sprzedaży opcji sprzedaży o tej samej cenie wykonania K mają w chwili T tę samą wartość $S_T - K$, więc muszą mieć tę samą wartość w chwili zero, co daje (2.16), czyli parytet.

Ćwiczenie 2.12. [*Różne dyskonta*] Załóżmy, że proces cen S jest czynnikiem dyskontującym, czyli

$$B_t^* = \frac{B_t}{S_t}, \quad t \in \{0, T\}.$$

Jest oczywiste, że miarę probabilistyczną $\bar{P} \sim P$ taką, że B_t^* jest $\bar{P}$–martyngałem nazywamy miarą martyngałową dla procesu B^*.

Udowodnić, że

a) na rynku nie ma możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara martyngałowa dla procesu B^*.

b) na rynku bez możliwości arbitrażu cena wypłaty X jest równa

$$\Pi_0(X) = S_0 E_{\bar{P}}(X S_T^{-1}),$$

gdzie $\bar{P}$ jest miarą martyngałową dla procesu B^*.

Zatem jest to inny sposób wyceny wypłat.

Rozwiązanie. a) $\bar{P}$ jest miarą martyngałową dla B^* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$E_{\bar{P}}\Big(\frac{B_T}{S_T}\Big) = \frac{B_0}{S_0},$$

co z kolei jest równoważne z

$$E_{\bar{P}}\Big(\frac{1}{S_T}\Big) = \frac{1}{S_0(1+r)}.$$

Stąd otrzymujemy, że miara martyngałowa $\bar{P}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie γ równania

$$\gamma\frac{1}{S^u} + (1-\gamma)\frac{1}{S^d} = \frac{1}{S_0(1+r)},$$

czyli

$$\gamma = \Big(\frac{1}{S_0(1+r)} - \frac{1}{S^d}\Big)\Big(\frac{S^u S^d}{S^d - S^u}\Big)$$

należy do $(0,1)$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $S^d < (1+r)S_0 < S^u$ (z postaci γ) i stosujemy tw. 2.2.
Warto zauważyć, że $\gamma \in (0,1)$ zadaje miarę martyngałową $\bar{P}$ dla B^* i ta miara jest różna od miary martyngałowej P^* dla S^*.
b) Niech $\varphi = (\beta, \alpha)$ replikuje X (taki portfel istnieje, na podstawie tw. 2.1). Wtedy $V_0(\varphi) = \alpha S_0 + \beta$, $X = \alpha S_T + \beta(1+r)$. Stąd

$$E_{\bar{P}}\Big(\frac{X}{S_T}\Big) = E_{\bar{P}}\Big(\alpha + \beta\frac{1+r}{S_T}\Big) = \alpha + \beta\frac{1}{S_0} = \frac{1}{S_0}V_0(\varphi) = \frac{1}{S_0}\Pi_0(X).$$

Ćwiczenie 2.13. Znaleźć na rynku jednookresowym dwustanowym wzory ogólne na ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży przy założeniu $S^d \leqslant K \leqslant S^u$.

Rozwiązanie.

$$C_0 = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d}\cdot\frac{S^u - K}{1+r}.$$

$$P_0 = \frac{S^u - (1+r)S_0}{S^u - S^d}\cdot\frac{K - S^d}{1+r}. \tag{2.23}$$

Ćwiczenie 2.14. Uzasadnić następujące ograniczenia na ceny opcji na rynku bez możliwości arbitrażu:

$$\Big(S_0 - \frac{K}{1+r}\Big)^+ \leqslant C_0 \leqslant S_0, \tag{2.24}$$

$$\Big(\frac{K}{1+r} - S_0\Big)^+ \leqslant P_0 \leqslant \frac{K}{1+r}. \tag{2.25}$$

Rozwiązanie. Z parytetu

$$C_0 = P_0 + S_0 - \frac{K}{1+r} \geqslant \Big(S_0 - \frac{K}{1+r}\Big),$$

bo $P_0 \geqslant 0$. Zatem lewa strona nierówności (2.24) jest prawdziwa, gdyż $C_0 \geqslant 0$. Ponieważ $S_T \geqslant (S_T - K)^+$, więc z tw. 2.5 otrzymujemy

$$S_0 = \Pi_0(S_T) \geqslant \Pi_0\big((S_T - K)^+\big) = C_0,$$

czyli zachodzi prawa strona (2.24). Podobnie dowodzimy (2.25). Lewa strona wynika z parytetu, a prawa z nierówności $(K - S_T)^+ \leqslant K$.

Ćwiczenie 2.15. [*Zabezpieczenie doskonałe*] Rozpatrzmy rynek bez możliwości arbitrażu. Powiemy, że portfel φ jest doskonałym zabezpieczeniem wypłaty X, gdy $V_T(\varphi) \geqslant X$. Ceną sprzedającego $\Pi_0^S(X)$ nazywamy minimalny koszt zabezpieczenia doskonałego.

a) Udowodnić, że na rynku jednookresowym dwustanowym $\Pi_0^S(X) = \Pi_0(X)$.

b) Jak zdefiniować cenę kupującego $\Pi_0^B(X)$? Czy na rynku jednookresowym dwustanowym zachodzi $\Pi_0^B(X) = \Pi_0(X)$?

Rozwiązanie. a) Cena sprzedającego jest zadana wzorem

$$\Pi_0^S(X) = \min\{V_0(\varphi) : \varphi \in \Phi, V_T(\varphi) \geqslant X\}.$$

Niech portfel φ replikuje wypłatę X. Wtedy $V_T(\varphi) = X$, więc portfel φ jest doskonałym zabezpieczeniem wypłaty X, zatem

$$\Pi_0(X) \geqslant \Pi_0^S(X).$$

Udowodnimy, że zachodzi nierówność przeciwna.
Gdy portfel $\psi \in \Phi$ jest taki, że $Y = V_T(\psi) \geqslant X$ to z monotoniczności ceny zachodzi $\Pi_0(Y) \geqslant \Pi_0(X)$, zatem $V_0(\psi) \geqslant \Pi_0(X)$, a stąd

$$\Pi_0^S(X) \geqslant \Pi_0(X).$$

Inny sposób rozwiązania — to rozwiązanie zagadnienia minimalizacji z ograniczeniami, szukamy

$$\min_{\varphi=(\beta,\alpha)} V_0(\varphi)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \alpha S^u + \beta(1+r) &\geqslant X^u, \\ \alpha S^d + \beta(1+r) &\geqslant X^d. \end{aligned}$$

W wyniku tego postępowania też otrzymujemy $\Pi_0^S(X) = \Pi_0(X)$.
b) Zdefiniujemy cenę kupującego.
Z punktu widzenia kupującego warto zapłacić za wypłatę X taką wielkość x_0, żeby w chwili T kupujący miał jeszcze co najmniej taki sam zysk, jak w przypadku, gdy użyje strategii o cenie początkowej x_0. Stąd maksymalna cena akceptowana przez kupującego to

$$\Pi_0^b(X) = \sup\{V_0(\varphi) : \varphi \in \Phi, X - V_T(\varphi) \geqslant 0\}.$$

Z własności supremum wynika, że $\Pi_0^b(X) = -\,\Pi_0^s(-X)$. Zatem korzystając z punktu a) otrzymujemy

$$\Pi_0^b(X) = -\,\Pi_0(-X) = \Pi_0(X).$$

Można też, analogicznie jak w przypadku ceny sprzedającego, szukać ceny kupującego jako rozwiązania zagadnienia maksymalizacji z odpowiednimi ograniczeniami.

Ćwiczenie 2.16. Gdy rozważamy rynek z kosztami za transakcje, to w naszym opisie rynku musimy wiele zmienić. Opisać różnicę pomiędzy kontraktami (gdy nie ma kosztów, to oba dają tę samą wypłatę):

a) sprzedający zobowiązuje się dostarczyć kupującemu akcję za cenę K, gdy $S_T > K$,

b) sprzedający wypłaca kupującemu różnicę $S_T - K$, gdy $S_T > K$.

Wskazówka. Ponieważ występują koszty, więc posiadanie w chwili T kwoty S_T pieniędzy nie wystarcza do zakupu akcji (trzeba jeszcze pokryć koszty tego zakupu). Wartość portfela nie może być utożsamiana z liczbą, jest bowiem obiektem wielowymiarowym. Portfel jest opisany przez dwie zmienne losowe, z których pierwsza mówi, ile pieniędzy jest na rachunku bankowym, a druga — ile akcji jest w portfelu.

3. Rynki skończone

Teraz uogólnimy model z poprzedniego wykładu. Dopuścimy dowolną skończoną liczbę możliwych scenariuszy i skończenie wiele chwil czasu, w których dokonuje się transakcji. Taki rynek będziemy nazywać rynkiem skończonym. Ograniczenie liczby możliwych scenariuszy pozwala uniknąć stosowania zaawansowanych narzędzi technicznych i pozwala skupić się na interpretacjach stosowanych metod i otrzymywanych wyników.

3.1. Model rynku, portfel

Założymy, że mamy do czynienia z rynkiem wielookresowym, czyli chwile czasu, w których odbywają się transakcje, to są chwile $0, 1, 2, \ldots, T$ (w zależności od sytuacji odpowiada to minutom, dniom, itp.), gdzie horyzont czasowy jest skończony: $T < \infty$. Założymy ponadto, że liczba możliwych scenariuszy (przypadków) jest skończona, zatem przestrzeń probabilistyczna

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d\}$$

jest zbiorem skończonym, rodzina zdarzeń $\mathcal{F} = 2^\Omega$, a prawdopodobieństwo P jest takie, że

$$P(\{\omega_i\}) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, d.$$

Wprowadźmy σ-ciała $\mathcal{F}_t$, $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, które interpretujemy jako zasób wiedzy o rynku zebrany do chwili t. Nasza wiedza z czasem rośnie: $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ dla $t \leqslant s$, więc ciąg $\mathcal{F}_t$ jest filtracją. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mathcal{F}_0$ jest σ-ciałem trywialnym i $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Dla wygody oznaczmy

$$\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}.$$

Na rynku znajduje się $(k + 1)$ instrumentów finansowych (instrumenty pierwotne), których ceny za jedną jednostkę w chwili t są opisywane przez zmienne losowe $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k$. Są one $\mathcal{F}_t$-mierzalne, gdyż nasza dzisiejsza wiedza nie pozwala nam przewidzieć przyszłych cen: w chwili t znamy jedynie ceny S_u^i dla $u \leqslant t$. Zatem wektor cen

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^k)',$$

gdzie symbol $'$ oznacza transpozycję, jest ciągiem adaptowanych zmiennych losowych. S_0 jest wektorem cen początkowych, które znamy (cen w chwili zero), więc jest to wektor stały o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$. Zwykle przyjmuje się (i to robimy), że S^0 jest ceną aktywa bezryzykownego. Zakładamy, że $S_0^0 = 1$ i kapitalizacja jest okresowa, oprocentowanie jest stałe i równe w skali jednego okresu r, $r \geqslant 0$, a więc

$$S_t^0 = (1 + r)^t. \tag{3.1}$$

Zatem $\beta_t = 1/S_t^0$ jest czynnikiem dyskontującym, czyli gdy zainwestujemy β_t w chwili 0, to otrzymamy 1 w chwili t. Rynek spełniający powyższe założenia będziemy nazywać **rynkiem skończonym**.

Strategią finansową (portfelem, procesem portfelowym) będziemy nazywać dowolny proces prognozowalny $(\varphi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$:

$$\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^k)',$$

czyli φ_0^i jest zmienną losową $\mathcal{F}_0$-mierzalną, a dla $t = 1, 2, \ldots, T$ zmienna losowa φ_t^i jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalna. Zmienną losową φ_t^i, czyli i-tą współrzędną wektora φ_t interpretujemy jako liczbę jednostek i-tego waloru trzymanych w portfelu od chwili $t-1$ do chwili t. Wielkości φ_t^i są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, co odzwierciedla fakt, że dopuszczamy krótką sprzedaż, możliwość zaciągania kredytu w dowolnej wysokości i zakładamy nieskończoną podzielność papierów. Prognozowalność φ jest matematycznym sformułowaniem faktu, że portfel na chwilę t, czyli wektor φ_t jest konstruowany na podstawie wiedzy osiągalnej do chwili $t-1$ (tj. wiedzy sprzed momentu t) i nie zmienia się do chwili t, w której inwestor poznaje nowe ceny. Wtedy inwestor konstruuje nowy skład portfela na następną chwilę $(t+1)$, czyli φ_{t+1}.

Definicja 3.1. Wartością portfela φ (procesem wartości, bogactwem) w chwili t nazywamy zmienną losową:

$$V_t(\varphi) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_t^i S_t^i.$$

Ponieważ $V_t(\varphi)$ jest iloczynem skalarnym wektorów losowych φ_t i S_t, to będziemy używać notacji iloczynowej: $V_t(\varphi) = \varphi_t S_t$. Wielkość $V_0(\varphi) = \varphi_0 S_0$ jest nazywana **kapitałem początkowym** lub **wielkością początkową inwestycji**.

Niektórzy autorzy przez portfel rozumieją parę (x, φ), gdzie x jest kapitałem początkowym, a proces prognozowalny $\varphi = (\varphi_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ jest strategią postępowania w kolejnych chwilach czasu. To podejście jest równoważne prezentowanemu na wykładzie, gdyż x jest jednoznacznie wyznaczony przez φ_0, a mianowicie $x = \varphi_0 S_0$.

Gdy inwestor w chwili t konstruuje portfel φ_{t+1} na chwilę $(t+1)$, to koszt konstrukcji tego portfela wynosi $\varphi_{t+1}S_t$, a jego wartość w chwili na którą był on konstruowany, a więc w chwili $(t+1)$ wynosi $\varphi_{t+1}S_{t+1}$ (opisujemy rynek doskonały, a więc bez kosztów transakcji, podatków itp.). Czyli wielkość $\varphi_{t+1}S_{t+1} - \varphi_{t+1}S_t$ jest zyskiem w chwili $t+1$ wynikającym ze zmiany cen. Stąd

Definicja 3.2. Proces zysku $G(\varphi)$ portfela φ definiowany jest wzorem

$$G_t(\varphi) = \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1} - S_u) \tag{3.2}$$

dla $t = 1, \ldots, T$.

Wyróżnimy teraz specjalną klasę portfeli:

Definicja 3.3. Strategię nazywamy samofinansującą się, gdy

$$\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t \tag{3.3}$$

dla $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Ta własność strategii oznacza, że inwestor zmienia swoją pozycję (portfel) z φ_t na φ_{t+1} bez konsumpcji lub dopływu kapitału z zewnątrz. W chwili t inwestor dysponuje kapitałem $V_t(\varphi)$, który w całości przeznacza na zakup portfela φ_{t+1}, płacąc ceny S_t za aktywa.

Niech Φ będzie klasą strategii samofinansujących się. Wprost z definicji wynika, że Φ jest przestrzenią liniową. Podamy teraz bardzo przydatną charakteryzację portfeli samofinansujących się, mówiącą, że w chwili t kapitał takiego portfela jest równy sumie kapitału początkowego i wartości procesu zysku tego portfela w tej chwili. Zysk w chwili t jest sumą zysków w poprzednich chwilach wynikających tylko ze zmiany cen z S_u w chwili u na S_{u+1} w chwili $u+1$, gdzie $u = 0, \dots, T-1$.

Twierdzenie 3.1. *Portfel φ jest samofinansujący się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich t spełniona jest równość*

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi). \tag{3.4}$$

Dowód. Konieczność.

$$V_t(\varphi) = \varphi_t S_t = \varphi_0 S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} (\varphi_{k+1} S_{k+1} - \varphi_k S_k).$$

Korzystając z założenia $\varphi_u S_u = \varphi_{u+1} S_u$, mamy

$$V_t(\varphi) = \varphi_0 S_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \varphi_{k+1}(S_{k+1} - S_k) = V_0 + G_t(\varphi).$$

Dostateczność. Z założenia (3.4) dla dowolnego t mamy

$$V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t). \tag{3.5}$$

Ponadto, z definicji

$$V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1} S_{t+1} - \varphi_t S_t.$$

Porównując prawe strony widzimy, że $\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t$ dla wszystkich t, co oznacza, że $\varphi \in \Phi$. □

Z powyższego twierdzenia wynika, że bogactwo portfela dla strategii samofinansującej się zależy tylko od portfela i zmian cen.

Uwaga 3.1. Z dowodu tw. 3.1 wynika, że portfel φ jest samofinansujący się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich t zachodzi (3.5), czyli:

$$\varphi \in \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t) \quad \text{dla każdego } t.$$

Ćwiczenie 3.1. Udowodnić, że portfel stały jest strategią samofinansującą się.

Rozwiązanie. Ponieważ iloczyn skalarny jest liniowy, więc

$$\varphi \in \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi_{t+1} - \varphi_t) S_t = 0 \quad \text{dla każdego } t, \tag{3.6}$$

a stąd teza wynika natychmiast.

Okazuje się, że gdy inwestor postępuje zgodnie ze strategią samofinansującą, to wartość portfela jest całkowicie zdeterminowana przez bogactwo początkowe i strategię postępowania z aktywami ryzykownymi.

Twierdzenie 3.2. *Dla dowolnego procesu prognozowalnego $(\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^k)'$, $t = \in \{0, 1, \dots, T\}$ i dowolnego rzeczywistego x istnieje jednoznacznie wyznaczony proces prognozowalny φ_t^0, $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, taki, że strategia $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^k)'$ jest samofinansującą się i jej początkowe bogactwo jest równe x.*

Dowód. Wielkość początkowa inwestycji jest równa x, zatem

$$x = V_0(\varphi) = \varphi_0^0 + \sum_{i=1}^{k} \varphi_0^i S_0^i$$

i stąd mamy wyznaczoną jednoznacznie stałą φ_0^0:

$$\varphi_0^0 = x - \sum_{i=1}^{k} \varphi_0^i S_0^i.$$

Dalej skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Załóżmy, że φ_t jest wyznaczone jednoznacznie i jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalne. Z warunku samofinansowalności (3.3) mamy

$$\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t = \varphi_{t+1}^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^{k} \varphi_{t+1}^i S_t^i,$$

a stąd φ_{t+1}^0 jest wyznaczone jednoznacznie wzorem

$$\varphi_{t+1}^0 = \frac{1}{S_t^0}\Big[\varphi_t S_t - \sum_{i=1}^{k} \varphi_{t+1}^i S_t^i\Big].$$

Wszystkie składniki z prawej strony są $\mathcal{F}_t$-mierzalne, więc φ_{t+1}^0 jest $\mathcal{F}_t$–mierzalne. Mamy zatem jednoznacznie określony proces prognozowalny $(\varphi_t^0)_t$. □

3.2. Arbitraż

Definicja 3.4. Strategię φ nazywamy arbitrażem (strategią arbitrażową), gdy

$$V_0(\varphi) = 0$$

oraz

$$P(V_T(\varphi) \geqslant 0) = 1, \quad P(V_T(\varphi) > 0) > 0.$$

Uwaga 3.2. Ponieważ $P(\{\omega_i\}) > 0$ dla każdego i, więc warunki z definicji są równoważne następującym:

$$\forall_{\omega\in\Omega} \ \text{ zachodzi } \ V_0(\varphi)(\omega) = 0, \ V_T(\varphi)(\omega) \geqslant 0$$

oraz

$$\exists_{\omega_i} \text{ takie, że } V_T(\varphi)(\omega_i) > 0.$$

b) Warunek braku arbitrażu na rynku można też wyrazić inaczej:

$$\forall \varphi \in \Phi \quad V_0(\varphi) = 0, \quad V_T(\varphi) \geqslant 0 \quad P - p.n. \quad \Rightarrow \quad V_T(\varphi) = 0.$$

Widać, że definicja 3.4 uogólnia pojęcie arbitrażu dla rynku jednookresowego dwustanowego, a jednocześnie wyraża to pojęcie w terminach prawdopodobieństwa i nie używa pojęcia scenariusza, więc łatwo ją przenieść na szerszą klasę modeli.

Definicja 3.5. Modelem rynku finansowego nazwiemy pare $\mathcal{M} = (S, \Phi)$. Rynek nazywamy rynkiem bez możliwości arbitrażu (bezarbitrażowym, pozbawionym arbitrażu), gdy nie istnieje strategia arbitrażowa w klasie strategii samofinansujących się.

Pojęcie arbitrażu zdefiniowaliśmy globalnie. Okazuje się, że nasza definicja obejmuje przypadek, gdy można mieć zysk bez żadnego nakładu i bez ryzyka we wcześniejszych chwilach czasu. Intuicyjnie można to uzasadnić w następujący sposób: wiemy, że istnieje arbitraż w chwili $t < T$ na pewnym zbiorze A. Wtedy wybieramy strategię wstrzymania się od jakichkolwiek działań do momentu t. Gdy w chwili t znajdziemy się w zbiorze A (zatem scenariusz sprzyjał zajściu zdarzenia A), to wykorzystujemy naszą okazję. Wchodzimy w kontrakt arbitrażowy, następnie w chwili $(t+1)$ realizujemy zysk, który natychmiast wkładamy na rachunek bankowy i ostatecznie osiągamy dodatni zysk. Gdy w chwili t nie znajdziemy się w zbiorze A, to nic nie robimy (zatem na końcu mamy zero). Tę intuicję potwierdza twierdzenie mówiące, że jeśli na rynku nie istnieje arbitraż globalny, to nie istnieje arbitraż lokalny, czyli arbitraż w jednym okresie. Aby móc porównywać wartość portfela w różnych chwilach czasu musimy uwzględniać oprocentowanie, zatem porównujemy zdyskontowane wartości portfela, czyli porównujemy w różnych chwilach wartości procesu $V_t^*(\varphi) = V_t(\varphi)/S_t^0$. Dlatego twierdzenie o arbitrażu lokalnym przybiera postać:

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli na rynku (S, Φ) nie ma możliwości arbitrażu, to dla każdego $t \in \{0, \ldots, T-1\}$, $A \in \mathcal{F}_t$ i dla $\varphi \in \Phi$ mamy*
i) $P(V_{t+1}^*(\varphi) - V_t^*(\varphi) \geqslant 0|A) = 1$ *implikuje* $P(V_{t+1}^*(\varphi) - V_t^*(\varphi) = 0|A) = 1$.
ii) $P(V_{t+1}^*(\varphi) - V_t^*(\varphi) \leqslant 0|A) = 1$ *implikuje* $P(V_{t+1}^*(\varphi) - V_t^*(\varphi) = 0|A) = 1$.

Dowód. Sformalizujemy idee opisane powyżej. Udowodnimy punkt i) twierdzenia. Ustalmy chwilę t, strategię $\varphi \in \Phi$ i $A \in \mathcal{F}_t$ takie, że $P(A) > 0$ i

$$P(V_{t+1}^*(\varphi) - V_t^*(\varphi) \geqslant 0|A) = 1. \tag{3.7}$$

Zdefiniujemy teraz proces ψ. Niech $\psi_0 = 0$, a dla $0 < u \leqslant T$ niech

$$\psi_u = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leqslant t, \\ \mathbf{1}_A \cdot (\varphi_{t+1}^0 - V_t^*(\varphi), \varphi_{t+1}^1, \ldots, \varphi_{t+1}^k)' & \text{dla } u = t+1, \\ \mathbf{1}_A \cdot (V_{t+1}^*(\psi), 0, \ldots, 0)' & \text{dla } u > t+1, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{1}_A$ jest funkcją wskaźnikową zbioru A, tj.

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in A, \\ 0 & \text{dla } \omega \notin A. \end{cases}$$

Z postaci ψ wynika, że jest to proces prognozowalny, a więc ψ jest portfelem. Sprawdzamy teraz, że portfel ψ jest samofinansujący się, korzystając z warunku (3.6) i z tego, że $\varphi \in \Phi$.

Gdy $u < t$ lub $u > t+1$, to $\psi_{u+1} - \psi_u = 0$, więc $(\psi_{u+1} - \psi_u)S_u = 0$.

Gdy $u = t$, to

$$\begin{aligned}(\psi_{t+1} - \psi_t)S_t = \psi_{t+1}S_t = 1_A \ (\varphi_{t+1}^0 S_t^0 - V_t(\varphi) + \sum_{i=1}^k \varphi_{t+1}^i S_t^i) = \\ = \mathbf{1}_A \ (\varphi_{t+1}S_t - V_t(\varphi)) = \mathbf{1}_A \ (\varphi_t S_t - V_t(\varphi)) = 0.\end{aligned}$$

Natomiast gdy $u = t+1$, to

$$(\psi_{t+2} - \psi_{t+1})S_{t+1} = \mathbf{1}_A \ (V_{t+1}^*(\psi)S_{t+1}^0 - V_{t+1}(\psi)) = 0.$$

Ponieważ $V^*_{t+1}(\psi) = \mathbf{1}_A(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi))$, więc z (3.7) i definicji ψ_T otrzymujemy

$$V_T(\psi) = \psi_T S_T = \mathbf{1}_A \cdot (V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi))\, S^0_T \geqslant 0.$$

Stąd, oraz z tego, że $\psi \in \Phi$, $V_0(\psi) = 0$ oraz z założenia o braku arbitrażu wynika, że $V_T(\psi) = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &= P(V_T(\psi) > 0) = P(\{V_T(\psi) > 0\} \cap A) = \\ &= P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) > 0|A) \cdot P(A). \end{aligned}$$

Ponieważ $P(A) > 0$, więc $P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) > 0|A) = 0$, zatem

$$P(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) = 0|A) = 1,$$

co wraz z założeniem (3.7) daje punkt i).

Punkt ii) dowodzi się analogicznie. □

3.3. Wypłata europejska i jej wycena

Teraz naszym celem będzie podanie metody wyceny i zabezpieczania instrumentów finansowych na rynku bez możliwości arbitrażu. Jak zawsze, instrument europejski utożsamiamy z wypłatą, którą otrzymuje jego posiadacz w określonej chwili T, wobec tego zaczniemy od ścisłej definicji wypłaty.

Definicja 3.6. Wypłatą (europejską) X w chwili T nazywamy dowolną $\mathcal{F}_T$–mierzalną zmienną losową.

Oznacza to, że wypłata europejska zależy od wiedzy zebranej na rynku. Gdy wypłata zależy od cen instrumentów podstawowych tzn. od S, to instrument nazywamy instrumentem pochodnym. Później zajmiemy się instrumentami, których nie da się opisać przy pomocy jednej wypłaty w momencie T.

Strategię $\varphi \in \Phi$ nazywamy **strategią replikującą** wypłatę X gdy

$$V_T(\varphi) = X,$$

czyli gdy wartość portfela w chwili T jest równa X. Wypłatę X nazywa się **osiągalną**, gdy istnieje strategia ją replikująca. Warto zauważyć, że wypłaty osiągalne tworzą podprzestrzeń liniową w zbiorze wypłat.

Mówimy, że wypłata jest **jednoznacznie replikowalna** w modelu $\mathcal{M}$, gdy dla dowolnych strategii φ, ψ replikujących X mamy $V_t(\varphi) = V_t(\psi)$ dla wszystkich t. Wtedy proces $V_t(\varphi)$ nazywamy **procesem replikującym** X lub **procesem bogactwa** X w $\mathcal{M}$. Jak wiemy, na rynku jednookresowym dwustanowym wszystkie wypłaty są osiągalne, istnieje dokładnie jedna strategia replikująca, więc wypłaty osiągalne są jednoznacznie replikowalne. W modelu rynku skończonego nie wszystkie wypłaty są osiągalne (patrz ćw. 3.10), ale wypłaty osiągalne są jednoznacznie replikowalne, choć nie oznacza to, że istnieje dokładnie jedna strategia replikująca (patrz zad. 3.9).

Twierdzenie 3.4. *Jeśli $\mathcal{M}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu, to każda wypłata X osiągalna w $\mathcal{M}$ jest jednoznacznie replikowalna w $\mathcal{M}$.*

Dowód. Nie wprost. Załóżmy, że istnieją strategie φ, ψ replikujące X, takie że dla pewnego $t < T$ mamy $V_u(\varphi) = V_u(\psi)$ dla $u < t$ i $V_t(\varphi) \neq V_t(\psi)$. Rozważymy dwa przypadki.

I. Niech $t > 0$ i niech $A = \{V_t(\varphi) > V_t(\psi)\}$. Bez straty ogólności można założyć, że $P(A) > 0$.

Niech $\zeta = V_t(\varphi) - V_t(\psi)$. Z definicji zmiennej losowej ζ wynika, że przyjmuje ona wartości dodatnie na zbiorze A. Udowodnimy, że strategia η zdefiniowana wzorami:

$$\eta_u = \begin{cases} \varphi_u - \psi_u & \text{dla } u \leqslant t, \\ \mathbf{1}_{A^c}(\varphi_u - \psi_u) + \mathbf{1}_A(\frac{\zeta}{S_t^0}, 0, \ldots, 0)' & \text{dla } u > t \end{cases}$$

jest strategią arbitrażową, a więc doprowadzimy do sprzeczności. Strategia η jest do chwili t równa różnicy strategii φ i ψ. Gdy w chwili t zrealizuje się zdarzenie A^c, to nie zmieniamy postępowania, a gdy zrealizuje się zdarzenie A to realizujemy nasz zysk i od chwili $t+1$ trzymamy wszystko w banku. Zaczniemy od wykazania, że strategia η jest samofinansująca się. Gdy $u < t$, to

$$\eta_u S_u = (\varphi_u - \psi_u)S_u = (\varphi_{u+1} - \psi_{u+1})S_u = \eta_{u+1}S_u,$$

przy czym w drugiej równości korzystamy z faktu, że φ i ψ są strategiami samofinansującymi się. Dla $u = t$ mamy:

$$\eta_t S_t = \varphi_t S_t - \psi_t S_t = V_t(\varphi) - V_t(\psi).$$

A ponieważ strategie φ, ψ replikujące X są samofinansujące się, więc

$$\begin{aligned} \eta_{t+1}S_t &= \mathbf{1}_{A^c}(\varphi_{t+1} - \psi_{t+1})' S_t + \mathbf{1}_A(\tfrac{\zeta}{S_t^0}, 0, \ldots, 0)S_t = \\ &= \mathbf{1}_{A^c}(\varphi_t S_t - \psi_t S_t) + \mathbf{1}_A \zeta = V_t(\varphi) - V_t(\psi), \end{aligned}$$

zatem $\eta_{t+1}S_t = \eta_t S_t$. Gdy $u > t$, to

$$\begin{aligned} \eta_u S_u &= [(\varphi_u - \psi_u)S_u]\mathbf{1}_{A^c} + \mathbf{1}_A \frac{\zeta}{S_t^0} S_u^0 = \\ &= \mathbf{1}_{A^c}(\varphi_{u+1} - \psi_{u+1})S_u + \mathbf{1}_A \frac{\zeta}{S_t^0} S_u^0 = \eta_{u+1}S_u. \end{aligned}$$

Czyli strategia η jest samofinansująca się. Teraz sprawdzimy, że η jest arbitrażem. Z założenia $0 = V_0(\varphi) - V_0(\psi) = V_0(\eta)$. Dalej, ponieważ strategie φ, ψ replikują X, więc

$$V_T(\eta) = \mathbf{1}_{A^c}(\varphi_T - \psi_T)S_T + \mathbf{1}_A \frac{\zeta}{S_t^0} S_T^0 = \mathbf{1}_A \frac{\zeta}{S_t^0} S_T^0 \geqslant 0.$$

Nieujemność wynika z dodatniości zmiennej losowej ζ na zbiorze A i dodatniości S^0. A ponieważ $P(V_T(\eta) > 0) = P(A) > 0$, więc η jest arbitrażem.

II. Przypadek $t = 0$ zostawimy jako zadanie (ćw. 3.11). □

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Ćwiczenie 3.2. Skonstruować rynek skończony, dla którego wszystkie wypłaty są jednoznacznie replikowalne i istnieje dodatnia wypłata Y, dla której istnieje strategia φ, taka że $V_0(\varphi) < 0$ oraz $V_T(\varphi) = Y > 0$.

Wskazówka. Patrz zad. (2.4).

Analogicznie do przypadku rynku dwustanowego wprowadzamy definicję ceny arbitrażowej.

Definicja 3.7. Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy proces replikujący wypłaty osiągalnej X nazywamy arbitrażową ceną X na rynku $\mathcal{M}$ i oznaczamy przez $\Pi_t(X)$, $t \in \mathcal{T}$.

Uwaga 3.3. Z tw. 3.4 wynika, że cena arbitrażową $\Pi_t(X)$ wypłaty osiągalnej X istnieje zawsze i jest wyznaczona jednoznacznie.

3.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 3.3. Udowodnić uwagę 3.1, czyli:

$$\begin{aligned} \varphi \in \Phi \qquad & \Longleftrightarrow \quad V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t) \text{ dla każdego } t \\ & \Longleftrightarrow \quad (\varphi_{t+1} - \varphi_t)S_t = 0 \quad \text{dla każdego } t. \end{aligned}$$

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) &= \varphi_{t+1}S_{t+1} - \varphi_{t+1}S_t + \varphi_{t+1}S_t - \varphi_t S_t = \\ &= \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t) + (\varphi_{t+1} - \varphi_t)S_t. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.4. Udowodnić, że strategia φ polegająca na kupieniu za własne pieniądze i-tej akcji w chwili 0, sprzedaniu jej w chwili τ, $\tau < T$ i włożeniu uzyskanych pieniędzy do banku jest samofinansująca się, gdy

a) τ jest ustaloną chwilą czasu,

b) τ jest momentem stopu.

Rozwiązanie. Gdy $\tau \equiv u$, to strategia $\varphi = \varphi^{(u)}$ ma postać

$$\varphi_t^0 = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t \leqslant u, \\ \frac{S_u^i}{B_u}, & \text{gdy } t > u. \end{cases} \qquad \varphi_t^i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \leqslant u, \\ 0, & \text{gdy } t > u. \end{cases}$$

oraz $\varphi_t^j \equiv 0$ dla $j \notin \{0, i\}$. Wykażemy, że zachodzi (3.6). Istotnie,
$(\varphi_{t+1} - \varphi_t)S_t = 0$ dla $t \neq u$, bo $\varphi_{t+1} - \varphi_t = 0$.
Dla $t = u$, z definicji φ, zachodzi $(\varphi_{u+1} - \varphi_u)S_u = S_u^i - S_u^i = 0$.
b) Ponieważ $\tau = \sum_{k=0}^{T-1} k\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}$, więc $\varphi = \sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}\varphi^{(k+1)}$. Zatem

$$(\varphi_{t+1} - \varphi_t)S_t = \sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\varphi_{t+1}^{(k)} - \varphi_t^{(k)})S_t = 0,$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z punktu a). Do sprawdzenia została prognozowalność procesu φ.

Ćwiczenie 3.5. Na rynku istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje portfel samofinansujący się φ spełniający

$$P(V_T^*(\varphi) \geqslant V_0(\varphi)) = 1, \quad P(V_T^*(\varphi) > V_0(\varphi)) > 0.$$

Rozwiązanie. $\Rightarrow$ oczywiste.
$\Leftarrow$ Gdy φ ma własności podane w zadaniu, $\gamma = (V_0(\varphi), 0, \ldots, 0)$, to portfel $\psi = \varphi - \gamma$ jest portfelem arbitrażowym. Istotnie, $\psi \in \Phi$, bogactwo początkowe

$$V_0(\psi) = V_0(\varphi) - V_0(\gamma) = 0$$

oraz

$$V_T^*(\psi) = V_T^*(\varphi) - V_T^*(\gamma) = V_T^*(\varphi) - V_0(\varphi),$$

więc z własności portfela φ mamy

$$P(V_T^*(\psi) \geqslant 0) = 1, \quad P(V_T^*(\psi) > 0) > 0.$$

Ćwiczenie 3.6. Udowodnić, że gdy istnieje strategia φ spełniająca $V_0(\varphi) < 0$ i $\forall \omega \in \Omega$ zachodzi $V_T(\varphi)(\omega) \geqslant 0$, to istnieje arbitraż.

Ćwiczenie 3.7. [*Prawo jednej ceny*] Udowodnić, że na rynku bez możliwości arbitrażu portfele mające tę samą wartość w chwili T muszą mieć tę samą wartość w chwili 0 (czyli muszą mieć tę samą cenę).

Rozwiązanie. Niech φ, ψ będą takie, że $V_T(\varphi) = V_T(\psi)$. Załóżmy, nie wprost, że $V_0(\varphi) < V_0(\psi)$. Wtedy portfel $\kappa = \varphi - \psi$ spełnia $V_0(\kappa) = V_0(\varphi) - V_0(\psi) < 0$ oraz $V_T(\kappa) = 0$, z czego wynika istnienie portfela arbitrażowego — sprzeczność z założeniem. Z następnego zadania wynika, że na rynku bez możliwości arbitrażu wystarczy rozpatrywać jeden rachunek bankowy.

Ćwiczenie 3.8. Gdy na rynku (S, Φ) bez możliwości arbitrażu S^0, S^1 są aktywami bez ryzyka, tj. S^1 też spełnia warunek (3.1) z pewnym r_1, to $S^0 = S^1$.

Rozwiązanie. Z założenia wynika, że $S_t^1 = (1 + r_1)^t$ dla pewnego $r_1 \geqslant 0$. Gdy $r > r_1$, to portfel $(1, -1, 0, \ldots, 0)$ jest arbitrażem, a gdy $r < r_1$, to portfel $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$ jest arbitrażem.

Ćwiczenie 3.9. Podać przykład rynku bez możliwości arbitrażu i dwu różnych strategii samofinansujących się o tej samej wartości w chwili końcowej T.

Rozwiązanie. *Przykład.* Niech $T = 1$, stopa procentowa bez ryzyka wynosi 0% i na rynku są 2 akcje przyjmujące wartości:

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 4, \quad S_1^1(\omega_1) = 5, \ S_1^1(\omega_2) = 3. \\ S_0^2 &= 6, \quad S_1^2(\omega_1) = 7, \ S_1^2(\omega_2) = 5. \end{aligned}$$

Wtedy $\varphi = (5, 5, 0)$ i $\psi = (1, 3, 2)$ replikują tę samą wypłatę.

Ćwiczenie 3.10. Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 20% i jest jedna akcja mająca proces cen postaci:

$$S_0^1 = 25, \ S_1^1(\omega_1) = 20, \ S_1^1(\omega_2) = 40, \ S_1^1(\omega_3) = 35.$$

Czy wszystkie wypłaty są na tym rynku osiągalne?

Ćwiczenie 3.11. Uzupełnić szczegóły drugiej części dowodu tw. 3.4.

Rozwiązanie. Niech $t = 0$ i niech $V_0(\varphi) > V_0(\psi)$. Portfel

$$\eta_u = (\psi_u - \varphi_u) + (V_0(\varphi) - V_0(\psi), 0, \ldots, 0)$$

jest strategią samofinansującą się (kombinacja liniowa strategii samofinansujących się), dla której

$$V_0(\eta) = V_0(\psi) - V_0(\varphi) + (V_0(\varphi) - V_0(\psi))S_0^0 = 0,$$

bo $S_0^0 = 1$, oraz

$$V_T(\eta) = V_T(\psi) - V_T(\varphi) + (V_0(\varphi) - V_0(\psi))S_T^0 = (V_0(\varphi) - V_0(\psi))S_T^0 > 0,$$

więc η jest arbitrażem, co kończy dowód.
Wynik ten jest też natychmiastową konsekwencją ćw. 3.7.

4. Miara martyngałowa dla rynku skończonego

Wyznaczenie ceny arbitrażowej osiągalnej wypłaty X poprzez znalezienie strategii replikującej jest często bardzo trudne, szczególnie gdy mamy długi horyzont czasowy T i dużo scenariuszy.

Przedstawimy teraz alternatywne podejście do tego problemu — metodę martyngałową. Spotkaliśmy się już z nią w rozdz. 2, w którym była przedstawiona jako jedna z możliwych metod wyceny, choć nie było widać jej zalet w porównaniu z metodą replikacji. Do badania rynku skończonego, a więc bardziej skomplikowanego, okaże się ona bardzo przydatna. Metoda ta pozwala na wypisanie jawnych wzorów na $\Pi_t(X)$ za pomocą wartości oczekiwanych.

4.1. Dyskontowanie

Często przy badaniu rynków finansowych wyróżniamy instrument pierwotny o numerze 0, którego zadaniem jest mierzenie wartości pieniądza w czasie (proces dyskontujący, czynnik dyskontujący, *numéraire*). My przyjmiemy, że S^0 odpowiada lokacie pieniędzy w banku na znany procent r tzn. $S^0 = B$. W dalszym ciągu na oznaczenie rynku będziemy stosowali wymiennie $\mathcal{M} = ((B, S^1, \ldots, S^k), \Phi)$ lub $\mathcal{M} = ((S^0, \ldots, S^k), \Phi)$ lub $\mathcal{M} = (S, \Phi)$. Dysponując procesem dyskontującym wprowadzimy pojęcie zdyskontowanego procesu cen:

Definicja 4.1. Wektor $S^* = (1, S^{*1}, \ldots, S^{*k})'$, gdzie $S_t^{*i} = \frac{S_t^i}{B_t}$ dla $i = =1, \ldots, k$, nazwiemy zdyskontowanym procesem cen.

Okazuje się, że samofinansowalność strategii można sprawdzić badając zachowanie zdyskontowanego procesu bogactwa.

Lemat 4.1. *Strategia φ jest samofinansująca się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $t \leqslant T$ zachodzi równość*:

$$V_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1}^* - S_u^*). \tag{4.1}$$

Dowód. Ustalmy strategię φ. Warunek $\varphi \in \Phi$ oznacza z definicji

$$\varphi_u S_u = \varphi_{u+1} S_u \quad \text{dla} \qquad u = 0, 1, \ldots, T-1,$$

który jest równoważny warunkowi

$$\varphi_u S_u^* = \varphi_{u+1} S_u^* \quad \text{dla} \qquad u = 0, 1, \ldots, T-1,$$

co z kolei jest równoważne, jak pokazaliśmy w dowodzie tw. 3.1 (udowodnionego dla dowolnych cen S, a więc możemy wziąć S^* zamiast S) faktowi:

$$\forall_t \quad \varphi_t S_t^* = \varphi_0 S_0^* + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1}^* - S_u^*),$$

a jest to warunek (4.1), gdyż $\varphi_t S_t^* = \frac{\varphi_t S_t}{B_t} = V_t^*(\varphi)$. □

Z lematu 4.1 wynika

Wniosek 4.1. *Strategia φ jest samofinansująca się wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich t zachodzi:*

$$V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S^*_{t+1} - S^*_t). \tag{4.2}$$

Wniosek 4.2. *Zmiana czynnika dyskontującego nie zmienia klasy portfeli samofinansujących się.*

Dowód. W lemacie 4.1 rozpatrzone zostało dyskontowanie przez proces B, ale to samo zachodzi, gdy weźmiemy dowolne S^i, takie że $S^i_t > 0$ dla każdego t, gdyż następujące warunki są równoważne:

i) $\varphi_t S_t = \varphi_{t+1} S_t$ dla każdego t,

ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \varphi^j_t \frac{S^j_t}{S^i_t} = \sum_{j=0}^{k} \varphi^j_{t+1} \frac{S^j_t}{S^i_t}$ dla każdego t,

iii) $\varphi_t \overline{S}_t = \varphi_{t+1} \overline{S}_t$ dla każdego t, gdzie $\overline{S}_t = S_t (S^i_t)^{-1}$.

□

Ta uwaga jest przydatna, gdyż czasami wygodnie jest zmienić jednostki, w których mierzone są wartości instrumentów podstawowych i pochodnych (bierzemy inny proces dyskontujący).

4.2. Miara martyngałowa, arbitraż

Teraz wprowadzimy podstawowe pojęcie dla rozważań dotyczących wyceny, a mianowicie pojęcie miary martyngałowej.

Definicja 4.2. Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ równoważną z P nazywa się miarą martyngałową dla

— zdyskontowanego procesu cen S^*, gdy S^* jest P^*-martyngałem względm filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$,

— rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdy dla każdej strategii $\varphi \in \Phi$ proces $V^*(\varphi)$ zadany wzorem

$$V^*_t(\varphi) = \frac{V_t(\varphi)}{B_t},$$

czyli zdyskontowany proces bogactwa, jest P^*-martyngałem względm filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$.

Symbolem $\mathcal{P}(S^*)$ (odpowiednio $\mathcal{P}(\mathcal{M})$) będziemy oznaczać klasę miar martyngałowych dla procesu S^* (odpowiednio dla rynku $\mathcal{M}$).

Uwaga 4.1. a) Warto zauważyć, że klasy $\mathcal{P}(S^*)$, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ zależą od czynnika dyskontującego. (patrz ćw. 2.12).

b) Dla przestrzeni probabilistycznej Ω o skończonej liczbie elementów miara probabilistyczna Q jest równoważna z P wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(\omega) > 0$ dla kazdego ω.

Wprost z definicji miary martyngałowej dla rynku mamy

Wniosek 4.3. *Jeśli $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, to dla dowolnego portfela $\varphi \in \Phi$ i dowolnej chwili t*

$$V_t(\varphi) = B_t E_{P^*}(V_T(\varphi) B_T^{-1} | \mathcal{F}_t). \tag{4.3}$$

Okazuje się, że zachodzi równość zbiorów $\mathcal{P}(S^*)$, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Twierdzenie 4.1. *Miara P^* jest miarą martyngałową dla rynku $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy P^* jest miarą martyngałową dla zdyskontowanego procesu cen.*

Dowód. Niech P^* będzie miarą martyngałową dla procesu cen. Weźmy dowolne $\varphi \in \Phi$. Korzystając z (4.2) i z prognozowalności $\varphi \in \Phi$ mamy

$$E_{P^*}(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi)|\mathcal{F}_t) = \varphi_{t+1} E_{P^*}(S^*_{t+1} - S^*_t|\mathcal{F}_t) = 0.$$

Zatem $V^*_t(\varphi)$ jest, dla dowolnego $\varphi \in \Phi$, P^*-martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ tzn. $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Należy jeszcze udowodnić, że jeśli P^* jest miarą martyngałową dla rynku, to jest miarą martyngałową dla procesu cen. Weźmy strategię φ polegającą na kupnie jednostki i-tego instrumentu bazowego na początku i trzymaniu go do końca, tzn. $\varphi^i_t \equiv 1$, $\varphi^j_t \equiv 0$, dla $j \neq i$. Jest to strategia samofinansująca się. Zatem $V^*_t(\varphi)$ jest P^*-martyngałem i

$$0 = E_{P^*}(V^*_{t+1}(\varphi) - V^*_t(\varphi)|\mathcal{F}_t) = E_{P^*}(\varphi_{t+1}(S^*_{t+1} - S^*_t)|\mathcal{F}_t). \tag{4.4}$$

Ponadto zachodzi

$$\varphi_{t+1}(S^*_{t+1} - S^*_t) = S^{i*}_{t+1} - S^{i*}_t,$$

zatem z (4.4) mamy

$$E_{P^*}(S^{i*}_{t+1} - S^{i*}_t|\mathcal{F}_t) = 0.$$

Czyli dla $i \in \{1, \ldots, k\}$ współrzędna S^{i*}_t jest P^*-martyngałem, tzn. S^*_t jest P^*-martyngałem, więc $P^* \in \mathcal{P}(S^*)$. □

Twierdzenie to pozwala sprowadzić badanie czy P^* jest miarą martyngałową dla rynku, a więc czy dla wszystkich $\varphi \in \Phi$ procesy $V^*(\varphi)$ są P^*-martyngałami, do badania czy proces zdyskontowanych cen, a więc jeden proces, jest P^*–martyngałem. Od tego momentu będziemy mówić o mierze martyngałowej opuszczając dalsze rozróżnienie, gdyż jest ono nieistotne.

Jak pokazuje następne twierdzenie, badanie możliwości arbitrażu sprowadza się do badania istnienia miar martyngałowych:

Twierdzenie 4.2. (Pierwsze podstawowe twierdzenie matematyki finansowej). *Rynek $\mathcal{M}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy istnieje miara martyngałowa.*

Dowód. Dostateczność. Weźmy $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ (z założenia takie P^* istnieje). Korzystając z (4.3) otrzymujemy, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu. Istotnie, gdyby istniał arbitraż φ, to $V_0(\varphi) = 0$ oraz $V_T(\varphi) \geqslant 0$ i $P(V_T(\varphi) > 0) > 0$. A że $B_T^{-1} > 0$, to

$$E_{P^*}(V_T(\varphi)B_T^{-1}) > 0,$$

a więc prawa strona wzoru (4.3) dla $t = 0$ byłaby dodatnia, a lewa równałaby się zeru. Sprzeczność.

Zajmiemy się teraz koniecznością. Zbiór Ω jest skończony, więc każdą zmienną losową $X : \Omega \to \mathbb{R}$ można utożsamiać z wektorem $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, gdzie $x_i = X(\omega_i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$. I na odwrót, wektor $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ wyznacza zmienną losową X, a mianowicie przyjmujemy $X(\omega_i) = x_i$ dla każdego i. Niech

$$V := \{x \in \mathbb{R}^d : x \geqslant 0, x \neq 0\}$$

(przypomnijmy iż $x \geqslant 0$ oznacza, że $x_i \geqslant 0$ dla każdego i). Każdy element V wyznacza zmienną losową nieujemną i na odwrót, każdej zmiennej losowej nieujemnej (poza zmienną losową równą stale zeru) odpowiada jeden element ze zbioru V. Niech

$$\begin{aligned} W &:= \{x \in \mathbb{R}^d \forall_i \; x_i = G^*_T(\varphi)(\omega_i) \text{ dla pewnego } \varphi \in \Phi, \text{ takiego że } V_0(\varphi) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : x = V^*_T(\varphi) \text{ dla pewnego } \varphi \in \Phi, \quad V_0(\varphi) = 0\}. \end{aligned}$$

Zatem elementem W jest, przy zastosowaniu utożsamienia opisanego powyżej, zdyskontowany zysk w chwili T, gdy stosujemy strategię φ, dla której kapitał początkowy jest równy zeru, czyli elementami W są zdyskontowane zyski (w chwili T) strategii φ, których kapitał początkowy jest równy zeru.

Jak łatwo zauważyć, fakt nieistnienia arbitrażu można zapisać w terminach V i W, a mianowicie

$$\text{nie istnieje arbitraż wtedy i tylko wtedy, gdy } V \cap W = \emptyset.$$

Zatem z założeń twierdzenia wynika, że $V \cap W = \emptyset$. Ponadto W jest liniową podprzestrzenią $\mathbb{R}^d$, a

$$K := \{x \in V : \sum_{i=1}^{d} x_i = 1\}$$

jest zbiorem zwartym i wypukłym. Oczywiście $K \subset V$, więc $K \cap W = \emptyset$. Korzystając z twierdzenia o oddzielaniu można ściśle oddzielić zbiór zwarty i wypukły od podprzestrzeni liniowej. Zatem istnieje $y \in W^{\perp}$ (tj. element y ortogonalny do W, czyli taki że $y \cdot w = 0$, $\forall w \in W$), taki że:

$$\forall x \in K \quad y \cdot x > 0. \tag{4.5}$$

Wektor e_i mający 1 na i-tym miejscu i zero na pozostałych należy do K, więc z (4.5) mamy $0 < y \cdot e_i = y_i$. Zdefiniujmy miarę probabilistyczną

$$P^*(\{\omega_i\}) = a y_i,$$

gdzie $a = (\sum_{j=1}^{d} y_j)^{-1}$. Jest ona równoważna z P (bo $P^*(\{\omega_i\}) > 0$ dla każdego i). Teraz wykażemy, że P^* jest miarą martyngałową. Dla dowolnego procesu prognozowalnego $(\varphi^1, \ldots, \varphi^k)$, korzystając z tw. 3.2 dobieramy proces prognozowalny φ^0, taki że $\varphi = (\varphi^0, \ldots, \varphi^k)$ jest portfelem samofinansującym się o kapitale początkowym równym zeru. Wtedy oczywiście

$$(G_T^*(\varphi)(\omega_1), \ldots, G_T^*(\varphi)(\omega_d)) \in W,$$

a ponieważ $ay \in W^{\perp}$, więc

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{d} a y_j G_T^*(\varphi)(\omega_j) = \sum_{j=1}^{d} P^*(\{\omega_j\}) G_T^*(\varphi)(\omega_j) = E_{P^*}(G_T^*(\varphi)) = \\ &= E_{P^*}\Big(\sum_{j=1}^{T} \varphi_j (S_j^* - S_{j-1}^*)\Big), \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej równości skorzystaliśmy z lematu 4.1. Stąd wynika, że dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i dla dowolnego procesu prognozowalnego ograniczonego ψ mamy

$$E_{P^*}(\sum_{j=1}^{T} \psi_j (S_j^{i^*} - S_{j-1}^{i^*})) = 0,$$

a więc (S^{i*}), $i = 1, \ldots, k$, jest P^*-martyngałem. Czyli P^* jest miarą martyngałową. $\square$

4.3. Wycena, zupełność rynku, kontrakty forward

Twierdzenie 4.3. *Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy cena arbitrażowa w chwili t osiągalnej na rynku $\mathcal{M}$ wypłaty X jest dana wzorem*

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}\Big(\frac{X}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\Big), \tag{4.6}$$

dla dowolnej miary martyngałowej P^*.

Dowód. Aby udowodnić (4.6), weźmy strategię φ replikującą wypłatę X. Wtedy z definicji ceny arbitrażowej, z (4.3) i z tego, że $X = V_T(\varphi)$ otrzymujemy:

$$\Pi_t(X) = V_t(\varphi) = B_t E_{P^*}(V_T(\varphi)B_T^{-1}|\mathcal{F}_t) = B_t E_{P^*}(XB_T^{-1}|\mathcal{F}_t).$$

Ponieważ proces replikujący $V_t(\varphi)$ jest wyznaczony jednoznacznie i równość (4.3) jest prawdziwa dla każdej miary $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, więc wzór (4.6) nie zależy od wyboru miary martyngałowej dla rynku. □

Wzór (4.6) nazywamy wzorem martyngałowym na cenę lub formułą wyceny w warunkach powszechnej obojętności względem ryzyka. W szczególności z (4.6) i liniowości wartości oczekiwanej wynika

Uwaga 4.2. Na rynku bez możliwości arbitrażu cena arbitrażowa jest operatorem liniowym na przestrzeni liniowej wypłat osiągalnych, czyli gdy X i Y są wypłatami osiągalnymi, to

$$\Pi_t(X+Y) = \Pi_t(X) + \Pi_t(Y). \tag{4.7}$$

Wniosek 4.2 można też otrzymać korzystając z definicji ceny arbitrażowej i własności iloczynu skalarnego.

Wniosek 4.4. (Parytet kupna-sprzedaży). *Na rynku bez możliwości arbitrażu, gdy europejskie opcje kupna i sprzedaży (dla tej samej akcji) z tą samą ceną wykonania K są osiągalne, to ich ceny są związane wzorem:*

$$C_0(K) - P_0(K) = S_0 - \frac{K}{B_T}, \tag{4.8}$$

gdzie $C_0(K)$ (odp. $P_0(K)$) oznacza cenę w chwili 0 europejskiej opcji kupna (odp. sprzedaży) z ceną wykonania K.

Wzór (4.8) wynika z równości (1.4) i wzoru (4.7) na cenę.

Z tw. 4.2 łatwo wynika

Wniosek 4.5. *na rynku bez możliwości arbitrażu wycena wypłaty osiągalnej za pomocą ceny arbitrażowej (wzoru (4.6)) tworzy zgodny system cen, w tym sensie, że rynek rozszerzony o instrument bazowy o cenie $S^{k+1} = \Pi(X)$ jest dalej rynkiem bez możliwości arbitrażu.*

Ćwiczenie 4.1. Udowodnić wniosek 4.5.

Z własności (4.7) często korzysta się, gdy wypłatę potrafimy przedstawić jako kombinację lub jako granicę kombinacji wypłat, które potrafimy wycenić.

Przykład 4.1. Znajdziemy na rynku bez możliwości arbitrażu ceny wypłat w chwili T związanych z instrumentem podstawowym o cenie S (tj. $S = S^i$ dla pewnego $i \geqslant 1$) w następujący sposób:

a) $X = \min(\max(K_1, S_T), K_2)$ (jest to tzw. opcja *collar*),

b) $Y = \max(S_T - K_1, 0) - (K_2 - K_1)$, (jest to tzw. opcja bostońska),

gdzie K_1 i K_2 są stałymi, przy założeniu, że wypłaty X i Y są osiągalne.

Szukamy profilu wypłat badając własności X (odp. Y), tj. analizując postać wypłaty w zależności od ceny instrumentu bazowego, na poszczególnych przedziałach (warto zrobić rysunek). Znajdujemy, że dla $K_1 < K_2$:

$$X = (K_1 - S_T)^+ - (K_2 - S_T)^+ + K_2, \tag{4.9}$$

a gdy $K_1 \geqslant K_2$, to $X = K_2$. Wypłata Y nie zależy od relacji pomiędzy K_1 i K_2:

$$Y = (S_T - K_1)^+ - (K_2 - K_1).$$

Stąd i z liniowości ceny otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Pi_0(X) &= \begin{cases} P_0(K_1) - P_0(K_2) + K_2 B_T^{-1}, & \text{gdy } K_1 < K_2, \\ K_2 B_T^{-1}, & \text{gdy } K_1 \geqslant K_2. \end{cases} \\ \Pi_0(Y) &= C_0(K_1) - (K_2 - K_1) B_T^{-1}. \end{aligned}$$

Oczywiście profil wypłat może mieć różne przedstawienia, np. X można dla $K_1 < K_2$ przedstawić w postaci

$$X = (S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ + K_1, \tag{4.10}$$

ale (4.9) i (4.10) prowadzą do tej samej ceny (co widać z parytetu).

Przykład 4.2. a) Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 20% i jest jedna akcja mająca proces cen postaci:

$$S_0^1 = 30,\ S_1^1(\omega_1) = 20,\ S_1^1(\omega_2) = 40,\ S_1^1(\omega_3) = 35.$$

Zbadajmy, czy na tym rynku istnieje arbitraż.

Oczywiście przy badaniu własności tego rynku nie jest istotna opinia inwestora o szansach scenariuszy. W celu zbadania, czy na tym rynku istnieje arbitraż, zbadamy, czy istnieje miara martyngałowa. Rynek jest jednookresowy, więc szukamy rozwiązania układu:

$$\begin{cases} 20p_1 + 40p_2 + 35p_3 = 30 \cdot 1{,}2, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ p_i > 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie ma postać

$$p_1 = \frac{1}{5} - \frac{p}{4}, \quad p_2 = \frac{4}{5} - \frac{3p}{4}, \quad p_3 = p,$$

przy czym $p \in (0, \frac{4}{5})$. Zatem istnieje nieskończenie wiele miar martyngałowych, czyli nie istnieje arbitraż.

b) Co będzie, gdy na rynku pojawi się jeszcze jedna akcja:

$$S_0^2 = 30,\ S_1^2(\omega_1) = 25,\ S_1^2(\omega_2) = 50,\ S_1^2(\omega_3) = 35.$$

Teraz trzeba szukać rozwiązania układu:

$$\begin{cases} 20p_1 + 40p_2 + 35p_3 = 30 \cdot 1{,}2, \\ 25p_1 + 50p_2 + 35p_3 = 30 \cdot 1{,}2, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ p_i > 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ponieważ z pierwszych trzech równań otrzymujemy, że $p_1 = -2p_2$ i $p_3 = 36/35$, więc nie istnieje rozwiązanie spełniające $p_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Zatem na rynku istnieje arbitraż. Znajdziemy teraz postać portfela arbitrażowego. Szukamy portfela (α, β, γ) takiego, że

$$\begin{cases} \alpha + 30\beta + 30\gamma = 0, \\ 1{,}2\alpha + 20\beta + 25\gamma \geqslant 0, \\ 1{,}2\alpha + 40\beta + 50\gamma \geqslant 0, \\ 1{,}2\alpha + 35\beta + 35\gamma \geqslant 0, \end{cases}$$

przy czym choć jedna nierówność jest ostra. Stąd otrzymujemy, że

$$(-30\alpha - 30\beta, \beta, \gamma), \ \text{g}dy \quad \gamma > 0, \beta \in [-7/2\gamma, -\gamma]$$

jest portfelem arbitrażowym np. portfel $\varphi = (0, -1, 1)$ jest arbitrażem.

Gdy się przyjrzeć dokładniej cenom, to widać, że $S_0^1 = S_0^2$ i w chwili 1 ceny drugiej akcji są nie mniejsze od cen pierwszej, skąd wynika natychmiast, że portfel $\varphi = (0, -1, 1)$ jest arbitrażem.

Uwaga 4.3. Powyższy przykład ilustruje fakt, że przy połączeniu dwóch rynków bez możliwości arbitrażu (w jeden) może się zdarzyć, że otrzymany rynek stanie się rynkiem z arbitrażem.

Gdy mamy rynek bez możliwości arbitrażu, to następnym pojawiającym się pytaniem jest pytanie o wypłaty osiągalne, gdyż takie wypłaty umiemy wyceniać. Okazuje się, że patrząc na zbiór miar martyngałowych potrafimy określić kiedy wszystkie wypłaty są osiągalne.

Definicja 4.3. Rynek $\mathcal{M}$ nazywamy zupełnym, gdy każda wypłata jest osiągalna na tym rynku.

Twierdzenie 4.4. (Drugie podstawowe twierdzenie matematyki finansowej). *Rynek bez możliwości arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa.*

Dowód. Konieczność. Niech X będzie dowolną zmienną losową, a więc dowolną wypłatą. Wypłata $Y = XB_T$ jest osiągalna (bo rynek jest zupełny). Także $P(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ (co wynika z braku możliwości arbitrażu i tw. 4.2). Zatem dla $P^* \in \mathcal{P}(M)$ mamy

$$\Pi_0(Y) = B_0 E_{P^*}(Y B_T^{-1}) = E_{P^*}(X).$$

Gdy miary $P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}(M)$, to

$$E_{P_1^*}(X) = \Pi_0(Y) = E_{P_2^*}(X).$$

Stąd, biorąc $X = \mathbf{1}_A$, dla $A \in \mathcal{F}_T$, mamy

$$P_1^*(A) = P_2^*(A).$$

Wobec dowolności X, a więc i A mamy $P_1^* = P_2^*$.

Dostateczność. Dowód nie wprost. Załóżmy, że rynek jest niezupełny. Wtedy istnieje nieosiągalna wypłata X. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą zmiennych losowych zdefiniowaną następująco

$$\mathcal{A} = \{V_0(\varphi) + G_T^*(\varphi) : \varphi \in \Phi\}.$$

Zatem $\mathcal{A}$ jest zbiorem zdyskontowanych wypłat otrzymanych za pomocą strategii samofinansujących się przy dopuszczeniu dowolnego kapitału początkowego. $\mathcal{A}$ jest podzbiorem właściwym zbioru wszystkich zmiennych losowych L^0, gdyż $Y = \frac{X}{B_T}$ nie należy do $\mathcal{A}$. Istotnie, gdyby Y należało do $\mathcal{A}$, to

$$Y = V_0(\varphi) + G_T^*(\varphi)$$

dla pewnego $\varphi \in \Phi$, a więc z lematu 4.1 zachodziłoby $Y = V_T^*(\varphi)$, czyli $X = YB_T = V_T(\varphi)$, zatem X byłoby osiągalne.

Niech P^* będzie miarą martyngałową. Wszystkie zmienne losowe są P^*–całkowalne z kwadratem (bo Ω jest zbiorem skończonym) i możemy zdefiniować iloczyn skalarny wzorem

$$(X, Y) := E_{P^*}(XY).$$

Ponieważ $\mathcal{A}$ jest podprzestrzenią liniową $L^2(P^*)$ oraz $\mathcal{A} \neq L^2(P^*)$, więc istnieje zmienna losowa Z różna od 0, ortogonalna do $\mathcal{A}$. Ponieważ $1 \in \mathcal{A}$ (bierzemy kapitał początkowy 1 i nic nie robimy, czyli $\varphi^0 \equiv 1$, $\varphi^i \equiv 0$ dla $i = 1, 2, \dots, k$), więc zmienna losowa Z, jako ortogonalna do $\mathcal{A}$, ma średnią zero

$$E_{P^*} Z = 0. \tag{4.11}$$

Zdefiniujmy miarę probabilistyczną Q na podzbiorach Ω wzorem

$$Q(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty}\right) P^*(\{\omega\}), \tag{4.12}$$

gdzie $\|Z\|_\infty = \max_i |Z(\omega_i)|$. Q jest miarą probabilistyczną równoważną z P, bo $Q(\{\omega\}) > 0$ dla każdej ω i z (4.11) otrzymujemy

$$Q(\Omega) = E_Q 1 = E_{P^*}\left(1 + \frac{Z}{2\|Z\|_\infty}\right) = 1.$$

Oczywiście $Q \neq P^*$, bo Z jest zmienną losową niezerową. Udowodnimy teraz, że Q jest miarą martyngałową.
W tym celu weźmy dowolny proces prognozowalny $(\psi^1, \dots, \psi^k)$. Korzystając z tw. 3.2 dobieramy proces prognozowalny ψ^0, taki że $\psi = (\psi^0, \dots, \psi^k)$ jest portfelem samofinansującym się o zerowym kapitale początkowym. Z definicji Q otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_Q(\sum_{j=1}^T \psi_j(S_j^* - S_{j-1}^*)) &= E_{P^*}(\sum_{j=1}^T \psi_j(S_j^* - S_{j-1}^*)) + \\ &+ \frac{1}{2\|Z\|_\infty} E_{P^*}(Z(\sum_{j=1}^T \psi_j(S_j^* - S_{j-1}^*)). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Pierwszy składnik z prawej strony wzoru (4.13) jest równy zero, gdyż S^* jest P^* martyngałem. Drugi składnik sumy z prawej strony (4.13) jest także równy zeru, gdyż

$$\sum_{j=1}^T \psi_j(S_j^* - S_{j-1}^*) \in \mathcal{A},$$

a Z jest zmienną losową ortogonalną do $\mathcal{A}$ w $L^2(P^*)$. Zatem S^* jest Q-martyngałem, a więc Q jest miarą martyngałową różną od P^*. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa. $\square$

Podkreślmy jeszcze raz, że zupełność jest bardzo ważną cechą rynku, gdyż na takim rynku potrafimy wycenić w sposób jednoznaczny każdą wypłatę, a ponadto korzystając z faktu, że twierdzenie o reprezentacji martyngałów (zachodzące, gdy Ω i czas są skończone) jest równoważne zupełności (patrz zad.4.6) można, korzystając z lematu 4.1 i twierdzenia o reprezentacji martyngałów, znaleźć strategię replikującą dla każdej wypłaty na rynku zupełnym.

Teraz podamy przykłady zastosowań udowodnionych przed chwilą twierdzeń.

Przykład 4.3. Rozważmy rynek z przykł. 4.2a. Jak widzieliśmy na tym rynku istnieje wiele miar martyngałowych, czyli rynek jest wolny od możliwości arbitrażu i nie wszystkie wypłaty są osiągalne.

Wypłata $X = (x_1, x_2, x_3)$ jest osiągalna, gdy istnieje portfel replikujący $\varphi = =(\beta, \alpha)$, tj. $V_T(\varphi) = X$, czyli musi zachodzić:

$$\begin{cases} 1{,}2\alpha + 20\beta = x_1, \\ 1{,}2\alpha + 40\beta = x_2, \\ 1{,}2\alpha + 35\beta = x_3. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy, że wypłaty osiągalne spełniają warunek:

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \tag{4.14}$$

Wycenimy teraz wypłatę osiągalną. Korzystając z (4.6) i (4.14) mamy:

$$\begin{aligned} \Pi_0(X) &= (1+r)^{-1} E_{P^*}(X) = \frac{1}{1{,}2}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) = && (4.15) \\ &= \frac{5}{6}\Big(\frac{-p(x_1 + 3x_2 - 4x_3)}{4} + \frac{x_1}{5} + \frac{4x_2}{5}\Big) = \frac{x_1 + 4x_2}{6}, && (4.16) \end{aligned}$$

a więc widzimy, że cena nie zależy od wyboru miary martyngałowej (co i tak było udowodnione w tw. 4.3). Wzór (4.15) sugeruje, że można w inny sposób znajdować wypłaty osiągalne. Mianowicie, cena zadana wzorem (4.15) nie może zależeć od parametru p (tw. 4.3), więc współczynnik przy p w (4.16) powinien się zerować. Jest to sugestia, którą udowodnimy w tw 4.5. I w ten sposób znowu dochodzimy do warunku (4.14).

Przykł. 4.3 sugeruje, że można udowodnić bardzo przydatną charakteryzację wypłat osiągalnych:

Twierdzenie 4.5. *Gdy rynek jest wolny od arbitrażu, to wypłata X jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ zadana wzorem*

$$f(P) = E_P(XB_T^{-1})$$

jest stała.

Dowód. Konieczność została udowodniona w tw. 4.3, a dostateczność pozostawiamy jako zadanie. □

Ćwiczenie 4.2. Na rynku dwuokresowym o czterech możliwych scenariuszach stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10%. Na tym rynku jest jedna akcja, której ceny są opisane przez proces S:

$$\begin{aligned} &S_0 = 100, \quad S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 120, \; S_1(\omega_3) = S_1(\omega_4) = 80, \\ &S_2(\omega_1) = 140, \; S_2(\omega_2) = 100, \; S_2(\omega_3) = 100, \; S_2(\omega_4) = 60. \end{aligned}$$

Znaleźć ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży z ceną wykonania $K = 105$.

Rozwiązanie. Zaczniemy od sprawdzenia, czy rynek jest wolny od arbitrażu. Znajdujemy miarę martyngałową P^* na $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$, a mianowicie

$$P^*(\{\omega_1\}) = 0{,}6, \quad P^*(\{\omega_2\}) = 0{,}15, \quad P^*(\{\omega_3\}) = 0{,}175, \quad P^*(\{\omega_4\}) = 0{,}075.$$

Miara martyngałowa jest jedyna, więc każda wypłata jest osiągalna. Ze wzoru (4.6) otrzymujemy

$$C_0 = \frac{1}{1{,}21} E_{P^*}(S_2 - 105)^+ = \frac{1}{1{,}21} 35 \cdot 0{,}6 = 17{,}36$$

oraz

$$P_0 = \frac{1}{1{,}21} E_{P^*}\ (105 - S_2)^+ = 4{,}13.$$

Oczywiście obliczając wartość P_0 można było skorzystać z parytetu.

Wycena kontraktu terminowego forward. Zajmiemy się teraz na rynku bez możliwości arbitrażu wyceną kontraktu terminowego forward na i-ty instrument o cenie S^i. Wartość tego kontraktu forward w chwili t będziemy oznaczać przez F_t^i. Kontrakt terminowy forward jest zadany przez wypłatę $X = S_T^i - K$, gdzie K jest ceną forward. Wypłata X jest osiągalna, zatem ze wzoru (4.6) znajdujemy cenę w chwili t wypłaty X

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}\Big(\frac{S_T^i - K}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = S_t^i - K(1+r)^{-(T-t)}. \tag{4.17}$$

Jak wiemy, cena forward K jest taką liczbą, że wartość kontraktu forward w chwili zero jest równa zeru, tj. $\Pi_0(X) = 0$, zatem ze wzoru (4.17) otrzymujemy, że cena forward wynosi

$$K = S_0^i B_T = S_0^i (1+r)^T.$$

Warto podkreślić, że cena forward nie ulega zmianie w czasie trwania kontraktu, natomiast wartość kontraktu (równa zeru w chwili zawierania) zmienia się w czasie, w szczególności zwykle jest niezerowa w chwili dostawy (rozliczania). Wstawiając do wzoru (4.17) cenę forward K mamy

Twierdzenie 4.6. *Wartość kontraktu terminowego forward na i-ty instrument bazowy wynosi w chwili t*

$$F_t^i = S_t^i - S_0^i B_t = S_t^i - S_0^i (1+r)^t.$$

4.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 4.3. Zanalizować rynek, czyli znaleźć wszystkie miary martyngałowe i wypłaty osiągalne ew. strategie arbitrażowe, gdy rynek jest jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi i z aktywami opisanymi w następujący sposób:

a) Na rynku jest 1 akcja, a oprocentowanie wynosi 10%. Ceny akcji są opisane przez

$$S_0 = 20, \quad S_1(\omega_1) = 25, \quad S_1(\omega_2) = 40, \quad S_1(\omega_3) = 22.$$

b) Stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i na rynku są 2 akcje przyjmujące wartości:

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 2, \quad S_1^1(\omega_1) = 1,\ S_1^1(\omega_2) = 3,\ S_1^1(\omega_3) = 2. \\ S_0^2 &= 5, \quad S_1^2(\omega_1) = 3,\ S_1^2(\omega_2) = 6,\ S_1^2(\omega_3) = 8. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. a) Nie warto sprawdzać, czy istnieje miara martyngałowa, wystarczy zauważyć, że zawsze $S_0(1+r) \leqslant S_1(\omega)$. Portfele postaci $\alpha > 0$ akcji i $-\alpha S_0$ jednostek w banku są portfelami arbitrażowymi.
b) Istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}2$. Zatem rynek jest zupełny i wszystkie wypłaty są osiągalne.

Ćwiczenie 4.4. Załóżmy, że rynek jednookresowy jest bezarbitrażowy. Udowodnić, że rynek jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba stanów w Ω (czyli scenariuszy) jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów wśród wektorów $B_1, S_1^1, \ldots, S_1^k$.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1^1(\omega_1) & \cdots & S_1^k(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_d) & S_1^1(\omega_d) & \cdots & S_1^k(\omega_d) \end{bmatrix}$$

Rynek jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $A\varphi = x$ ma rozwiązanie dla każdego x, co jest równoznaczne z warunkiem $rank(A) = d$, tj. z istnieniem d liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Ćwiczenie 4.5. Niech rynek będzie wolny od arbitrażu. Udowodnić, że jeśli funkcja $P \to E_P(XB_T^{-1})$ dla $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ jest stała, to wypłata X jest osiągalna.

Wskazówka. Skorzystać z idei drugiego podstawowego twierdzenia matematyki finansowej (tw. 4.4).

Ćwiczenie 4.6. Udowodnić, że rynek bez możliwości arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy proces M, który jest P^*-martyngałem dla pewnego $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ można przedstawić w postaci

$$M_t = M_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1}^* - S_u^*) \tag{4.18}$$

dla $t = 1, \ldots, T$, gdzie $(\varphi_u)_u$ jest procesem prognozowalnym.

Rozwiązanie. Z zupełności rynku wynika, że wypłata $X = M_T B_T$ jest replikowalna, więc istnieje strategia $\varphi \in \Phi$, taka że

$$M_T = V_T^*(\varphi) = V_0^* + \sum_{k=0}^{T-1} \varphi_{u+1}(S_{u+1}^* - S_u^*),$$

a stąd i z tego, że M jest martyngałem wynika (4.18).
$\Leftarrow$ Niech X będzie dowolną wypłatą. Zdefiniujmy martyngał

$$M_t = E_{P^*}(\frac{X}{B_T}|\mathcal{F}_t).$$

Z przedstawienia (4.18) i z lematu 4.1 wynika, że $\varphi \in \Phi$ i φ replikuje X.

W następnym zadaniu podajemy przykład ilustrujący fakt, że na rynku jednookresowym o przeliczalnej liczbie scenariuszy i aktywów może nie istnieć ani arbitraż, ani miara martyngałowa.

Ćwiczenie 4.7. Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, \}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, a prawdopodobieństwo P będzie takie że $P(\{\omega\}) > 0$. Rozważmy rynek jednookresowy, na którym stopa procentowa bez ryzyka $r = 0$. Ponadto na tym rynku jest przeliczalnie wiele aktywów, których ceny w chwili 0 są równe 1, tj. ceny spełniają $S_0^i = 1$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$, a w chwili końcowej T:

$$S_T^0 \equiv 1, \qquad S_T^i(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = i, \\ 2 & \omega = i+1, \\ 1 & w\ p.p., \end{cases}$$

dla $i = 1, 2, \ldots$. Ceny są elementami l^∞, więc portfele na tym rynku są elementami l^1. Udowodnić, że przy powyższych założeniach nie istnieje ani arbitraż, ani miara martyngałowa.

Rozwiązanie. Zaczniemy od wykazania, że nie istnieje arbitraż. Rozpatrzmy portfel $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \ldots) \in l^1$ taki, że

$$V_0(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i = 0 \quad \text{oraz} \quad \forall \omega \quad V_T(\varphi)(\omega) = \varphi S_T(\omega) \geqslant 0. \tag{4.19}$$

Wtedy z (4.19) biorąc $\omega = 1$ otrzymujemy

$$0 \leqslant \varphi S_T(1) = \varphi^0 + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi^i = -\varphi^1,$$

a gdy $\omega = i > 1$, to

$$0 \leqslant \varphi S_T(i) = \varphi^0 + 2\varphi^{i-1} + \sum_{k=1, k\neq i, k\neq i-1} \varphi^k = \varphi^{i-1} - \varphi^i.$$

Stąd $\varphi^1 \leqslant 0$ oraz dla każdego $i \geqslant 2$ mamy $\varphi^i \leqslant \varphi^{i-1}$, tj.

$$0 \geqslant \varphi^1 \geqslant \varphi^2 \geqslant \ldots$$

Stąd z kolei $\varphi^i \equiv 0$, ponieważ $\varphi \in l^1$, a więc $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi^i| < \infty$. Zatem nie istnieje arbitraż.
Nie istnieje także miara martyngałowa: nie istnieje P^* takie, że $P^* \sim P$ i

$$\forall_i \quad E_{P^*}(S_T^i) = S_0^i = 1. \tag{4.20}$$

Istotnie, równość (4.20) oznacza, że dla ustalonego i mamy

$$1 = E_{P^*}(S_T^i) = 2P^*(\{i+1\}) + \sum_{k \neq i, i+1} P^*(\{k\}) = 1 + P^*(\{i+1\}) - P^*(\{i\}).$$

Stąd z kolei otrzymujemy, że (4.20) pociąga za sobą

$$\forall_i \quad P^*(\{i\}) = P^*(\{i+1\}). \tag{4.21}$$

Doszliśmy do sprzeczności, gdyż nie istnieje miara probabilistyczna określona na całej Ω spełniająca (4.21).

Ćwiczenie 4.8. Udowodnić, że na rynku bez możliwości arbitrażu wycena wypłaty osiągalnej za pomocą ceny arbitrażowej (wzoru (4.6)) tworzy zgodny system cen, w tym sensie, że rynek rozszerzony o instrument bazowy o cenie $S^{k+1} = \Pi(X)$ jest dalej rynkiem bez możliwości arbitrażu.

Rozwiązanie. Gdy $P^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M}))$, to S^{*i} są P^*-martyngałami. Ponadto, z (4.6)

$$\frac{\Pi_t(X)}{B_t} = E_{P^*}\Big(\frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\Big),$$

więc $\Pi_t^*(X)$ jest też P^*-martyngałem, czyli P^* jest miarą martyngałowa dla rynku rozszerzonego.

Ćwiczenie 4.9. Na rynku dwuokresowym opisanym w ćwiczeniu 4.2 znaleźć strategię replikującą europejską opcję kupna z ceną wykonania $K = 105$.

Rozwiązanie. Należy zabezpieczyć wypłatę X przyjmującą wartości: $X(\omega_1) = 35$, $X(\omega_i) = 0$ dla $i = 2, 3, 4$. Trzeba znaleźć strategię samofinansującą się φ replikującą wypłatę X. Czyli szukamy $\varphi_1 = (\varphi_1^0, \varphi_1^1)$, gdzie $\varphi_1^0, \varphi_1^1 \in \mathbb{R}$ oraz $\varphi_2 = (\varphi_2^0, \varphi_2^1)$, gdzie $\varphi_2^0(\omega_1) = \varphi_2^0(\omega_2)$, $\varphi_2^0(\omega_3) = \varphi_2^0(\omega_4)$ i $\varphi_2^1(\omega_1) = \varphi_2^1(\omega_2)$, $\varphi_2^1(\omega_3) = \varphi_2^1(\omega_4)$, takich że $V_2(\varphi) = X$, tj.

$$\begin{cases} 140\ \varphi_2^1(\omega_1) + (1{,}1)^2\ \varphi_2^0(\omega_1) = 35, \\ S_2\ (\omega_i)\varphi_2^1(\omega_i) + (1{,}1)^2\ \varphi_2^0(\omega_i) = 0, \quad \text{gdy } i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} 120\ \varphi_1^1 + 1{,}1\ \varphi_1^0 = 120\ \varphi_2^1(\omega_1) + 1{,}1\ \varphi_2^0(\omega_1), \\ 80\ \varphi_1^1 + 1{,}1\ \varphi_1^0 = 0 \end{cases}$$

(warunek samofinansowania się strategii). Rozwiązując te układy otrzymujemy: $\varphi_2^0(\omega_1) = \varphi_2^0(\omega_2) = -\frac{87{,}5}{1{,}21}$, $\varphi_2^0(\omega_3) = \varphi_2^0(\omega_4) = 0$, $\varphi_2^1(\omega_1) = \varphi_2^1(\omega_2) = \frac{7}{8}$, $\varphi_2^1(\omega_3) = \varphi_2^1(\omega_4) = 0$, $\varphi_1^0 = -\frac{56}{1{,}21}$, $\varphi_1^1 = \frac{7}{11}$.

5. Model dwumianowy (Coxa-Rossa-Rubinsteina)

Rozważymy teraz prosty, ale bardzo ważny model Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR). Nazywa go się także modelem dwumianowym. Powstał później niż model Blacka-Scholesa. Ma zastosowanie przy konstrukcji metod numerycznych dla obliczania cen różnych skomplikowanych wypłat.

5.1. Model CRR

Na rynku są dwa podstawowe instrumenty, rachunek bankowy z procesem cen:

$$B_t = (1+r)^t, \quad t = 0, \ldots, T$$

i instrument ryzykowny (np. akcja) z procesem cen zadanym wzorem:

$$S_0 = s > 0, \quad S_{t+1} = S_t U_{t+1}, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{5.1}$$

gdzie U_t są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie

$$P(U_t = 1+b) = p, \quad P(U_t = 1+a) = 1-p, \quad p \in (0,1),$$

przy czym $-1 < a < b$. Wielkości a i b są stopami zwrotu z akcji, gdy cena zmienia się odpowiednio na $S_t(1+a)$ i $S_t(1+b)$, gdyż

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = U_{t+1} - 1.$$

Z tej definicji widać, że na model CRR można patrzeć jako na niezależne jednookresowe dwustanowe modele o tej samej stopie zwrotu, gdyż można ten model zrealizować na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{1+a, 1+b\}^T$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, zaś P jest prawdopodobieństwem produktowym jednoznacznie wyznaczonym przez p. Wtedy

$$U_t((\omega_1, \ldots, \omega_T)) = \omega_t \quad \text{i} \quad \mathcal{F}_t = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_t) = \sigma(U_1, \ldots, U_t).$$

Zbadamy własności tak zdefiniowanego modelu rynku. Rozpatrzymy model ogólniejszy. Niech $\Omega, \mathcal{F}, U_t, S_t$ będą określone jak wyżej, natomiast P jest pewnym prawdopodobieństwem na $\mathcal{F}$. Zauważmy, że

$$P(\{(\omega_1, \ldots, \omega_T)\}) = P(U_1 = \omega_1, \ldots, U_T = \omega_T), \tag{5.2}$$

zatem znajomość prawdopodobieństwa P jest równoważna znajomości rozkładu łącznego wektora $(U_1, \ldots, U_T)$.

Do badania własności użyjemy aparatu miar martyngałowych. Dlatego zaczynamy od nastepującego lematu:

Lemat 5.1. $(S_t^*)_{t\in\mathcal{T}}$ *jest martyngałem względem rozkładu prawdopodobieństwa* P^* *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{t \leqslant T-1} \quad E_{P^*}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 1 + r.$$

Dowód.

$$E_{P^*}(S^*_{t+1}|\mathcal{F}_t) = S^*_t \quad \Leftrightarrow \quad E_{P^*}(\frac{S^*_{t+1}}{S^*_t}|\mathcal{F}_t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E_{P^*}(\frac{U_{t+1}}{1+r}|\mathcal{F}_t) = 1.$$

□

Wniosek 5.1. *Jeśli rynek jest wolny od arbitrażu, to $r \in (a, b)$.*

Dowód. Gdy rynek jest wolny od arbitrażu, to istnieje miara martyngałowa P^* dla S^*_t, więc z lematu 5.1 mamy $E_{P^*}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 1 + r$, czyli $E_{P^*}(U_{t+1}) = =1 + r$. Ale U_{t+1} przyjmuje z dodatnim prawdopodobieństwem wartości $1 + a$ oraz $1 + b$, więc średnia należy do wnętrza przedziału, tj. $(1 + r) \in (1 + a, 1 + b)$. □

Z lematu 5.1 otrzymujemy natychmiast istnienie miary martyngałowej, będącej miarą produktową, dla rynku CRR, gdy $r \in (a, b)$.

Twierdzenie 5.1. *Niech $r \in (a, b)$. Jeśli P jest produktowym rozkładem prawdopodobieństwa wyznaczonym przez $p = \frac{r-a}{b-a}$, to zdyskontowany proces cen S^*_t jest P-martyngałem.*

Dowód. Z definicji prawdopodobieństwa P i definicji U_t wynika niezależność zmiennych $U_1, \ldots, U_T$. Stąd i z postaci rozkładu U_{t+1} otrzymujemy

$$E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E_P U_{t+1} = p(1 + b) + (1 - p)(1 + a) = 1 + r$$

i lemat 5.1 kończy dowód. □

Jedyność miary martyngałowej wynika z kolejnego twierdzenia.

Twierdzenie 5.2. *Jeśli rynek CRR jest wolny od arbitrażu, to jest zupełny.*

Dowód. Należy udowodnić, że jeśli zdyskontowany proces cen S^*_t jest P-martyngałem, to P jest produktowym rozkładem prawdopodobieństwa wyznaczonym przez $p = \frac{r-a}{b-a}$. Jest to równoważne faktowi, że $U_1, \ldots, U_T$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(U_1 = 1 + b) = \frac{r - a}{b - a} = 1 - P(U_1 = 1 + a).$$

Dla dowolnego t z lematu 5.1 otrzymujemy $E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 1 + r$, a ponieważ zmienna losowa U_{t+1} przyjmuje dwie wartości, więc

$$(1 + a)E_P(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_t) + (1 + b)E_P(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_t) = 1 + r. \tag{5.3}$$

Ponadto

$$E_P(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_t) + E_P(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_t) = 1.$$

Stąd oznaczając

$$Z_t = E_P(\mathbf{1}_{\{U_{t+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_t) \tag{5.4}$$

mamy z (5.3):

$$(1 + a)(1 - Z_t) + (1 + b)Z_t = 1 + r.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$Z_t = \frac{r-a}{b-a},$$

a więc $Z_t = Z$ jest zmienną losową stałą i jest taka sama dla każdego t. Stąd dla dowolnego t

$$P(U_{t+1} = 1+b) = E_P Z = \frac{r-a}{b-a}, \tag{5.5}$$

czyli zmienne losowe U_t mają jednakowy rozkład. Aby wykazać niezależność zmiennych losowych U_t względem miary P wystarczy udowodnić, że dla $t = T$ i dla dowolnych $x_i \in \{1+a, 1+b\}$ zachodzi:

$$P(U_1 = x_1, \ldots, U_t = x_t) = \prod_{i=1}^{t} P(U_i = x_i). \tag{5.6}$$

Dowodzimy (5.6) używając indukcji matematycznej (ćwiczenie 5.1).

Zatem rozkład $(U_1, \ldots, U_T)$ jest produktowym rozkładem prawdopodobieństwa wyznaczonym przez $p = \frac{r-a}{b-a}$; teraz z (5.2) otrzymujemy, że prawdopodobieństwo martyngałowe P jest produktowym rozkładem prawdopodobieństwa wyznaczonym przez $p = \frac{r-a}{b-a}$. □

Ćwiczenie 5.1. Udowodnić (5.6).

Rozwiązanie. Do dowodu (5.6) dla $t = T$ użyjemy indukcji matematycznej i wykażemy, że (5.6) zachodzi dla dowolnego $t \in \mathcal{T}$, a więc i dla $t = T$. Z (5.5) wynika, że (5.6) zachodzi dla $t = 1$. Zakładając, że równość (5.6) jest prawdziwa dla t wykażemy, że jest również prawdziwa dla $t+1$.

$$\begin{aligned} P(U_1 &= x_1, \ldots, U_{t+1} = x_{t+1}) = \\ &= P(U_{t+1} = x_{t+1} | U_1 = x_{t+1}, \ldots, U_t = x_t) P(U_1 = x_1, \ldots, U_t = x_t) = \\ &= P(U_{t+1} = x_{t+1}) \prod_{i=1}^{t} P(U_i = x_i), \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z (5.4), (5.5) i z założenia indukcyjnego. Z dowodu twierdzenia mamy natychmiast.

Wniosek 5.2. *Jeśli rynek CRR jest wolny od arbitrażu, to $U_1, \ldots, U_T$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:*

$$P(U_1 = 1+b) = \frac{r-a}{b-a} = 1 - P(U_1 = 1+a).$$

Założyliśmy, że stopa procentowa $r \geqslant 0$, więc od tego momentu mówiąc o modelu CRR będziemy zawsze zakładać, że

$$r \in (a,b) \quad \text{oraz} \quad r \geqslant 0.$$

Twierdzenie 5.3. *Cena arbitrażowa wypłaty X w modelu CRR jest dana wzorem*

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}(X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) \qquad \text{dla } t \in \mathcal{T},$$

gdzie miara martyngałowa P^* jest wyznaczona przez $p = \frac{r-a}{b-a}$.

Dowód. Ponieważ model rynku CRR jest wolny od arbitrażu i zupełny, więc teza wynika natychmiast z tw. 4.3. □

Wniosek 5.3. *Cena arbitrażowa europejskiej opcji kupna z terminem wykonania T i ceną wykonania K na akcję o cenie zadanej przez proces S jest równa:*

$$C_{T-t} = (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} p^j (1-p)^{t-j} (S_{T-t} u^j d^{t-j} - K)^+, \tag{5.7}$$

gdzie $u = 1+b$, $d = 1+a$.

Dowód. Ponieważ $S_u = s\prod_{j=1}^{u} U_j$ dla $u \in \mathcal{T}$, więc

$$\begin{aligned} C_{T-t} &= (1+r)^{-t} E_{P^*}((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{T-t}) = \\ &= (1+r)^{-t} E_{P^*}\Big(\Big(S_{T-t} \cdot \prod_{j=T-t+1}^{T} U_j - K\Big)^+ \Big| \mathcal{F}_{T-t}\Big). \end{aligned}$$

Korzystając z niezależności $\prod_{j=T-t+1}^{T} U_j$ od $\mathcal{F}_{T-t}$ i mierzalności S_{T-t} względem $\mathcal{F}_{T-t}$ i znanego twierdzenia o obliczaniu takich wartości oczekiwanych mamy tezę. □

Cenę C_t europejskiej opcji kupna z terminem wykonania T i ceną wykonania K w chwili t otrzymujemy ze wzoru (5.7) i obserwacji $C_t = C_{T-(T-t)}$.

Przykład 5.1. Niech w modelu CRR $S_0 = 100$; $S_1^d = 80$; $S_1^u = 130$; $T = 2$; $r = 0{,}1$. Wycenić europejskie opcje kupna i sprzedaży z ceną wykonania 90.
Miara martyngałowa jest zadana przez $p = 3/5$. Z (5.7) lub wzoru ogólnego znajdujemy cenę opcji kupna $C_0 = 29{,}06$, a z parytetu cenę opcji sprzedaży $P_0 = 3{,}44$.

Problem replikacji. Zajmiemy się teraz problemem replikacji wypłaty postaci $X = h(S_T)$, dla pewnego $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (taką postać wypłaty mają np. opcje). Gdy φ replikuje X, to

$$X = V_T(\varphi) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1(S_T - S_{T-1}) + \varphi_T^0(B_T - B_{T-1}),$$

zatem

$$h(S_{T-1}U_T) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1 S_{T-1}(U_T - 1) + \varphi_T^0 r B_{T-1}.$$

Ponieważ U_T przyjmuje dwie wartości: $(1+a)$ i $(1+b)$, więc na zbiorze $U_T = 1+a$, mamy

$$h(S_{T-1}(1+a)) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1 S_{T-1} a + \varphi_T^0 r B_{T-1},$$

a na zbiorze $U_T = 1+b$, to mamy

$$h(S_{T-1}(1+b)) = V_{T-1}(\varphi) + \varphi_T^1 S_{T-1} b + \varphi_T^0 r B_{T-1}.$$

Ponieważ proces φ_t^1 jest prognozowalny, więc φ_T^1 nie zależy od wartości U_T. Zatem z powyższych równości otrzymujemy liczbę akcji w chwili T:

$$\varphi_T^1 = \frac{h(S_{T-1}(1+b)) - h(S_{T-1}(1+a))}{S_{T-1}(b-a)} = \Delta(S_{T-1}),$$

gdzie

$$\Delta(x) = \frac{h(x(1+b)) - h(x(1+a))}{x(b-a)}$$

oraz liczbę jednostek bankowych w chwili T

$$\varphi_T^0 = \frac{1}{rB_{T-1}}\Big[h(S_{T-1}(1+b)) - V_{T-1}(\varphi) - b\frac{h(S_{T-1}(1+b)) - h(S_{T-1}(1+a))}{b-a}\Big].$$

W ten sposób, cofając się, znajdujemy postać portfela replikującego.

Ćwiczenie 5.2. Udowodnić, że portfel replikujący w chwili t ma postać

$$\varphi_t^1 = \frac{f(t, S_{t-1}(1+b)) - f(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)}, \tag{5.8}$$

$$\varphi_t^0 = \frac{(1+b)f(t, S_{t-1}(1+a)) - (1+a)f(t, S_{t-1}(1+b))}{(b-a)(1+r)^t}. \tag{5.9}$$

Rozwiązanie. Ogólnie, w chwili t musi zachodzić

$$(1+r)^{t-T}E(h(S_T)|\mathcal{F}_t) = V_t(\varphi) = \varphi_t^0(1+r)^t + \varphi_t^1 S_t. \tag{5.10}$$

Jak wiemy, $S_T = S_t Z_t$, gdzie $Z_t = \Pi_{j=t+1}^T U_j$, a więc

$$\begin{aligned} V_t(\varphi) &= (1+r)^{t-T}E(h(S_T)|\mathcal{F}_t) = (1+r)^{t-T}E(h(xZ_t))\Big|_{x=S_t} = \\ &= f(t, S_t). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Z tego wynika, że wartość w chwili t portfela replikującego wypłatę $h(S_T)$ zależy tylko od obecnej wartości ceny, czyli od S_t. Z (5.10) i (5.11) otrzymujemy

$$\varphi_t^1 S_{t-1}U_t = f(t, S_{t-1}U_t) - (1+r)^t\varphi_t^0,$$

czyli

$$\varphi_t^1 S_{t-1}(1+a) = f(t, S_{t-1}(1+a)) - (1+r)^t\varphi_t^0$$

i

$$\varphi_t^1 S_{t-1}(1+b) = f(t, S_{t-1}(1+b)) - (1+r)^t\varphi_t^0.$$

Zatem zachodzi (5.8) i proces φ_t^1 jest prognozowalny. Ponadto

$$\begin{aligned} \varphi_t^0 = &\ \frac{f(t, S_{t-1}(1+b)) + f(t, S_{t-1}(1+a)) - \varphi_t^1 S_{t-1}(2+a+b)}{2(1+r)^t} \\ = &\ \frac{(1+b)f(t, S_{t-1}(1+a)) - (1+a)f(t, S_{t-1}(1+b))}{(b-a)(1+r)^t}. \end{aligned}$$

Na wzór (5.8) można spojrzeć jako na dyskretny analog pochodnej wartości portfela względem możliwej zmiany ceny instrumentu podstawowego. W języku finansów takie strategie nazywa się delta zabezpieczeniem.

Z (5.8) otrzymujemy też

Wniosek 5.4. *Gdy h jest funkcją rosnącą, to $\varphi_t^1 \geqslant 0$. Zatem można replikować wypłatę $h(S_T)$ bez korzystania z krótkiej sprzedaży.*

W szczególności wynika stąd, że można tak replikować wypłatę z europejskiej opcji kupna.

5.2. Problemu maksymalizacji oczekiwanej użyteczności

Rozważymy teraz na przykładzie modelu CRR problem maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. Inwestor ma swoją miarę użyteczności osiągniętego bogactwa, jest to funkcja użyteczności $U\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wartość $U(x)$ opisuje satysfakcję inwestora posiadającego kapitał x. Wartość inwestycji mierzy się przez oczekiwaną użyteczność (przy mierze subiektywnej P) kapitału osiągniętego na końcu inwestycji, czyli przez $E_P U(V_T(\varphi))$.

Funkcję $U\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją użyteczności, gdy jest niemalejąca, wklęsła, różniczkowalna i ma ciągłą pochodną. Często o U zakłada się, że spełnia tzw. warunki Inady:

$$\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

Najczęściej używane są: logarytmiczna funkcja użyteczności $U(x) = \ln x$, potęgowa $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$ oraz wykładnicza funkcja użyteczności $U(x) = 1 - \exp(-bx)$, $b > 0$.

Naszym celem jest znalezienie, przy danym kapitale początkowym x, strategii samofinansującej się φ^* maksymalizującej oczekiwaną użyteczność kapitału osiągniętego na końcu inwestycji, czyli strategii φ^* takiej że $V_0(\varphi^*) = x$ i

$$E_P\Big(U(V_T(\varphi^*))\Big) = \max_{\varphi\in\Phi,\ V_0(\varphi)=x} E_P\Big(U(V_T(\varphi))\Big). \tag{5.12}$$

Rozwiążemy ten problem w przypadku funkcji logarytmicznej $U(x) = \ln x$, rozszerzając ją na $(-\infty, 0]$ wzorem $U(x) = -\infty$. Ponieważ

$$\ln V_T(\varphi) = \ln V_T^*(\varphi) + \ln B_T,$$

więc problem optymalizacji sprowadza się do znalezienia maksimum

$$\max_{\varphi\in\Phi,\ V_0(\varphi)=x} E_P(\ln V_T^*(\varphi)).$$

Skorzystamy z faktu, że $V_T^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem, gdy P^* jest miarą martyngałową, z czego wynika, że $E_{P^*}V_T^*(\varphi) = V_0(\varphi)$. Niech

$$\begin{aligned} dP^* &= Z_T dP, \\ Y_t &= E_{P^*}(xZ_T^{-1}|\mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Wtedy Y_t jest P^*-martyngałem i $Y_T = xZ_T^{-1}$ oraz $Y_0 = x$. Udowodnimy, że

a) Dla dowolnej strategii samofinansującej się φ, takiej że $V_0(\varphi) = x$

$$E_P(\ln V_T^*(\varphi)) \leqslant E_P(\ln Y_T). \tag{5.13}$$

b) Istnieje strategia samofinansująca się φ^*, taka że

$$Y_t = V_t^*(\varphi^*). \tag{5.14}$$

Dla każdego $\varphi \in \Phi$ takiego, że $V_0(\varphi) = x$ zachodzi

$$\begin{aligned} E_P(\ln V_T^*(\varphi)) &= E_P\Big(\ln\frac{x}{Z_T} + \ln V_T^*(\varphi) - \ln\frac{x}{Z_T}\Big) \leqslant \\ &\leqslant E_P\Big(\ln\frac{x}{Z_T}\Big) + E_P\Big(\frac{Z_T}{x}V_T^*(\varphi) - 1\Big) = \\ &= E_P\Big(\ln\frac{x}{Z_T}\Big) + \frac{1}{x}E_{P^*}\Big(V_T^*(\varphi)\Big) - 1 = E_P(\ln Y_T), \end{aligned}$$

co daje (5.13).

Z zupełności rynku istnieje strategia samofinansująca się φ^* spełniająca $V_T^*(\varphi) = Y_T$, a ponieważ Y jest P^*-martyngałem, to (5.14) zachodzi.

Okazuje się, że jak na rynku skończonym potrafimy znaleźć φ^* spełniające (5.12), to na rynku skończonym nie ma arbitrażu.

Ćwiczenie 5.3. Niech U będzie funkcją ściśle monotoniczną. Jeśli istnieje rozwiązanie zagadnienia (5.12), to na rynku nie ma arbitrażu.

Wskazówka. Przeprowadzić rozumowanie niewprost.

5.3. Aproksymacje za pomocą modeli dwumianowych

Gdy obserwujemy rynek z czasem ciągłym, czyli gdy czas jest odcinkiem $[0, T]$, to ceny należy opisywać modelem, w którym występują procesy z czasem ciągłym. Ale jak wiadomo, przy opisie rozmaitych zjawisk można modele z czasem ciągłym z powodzeniem aproksymować modelami dyskretnymi. Teraz opiszemy, jak wykorzystuje się model CRR do aproksymacji modelu z czasem ciągłym.

Konstruuje się ciąg przybliżeń, w którym jako n-te przybliżenie bierze się model CRR skonstruowany następująco:

W tym (czyli n-tym) kroku dzielimy odcinek $[0, T]$ na n części o długości $\delta_n = =\frac{T}{n}$ każda. Zakładamy, że handel odbywa się w chwilach czasu $t_j = t_j^{(n)} = j\delta_n$, $j = 0, 1, \dots, n$. W czasie ciągłym rachunek oszczędnościowy jest opisywany przez równanie $B_t = e^{rt}$ ($r > 0$ jest stałą). Chcemy dopasować stopę procentową r_n tak, żeby otrzymać równość cen rachunków oszczędnościowych w modelu ciągłym i dyskretnym we wszystkich punktach t_j. W tym celu bierzemy r_n takie, że

$$1 + r_n = e^{r\delta_n}.$$

Wtedy

$$B_{t_j} = e^{rj\delta_n} = (e^{r\delta_n})^j = (1 + r_n)^j.$$

Teraz dobieramy stałe a_n i b_n spełniające

$$-1 < a_n < r_n < b_n \tag{5.15}$$

(wtedy model CRR jest bez możliwości arbitrażu i zupełny). Warunek (5.15) musi być spełniony, poza tym wyboru a_n i b_n dokonujemy tak, by model graniczny opisywał model z czasem ciągłym. Zrobimy to w taki sposób, by

$$u_n d_n = (1 + b_n)(1 + a_n) = 1.$$

Taki wybór zakłada pewien rodzaj symetrii ruchu cen. Niech

$$1 + a_n = e^{-\sigma\sqrt{\delta_n}}, \qquad 1 + b_n = e^{\sigma\sqrt{\delta_n}},$$

gdzie $\sigma > 0$ jest ustalona z góry. Łatwo sprawdzić, że nierówność (5.15) zachodzi dla dostatecznie dużych n. Wtedy miara martyngałowa jest zadana przez podanie prawdopodobieństwa wzrostu ceny akcji

$$p_n = \frac{e^{r\delta_n} - e^{-\sigma\sqrt{\delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta_n}}}.$$

Zachodzi

Ćwiczenie 5.4. Udowodnić, że $p_n \to 1/2$, gdy $n \to \infty$.

W ten sposób skonstruowaliśmy n-ty model CRR dla ciągu przybliżeń. Parametry a_n, b_n, p_n są ustalone i zależą od parametrów r, σ i liczby kroków n, a więc długości podziału δ_n. Pozostaje pytanie, jak dobrać parametry n-tego przybliżenia. Stopę procentową bez ryzyka r znamy. Parametr σ wybieramy tak, by wariancja stopy zwrotu z akcji na jednostkę czasu była równa wariancji na jednostkę czasu z modelu ciągłego (modelu Blacka-Scholesa opisanego w §9.1). Liczbę n dobieramy według naszych potrzeb (ten parametr możemy zmieniać), byle n było dostatecznie duże (zad. 5.11).

Możemy też bez straty ogólności założyć, że wszystkie modele (a więc i procesy z nimi związane) są skonstruowane na wspólnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zakładamy też, że cena początkowa aktywa w każdym przybliżeniu jest taka sama. Jak wiemy, cena $S^{(n)}$ aktywa ryzykownego w n-tym modelu spełnia

$$S_t^{(n)} = s \prod_{j=1}^{t} U_j^{(n)},$$

gdzie $P(U_j^{(n)} = 1 + b_n) = p_n$, $P(U_j^{(n)} = 1 + a_n) = 1 - p_n$, $S_0^{(n)} = s$ i zmienne losowe $U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}$ są niezależne, o tym samym rozkładzie. Zapiszmy to dla $t = T$ inaczej:

$$S_T^{(n)} = se^{\sigma\sqrt{\delta_n}\sum_{j=1}^{n} V_j^{(n)}},$$

gdzie $V_j^{(n)} = \frac{\ln U_j^{(n)}}{\sigma\sqrt{\delta_n}}$, zatem $V_j^{(n)}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie

$$P(V_j^{(n)} = 1) = p_n = 1 - P(V_j^{(n)} = -1).$$

Z centralnego twierdzenia granicznego otrzymujemy po przekształceniach

$$\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} V_j^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\Big(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)T, \sigma^2 T\Big). \tag{5.16}$$

Stąd, gdy $n \to \infty$, to

$$\ln S_T^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \ln s + (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z, \tag{5.17}$$

gdzie $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, czyli

$$S_T = S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z\Big).$$

Zatem cena w chwili T otrzymana w granicy ma rozkład lognormalny (ten sam rezultat otrzymujemy dla dowolnego t).

Każdy z modeli CRR użyty w tej aproksymacji był bez możliwości arbitrażu i zupełny, więc wiemy, że cena arbitrażowa europejskiej opcji kupna $C_T^{(n)}$ jest zadana wzorem (5.7) z $p = p_n$. W granicy otrzymujemy

Twierdzenie 5.4.

$$\lim_{n\to\infty} C_T^{(n)} = sN(d_1(s, T)) - Ke^{-rT}N(d_2(s, T)), \tag{5.18}$$

gdzie N oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu gaussowskiego oraz

$$d_1(x, t) = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{5.19}$$

$$d_2(x, t) = d_1(x, t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}. \tag{5.20}$$

Dowód tego faktu pozostawiamy jako zadanie.

Podsumowując, powyższe rozważania o aproksymacji sugerują, że w „rozsądnym” modelu rynku cena aktywa powinna mieć rozkład lognormalny, a cena arbitrażowa europejskiej opcji kupna powinna być zadana wzorem BlackaŠcholesa (5.18). Wzór (5.17) dowodzi że $S_T^{(n)}$ zbiega do S_T według rozkładu, a więc gdy wypłata jest funkcją wartości końcowej ceny, tj. $X_n = f(S_T^{(n)})$, to przy odpowiednich założeniach o funkcji f otrzymujemy

$$\Pi_0(f(S_T)) = \lim_{n\to\infty} \Pi_0(f(S_T^{(n)})). \tag{5.21}$$

Gdy f jest ograniczona, to (5.21) zachodzi i w szczególności otrzymujemy formułę wyceny dla opcji sprzedaży (a stąd korzystając z parytetu można w inny sposób otrzymać (5.18)).

Okazuje się, że można udowodnić znacznie więcej o zbieżności aproksymacji. Rozpatrzmy proces $\hat{S}_t^{(n)}$ z czasem ciągłym otrzymany z procesu $S_t^{(n)}$ przez interpolację liniową, tj. $\hat{S}_{t_j}^{(n)} = S_{t_j}^{(n)}$ dla $t_j = \frac{jT}{n}$ i $\hat{S}_t^{(n)}$ jest liniowy pomiędzy punktami postaci t_j. Korzystając z tw. Donskera można udowodnić, że proces $\hat{S}^{(n)}$ zbiega słabo w $C[0,T]$ do procesu S, takiego że

$$S_t = S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\Big),$$

gdzie W_t jest procesem Wienera. Stąd otrzymujemy, że ceny pewnych wypłat, które zależą od całej trajektorii procesu cen można otrzymać jako granicę odpowiednich wyrażeń obliczanych dla modelu CRR. Ten fakt wykorzystujemy w modelu z czasem ciągłym do liczenia cen wypłat dla których nie istnieją jawne wzory. Model CRR jest modelem opisującym rynek w sposób rekurencyjny, więc w tym modelu znacznie łatwiej liczyć całki numerycznie niż w modelu z czasem ciągłym.

5.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 5.5. Znaleźć cenę arbitrażową europejskiej opcji sprzedaży w modelu CRR.

Rozwiązanie. Powtórzyć rozumowanie prowadzące do wzoru (5.7) lub skorzystać z parytetu kupno-sprzedaż.

$$P_{T-t} = (1+r)^{-t} \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} p^j (1-p)^{t-j} (K - S_{T-t} u^j d^{t-j})^+.$$

Ćwiczenie 5.6. Niech w modelu CRR $S_0 = 100; S_1^u = 120; S_1^d = 90; T = 3; r = 0{,}05$. Wycenić opcję europejską o wypłacie $X = 100(R_T - 0{,}10)^+$, gdzie $R_T = \frac{S_T - S_0}{S_0}$ jest stopą zwrotu z akcji w czasie od 0 do T.

Ćwiczenie 5.7. Rozpatrzmy model CRR, dla którego $S_0 = 100$; $u = 1 + b = 1{,}2; d = 1 + a = 0{,}7; T = 2$.

a) Dla jakich wartości stopy procentowej r model jest wolny od arbitrażu? Wyznaczyć dla tych wartości miarę martyngałową.

b) Niech $r = 10\%$. Znaleźć cenę arbitrażową europejskich wypłat:

$$\begin{aligned} X &= (\min(S_1, S_2) - 90)^+, \\ Y &= (S_2 - S_1 - 10)^+. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. a) $r \in (0; 0{,}2)$. Miara martyngałowa P^* jest zadana przez $p = 2r + 0{,}6$.
b) $p = 0{,}8$; $\Pi_0(X) = 15{,}87$; $\Pi_0(Y) = 7{,}93$.

Ćwiczenie 5.8. Niech w modelu CRR $S_0 = 80; u = 1,3; T = 2; r = 0{,}2$.

a) Dla jakich d model jest wolny od arbitrażu?

b) Dla $d = 1{,}1$ wycenić opcję europejską o wypłacie $X = (\frac{S_0+S_1+S_2}{3} - 85)^+$. Znaleźć strategię replikującą.

Rozwiązanie. a) $0 < d < 1{,}2$; b) Miara martyngałowa P^* jest zadana przez $p = 0{,}5$, $\Pi_0(X) = 8{,}38$.

Ćwiczenie 5.9. Udowodnić, że w modelu CRR cena wypłaty postaci $X = g(S_T)$, gdzie $g \in C^2$, $g(0) = 0$ jest równa

$$\Pi_0(X) = S_0 g'(0) + \int_0^\infty C_0(y) g''(y) dy, \tag{5.22}$$

gdzie $C_0(y)$ jest ceną arbitrażową w chwili 0 europejskiej opcji kupna akcji o cenie S z terminem wykonania T i z ceną wykonania y.

Rozwiązanie. Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej ma postać

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \int_0^\infty (x - y)^+ g''(y) dy,$$

a stąd wynika wzór (5.22).

Ćwiczenie 5.10. a) Znaleźć wariancję stopy zwrotu w n-tym modelu CRR.

b) Znaleźć σ znając wariancję stopy zwrotu (tj. przyjmując $D^2(U_t) = A$, gdzie A jest wariancją teoretyczną z modelu ciągłego Blacka-Scholesa lub A jest wariancją wyestymowaną z rynku.

c) Znaleźć σ, gdy wybierzemy inny (ogólniejszy) n-ty model CRR, czyli taki, że $u_n d_n = \gamma$, gdzie γ jest stałą dodatnią (dla $\gamma = 1$ rozwiązanie otrzymaliśmy w punkcie b)).

Rozwiązanie. a) $D^2(U_t) = e^{r\delta_n}\left(e^{\sigma\sqrt{\delta_n}} + e^{-\sigma\sqrt{\delta_n}}\right) - 1 - e^{2r\delta_n}$.
b) Przyjmując $y = e^{\sigma\sqrt{\delta_n}}$, $B = e^{r\delta_n}$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$y^2 - 2Cy + 1 = 0.$$

Stąd wyliczamy y, a następnie σ.

Ćwiczenie 5.11. Udowodnić, że nierówność (5.15) zachodzi dla $n > \frac{r^2 T}{\sigma^2}$

6. Uogólnienia ceny arbitrażowej

Dla wypłat nieosiągalnych nie mamy zdefiniowanej ceny. Teraz spróbujemy rozszerzyć pojęcie ceny, by móc wyceniać wypłaty nieosiągalne.
Na rynku bez możliwości arbitrażu cenę instrumentu osiągalnego można wyliczyć korzystając z pojęcia miary martyngałowej (wzór (4.6)). Tę wielkość chciałoby się przyjąć jako cenę wypłaty nieosiągalnej, choć nie widać sensu ekonomicznego takiego postępowania. Ale dla wypłat nieosiągalnych wielkość $E_{P^*}(YB_T)$ zależy od wyboru miary martyngałowej P^* (patrz przykł. 4.2a). Dlatego dla wypłat nieosiągalnych musimy postępować inaczej. Będziemy naśladować postępowanie z ćwiczenia 2.15 wprowadzające pojęcie zabezpieczenia doskonałego. Pozwoli to wprowadzić pojęcia ceny kupującego i ceny sprzedającego będące rozszerzeniem ceny arbitrażowej.

6.1. Cena sprzedającego i kupującego

Definicja 6.1. Ceną sprzedającego wypłatę X nazywamy wielkość

$$\Pi_0^s(X) = \inf\{z : \exists \varphi \in \Phi \quad V_0(\varphi) = z,\ V_T(\varphi) \geqslant X\}. \tag{6.1}$$

Jest to najmniejsza wielkość kapitału początkowego pozwalającego sprzedającemu pokryć swoje zobowiązania bez ryzyka, czyli doskonale zabezpieczyć wypłatę X, gdyż sprzedający mając tę kwotę i postępując zgodnie ze strategią φ otrzymuje w chwili T ze swojej inwestycji co najmniej X. Cena sprzedającego $\Pi_0^s(X)$ jest zawsze skończona, bo wypłata X jest ograniczona przez pewną stałą K, a stała jest wypłatą osiągalną mającą skończoną cenę. Korzystając z definicji infimum możemy otrzymać warunek równoważny z (6.1):

$$\Pi_0^s(X) = \sup\{z : \forall \varphi \in \Phi \quad V_0(\varphi) = z, \quad P(V_T(\varphi) < X) > 0\}.$$

Gdy sprzedający weźmie zapłatę mniejszą niż $\Pi_0^s(X)$, to z dodatnim prawdopodobieństwem poniesie stratę.

Patrząc z drugiej strony na transakcję mamy cenę kupującego. Jest to maksymalna cena, jaką kupujący jest gotowy zapłacić za walor X. Jest to maksymalny kapitał taki, że startując z pożyczki równej temu kapitałowi kupujący jest w stanie znaleźć strategię φ generującą kapitał $V_T(\varphi)$ w chwili T i taką, że wraz z wypłatą X otrzymywaną w chwili T kupujący osiąga pozycję nieujemną:

$$\Pi_0^b(X) = \sup\{z : \exists \varphi \in \Phi \quad V_0(\varphi) = -z, \quad V_T(\varphi) + X \geqslant 0\}. \tag{6.2}$$

Lemat 6.1. *Równoważne sformułowania ceny kupującego:*

$$\Pi_0^b(X) = -\inf\{z : \exists \varphi \in \Phi \quad V_0(\varphi) = z, \quad V_T(\varphi) \geqslant -X\}. \tag{6.3}$$

$$\Pi_0^b(X) = -\Pi_0^s(-X), \tag{6.4}$$

$$\Pi_0^b(X) = \sup\{z : \exists \varphi \in \Phi \quad V_0(\varphi) = z, \quad V_T(\varphi) \leqslant X\}. \tag{6.5}$$

Z (6.5) wynika, że cenę kupującego można interpretować jako cenę najdroższej strategii dającej w chwili T wypłatę mniejszą lub równą wypłacie X.

Twierdzenie 6.1. *Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy*

$$\Pi_0^s(X) \geqslant \Pi_0^b(X).$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\Pi_0^s(X) - \Pi_0^b(X) &= \inf\{z : \exists \varphi \in \Phi \ V_0(\varphi) = \ z, \ V_T(\varphi) \geqslant X\} + \\ &+ \inf\{y : \exists \psi \in \Phi \ V_0(\psi) = y, \ V_T(\psi) \geqslant -X\} \geqslant \\ &\geqslant \inf\{z + y : \ \exists \varphi, \psi \in \Phi \ V_0(\varphi) = z, V_0(\psi) = y, \ V_T(\varphi) \geqslant X, \ V_T(\psi) \geqslant -X\} \\ &\geqslant \inf\{\bar{z} : \exists \bar{\varphi} \in \Phi \ V_0(\bar{\varphi}) = \bar{z}, \ V_T(\bar{\varphi}) \geqslant 0\} = I,\end{aligned}$$

bo z liniowości przestrzeni portfeli mamy $V_0(\varphi+\psi) = x+y, \quad V_T(\varphi+\psi) \geqslant 0$. Z założenia braku arbitrażu $I \geqslant 0$ (patrz ćw. 6.2). □

Dla wypłaty osiągalnej pojęcia ceny kupującego i sprzedającego pokrywają się z ceną arbitrażową. Zatem są rozszerzeniami ceny arbitrażowej na wszystkie wypłaty.

Twierdzenie 6.2. *Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu, a X wypłatą osiągalną. Wtedy*

$$\Pi_0^s(X) = \Pi_0(X) = \Pi_0^b(X).$$

Dowód. Niech φ replikuje X, czyli $V_T(\varphi) = X$, stąd i z (6.5) i (6.1)

$$\Pi_0^b(X) \geqslant V_0(\varphi) \geqslant \Pi_0^s(X)$$

i tw. 6.1 daje tezę. □

Okazuje się, że ceny $\Pi_0^s(X)$ i $\Pi_0^b(X)$ można znaleźć korzystając z miar martyngałowych.

Twierdzenie 6.3. *Niech $\mathcal{M}$ będzie rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wtedy*

$$\Pi_0^b(X) = \inf_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big), \tag{6.6}$$

$$\Pi_0^s(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big). \tag{6.7}$$

Dowód. Korzystając z (6.4) wystarczy udowodnić (6.7) (bo $-\sup(-x_\alpha) = = \inf x_\alpha$). Jeśli wypłata X jest osiągalna, to $E_P(\frac{X}{B_T})$ nie zależy od wyboru miary martyngałowej,

$$\Pi_0(X) = E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big)$$

i teza zachodzi na mocy tw. 6.2. Niech X będzie wypłatą nieosiągalną, a Y osiągalną taką, że $Y \geqslant X$ (takie Y istnieje zawsze, bo zbiór Ω jest skończony, więc $|X| \leqslant K = \text{const}$). Wtedy dla każdego $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ zachodzi

$$E_P\Big(\frac{Y}{B_T}\Big) \geqslant E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big),$$

a więc

$$\Pi_0(Y) \geqslant \sup_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big). \tag{6.8}$$

Z (6.8) wobec dowolności Y otrzymujemy

$$\inf\{z : \exists\varphi\in\Phi \quad V_0(\varphi)=z,\ V_T(\varphi)\geqslant X\} \ \geqslant \sup_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big),$$

czyli

$$\Pi_0^s(X) \geqslant \sup_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(\frac{X}{B_T}\Big).$$

Ostatnią część dowodu twierdzenia zostawiamy jako zadanie dla Czytelnika. □

Wniosek 6.1. *Monotoniczność cen Gdy rynek jest wolny od arbitrażu oraz wypłaty X,Y spełniają $X\geqslant Y$, to*

$$\Pi_0^s(X)\geqslant\Pi_0^s(Y),\quad \Pi_0^b(X)\geqslant\Pi_0^b(Y).$$

Dowód. Wniosek jest konsekwencją wzorów (6.6) i (6.7) oraz własności wartości oczekiwanej. □

Warto zauważyć, że w przeciwieństwie do ceny arbitrażowej ceny kupującego i sprzedającego nie są operatorami liniowymi (patrz ćw. 6.5), czyli rozszerzenia nie zachowują własności liniowości na całej dziedzinie, choć są liniowe na przestrzeni wypłat osiągalnych.

Przykład 6.1. Wróćmy znowu do rynku z przykł. 4.2a. Jak widzieliśmy, istnieje na nim wiele miar martyngałowych. Postać wypłat osiągalnych znaleźliśmy w przykł. 4.3. Wypłata $X=(x_1,x_2,x_3)$ jest osiągalna, gdy $x_1+3x_2-4x_3=0$. Znajdziemy teraz cenę kupującego i sprzedającego wypłaty nieosiągalnej. Załóżmy, że

$$x_1+3x_2-4x_3>0.$$

Korzystając z (6.6) mamy:

$$\begin{aligned}\Pi_0^b(X) &= \inf_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(XB_T^{-1}\Big) =\\ &= \inf_{p\in(0,4/5)} \frac{5}{6}\Big(\frac{-p(x_1+3x_2-4x_3)}{4}+\frac{x_1+4x_2}{5}\Big)=\frac{x_2+4x_3}{6},\end{aligned}$$

a z (6.8) mamy:

$$\begin{aligned}\Pi_0^s(X) &= \sup_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P\Big(XB_T^{-1}\Big) =\\ &= \sup_{p\in(0,4/5)} \frac{5}{6}\Big(\frac{-p(x_1+3x_2-4x_3)}{4}+\frac{x_1+4x_2}{5}\Big)=\frac{x_1+4x_2}{6}.\end{aligned}$$

Przypadek $x_1+3x_2-4x_3<0$ rozpatrujemy podobnie.

Gdy cena przekracza $\Pi_0^s(X)$, to sprzedający ma możliwość uzyskania zysku bez ryzyka, a gdy cena jest mniejsza niż $\Pi_0^b(X)$, to kupujący ma możliwość arbitrażu (patrz ćw. 6.4).

6.2. Uogólniona cena arbitrażowa

Możemy na problem wyceny instrumentów nieosiągalnych spojrzeć jeszcze inaczej. Uogólnimy pojęcie ceny arbitrażowej na dowolną wypłatę w następujący sposób:

Definicja 6.2. Liczbę c nazywamy uogólnioną ceną arbitrażową wypłaty X na rynku $\mathcal{M} = ((S^0, \dots, S^k), \Phi)$ wolnym od arbitrażu, gdy istnieje proces adaptowany S^{k+1} taki, że

$$S_0^{k+1} = c, \quad S_T^{k+1} = X$$

i rynek rozszerzony o instrument o cenie S^{k+1} jest rynkiem bez możliwości arbitrażu.

Zatem c jest uogólnioną ceną arbitrażową wypłaty X, gdy sprzedaż wypłaty X po cenie c nie wprowadza na rynku możliwości arbitrażu (por. z wnioskiem 4.5). Wtedy proces S^{k+1} jest procesem ceny wypłaty X o uogólnionej cenie arbitrażowej c. Z tej definicji wynika, że uogólnionych cen arbitrażowych wypłaty X może być wiele. Przez $\Xi_0(X)$ będziemy oznaczać zbiór uogólnionych cen arbitrażowych wypłaty X.

Twierdzenie 6.4.
$$\Xi_0(X) = \{E_P(XB_T^{-1}) : P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\}.$$

Dowód. Weźmy element $x \in \Xi_0(X)$. Z pierwszego podstawowego twierdzenia matematyki finansowej (tw. 4.2) wynika, że istnieje miara martyngałowa Q dla rynku rozszerzonego, a mianowicie taka miara probabilistyczna Q, że S^{*i} jest Q-martyngałem dla $i \in \{1, \dots, k+1\}$, czyli

$$S_t^{*i} = E_Q(S_T^{*i}|\mathcal{F}_t) \quad \forall t \in \{0, \dots, T\}, \quad i \in \{1, \dots, k+1\}.$$

Stąd wynika w szczególności, że $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ oraz $x = S_0^{k+1} = E_Q(S_T^{*k+1}) = E_Q(XB^{-T})$. Zatem $x \in \{E_P(XB_T^{-1}) : P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\}$.

Teraz udowodnimy inkluzję odwrotną. Niech $y = E_P(XB_T^{-1})$ dla pewnego $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Definiujemy proces S^{k+1} wzorem $S_t^{k+1} = B_t E_P(XB_T^{-1}|\mathcal{F}_t)$. Na mocy definicji $y = S_0^{k+1}$, $S_T^{k+1} = X$ oraz proces S^{*k+1} jest P-martyngałem, więc rynek rozszerzony o instrument o cenie S^{k+1} jest rynkiem bez możliwości arbitrażu. Stąd $y \in \Xi_0(X)$. □

Z tego twierdzenia wynika, że

Wniosek 6.2. *Jeśli $\mathcal{M}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu, X jest wypłatą osiągalną, to $\Xi_0(X)$ jest zbiorem jednoelementowym i*

$$\Xi_0(X) = \{\Pi_0(X)\}.$$

Zatem dla wypłaty osiągalnej jej cena otrzymana z def. 6.2 jest równa cenie arbitrażowej, co uzasadnia nazywanie ceny z def. 6.2 uogólnioną ceną arbitrażową.

Uwaga 6.1. Zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \inf\{x : x \in \Xi_0(X)\} &= \inf_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P(XB_T^{-1}) = \Pi_0^b(X), \\ \sup\{x : x \in \Xi_0(X)\} &= \sup_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_P(XB_T^{-1}) = \Pi_0^s(X). \end{aligned}$$

Zbiór $\{E_P(XB_T^{-1}) : P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\}$ jest pusty (gdy na rynku jest arbitraż) lub jest odcinkiem, gdyż zbiór miar martyngałowych $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ jest zbiorem wypukłym. Można udowodnić, że gdy rynek jest wolny od arbitrażu, ale nie jest zupełny, to jest to przedział otwarty. Odcinek o końcach $\Pi_0^b(X)$ i $\Pi_0^s(X)$ nazywamy przedziałem braku arbitrażu. Przedział $[\Pi_0^b(X), \Pi_0^s(X)]$ jest przedziałem cen akceptowanych przez obie strony kontraktu. Stąd potencjalny zysk (gdyż ceny są losowe) jest traktowany jako wynagrodzenie za zgodę na ryzyko. Z rozważań przeprowadzonych w tym paragrafie wiemy, że cena akceptowana przez obie strony kontraktu należy do przedziału $[\Pi_0^b(X), \Pi_0^s(X)]$. Celem dalszych badań, których nie będziemy tu opisywać, jest znalezienie najlepszej ceny z tego przedziału, czyli należy znaleźć miarę martyngałową Q, zwaną miarą wyceniającą, dającą cenę za pomocą wzoru $E_Q(XB_T^{-1})$. Są różne metody wyboru takiej miary martyngałowej Q. Zależą one od subiektywnie przyjętych kryteriów.

6.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 6.1. Udowodnić lemat 6.1.

Rozwiązanie. (6.3) wynika natychmiast z tego, że

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{A}}(-V_0(\varphi)) = -\inf_{\varphi\in\mathcal{A}} V_0(\varphi),$$

gdzie $\mathcal{A} = \{\varphi \in \Phi \ : \ V_T(\varphi) \geqslant -X\}$.

Ćwiczenie 6.2. Udowodnić tw. 6.1.

Ćwiczenie 6.3. Udowodnić tw. 6.2 bez korzystania z tw. 6.1.

Rozwiązanie. a) $\Pi_0^s(X) = \Pi_0(X)$. Niech φ replikuje X, tj. $V_T(\varphi) = X$, stąd

$$\Pi_0(X) = V_0(\varphi) \geqslant \Pi_0^s(X).$$

Pokażemy, że zachodzi równość. Warunek $\Pi_0(X) > \Pi_0^s(X)$ pociąga za sobą istnienie strategii $\psi \in \Phi$ takiej, że

$$\Pi_0^s(X) \leqslant V_0(\psi) < V_0(\varphi) \text{ oraz } V_T(\psi) \geqslant X.$$

Ale wtedy portfel $\psi - \varphi$ jest arbitrażem, gdyż $V_T(\psi - \varphi) \geqslant 0$ i $V_0(\psi - \varphi) < 0$.
b) $\Pi_0^b(X) = \Pi_0(X)$. Niech portfel φ replikuje X. Wtedy $V_T(\varphi) = X$, więc z (6.5)

$$\Pi_0(X) \leqslant \Pi_0^b(X).$$

Gdyby $\Pi_0(X) < \Pi_0^b(X)$, to istniałoby $\psi \in \Phi$ takie, że

$$V_T(\Psi) \leqslant X \quad \text{i} \quad \Pi_0^b(X) \geqslant V_0(\psi) > V_0(\varphi).$$

Ale wtedy portfel $\varphi - \psi$ jest arbitrażem, bo $V_0(\varphi - \psi) < 0$ oraz

$$V_T(\varphi - \psi) = X - V_T(\psi) \geqslant 0.$$

Ćwiczenie 6.4. a) Podać przykład strategii dającej zysk bez ryzyka, gdy kontrakt X został sprzedany za cenę $s > \Pi_0^s(X)$.

b) Załóżmy, że kupujący nabył wypłatę X za cenę $s < \Pi_0^b(X)$. Jak powinien postępować, by osiągnąć zysk bez ryzyka?

Rozwiązanie. Ponieważ $\Pi_0^s(X) < s$, więc istnieje portfel $\varphi \in \Phi$, taki że $V_0(\varphi) = z$, $V_T(\varphi) \geqslant X$ oraz $\Pi_0^s(X) < z < s$. Sprzedawca kontraktu konstruuje za kwotę z portfel φ i ze sprzedaży kontraktu i nabycia portfela φ ma dodatni zysk w chwili T:

$$(s - X) + (V_T(\varphi) - z) = (s - z) + V_T(\varphi) - X \geqslant s - z > 0.$$

Ćwiczenie 6.5. Znaleźć przykład wypłat X i Y, takich że

a)

$$\Pi_0^s(X + Y) \neq \Pi_0^s(Y) + \Pi_0^s(X),$$

b)

$$\Pi_0^b(X + Y) \neq \Pi_0^b(Y) + \Pi_0^b(X).$$

Rozwiązanie. Rozpatrzmy rynek z przykł. 4.2. Niech $Y = (1/2, 1/2, 1)$, $X = -Y$. Wtedy

$$\begin{aligned} \Pi_0^s(X+Y) &= 0, \quad \Pi_0^s(Y) + \Pi_0^s(X) = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{3} > 0, \\ \Pi_0^b(X+Y) &= 0, \quad \Pi_0^b(Y) + \Pi_0^b(X) = \frac{5}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} < 0. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6.6. Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 5% i jest jedna akcja mająca proces cen postaci:

$$S_0^1 = 10, \quad S_1^1(\omega_1) = 8, \quad S_1^1(\omega_2) = 11, \quad S_1^1(\omega_3) = 12.$$

Wycenić wypłaty:

$$X = (1, 1, 1), \qquad Y = (2, 3, 1), \qquad Z = (1, 0, 0).$$

Rozwiązanie. Wypłata X jest osiągalna i $\Pi_0(X) = 1/1{,}05 = 0{,}95$. Wypłaty Y, Z nie są osiągalne. Znajdujemy ogólną postać miary martyngałowej P^*:

$$P^*(\omega_1) = p, \; P^*(\omega_2) = 1{,}5 - 4p, \; P^*(\omega_3) = 3p - 1/2, \quad p \in (1/6, 3/8).$$

Zatem $E_{P^*}(Y) = 4 - 7p$, $E_{P^*}(Z) = p$, a stąd $\Pi_0^s(Y) = 2{,}70$, $\Pi_0^b(Y) = 1{,}31$, $\Pi_0^s(Z) = \frac{3}{8{,}4} = 0{,}36$, $\Pi_0^b(Z) = \frac{1}{6{,}3} = 0{,}16$.

7. Opcje amerykańskie

Dotąd rozpatrywane wypłaty (opcje typu europejskiego) były typu statycznego, czyli wypłata z opcji następuje w ustalonej chwili T. Teraz rozszerzymy pojęcie instrumentu pochodnego na opcje amerykańskie, czyli na instrument dający posiadaczowi prawo realizacji w dowolnej chwili $0, 1, \ldots, T$.

7.1. Opcje amerykańskie, wycena, zabezpieczenie

Definicja 7.1. Opcją amerykańską o terminie wygaśnięcia T nazywamy ciąg adaptowanych nieujemnych zmiennych losowych Z_t,
$t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$.

Zmienną losową Z_t interpretujemy jako wypłatę otrzymaną z realizacji opcji amerykańskiej w chwili t, a ponieważ Z_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalne, to wypłata zależy od wiedzy w chwili t.

Przykład 7.1. Amerykańska opcja kupna na akcję o cenie S z ceną wykonania K (dodatnia stała) zadana jest przez $Z_t = (S_t - K)^+$, $t \in \mathcal{T}$. Kupujący otrzymuje prawo do zakupu akcji po cenie K w dowolnej chwili $0, 1, \ldots, T$. Analogicznie ciąg $Z_t = (K - S_t)^+$, $t \in \mathcal{T}$, zadaje amerykańską opcję sprzedaży na akcje o cenie S z ceną wykonania K.

Posiadacz opcji amerykańskiej ma prawo wykonać ją w dowolnej chwili. Ponieważ posiadacz opcji decyduje czy chwila jej wykonania właśnie nastąpiła i decyduje na podstawie wiedzy zebranej do tego momentu, więc $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, a więc moment wykonania opcji τ jest momentem stopu. Sprzedawca opcji dostając za nią zapłatę U_0 musi postępować w taki sposób, aby w każdej chwili wartość jego portfela φ o kapitale początkowym U_0 przewyższała jego zobowiązania wobec kupca opcji, czyli strategia φ musi być taka, by dla wszystkich t zachodziło:

$$V_t(\varphi) \geqslant Z_t. \tag{7.1}$$

Strategię φ spełniająca (7.1) nazywamy strategią zabezpieczającą opcję amerykańską $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Zbiór wszystkich takich strategii będziemy oznaczali przez $\Gamma((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})$. Z warunku (7.1) wynika, że

$$V_\tau(\varphi) \geqslant Z_\tau$$

dla dowolnego momentu stopu τ o wartościach w zbiorze $\mathcal{T}$. Korzystając z analogicznych argumentów jak przy definiowaniu ceny sprzedającego przyjmujemy:

Definicja 7.2. Wielkość

$$\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}}) = \inf\{V_0(\varphi) : \varphi \in \Gamma((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})\} \tag{7.2}$$

nazywamy ceną arbitrażową w chwili 0 opcji amerykańskiej zadanej przez ciąg wypłat $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Naszym celem będzie teraz znalezienie ceny $\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})$. Załóżmy, że rozpatrywany rynek jest skończony, bez możliwości arbitrażu i zupeły z jednym instrumentem ryzykownym, czyli $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$. Przez U_t będziemy oznaczać cenę opcji amerykańskiej w chwili t. Zatem naszym zadaniem jest znalezienie $U_0 = \Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}})$. W tym celu skorzystamy z tego, że w chwili T zachodzi $U_T = Z_T$ i wykorzystamy indukcję wsteczną. W chwili $T-1$ wystawca opcji musi mieć taki kapitał, by zabezpieczyć jedną z wypłat: wypłatę Z_{T-1} w chwili $T-1$ albo wypłatę Z_T w chwili T, gdyż każdą z nich może wybrać nabywca opcji. Ponieważ rynek jest zupełny, więc wypłata Z_T w chwili T jest osiągalna i w chwili $T-1$ jej cena jest równa $B_{T-1}E_{P^*}(\frac{Z_T}{B_T}|\mathcal{F}_{T-1})$ — tyle trzeba mieć w chwili $T-1$, by zabezpieczyć wypłatę Z_T w chwili T. Stąd cena opcji amerykańskiej w chwili $T-1$ wynosi:

$$U_{T-1} = \max(Z_{T-1}, B_{T-1}E_{P^*}(Z_T^*|\mathcal{F}_{T-1})).$$

Analogiczne rozumowanie daje cenę opcji amerykańskiej w chwili t:

$$U_{t-1} = \max\Big(Z_{t-1}, B_{t-1}E_{P^*}\Big(\frac{U_t}{B_t}\Big|\mathcal{F}_{t-1}\Big)\Big) \tag{7.3}$$

dla $t = 1, 2, \dots, T$, gdyż wystawca musi zabezpieczyć jedną z wypłat: natychmiastową w chwili $t-1$, tj. wypłatę Z_{t-1} lub wypłatę w chwili późniejszej, a ona w chwili t jest warta U_t. Dzieląc obie strony przez B_{t-1} i oznaczając $U_t^* = \frac{U_t}{B_t}$ mamy

$$U_{t-1}^* = \max(Z_{t-1}^*, E_{P^*}(U_t^*|\mathcal{F}_{t-1})). \tag{7.4}$$

Zatem otrzymaliśmy

Twierdzenie 7.1. *Zdyskontowana cena U_T^* opcji amerykańskiej zadanej przez ciąg wypłat $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest P^*-nadmartyngałem zadanym wzorem (7.4).*

Ze wzoru (7.4) wynika, że ciąg $(U_t^*)_{t\in\mathcal{T}}$ jest obwiednią Snella ciągu $(Z_t^*)_{t\in\mathcal{T}}$, czyli że U_t^* jest najmniejszym P^*-nadmartyngałem dominującym ciąg Z_t^*. Stąd wykorzystując elementy teorii optymalnego stopowania mamy

Twierdzenie 7.2.

a) U_0 — cena w chwili 0 opcji amerykańskiej spełnia

$$U_0 = \sup_{\tau\leqslant T} E_{P^*} Z_\tau^*, \tag{7.5}$$

gdzie sup *bierzemy po momentach stopu τ o wartościach mniejszych lub równych T.*

b) Istnieje strategia samofinansująca się φ o kapitale początkowym U_0 zabezpieczająca wypłatę z opcji amerykańskiej $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

c) Moment stopu

$$\upsilon = \inf\{t : Z_t = U_t\} \tag{7.6}$$

jest momentem realizacji opcji.

Dowód. Punkt a). Zdyskontowany proces ceny opcji amerykańskiej U^* jest obwiednią Snella ciągu zdyskontowanych wypłat Z^*, a stąd korzystając z teorii optymalnego stopowania wynika (7.5).

Punkt b). Jak wiemy, U_t^* jest P^*–nadmartyngałem, więc z tw. Dooba-Meyera o rozkładzie nadmartyngału

$$U_t^* = M_t - A_t, \tag{7.7}$$

gdzie M jest martyngałem, A — procesem rosnącym prognozowalnym, $A_0 = 0$. Rynek jest zupełny, więc istnieje strategia φ taka, że $V_T^*(\varphi) = M_T$. Ponieważ $(V_t^*(\varphi))_t$ jest martyngałem, więc

$$V_t^*(\varphi) = E_{P^*}(V_T^*(\varphi)|\mathcal{F}_t) = E_{P^*}(M_T|\mathcal{F}_t) = M_t.$$

Stąd i z (7.7) mamy $U_0 = M_0 = V_0(\varphi)$, czyli U_0 jest kapitałem początkowym strategii φ. Ponadto $U_t^* = V_t^*(\varphi) - A_t$, czyli

$$U_t = V_t(\varphi) - B_t A_t, \tag{7.8}$$

a ponieważ $B_t A_t \geqslant 0$, proces U dominuje Z, więc

$$V_t(\varphi) \geqslant U_t \geqslant Z_t,$$

czyli φ zabezpiecza opcję amerykańską.

Punkt c). Mając opcję nie ma sensu realizować jej w chwili t takiej, że $U_t > Z_t$, bo sprzedajemy walor wart U_t za cenę Z_t (lepiej opcję sprzedać za U_t niż ją zrealizować i otrzymać Z_t). Stąd moment realizacji opcji (moment stopu) τ spełnia

$$U_\tau = Z_\tau$$

gdyż wiemy, że $U_t \geqslant Z_t$. Nie ma sensu realizować opcji po chwili

$$\nu_{max} = \inf\{j : A_{j+1} \neq 0\} \wedge T = \inf\{j : A_{j+1}^* \neq 0\} \wedge T,$$

gdyż sprzedając opcję w chwili ν_{max} i kupując strategię zabezpieczającą φ otrzymamy

$$U_{\nu_{max}} = V_{\nu_{max}}(\varphi)$$

i od tego momentu postępując zgodnie ze strategią φ mamy portfel, którego bogactwo jest większe niż wartość opcji w chwili $\nu_{max}+1, \ldots, T$. Istotnie, ponieważ (7.8) implikuje

$$V_t(\varphi) = U_t + B_t A_t$$

oraz $A_t B_t > 0$ dla $t > \nu_{max}$, więc $V_t(\varphi) > U_t$ dla $t = \nu_{max}+1, \ldots, T$. Zatem $\tau \leqslant \nu_{max}$. Pozwala to stwierdzić, że $U^{*\tau}$ jest martyngałem, gdyż wtedy $A_{\tau\wedge t} = 0$ (bo $\tau \wedge t \leqslant \nu_{max}$) i korzystamy z przedstawienia (7.7). Stąd wynika, że dla nabywcy opcji najlepszym momentem realizacji opcji jest optymalny moment stopu dla ciągu (Z_t^*) przy rozkładzie prawdopodobieństwa P^* (korzystamy z tw. charakteryzującego moment optymalny). A jak wiadomo moment stopu zdefiniowany wzorem (7.6) ma taką własność. □

Uwaga 7.1. a) Z tw. 7.2 mamy, że

$$\Pi_0^a((Z_t)_{t\in\mathcal{T}}) = \sup_\tau E_{P^*} Z_\tau^*,$$

czyli cena zdefiniowana wzorem (7.2) satysfakcjonuje także kupującego. Kupujący chce najlepiej wykorzystać swoje prawa i uzyskać jak największą wypłatę. Gdy kupujący realizuje opcję w momencie stopu τ i otrzymuje wypłatę Z_τ, to jest skłonny zapłacić za tę wypłatę $E_{P^*} Z_\tau^*$. A ponieważ kupujący może zrealizować opcję w każdym momencie, więc za uczciwą cenę uważa $\sup_\tau E_{P^*} Z_\tau^*$, gdzie supremum bierzemy po momentach stopu τ o wartościach mniejszych lub równych T.

b) Punkt c) twierdzenia odpowiada na zasadnicze pytanie z punktu widzenia nabywcy: kiedy należy zrealizować opcję. Z dowodu tego punktu wynika, że moment wykonania opcji należy wybrać jako optymalny moment stopu dla problemu optymalnego stopowania ciągu Z_t^*. Taki moment nie jest wyznaczony jednoznacznie. Jednym z takich momentów jest moment zdefiniowany wzorem (7.6). Wybieramy go, gdyż (7.6), daje jego jawną postać. Mamy regułę jak ten moment wyznacznaczyć praktycznie.

Wykorzystując dowód punktu c) twierdzenia możemy zanalizować sytuacje wystawcy opcji. Wystawca opcji stosuje strategię φ i czeka na to, co zrobi nabywca. Jeżeli nabywca zrealizuje opcję w chwili optymalnej τ, to $U_\tau = Z_\tau = V_\tau(\varphi)$. Wtedy sprzedawca stosując strategię φ otrzymuje całą kwotę, którą musi wypłacić nabywcy opcji. Sprzedawca zabezpieczył swoje zobowiązanie wobec nabywcy. Jeśli natomiast nabywca zrealizuje opcję w innej chwili σ niż optymalna τ, to wystawca ma dodatni zysk. Istotnie, gdy moment realizacji σ nie jest optymalny, to $U_\sigma > Z_\sigma$ lub $A_\sigma > 0$ i korzystając z (7.8) otrzymujemy zysk wystawcy:

$$V_\sigma(\varphi) - Z_\sigma = A_\sigma B_\sigma + U_\sigma - Z_\sigma > 0.$$

7.2. Porównanie opcji amerykańskich i europejskich

Zajmiemy się teraz porównaniem opcji amerykańskich i europejskich. Opcje amerykańskie dają posiadaczowi więcej praw niż europejskie, więc powinny kosztować więcej.

Twierdzenie 7.3. *Niech U_t będzie wartością w chwili t opcji amerykańskiej zadanej przez ciąg $(Z_t)_t$, a C_t wartością w chwili t opcji europejskiej o wypłacie $X = Z_T$. Wtedy*

$$U_t \geqslant C_t. \tag{7.9}$$

Ponadto, gdy dla każdego $t \leqslant T$ mamy

$$C_t \geqslant Z_t, \tag{7.10}$$

to dla każdego $t \leqslant T$ mamy

$$U_t = C_t. \tag{7.11}$$

Dowód. Ponieważ U_t^* jest P^*-nadmartyngałem oraz $U_T = Z_T = X = C_T$, więc

$$U_t^* \geqslant E_{P^*}(U_T^* | \mathcal{F}_t) = E_{P^*}(C_T^* | \mathcal{F}_t) = C_t^*.$$

Stąd $U_t \geqslant C_t$, czyli zachodzi warunek (7.9). Z warunku (7.10) wynika, że $C_t^* \geqslant Z_t^*$, a ponieważ C_t^* jest P^*-martyngałem, w szczególności P^*-nadmartyngałem, więc

$$C_t^* \geqslant U_t^*, \tag{7.12}$$

bowiem U_t^* jest najmniejszym nadmartyngałem dominującym $(Z_t^*)_t$. Teraz (7.9) i (7.12) dają (7.11). □

Z tw. 7.3 wynika, że amerykańska opcja kupna jest warta tyle samo, co europejska..

Wniosek 7.1. *Ceny amerykańskiej i europejskiej opcji kupna z tym samym terminem wygaśnięcia i tę samą cena wykonania są równe.*

Dowód. Wypłaty to $Z_t = (S_t - K)^+$ i $X = C_T = Z_T$. Ponieważ $x^+ \geqslant x$ i $r \geqslant 0$, więc

$$\begin{aligned} C_t &= B_t E_{P^*}(B_T^{-1}(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t) \geqslant B_t E_{P^*}(B_T^{-1}S_T - B_T^{-1}K|\mathcal{F}_t) = \\ &= S_t - KB_tB_T^{-1} \geqslant S_t - K. \end{aligned}$$

Stąd

$$C_t \geqslant (S_t - K)^+ = Z_t,$$

gdyż $C_t \geqslant 0$. Otrzymaliśmy (7.10) i twierdzenie 7.3 daje tezę. □

Ogólniejszą wersję wniosku można znaleźć w ćw. 7.5.

Przykład 7.2. Na rynku zupełnym opisanym w przykł. 4.2 chcemy znaleźć ceny amerykańskiej opcji kupna i amerykańskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania $K = 105$, a także znaleźć optymalny momentem wykonania opcji sprzedaży przez nabywcę opcji.

Jak wiemy, cena amerykańskiej opcji kupna jest równa cenie opcji europejskiej (tw. 7.3), więc korzystając z przykł. 4.2 otrzymujemy $C_0^a = 17{,}36$. Obliczymy cenę amerykańskiej opcji sprzedaży. Korzystamy ze wzoru (7.3) kolejno dla $t = 2$ i $t = 1$, otrzymując:

$$\begin{aligned} U_2 &= (105 - S_2)^+, \\ U_1 &= \max\Big(Z_1, E_{P^*}\Big(\frac{U_2}{1{,}1}\Big|\mathcal{F}_1\Big)\Big) = \begin{cases} \frac{1{,}8}{1{,}1} & \text{gdy } S_1(\omega) = 120, \\ 25 & \text{gdy } S_1(\omega) = 80. \end{cases} \\ U_0 &= \max(5, E_{P^*}(\frac{U_1}{1{,}1}\Big|\mathcal{F}_0)) = \max(5; 6{,}30) = 6{,}30. \end{aligned}$$

Moment stopu zdefiniowany wzorem

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } S_1(\omega) = 120, \\ 1 & \text{gdy } S_1(\omega) = 80 \end{cases}$$

jest optymalnym momentem wykonania opcji sprzedaży przez jej posiadacza.

7.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 7.1. Bank ma amerykańską opcję sprzedaży akcji z ceną realizacji 60 i datą wygaśnięcia za 3/4 roku. Walor (akcja) wart jest teraz 6, a stopa procentowa bez ryzyka (kapitalizacja ciągła) wynosi 18% p.a.[1] Czy warto opcję zrealizować teraz, czy w chwili wygaśnięcia?

Rozwiązanie. Teraz mamy $60 - 6 = 54$, wkładamy do banku i za 3/4 roku mamy $54 \cdot e^{0{,}18 \cdot \frac{3}{4}} = 61{,}81$. W chwili wygaśnięcia opcja jest warta co najwyżej 60 (gdy $S_T = 0$). Zatem warto opcję zrealizować teraz. Wynika to z faktu, że cena waloru jest niska w porównaniu z ceną wykonania opcji. W takim przypadku wykonujemy opcję i inwestujemy otrzymane pieniądze.

Ćwiczenie 7.2. Mówimy, że opcja amerykańska $(Z_t)_{t \in \mathcal{T}}$ jest zawsze realizowalna, gdy dla dowolnego momentu stopu τ o wartościach mniejszych lub równych T istnieje strategia $\varphi \in \Phi$ taka, że

$$V_\tau(\varphi) = Z_\tau.$$

Udowodnić, że na rynku zupełnym każda opcja amerykańska jest zawsze realizowalna.

[1] skrót łac. *per annum*, w skali roku.

Rozwiązanie. Ustalmy dowolny moment stopu τ. Na mocy zupełności rynku wypłata

$$X = \frac{Z_\tau}{B_\tau} B_T$$

jest osiągalna, więc istnieje $\varphi \in \Phi$ takie, że $V_T(\varphi) = X$. Stąd

$$V_t^*(\varphi) = E_{P^*}\Big(\frac{X}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = E_{P^*}\Big(\frac{Z_\tau}{B_\tau}\Big|\mathcal{F}_t\Big),$$

a więc

$$V_\tau^*(\varphi) = E_{P^*}\Big(\frac{Z_\tau}{B_\tau}\Big|\mathcal{F}_\tau\Big) = \frac{Z_\tau}{B_\tau},$$

czyli $V_\tau(\varphi) = Z_\tau$.

Ćwiczenie 7.3. Udowodnić, że gdy na rynku zupełnym opcja amerykańska jest wyceniana wzorem (7.5), to

a) nie istnieje arbitraż związany z pozycją krótką (tj. wystawcy opcji),

b) nie istnieje arbitraż związany z pozycją długą (tj. nabywcy opcji).

Rozwiązanie. a) Nie wprost. Gdyby istniał arbitraż związany z pozycją krótką, to sprzedawca posługiwałby się portfelem φ zabezpieczającym opcję amerykańską takim, że dla każdego momentu wykonania opcji przez kupującego, tj. momentu stopu τ, ma on zysk bez ryzyka:

$$V_\tau(\varphi) \geqslant Z_\tau, \quad P(V_\tau(\varphi) > Z_\tau) > 0.$$

Wtedy

$$V_0(\varphi) = E_{P^*} V_\tau^*(\varphi) > E_{P^*} Z_\tau^*$$

dla każdego momentu stopu τ, co na mocy skończoności Ω implikuje

$$V_0(\varphi) > \sup_\tau E_{P^*} Z_\tau^* = U_0,$$

sprzeczność.

Ćwiczenie 7.4. Niech w modelu CRR: $S_0 = 100; S_1^d = 80;\ S_1^u = 130; T = 3;\ r = 0{,}1$. Znaleźć cenę w chwili 0 opcji amerykańskiej o wypłacie $Z_t = \max_{\{0 \leqslant u\ \leqslant t\}} S_u$ (jest tzw. opcja rosyjska. Znaleźć moment wykonania opcji. Znaleźć dla niej strategię zabezpieczającą.

Rozwiązanie. Z danych wynika, że rynek jest wolny od arbitrażu. Miara martyngałowa P^* jest wyznaczona przez $p = 0{,}6$.
Znajdujemy wartość wypłaty $X = f(S_0, S_1, S_2, S_3)$ dla każdej ścieżki, a następnie obliczamy cenę: $\Pi_0(X) = 104{,}58$. $\Pi_0^a((Z_t)_t) = 116{,}09$. Moment

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 3 & \text{gdy } S_2(\omega) = 169, \\ 2 & \text{gdy } S_1(\omega) = 130, S_2(\omega) = 104, \\ 1 & \text{gdy } S_1(\omega) = 80 \end{cases}$$

jest optymalnym momentem wykonania opcji przez posiadacza. Strategię zabezpieczającą znajdujemy korzystając np. z tw. 7.2 i postaci martyngału w rozkładzie Dooba

Ćwiczenie 7.5. Niech ciąg $\big(g(S_t)\big)_t$, gdzie g jest funkcją wypukłą, nieujemną, $g(0) = 0$, zadaje opcję amerykańską na rynku zupełnym. Udowodnić, że cena tej opcji amerykańskiej jest równa cenie opcji europejskiej o wypłacie $X = g(S_T)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $g(0) = 0$, więc z wypukłości funkcji g otrzymujemy

$$g(ax) \leqslant ag(x), \quad x \geqslant 0, a \in [0,1].$$

Stąd i z nierówności Jensena

$$g(S_t) \leqslant E_{P^*}\Big(g\Big(\frac{S_{t+1}}{1+r}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big) \leqslant E_{P^*}\Big(\frac{g(S_{t+1})}{1+r}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big).$$

Zatem $\frac{g(S_t)}{(1+r)^t}$ jest podmartyngałem i

$$Z_t = g(S_t) \leqslant (1+r)^{t-T} E_{P^*}(g(S_T)|\mathcal{F}_t) = \Pi_t(X).$$

Otrzymaliśmy (7.10) i tw. 7.3 daje tezę.

8. Rynek kontraktów terminowych futures

8.1. Opis kontraktów terminowych futures

Kontrakt terminowy futures jest to instrument finansowy zobowiązujący obie strony kontraktu do realizacji w przyszłości transakcji na określonych w nim warunkach. W chwili zawierania kontrakt futures nic nie kosztuje, zatem jest wart 0. Kontraktami terminowymi futures (w przeciwieństwie do forward) handluje się na giełdzie. Obie strony kontraktu nie znają się wzajemnie, gdyż kontrakt zawarły poprzez pośrednika — giełdę. Kontrakty futures odznaczają się następującymi cechami:

— kontrakty są standaryzowane, czyli są ściśle określone wszystkie warunki kontraktu, w tym nominalna wielkość przedmiotu kontraktu futures i termin dostawy,
— cena futures jest ustalana na giełdzie,
— w każdej chwili można kontrakt futures zamknąć wchodząc w pozycję przeciwną,
— kontrakt jest rozliczany codziennie za pomocą procedury dziennej aktualizacji depozytu (*marking-to-market*).

Kontrakty tego rodzaju obarczone są ryzykiem związanym ze zmianami cen, ale zostało wyeliminowane ryzyko związane z niewywiązaniem się jednej ze stron z warunków umowy. Na różnych rynkach istnieją różne kontrakty futures, m.in. kontrakty futures na akcje — instrument bazowy stanowią akcje, kontrakty futures walutowe — instrument bazowy stanowi waluta innego kraju, kontrakty futures na indeks giełdowy. Z kontraktem futures związane są ceny:
— cena futures w dniu zawarcia kontraktu — po takiej cenie zostanie zawarta transakcja w przyszłości,
— cena kontraktu futures na rynku — cena dzisiejsza tego kontraktu, cena zmieniająca się każdego dnia w okresie notowań,
— cena bieżąca przedmiotu kontraktu (*spot price*).
Wejście w kontrakt futures nic nie kosztuje, ale podmiot chcący uczestniczyć w rynku futures musi wnieść na konto pewien depozyt zabezpieczający — wadium. Codziennie Izba Rozrachunkowa (*clearing house*) koryguje stan konta o zmianę cen kontraktu futures w ciągu dnia. Gdy cena wzrośnie w ciągu dnia o x, to stan rachunku sprzedającego kontrakt zmaleje o x, a kupującego wzrośnie o x. Obie strony muszą utrzymywać na rachunku pewną ustaloną sumę (*maintenance margin level*). Gdy wartość rachunku po rozliczeniu spada poniżej tej wielkości Izba Rozrachunkowa wzywa inwestora do natychmiastowej dopłaty pieniędzy na rachunek. Gdy wezwanie zostanie zignorowane następuje zamknięcie kontraktu.

Intuicyjnie można sobie wyobrażać, że kontrakt futures jest zamykany na końcu dnia handlowego (bo jest rozliczany) i otwierany na nowo następnego dnia, czyli kontrakt futures można traktować jako ciąg jednodniowych kontraktów forward. Taka procedura jednocześnie daje inwestorowi możliwość zamknięcia pozycji w każdej chwili. Inwestor zamyka pozycję wchodząc w kontrakt przeciwny, czyli otwiera pozycję przeciwną do tej, którą zajął wchodząc na rynek futures. Może to zrobić w każdej chwili, zarówno gdy chce zrealizować osiągnięte zyski, jak i wycofać się by zminimalizować straty. Przy okazji warto zaznaczyć, że bardzo mało kontraktów (niektóre źródła podają, że mniej niż 2%) jest w istocie rozliczanych w momencie wygaśnięcia, czyli dla większości uczestników dostawa przedmiotu kontraktu futures jest jedynie potencjalna.

8.2. Model rynku

Wykorzystując idee poznane wcześniej skonstruujemy teraz model rynku kontraktów terminowych futures. W związku ze specyfiką kontraktów futures model ten różni się trochę od modelu rynku skończonego, opisywanego do tej pory.

Jak poprzednio, zakładamy, że mamy ustaloną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest zbiorem skończonym, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, a prawdopodobieństwo P jest takie, że $P(\{\omega_i\}) > 0$ dla każdego i. Transakcje na rynku odbywają się w chwilach $0, 1, 2, \ldots, T$, $T < \infty$ i mamy daną filtrację $\mathcal{F}_t$, $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ opisującą wiedzę o rynku (σ-ciało $\mathcal{F}_t$ opisuje wiedzę do chwili t), taką że $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Niech $f_S(t,T)$ oznacza proces cen futures na instrument bazowy o cenie S z momentem wykonania T. Wielkość $f_S(0,T)$ jest to cena zapłaty w chwili T na którą się umawiamy dziś, tj. w chwili 0. Wprowadzimy oznaczenie skracające napisy: $f_t = f_S(t,T)$.

Na rynku futures inwestor może inwestować w rachunek bankowy i k różnych kontraktów futures z tą samą datą realizacji i adaptowanym procesem cen $f = (f_t)_t$, $f_t = (f_t^1, f_t^2, \ldots, f_t^k)$, gdzie f^i jest ceną (kursem rozliczeniowym) i-tego kontraktu futures, $i = 1, 2, \ldots, k$. Jak zawsze, proces B jest wartością jednostki bankowej. Zakładamy, że kapitalizacja jest okresowa, oprocentowanie jest stałe i równe w skali jednego okresu r, $r \geqslant 0$.

Na tym rynku strategią jest proces

$$(\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^k) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (\varphi^0, \varphi^f),$$

gdzie φ^0 jest wielkością kapitału w banku (tj. zmienną losową adaptowaną), a $\varphi^f = (\varphi^1, \ldots, \varphi^k)$ jest procesem prognozowalnym mówiącym jakie pozycje zajął inwestor w kontraktach futures. φ^f jest procesem prognozowalnym, gdyż inwestor określa w chwili $t-1$ liczbę pozycji zajętych na rynku futures, które będą w jego portfelu w chwili t. φ^0 jest procesem adaptowanym, gdyż inwestor dopiero po dokonaniu rozliczenia kontraktów futures zawartych w chwili $t-1$ wie, ile ma pieniędzy w chwili t. Ze względu na specyfikę kontraktu futures bogactwo portfela odzwierciedla wielkość kapitału posiadanego przez inwestora, gdyż wejście w kontrakt futures nic nie kosztuje. Zatem definiujemy:

$$V_t^f(\varphi) = \varphi_t^0 B_t. \tag{8.1}$$

Strategię φ nazywamy samofinansującą się, gdy

$$V_{t+1}^f(\varphi) = \varphi_t^0 B_{t+1} + \varphi_{t+1}^f (f_{t+1} - f_t), \tag{8.2}$$

tj. wartość portfela w chwili $t+1$ jest równa wartości w chwili $t+1$ inwestycji w rachunek bankowy w chwili t zwiększonej o rozliczenie pozycji futures (skutek procedury „równaj do rynku"). Przez Φ^f oznaczać będziemy przestrzeń liniową strategii samofinansujących się na rynku futures. Proces zysku jest zadany wzorem:

$$G_t^f(\varphi) = \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}^f (f_{u+1} - f_u) + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_u^0 (B_{u+1} - B_u).$$

Z następnego twierdzenia widać, że definicja portfela samofinansującego się na rynku futures jest naturalna.

Twierdzenie 8.1. *Strategia φ jest strategią samofinansującą się na rynku futures wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$V_t^f(\varphi) = V_0^f(\varphi) + G_t^f(\varphi) \quad \text{dla } \textit{każdego } t.$$

Dowód. $\Rightarrow$ Z warunków (8.1) i (8.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_t^f(\varphi) &= V_0^f(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1}[V_{u+1}^f(\varphi) - V_u^f(\varphi)] = \\ &= V_0^f(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1}[\varphi_{u+1}^f(f_{u+1} - f_u) + \varphi_u^0(B_{u+1} - B_u)] = V_0^f(\varphi) + G_t^f(\varphi). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Korzystając z założeń, definicji wartości portfela (8.1) i definicji procesu zysku otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_t^f(\varphi) &= V_0^f(\varphi) + G_t^f(\varphi) = \\ &= V_0^f(\varphi) + G_{t-1}^f(\varphi) + \varphi_t^f(f_t - f_{t-1}) + \varphi_{t-1}^0(B_t - B_{t-1}) = \\ &= V_{t-1}^f(\varphi) + \varphi_t^f(f_t - f_{t-1}) + \varphi_{t-1}^0 B_t - V_{t-1}^f(\varphi) = \\ &= \varphi_t^f(f_t - f_{t-1}) + \varphi_{t-1}^0 B_t \end{aligned}$$

otrzymujemy zatem warunek (8.2), czyli φ jest strategią samofinansującą się. □

Rynek $\mathcal{M}^f = ((B, f), \Phi^f)$ nazywamy rynkiem bez możliwości arbitrażu gdy klasa strategii samofinansujących się Φ^f nie zawiera strategii arbitrażowej tzn. nie istnieje $\varphi \in \Phi^f$, takie że

$$V_0^f(\varphi) = 0, \quad V_T^f(\varphi) \geqslant 0, \quad V_T^f(\varphi)(\omega_i) > 0 \text{ dla pewnego } i.$$

Wypłatą europejską X w chwili T nazywamy dowolną $\mathcal{F}_T$–mierzalną zmienną losową. Strategię $\varphi \in \Phi$ nazywamy strategią replikującą wypłatę X gdy $V_T^f(\varphi) = X$. Wypłatę X nazywamy osiągalną, gdy istnieje strategia ją replikująca. Jak poprzednio, wypłatę nazwiemy jednoznacznie replikowalną, gdy dla dowolnych strategii φ, ψ replikujących X mamy $V_t(\varphi) = V_t(\psi)$ dla wszystkich t. Wtedy proces $V_t(\varphi)$ nazywamy procesem bogactwa X. Zachodzi twierdzenie o jednoznaczności procesu bogactwa portfela replikującego.

Twierdzenie 8.2. *Gdy $\mathcal{M}^f$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu, to każda wypłata osiągalna jest jednoznacznie replikowalna.*

Dowód przebiega analogicznie do dowodu tw. 3.4 i pozostawiamy go jako ćwiczenie dla Czytelnika. Korzystając z tego twierdzenia definiujemy proces ceny arbitrażowej $\Pi^f(X)$ wypłaty osiągalnej X na rynku $\mathcal{M}^f$ bez możliwości arbitrażu jako wartość procesu bogactwa, tzn.

$$\Pi_t^f(X) = V_t^f(\varphi),$$

gdzie φ jest strategią replikującą X.

Przykład 8.1. Niech na rynku futures jednookresowym dwustanowym ceny pewnego aktywa wynoszą

$$f_0 = 320, \quad f_1 = \begin{cases} f^u = 360, & \text{gdy} \quad \omega = \omega_1, \\ f^d = 310, & \text{gdy} \quad \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Znajdziemy cenę arbitrażową europejskiej opcji kupna wystawionej na to aktywo na rynku futures, gdy $T = 3$ miesiące, $K = 320$ i stopa procentowa dla tego okresu wynosi $r = 5\%$. Wtedy wypłata z tej opcji wynosi

$$C_1^f(\omega) = (f_1 - K)^+ = \begin{cases} C^{fu} = 40, & \text{gdy} \quad \omega = \omega_1, \\ C^{fd} = 0, & \text{gdy} \quad \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Wielkość $V_1^f(\omega)$ — wartość portfela replikującego (α_0, β_0) musi spełniać

$$\begin{cases} \alpha_0(f^u - f_0) + (1+r)\beta_0 = C^{fu}, & \text{odpowiada przypadkowi} \quad \omega = \omega_1, \\ \alpha_0(f^d - f_0) + (1+r)\beta_0 = C^{fd}, & \text{odpowiada przypadkowi} \quad \omega = \omega_2, \end{cases}$$

zatem

$$\begin{cases} 40\alpha_0 + 1,05\beta_0 = 0, \\ -10\alpha_0 + 1,05\beta_0 = 10. \end{cases}$$

Stąd $\alpha_0 = \frac{4}{5}$, $\beta_0 = \frac{8}{1{,}05} = 7{,}62$, zatem cena jest równa

$$C_0^f = V_0^f(\varphi) = \beta_0 = 7{,}62.$$

Znajdujmy teraz cenę arbitrażową opcji sprzedaży na rynku futures przy tych samych parametrach. Portfel replikujący spełnia:

$$\begin{aligned} 40\alpha_0 + 1{,}05\beta_0 &= 0, \\ -10\alpha_0 + 1{,}05\beta_0 &= 10. \end{aligned}$$

Stąd mamy $\alpha_0 = -\frac{10}{50} = -\frac{1}{5}$, $\beta_0 = \frac{8}{1{,}05} = 7{,}62$. Cena opcji sprzedaży wynosi $\beta_0 = 7{,}62$, jest zatem taka sama jak cena opcji kupna, co na rynku futures — jak się dalej przekonamy — nie jest przypadkiem.

Znajdowanie ceny, gdy korzystamy z samej definicji jest, poza prostymi przykładami jak wyżej, kłopotliwe. Stąd, jak poprzednio, w celu badania rynku i znajdowania procesów cen wypłat wprowadzamy aparat miar martyngałowych.

Definicja 8.1. Miarę probabilistyczną $\bar{P}$ równoważną z P nazywamy miarą martyngałową dla rynku futures, gdy proces cen futures $(f_t)_t$ jest $\bar{P}$-martyngałem.

Warto podkreślić, że w tej definicji wykorzystujemy proces cen futures, a nie proces cen futures zdyskontowanych, jak przyjęliśmy w def. 2.6.

Przez $\mathcal{P}(f)$ będziemy oznaczać zbiór miar martyngałowych dla procesu cen futures. Jak poprzednio, wygodnie jest posługiwać się zdyskontowanym procesem bogactwa portfela φ:

$$\bar{V}_t^f(\varphi) = V_t^f(\varphi) B_t^{-1}.$$

Lemat 8.1. *Strategia φ jest strategią samofinansującą się na rynku futures (tzn.$\varphi \in \Phi^f$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego t*

$$\bar{V}_t^f(\varphi) = \bar{V}_0^f(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}^f (f_{u+1} - f_u) B_{u+1}^{-1}. \tag{8.3}$$

Dowód lematu zostawimy jako zadanie (zad 8.4).

Wniosek 8.1. *Jeżeli $\bar{P} \in \mathcal{P}(f)$, to dla każdego $\varphi \in \Phi^f$ proces $\bar{V}_t^f(\varphi)$ jest $\bar{P}$–martyngałem.*

Dowód. Korzystając z (8.3) i prognozowalności φ^f otrzymujemy

$$E_{\bar{P}}(\ \bar{V}_{t+1}^f(\varphi) - \bar{V}_t^f(\varphi)|\mathcal{F}_t) = B_{t+1}^{-1} \varphi_{t+1}^f E_{\bar{P}}(f_{t+1} - f_t|\mathcal{F}_t) = 0,$$

bowiem f jest $\bar{P}$ martyngałem. □

Stąd wprowadzając $\mathcal{P}(\mathcal{M}^f)$ — klasę miar martyngałowych dla rynku $\mathcal{M}^f$ jako zbiór tych miar probabilistycznych $\bar{P} \sim P$, dla których $(\bar{V}_t^f(\varphi))_t$ jest $\bar{P}$-martyngałem dla każdego $\varphi \in \Phi^f$, otrzymujemy, że

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}^f) = \mathcal{P}(f). \tag{8.4}$$

Następnie dla rynku futures dowodzi się podstawowe twierdzenia matematyki finansowej. Są one odpowiednikami podstawowych twierdzeń dla rynku akcji, a ich dowody przebiegają w podobny sposób.

Twierdzenie 8.3. *Rynek $\mathcal{M}^f$ jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}(\mathcal{M}^f) \neq \emptyset$. Wówczas cena arbitrażowa wypłaty osiągalnej X wynosi*

$$\Pi_t^f(X) = B_t E_{\bar{P}}(X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) \tag{8.5}$$

dla $\bar{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^f)$.

Twierdzenie 8.4. *Rynek $\mathcal{M}^f$ bez możliwości arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa.*

Znajdziemy teraz postać parytetu na rynku futures. Ponieważ

$$(f_T - K)^+ - (K - f_T)^+ = f_T - K,$$

więc ze wzoru (8.5) na cenę futures mamy

$$C_0^f - P_0^f = \frac{f_0 - K}{1 + r}. \tag{8.6}$$

Jest to wzór dający parytet kupna-sprzedaży dla opcji na rynku futures. Stąd jako wniosek otrzymujemy

$$C_0^f = P_0^f \Leftrightarrow f_0 = K,$$

więc na rynku futures cena opcji sprzedaży jest równa cenie opcji kupna o tej samej cenie wykonania, gdy cena wykonania jest równa obecnej cenie futures (tak było w przykł. 8.1).

8.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 8.1. Udowodnić, że rynek futures jednookresowy dwustanowy jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f^d < f_0 < f^u \tag{8.7}$$

(oznaczenia f^u, f^d jak w przykł. 8.1).

Rozwiązanie. $\Rightarrow$ Nie wprost. Gdy $f_0 \geqslant f^u$, to portfel $\varphi = (-1, 0)$ jest arbitrażem, gdyż

$$V_0^f(\varphi) = 0, \quad V_1^f(\varphi) = (-1)(f_1 - f_0) + (1 + r) \cdot 0 \geqslant 0,$$

(ponieważ $f_1 \leqslant f_0$) i

$$V_1^f(\varphi)(\omega_2) > 0.$$

Gdy $f_0 \leqslant f^d$, to portfel $\varphi = (1, 0)$ jest arbitrażem.
$\Leftarrow$ Niech $\varphi = (\alpha, \beta)$ będzie portfelem takim, że $V_0^f(\varphi) = 0$. Wtedy $\beta = 0$. Gdy $\alpha = 0$, to $\varphi = (0, 0)$ i $V_1^f(\varphi) = 0$. Gdy $\alpha \neq 0$, to $V_1^f(\varphi) = \alpha(f_1 - f_0)$. Stąd korzystając z warunku (8.7) otrzymujemy, że istnieje ω taka, że $V_1^f(\varphi)(\omega) < 0$, czyli nie istnieje arbitraż.

Ćwiczenie 8.2. Udowodnić, że
a) Jeśli na rynku futures jednookresowym dwustanowym miara martyngałowa $\hat{P}$ istnieje, to jest określona przez równość:

$$f_0 = E_{\hat{P}}(f_1) = \hat{p} f^u + (1 - \hat{p}) f^d, \tag{8.8}$$

gdzie $\hat{p} = \hat{P}(\{\omega_1\})$. Zatem

$$\hat{p} = \frac{f_0 - f^d}{f^u - f^d} \tag{8.9}$$

b) Miara martyngałowa $\hat{P}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{p} \in (0, 1)$.

Ćwiczenie 8.3. Udowodnić, że gdy (f, S, B, Ψ) jest rynkiem bez możliwości arbitrażu, to

$$f_0 = (1 + r) S_0. \tag{8.10}$$

Rozwiązanie. Kontrakt futures wypłaca w chwili T wielkość

$$X = f_T - f_0 = S_T - f_0.$$

W chwili 0 ten kontrakt nic nie kosztuje, więc

$$0 = \Pi_0(X) = \Pi_0(S_T - f_0) = \Pi_0(S_T) - \Pi_0(f_0) = S_0 - \frac{f_0}{1 + r},$$

co daje (8.10).

Ćwiczenie 8.4. Udowodnić lemat 8.1.

Ćwiczenie 8.5. Udowodnić, że Φ^f jest przestrzenią liniową.

Ćwiczenie 8.6. Udowodnić tw. 8.2.

Wskazówka. Naśladować dowód dla rynku akcji.

Ćwiczenie 8.7. Udowodnić tw. 8.3.

Ćwiczenie 8.8. Udowodnić tw. 8.4.

Ćwiczenie 8.9. Udowodnić, że $\varphi \in \Phi^f$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego momentu t

$$\bar{V}_t^f(\varphi) = \bar{V}_0^f(\varphi) + \sum_{u=0}^{t-1} \varphi_{u+1}^f (f_{u+1} - f_u) B_{u+1}^{-1}.$$

Rozwiązanie. Wystarczy udowodnić, że $\varphi \in \Phi^f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bar{V}_{t+1}^f(\varphi) - \bar{V}_t^f(\varphi) = \varphi_{t+1}^f (f_{t+1} - f_t)(1 + r)^{-(t+1)}. \tag{8.11}$$

Gdy φ jest strategią samofinansującą się, to

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{t+1}^f(\varphi) - \bar{V}_t^f(\varphi) &= B_{t+1}^{-1}(\varphi_{t+1}^f (f_{t+1} - f_t) + \varphi_t^0 B_{t+1}) - B_t^{-1}(B_t \varphi_t^0) = \\
&= \varphi_{t+1}^f (f_{t+1} - f_t)(1 + r)^{-(t+1)},
\end{aligned}$$

a więc (8.11) zachodzi. Na odwrót, gdy zachodzi (8.11), to

$$\bar{V}_{t+1}^{f}(\varphi) - \bar{V}_{t}^{f}(\varphi) \quad = \quad \varphi_{t+1}^{f}(f_{t+1} - f_{t})B_{t+1}^{-1}.$$

Mnożąc obie strony przez B_{t+1} otrzymujemy

$$V_{t+1}^{f}(\varphi) - V_{t}^{f}(\varphi)(1+r) = \varphi_{t+1}^{f}(f_{t+1} - f_{t}),$$

czyli

$$V_{t+1}^{f}(\varphi) - \varphi_{t}^{0}B_{t+1} = \varphi_{t+1}^{f}(f_{t+1} - f_{t}),$$

tj. (8.2), a więc φ jest strategią samofinansującą się.

Ćwiczenie 8.10. Niech $\mathcal{N}$ będzie rynkiem, na którym handlujemy instrumentami bazowymi i kontraktami futures oraz możemy inwestować w lokaty bankowe. Udowodnić, że $\mathcal{N}$ jest rynkiem bez możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy ceny kontraktów futures i forward są równe.

9. Model Blacka-Scholesa

Od tego rozdziału zajmiemy się badaniem rynku z czasem ciągłym. Zaczniemy od opisu procesu cen, a następnie zdefiniujemy model Blacka-Scholesa.

9.1. Aksjomaty procesu cen

W 1900 roku L. Bachelier zaproponował, żeby dynamikę ceny akcji na giełdzie paryskiej modelować za pomocą procesów otrzymanych z przejść granicznych błądzeń losowych, a więc zaproponował modelowanie ceny ciągłymi procesami S_t o przyrostach niezależnych, takimi że przy zmianie czasu o Δt zmiana ceny $S_{t+\Delta t} - S_t$ zachowuje się jak $\sqrt{\Delta t}$ dla małych przyrostów Δt. We współczesnym języku matematyki jego postulaty oznaczają, że proces cen powinien mieć postać:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

gdzie W_t jest procesem Wienera, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Zatem S_t ma rozkład normalny ze średnią $S_0 + \mu t$ i wariancją $\sigma^2 t$, co będziemy oznaczać $S_t \sim \mathcal{N}(S_0 + \mu t, \sigma^2 t)$. Stąd wynika, że cena akcji może przyjmować ujemne wartości z dodatnim prawdopodobieństwem. W związku z tym wiele osób odrzuca ten sposób modelowania ceny (zauważmy jednak, że z reguły trzech sigm wynika, że dla małych t szanse na ujemną cenę są znikome, bo $P(S_0 - 3\sigma\sqrt{t} \leqslant S_t \leqslant S_0 + 3\sigma\sqrt{t}) \approx 0{,}997$, a ponadto często w statystyce używa się rozkładu normalnego do modelowania wielkości z istoty rzeczy nieujemnych np. długości, co nie wzbudza wątpliwości). Inną konsekwencją przyjęcia modelu Bacheliera jest fakt, że rozkład przyrostu ceny na ustalonym przedziale czasowym jest taki sam, niezależnie od ceny początkowej. Dlatego szansa, że cena akcji sprzedawanej po 50 jednostek spadnie w tym okresie do 45 (strata w wysokości 10% wartości) jest taka sama, jak szansa, że akcja w ustalonym okresie czasu warta 10 spadnie do 5 (strata w wysokości 50% wartości). Praca Bacheliera była zbyt nowatorska jak na ówczesne czasy i bardzo szybko została zapomniana. Odkryto ją ponownie dopiero w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku.

W 1965 r. Samuelson zaproponował postulaty, które powinien spełniać proces cen S_t:

1. Ceny są dodatnie, czyli $\forall_{t \geqslant 0}\ S_t > 0$, S_0 jest stałą.
2. Procentowa zmiana cen akcji nie zależy od ceny obecnej ani od cen w przeszłości, czyli
$$\forall_{t,h \geqslant 0}\ \frac{S_{t+h}}{S_t} \quad \text{jest niezależne od} \quad \sigma(S_u : u \leqslant t).$$
3. Zmiana ta (a dokładniej rozkład zmiany) zależy tylko od długości odcinka czasu, na którym jest rozpatrywana, natomiast nie jest istotne, od którego momentu ją liczymy, tj.
$$\forall_{t,h \geqslant 0} \quad \frac{S_{t+h}}{S_t} \sim \frac{S_h}{S_0}.$$
4. Proces S_t ma ciągłe trajektorie.

Przy założeniach 1–4 można udowodnić, że proces cen wyraża się przez tzw. geometryczny proces Wienera (gdyż z postulatów wynika, że $\ln S_t$ jest procesem stacjonarnym o przyrostach niezależnych i o ciągłych trajektoriach)

$$S_t = S_0 \exp(at + \sigma W_t), \quad a \in \mathbb{R}, \sigma > 0. \tag{9.1}$$

Pozostaje problem doboru stałych a, σ by wzór (9.1) miał sens ekonomiczny. Okazuje się, że należy wziąć $\sigma > 0$ i $a = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ dla pewnego $\mu \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$S_t = S_0 \exp\Big(\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma W_t\Big). \tag{9.2}$$

Zatem S_t ma rozkład lognormalny, tj.

$$\ln S_t \sim N\Big(\ln S_0 + \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t, \sigma^2 t\Big). \tag{9.3}$$

Znajdziemy teraz ekonomiczny sens stałych μ, σ. Gdy V_t jest wartością jakiegoś portfela w chwili t, to dla $s < t$

$$\frac{1}{t-s} E\Big(\frac{V_t - V_s}{V_s}\Big)$$

jest oczekiwaną stopą zwrotu na jednostkę czasu z tego portfela w czasie od s do t. Wariancja stopy zwrotu na jednostkę czasu wyraża się wzorem

$$\frac{1}{t-s} D^2\Big(\frac{V_t - V_s}{V_s}\Big).$$

Gdy portfel składa się z jednej akcji, to oczywiście $V_t = S_t$. Jeśli proces S jest geometrycznym procesem Wienera, tj. S_t spełnia (9.2), to łatwo udowodnić, że

$$\lim_{u \to t^-} \frac{1}{t-u} E\Big(\frac{S_t - S_u}{S_u}\Big) = \mu,$$
$$\lim_{u \to t^-} \frac{1}{t-u} D^2\Big(\frac{S_t - S_u}{S_u}\Big) = \sigma^2.$$

Stąd μ, odzwierciedlające stałe tendencje zmian cen akcji, nazywa się współczynnikiem wzrostu (stopą aprecjacji) cen akcji, a σ mierzące zmienność nazywa się współczynnikiem zmienności cen akcji (dowód tych faktów pozostawiamy jako zadanie — zad. 9.4). W praktyce wielkość σ podaje się w procentach.

9.2. Klasyczny model Blacka-Scholesa

Teraz opiszemy klasyczny model Blacka-Scholesa (Blacka-Mertona-Scholesa) z horyzontem $T < \infty$. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$, na której mamy zadany proces Wienera W. Zakładamy, że mamy do czynienia z rynkiem idealnym, na którym mamy jeden papier ryzykowny, akcje nie płacące dywidend, o cenie zadanej wzorem

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}. \tag{9.4}$$

W §9.1 uzasadniliśmy taki wybór procesu cen. Na tym rynku mamy także rachunek bankowy o stałej stopie procentowej $r \geqslant 0$ w całym okresie handlu $[0, T]$ i ciągłej kapitalizacji, tj. proces wartości jednostki pieniężnej jest zadany równaniem

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1,$$

zatem $B_t = e^{rt}$. Rynek jest idealny, wszyscy mają taką samą wiedzę, a że informacje w naszym modelu są otrzymywane wyłącznie z obserwacji procesu cen S to o σ-ciele $\mathcal{F}_t$ interpretowanym jako wiedza uzyskana do chwili t zakładamy, że $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$. Ponieważ jedynym rozwiązaniem (9.4) jest

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t + \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t\Big), \tag{9.5}$$

więc $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^S$. Podsumowując zakładamy, że filtracja $\mathcal{F}_t$ jest uzupełnioną filtracją procesu Wienera, tj. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ i $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

Ten model jest znacznym uproszczeniem rzeczywistości. Jego zaletą są proste założenia zrozumiałe dla wszystkich. Stąd służy on jako pierwsze przybliżenie. Wzory (np. na ceny opcji) i reguły otrzymane dla tego modelu są używane w praktyce w bardziej wyrafinowany sposób.

Konstrukcję modelu rynku zaczynamy od definicji strategii.

Definicja 9.1. Strategią nazywamy proces mierzalny adaptowany $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ spełniający warunki

$$\int_0^T |\varphi_s^0| ds < \infty, \quad \int_0^T (\varphi_s^1)^2 ds < +\infty \quad \text{p.n.}. \tag{9.6}$$

Jak zawsze φ^0 interpretujemy jako liczbę jednostek bankowych, a φ^1 jako liczbę akcji. Strategia φ jest $\mathbb{F}$ adaptowana tzn. dla każdego t wektor losowy φ_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalny, zatem strategię tworzymy na podstawie wiedzy dostępnej do chwili t. Proces wartości portfela (strategii) też definiujemy jak zwykle, tj.

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t.$$

Proces zysków kapitałowych zadany jest przez odpowiednik (3.2):

$$G_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_u^0 dB_u + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u, \quad t \in [0, T].$$

Warto zauważyć, że z postaci równania zadającego proces cen wynika, że

$$\int_0^t \varphi_u^1 dS_u = \int_0^t \varphi_u^1 \mu S_u du + \int_0^t \varphi_u^1 \sigma S_u dW_u.$$

Warunek (9.6) oraz fakt, że cena S jest procesem ciągłym zapewniają istnienie całek występujących w definicji procesu zysku.

Definicja 9.2. Mówimy, że strategia φ jest samofinansująca się, gdy zachodzi

$$\forall t \in [0, T] \quad V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi). \tag{9.7}$$

Warunek (9.7) jest równoważny warunkowi:

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^0 r B_u du + \int_0^t \varphi_u^1 \mu S_u du + \int_0^t \varphi_u^1 \sigma S_u dW_u,$$

czyli

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 dB_t + \varphi_t^1 dS_t = \varphi_t^0 r B_t dt + \varphi_t^1 \mu S_t dt + \varphi_t^1 \sigma S_t dW_t.$$

Intuicyjnie, portfel φ jest samofinansujący się, gdy nie ma dopływu kapitału z zewnątrz — zmiany wartości portfela wynikają tylko z naszej polityki, czyli z postaci portfela φ i ze zmian cen S. Warunek (9.7) jest ciągłym odpowiednikiem warunku (3.5). Klasa wszystkich strategii samofinansujących się jest przestrzenią liniową. Będziemy ją oznaczać przez Φ.

Przykład 9.1. Strategia „kup i trzymaj aktywo” (*buy-and-hold*), czyli $\varphi_t^1 \equiv a > 0$, $\varphi_t^0 \equiv 0$ jest strategią samofinansującą się, bo

$$\begin{aligned} V_t(\varphi) &= \varphi_t^1 S_t = aS_t, \\ G_t(\varphi) &= \int_0^t a \, dS_u = a(S_t - S_0), \end{aligned}$$

a stąd

$$V_t(\varphi) = aS_0 + G_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi).$$

Ćwiczenie 9.1. Udowodnić, że strategia $\varphi_t^0 = \frac{S_t}{B_t}$, $\varphi_t^1 \equiv 0$ ma portfel bogactwa równy $V_t(\varphi) = S_t$ (a więc taki sam jak strategia „kup i trzymaj"), ale nie jest strategią samofinansującą się.

Rozwiązanie. Z postaci strategii φ mamy $V_t(\varphi) = S_t$, a z postaci B_t mamy

$$G_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_u^0 \, dB_u = \int_0^t \frac{S_u}{B_u} \, dB_u = r \int_0^t S_u du,$$

i korzystając z definicji strategii samofinansującej się (tj. z (9.7)) otrzymujemy, że $\varphi \in \Phi$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi warunek

$$S_t = S_0 + r \int_0^t S_u du. \tag{9.8}$$

Warunek (9.8) nie jest spełniony w modelu Blacka-Scholesa.

Definicja arbitrażu i jego sens jest analogiczny jak dla rynku skończonego.

Definicja 9.3. Możliwością arbitrażu (arbitrażem) nazywamy strategię $\varphi \in \Phi$ taką, że

$$V_0(\varphi) = 0, \quad P(V_T(\varphi) \geqslant 0) = 1, \quad P(V_T(\varphi) > 0) > 0 \tag{9.9}$$

dla pewnego $P \in \mathcal{P}$.

Ponieważ zbiory miary zero pozostają te same dla każdego $P \in \mathcal{P}$, więc jeśli (9.9) zachodzi dla pewnego $P \in \mathcal{P}$, to zachodzi dla każdego $P \in \mathcal{P}$. Arbitraż jest sposobem postępowania, który nigdy nie przyniesie straty i daje możliwość osiągnięcia zysku w sprzyjających okolicznościach. Gdy na rynku istnieje możliwość arbitrażu, to odpowiednio postępując można osiągać na nim zysk bez ryzyka. Istnienie arbitrażu świadczy o braku równowagi na rynku. Na istniejących rynkach finansowych działają arbitrażyści i nie ma możliwości arbitrażu. Zatem modele opisujące rzeczywistość powinny być wolne od arbitrażu.

Zajmiemy się teraz pojęciem wypłaty.

Definicja 9.4. Wypłatą europejską (aktywem pochodnym lub kontraktem europejskim) z momentem wykonania T nazywamy zmienną losową X.

Wypłatę X otrzymuje kupujący w chwili T, jest to zmienna losowa, więc jest ona $\mathcal{F}_T$-mierzalna, czyli jest skonstruowana w oparciu o dostępną wiedzę do chwili T, a zatem jej wartość zależy od procesu cen. Jak zawsze, pojawia się pytanie: jeśli w momencie T kupujący otrzymuje X, to ile powinien zapłacić za to teraz? By na nie odpowiedzieć, wprowadzamy, jak dla rynków skończonych, pojęcie strategii replikującej. Mówimy, że $\varphi \in \Phi$ jest strategią replikującą wypłatę X w chwili T gdy $V_T(\varphi)=X$ (strategia φ jest zabezpieczeniem wypłaty X). Jeśli wypłata X ma choć jedną strategię replikującą, to mówimy, że X jest osiągalna. Analogicznie jak dla rynku skończonego wprowadzamy pojęcie bogactwa wypłaty osiągalnej (tzn. pojęcie jednoznacznej replikowalności), a mianowicie mówimy, że istnieje proces bogactwa osiągalnej wypłaty X, gdy dla każdych strategii $\varphi, \psi \in \Phi$, takich, że $V_T(\varphi) = V_T(\psi) = X$ procesy $V(\varphi)$ i $V(\psi)$ są nieodróżnialne (tzn. $P(\forall t \leqslant T : V_t(\varphi) = V_t(\psi)) = 1$).

Definicja 9.5. Niech $\Psi \subset \Phi$. Na rynku $\mathcal{M} = (B, S, \Psi)$ bez możliwości arbitrażu ceną arbitrażową $\Pi_t(X)$ w chwili t osiągalnej wypłaty europejskiej X dla której istnieje proces bogactwa nazywamy wartość w chwili t strategii samofinansującej się replikującej wypłatę tzn. $\Pi_t(X) = V_t(\varphi)$.

Uwaga 9.1. Wybór klasy strategii $\Psi \subset \Phi$ jest istotny. Nie można wziąć, jak dla rynku skończonego, $\Psi = \Phi$, gdyż prowadzi to do arbitrażu. Zatem musimy dokonać sensownego wyboru jakiejś podklasy Ψ strategii samofinansujących się Φ. Wyborem podklasy Ψ zajmiemy się pózniej.

Taka definicja ceny jest uzasadniona faktem, że dla inwestora jest obojętne, czy ma w swym portfelu instrument finansowy, czy wartość początkową strategii generującej go, gdyż w obu przypadkach otrzymuje na końcu okresu inwestycji tę samą wypłatę (w drugim przypadku musi postępować tak, jak wskazuje strategia replikująca). Można udowodnić wprost, że definicja ceny jest poprawna tzn. że dla każdej wypłaty osiągalnej istnieje proces bogactwa. My to udowodnimy korzystając z idei miary martyngałowej. Wszystkie ceny będziemy dyskontować przez wartość jednostki bankowej, tj.

$$B_t^* = \frac{B_t}{B_t} \equiv 1, \qquad S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = S_t e^{-rt}.$$

Definicja 9.6. Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ nazywamy miarą martyngałową, gdy $P^* \sim P$ i S^* jest P^*-martyngałem lokalnym.

Zaczniemy od twierdzenia podającego postać miary martyngałowej dla zdyskontowanego procesu cen S^*.

Twierdzenie 9.1. *Miara probabilistyczna P^* o gęstości*

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\Big(\frac{r-\mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\Big(\frac{r-\mu}{\sigma}\Big)^2 T\Big) \tag{9.10}$$

jest jedyną miarą martyngałową. Ponadto proces S^* jest P^*-martyngałem o dynamice

$$dS_t^* = \sigma S_t^* d\widehat{W}_t, \quad S_0^* = s, \tag{9.11}$$

gdzie $\widehat{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t$ jest procesem Wienera względem P^* i filtracji $\mathbb{F}$.

Dowód. Ponieważ $S_t^* = S_t e^{-rt}$, więc ze wzoru na całkowanie przez części

$$dS_t^* = S_t(-re^{-rt})dt + e^{-rt} dS_t. \tag{9.12}$$

Zatem, korzystając z dynamiki S tzn. (9.4), otrzymujemy

$$dS_t^* = e^{-rt}(-rS_t dt + \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) = S_t^*((\mu - r)dt + \sigma dW_t).$$

Chcemy, by $dS_t^* = \sigma S_t^* d\widehat{W}_t$ dla procesu Wienera $\widehat{W}$ przy pewnej mierze P^*. Zatem powinno zachodzić

$$\sigma d\widehat{W}_t = \sigma dW_t - (r - \mu)dt. \tag{9.13}$$

Na mocy tw. Girsanowa miara P^* zadana wzorem (9.10) jest dobrze zdefiniowaną miarą probabilistyczną i $\widehat{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t$ jest procesem Wienera względem P^*. Wtedy zachodzi (9.13), czyli zachodzi (9.11). Proces S^*, przy mierze P^* jest równy całce stochastycznej względem procesu Wienera plus stała, więc jest P^*-martyngałem lokalnym, czyli P^* jest miarą martyngałową dla S^*. Jedyność P^* pozostawiamy jako zadanie dla Czytelnika (zad. 9.10). Ponieważ

$$E \int_0^T \sigma^2 (S_t^*)^2 dt < \infty, \tag{9.14}$$

to S^* jest P^*-martyngałem. □

Uwaga 9.2. a) Warunek (9.11) można zapisać równoważnie

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t, \tag{9.15}$$

gdyż z (9.13) mamy

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = r S_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t.$$

Zatem przy zamianie miary na równoważną miarę martyngałową współczynnik zmienności ceny akcji nie ulega zmianie.

b) Z (9.15) wynika, że przy mierze martyngałowej P^* proces cen ma postać

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma \widehat{W}_t + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t\Big). \tag{9.16}$$

Analogicznie jak w przypadku rynku skończonego istnieje ważna charakteryzacja portfeli samofinansujących się w terminach procesu zdyskontowanych cen:

Twierdzenie 9.2. *Strategia $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ jest strategią samofinansującą się wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi*

$$\forall t \in [0,T] \quad V_t^*(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*. \tag{9.17}$$

Dowód. $\Rightarrow$ Konieczność. Ponieważ

$$V_t^*(\varphi) = V_t(\varphi)e^{-rt}, \tag{9.18}$$

więc kolejno ze wzoru na całkowanie przez części, definicji strategii samofinansującej się i (9.12) mamy

$$\begin{aligned} dV_t^*(\varphi) &= -re^{-rt}V_t(\varphi)dt + e^{-rt}dV_t(\varphi) = \\ &= -re^{-rt}(\varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t)dt + e^{-rt}(\varphi_t^0 dB_t + \varphi_t^1 dS_t) = \\ &= \varphi_t^1(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) = \varphi_t^1 dS_t^*. \end{aligned}$$

Zatem równość (9.17) jest spełniona.
Dostateczność. Z (9.18) mamy

$$dV_t^*(\varphi) = -re^{-rt}(\varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t)dt + e^{-rt}dV_t(\varphi). \tag{9.19}$$

Ze wzoru (9.12) otrzymujemy

$$\varphi_t^1 dS_t^* = -re^{-rt}S_t\varphi_t^1 dt + e^{-rt}\varphi_t^1 dS_t. \tag{9.20}$$

Z założenia (9.17) wynika, że lewe strony wzorów (9.19) i (9.20) są równe, więc i prawe są równe, zatem

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 dB_t + \varphi_t^1 dS_t,$$

czyli $\varphi \in \Phi$. □

Lemat ten wykorzystuje się do znajdowania strategii samofinansujących się replikujących daną wypłatę. Z niego wynika także:

Twierdzenie 9.3. *Miara P^* jest miarą martyngałową dla S^* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej strategii samofinansującej się φ zdyskontowany proces bogactwa $V^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem lokalnym.*

Dowód. Konieczność. Korzystając z (9.11) i (9.17) mamy

$$V_t^*(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^* = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 \sigma S_u^* d\widehat{W}_t,$$

a ponieważ $\widehat{W}$ jest P^* procesem Wienera, to $V^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem lokalnym.
Dostateczność. Biorąc strategię stałą $\varphi^0 \equiv 0, \varphi^1 \equiv 1$ otrzymujemy, że $\varphi \in \Phi$ i $S_t^* = V_t^*(\varphi)$. $V^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem lokalnym z założenia, czyli S^* jest P^*-martyngałem lokalnym. □

Rozpatrywanie rynku ze wszystkimi możliwymi strategiami samofinansującymi się prowadzi do arbitrażu. Zatem, by wykluczyć arbitraż, ograniczamy klasę strategii do strategii dopuszczalnych

Definicja 9.7. Niech P^* będzie miarą martyngałową dla S^*. Strategię $\varphi \in \Phi$ nazywamy dopuszczalną (P^*–dopuszczalną), gdy proces

$$\int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*$$

jest P^*-martyngałem.

Ponieważ dla S^* istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa, to mówimy, że φ jest dopuszczalna (zamiast P^*–dopuszczalna), gdyż nie ma wątpliwości o jaką miarę martyngałową chodzi. Zbiór takich strategii będziemy oznaczać przez $\Phi(P^*)$.

Uwaga 9.3. Gdy $\varphi \in \Phi$, to z warunku (9.17) wynika, że

$$V_t^*(\varphi) = V_0^*(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*,$$

a stąd jeśli $\varphi \in \Phi(P^*)$, to proces $V_t^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem.

Udowodnimy teraz, że wzięcie $\Psi = \Phi(P^*)$ jest dobrym wyborem klasy portfeli.

Twierdzenie 9.4. *Rynek $(B, S, \Phi(P^*))$ jest wolny od arbitrażu.*

Dowód. Weźmy $\varphi \in \Phi(P^*)$ takie, że $V_0(\varphi) = 0$ i $P(V_T(\varphi) \geqslant 0) = 1$. Udowodnimy, że $P(V_T(\varphi) = 0) = 1$, więc φ nie jest arbitrażem, a zatem na rynku $(S, \Phi(P^*))$ nie istnieje arbitraż.

Z założenia $V^*(\varphi)$ jest P^*-martyngałem, wobec tego

$$E_{P^*} V_T^*(\varphi) = E_{P^*} V_0(\varphi) = 0. \tag{9.21}$$

Ponieważ $P^*(V_T(\varphi) \geqslant 0) = 1$ (bo $P \sim P^*$), $B_T > 0$, więc (9.21) implikuje $P^*(V_T(\varphi) = 0) = 1$, a stąd z równoważności miar P i P^* otrzymujemy $P(V_T(\varphi) = 0) = 1$. □

Definicja 9.8. Trójkę $\mathcal{M} = (B, S, \Phi(P^*))$ nazywamy klasycznym modelem Blacka-Scholesa rynku finansowego (w skrócie modelem Blacka-Scholesa; niektórzy autorzy używaja nazwy model Blacka-Mertona-Scholesa).

9.3. Rynkowa cena ryzyka.

Załóżmy, że na rynku Blacka-Scholesa bez możliwości arbitrażu mamy dodatkowy instrument pierwotny, zatem mamy dwa instrumenty pierwotne, którymi możemy handlować i których ceny zadane są względem jednowymiarowego procesu Wienera W (tego samego) równaniami

$$dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(\mu_i dt + \sigma_i dW_t), \quad i = 1, 2,$$

czyli na tym rynku mamy jedno źródło losowości — proces Wienera W i rynek rozszerzony jest rynkiem bez możliwości arbitrażu. Gdy P^* jest miarą martyngałową dla rynku Blacka-Scholesa $(B, S^{(1)}, \Phi(P^*))$, to

$$\widehat{W_t} = W_t - \Big(\frac{r - \mu_1}{\sigma_1}\Big)t$$

jest P^*-procesem Wienera. Ponadto

$$dS_t^{(2)*} = S_t^{(2)*}((\mu_2 - r)dt + \sigma_2 dW_t) = S_t^{(2)*}\Big(\Big((\mu_2 - r) + \frac{r - \mu_1}{\sigma_1}\sigma_2\Big)dt + \sigma_2 d\widehat{W_t}\Big),$$

a ponieważ proces $S^{(2)*}$ jest P^*-martyngałem, więc

$$(\mu_2 - r) + \frac{r - \mu_1}{\sigma_1}\sigma_2 = 0.$$

Stąd

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}.$$

Gdy proces ceny S jest zadany wzorem (9.2), to wielkość

$$\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

ekonomiści nazywają rynkową ceną ryzyka (przez analogię do modelu CAPM) — jest to nadwyżka średniego zwrotu z akcji ponad zwrot z instrumentu bez ryzyka mierzona w jednostkach ryzyka. Wykazaliśmy, że instrumenty bazowe, którymi można handlować na rozszerzonym rynku Blacka-Scholesa bez możliwości arbitrażu z instrumentami bazowymi o cenach zadanych wzorem (9.2) (z różnymi parametrami) mają tę samą rynkową cenę ryzyka. Warto zauważyć, że ta terminologia została tu użyta w innym sensie niż dotąd: nie jest to cena arbitrażowa jakiegoś jednego instrumentu, którym możemy handlować na rynku.

Ponieważ $\widehat{W_t} = W_t + \gamma t$, więc γ wyznacza gęstość miary martyngałowej P^* względem P

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\Big(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T\Big)$$

i stąd miara P^* jest nazywana miarą neutralną względem ryzyka.

9.4. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 9.2. Udowodnić, że proces spełniający postulaty 1–4 z §9.1 jest zadany wzorem (9.1).

Ćwiczenie 9.3. Wykazać, że gdy S_t spełnia (9.2), to

$$\lim_{u \to t^-} \frac{1}{t - u} E\Big(\frac{S_t - S_u}{S_u}\Big) = \mu,$$
$$\lim_{u \to t^-} \frac{1}{t - u} D^2\Big(\frac{S_t - S_u}{S_u}\Big) = \sigma^2.$$

Wskazówka. Skorzystać z faktu, że gdy $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$, *to* $EY = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$, $D^2(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.
Rozwiązanie.

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} = \exp\Big((t-s)\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big) + \sigma(W_t - W_s)\Big) - 1,$$

więc korzystając z faktu podanego we wskazówce znajdujemy wartość oczekiwaną i wariancję tego ułamka. Reszta jest prostym przejściem do granicy.

Ćwiczenie 9.4. Pokazać, że średnia wartość ceny rośnie ze stopą równą μ, czyli $ES_t = S_0 e^{t\mu}$. Stąd wynika, że gdy średnia stopa zwrotu z akcji ma być taka sama jak dla papierów bez ryzyka, to $\mu = r$.

Wskazówka. Skorzystać ze wskazówki do poprzedniego zadania.

Ćwiczenie 9.5. Rozważmy na rynku Blacka-Scholesa akcję z ceną początkową 40, oczekiwanym zwrotem 16% p.a., współczynnikiem zmienności 20% p.a. (na rynku te wielkości podaje się w procentach). Znaleźć:

a) 95% przedział ufności dla ceny akcji za trzy miesiące.
b) średnią cenę akcji za trzy miesiące.

Rozwiązanie. Z warunków zadania mamy $\mu = 0{,}16$, $\sigma = 0{,}2$, $S_0 = 40$, $t = 1/4$. Z (9.3) wynika, że $\ln S_t$ ma rozkład normalny, a jak wiemy, 95% przedział ufności dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ma postać $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$. Stąd, po rachunkach, otrzymujemy przedział ufności: $(34{,}05; 50{,}39)$. Z ćw. 9.4 otrzymujemy $ES_t = 41{,}63$.

Ćwiczenie 9.6. Udowodnić, że proces cen S_t spełniający (9.2) jest opisany za pomocą równania

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Rozwiązanie. Stosujemy wzór Itô do funkcji $f(x) = e^x$ i procesu X zadanego stochastycznym równaniem różniczkowym

$$dX_t = \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)dt + \sigma dW_t$$

(wtedy $S_t = f(X_t)$).

Ćwiczenie 9.7. Udowodnić, że portfel stały jest strategią samofinansującą się.

Rozwiązanie. Portfel stały jest kombinacją liniową strategii „kup i trzymaj” oraz włóż pieniądze do banku, które są strategiami samofinansującymi się (przykład 9.1), a więc portfel stały jest strategią samofinansującą się.

Ćwiczenie 9.8. Analogicznie jak w czasie dyskretnym, znając strategię inwestowania w papiery ryzykowne i kapitał początkowy, znamy całą strategię samofinansującą się. Formalnie: udowodnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i procesu prognozowalnego φ^1 takiego, że całka $\int \varphi^1 dS^*$ istnieje, przyjęcie

$$\varphi_t^0 = x + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^* - \varphi_t^1 S_t^*$$

definiuje jednoznacznie portfel samofinansujący się $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1) \in \Phi$, taki, że $V_0(\varphi) = x$.

Ćwiczenie 9.9. Udowodnić, że jeśli rynek (S, Ψ) dla $t \in [0, T]$ jest wolny od arbitrażu, to rynek (S, Ψ) dla $t \in [0, T_1]$, gdzie $T_1 < T$, jest wolny od arbitrażu.

Rozwiązanie. Jeśli istnieje arbitraż φ dla $t \in [0, T_1]$, to inwestując w chwili T_1 całe bogactwo $V_{T_1}^*(\varphi)$ w aktywa bez ryzyka otrzymujemy strategię arbitrażową dla rynku z czasem $[0, T]$.

Ćwiczenie 9.10. Udowodnić, że dla klasycznego rynku Blacka-Scholesa istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa.

Ćwiczenie 9.11. Udowodnić, że na rynku Blacka-Scholesa strategia „kup i trzymaj aktywo” (patrz przykł. 9.1) jest strategią dopuszczalną.

Rozwiązanie. $G_t^*(\varphi) = \int_0^t \varphi_t^1 dS_u^* = a(S_t^* - S_0^*), \quad a \in \mathbb{R}$, więc $G_t^*(\varphi)$ jest P^*martyngałem.

10. Wycena i zabezpieczenie w modelu Blacka-Scholesa

Zajmiemy się teraz wyceną i zabezpieczeniem wypłat w klasycznym modelu Blacka-Scholesa $\mathcal{M} = (B, S, \Phi(P^*))$, który jest wolny od arbitrażu (tw. 9.4).

10.1. Wycena ogólnej wypłaty

Wykażemy, że cena $\Pi_t(X)$ tzn. cena arbitrażowa w chwili t wypłaty osiągalnej X zdefiniowana jako wartość procesu replikującego X jest dobrze określona i znajdziemy wzór pozwalający liczyć te cenę.

Twierdzenie 10.1. *Niech X będzie wypłatą osiągalną w $(B, S, \Phi(P^*))$. Wtedy cena arbitrażowa $\Pi_t(X)$ wypłaty X jest dobrze określona i jest dana przez formułę wyceny neutralną względem ryzyka:*

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}(X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T]. \tag{10.1}$$

Dowód. Idea dowodu jest analogiczna do idei dowodu twierdzenia dla czasu dyskretnego. Gdy $\varphi \in \Phi(P^*)$ replikuje wypłatę X, to $V^*(\varphi)$ jest P^*–martyngałem, więc

$$V_t^*(\varphi) = E_{P^*}(V_T^*(\varphi)|\mathcal{F}_t) = E_{P^*}(X B_T^{-1}|\mathcal{F}_t).$$

Stąd wynika, że proces wartości portfela replikującego wypłatę X jest wyznaczony jednoznacznie, gdyż dla $\varphi, \psi \in \Phi(P^*)$ replikujących X zachodzi

$$V_t^*(\varphi) = E_{P^*}(X B_T^{-1}|\mathcal{F}_t) = V_t^*(\psi),$$

czyli $V_t(\varphi) = V_t(\psi)$. Ponadto

$$\Pi_t(X) = V_t(\varphi) = B_t E_{P^*}(X B_T^{-1}|\mathcal{F}_t),$$

co kończy dowód. □

Uwaga 10.1. a) Ponieważ $\mathcal{F}_0$ jest σ-ciałem zbiorów P-trywialnych, zatem i P^*-trywialnych, $B_0 = 1$, to cenę wypłaty X liczymy jako wartość oczekiwaną przy mierze martyngałowej zdyskontowanej wypłaty:

$$\Pi_0(X) = E_{P^*}(X B_T^{-1}). \tag{10.2}$$

b) Jeśli X jest wypłatą osiągalną w $\mathcal{M}$, to mamy dobrze określoną cenę arbitrażową X w każdej chwili i

$$\frac{\Pi_t(X)}{B_t} = E_{P^*}(X B_T^{-1}|\mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T],$$

więc zdyskontowana cena jest P^*-martyngałem. W konsekwencji możemy handlować tym instrumentem na rynku, gdyż dołączenie tego instrumentu do rynku nie wprowadza arbitrażu (P^* na rozszerzonym rynku z procesem cen $(B, S, \Pi(X))$ jest miarą martyngałową).

Następne twierdzenie opisuje klasę wypłat replikowalnych.

Twierdzenie 10.2. *W modelu Blacka-Scholesa każda wypłata, która jest całkowalna z kwadratem względem P^* jest osiągalna.*

Dowód. Trzeba wykazać, że dla każdego $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P^*)$ istnieje strategia dopuszczalna φ replikująca wypłatę X, czyli trzeba znaleźć $\varphi \in \Phi(P^*)$, takie że

$$\varphi_t^0 B_T + \varphi_t^1 S_T = X.$$

Niech

$$M_t := E_{P^*}(e^{-rT} X | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T]. \tag{10.3}$$

Jest to martyngał całkowalny z kwadratem. Ponieważ $\mathbb{F}$ jest filtracją generowaną przez ruch Browna, więc z twierdzenia o reprezentacji istnieje proces adaptowany $(K_t)_{t\in[0,T]}$, taki że $E_{P^*}(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$ i

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s d\widehat{W}_s \quad \text{p.n.} \tag{10.4}$$

Strategia zdefiniowana wzorami

$$\varphi_t^0 = M_t - \frac{K_t}{\sigma}, \quad \varphi_t^1 = \frac{K_t}{\sigma S_t^*} \tag{10.5}$$

ma kapitał początkowy

$$V_0(\varphi) = M_0 - \frac{K_0}{\sigma} + \frac{K_0}{\sigma S_0} S_0 = M_0.$$

Jest strategią samofinansującą się, gdyż z (10.5), (10.4), z tego, że $M_0 = V_0(\varphi)$ i z (9.11) mamy

$$\begin{aligned} V_t^*(\varphi) &= \varphi_t^0 + \varphi_t^1 S_t^* = M_t - \frac{K_t}{\sigma} + \frac{K_t}{\sigma} = M_t = \\ &= M_0 + \int_0^t K_u d\widehat{W}_u = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 \sigma S_u^* d\widehat{W}_u = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*, \end{aligned}$$

i z lematu 9.2 strategia φ jest samofinansującą się. Przy okazji udowodniliśmy, że $V_t^*(\varphi) = M_t$, więc V_t^* jest P^*-martyngałem, czyli φ jest strategią dopuszczalną tzn, $\varphi \in \Phi(P^*)$ oraz $V_T^*(\varphi) = M_T$ tzn. $V_T(\varphi) = X$. □

Uwaga 10.2. a) W modelu Blacka-Scholesa cena wypłaty całkowalnej z kwadratem względem P^* jest równa

$$\Pi_t(X) = E_{P^*}(e^{-(T-t)r} X | \mathcal{F}_t). \tag{10.6}$$

Postać $\Pi_t(X)$ wynika natychmiast ze wzoru (10.1), gdyż $B_t B_T^{-1} = e^{rt} e^{-rT} = e^{-(T-t)r}$.
b) Gdy uogólnimy definicję zupełności z rynku skończonego (na którym każda wypłata jest ograniczona) przyjmując, że rynek bez możliwości arbitrażu jest zupełny, gdy dla każdej ograniczonej wypłaty X w chwili T istnieje strategia dopuszczalna replikująca wypłatę X, to z Twierdzenia 10.2 wynika, że rynek jest zupełny i ma miejsce sytuacja typowa dla tak zdefiniowanego rynku zupełnego: klasa wypłat replikowalnych jest znacznie szersza niż klasa wypłat ograniczonych.

c) Dowodząc istnienia strategii dopuszczalnej zabezpieczającej wypłatę użyliśmy twierdzenia o reprezentacji. Podkreśla to wagę twierdzeń o reprezentacji do konstrukcji strategii zabezpieczających (patrz też ćw. 4.6).

Twierdzenie 10.2 ma jedną wadę z punktu widzenia zastosowań w praktyce, nie podaje explicite sposobu, w jaki można replikować wypłatę, gdyż jego dowód korzysta z twierdzenia o reprezentacji martyngału, a zwykle nie znamy jawnej postaci procesu K w przedstawieniu (10.4). Gdy uda nam się znaleźć przedstawienie (10.4) dla którego znamy postać K, to wzory (10.5) zadają strategię replikującą.

W sytuacji gdy wypłata zależy tylko od ceny końcowej S_T, to można podać portfel replikujący i jego wartość w jawnej postaci.

Twierdzenie 10.3. *Jeśli wypłata $X = f(S_T)$ jest całkowalna z kwadratem względem miary martyngałowej, to $\Pi_t(X) = F(t, S_t)$ dla $t \in [0,T]$ z funkcją F daną w jawnej postaci:*

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \tag{10.7}$$

Gdy ponadto F dane wzorem (10.7) należy do klasy $C^{1,2}((0,T) \times R)$, to portfel φ zadany wzorem

$$\varphi_t^1 = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \tag{10.8a}$$

$$\varphi_t^0 = e^{-rt}[F(t,S_t) - \varphi_t^1 S_t] \tag{10.8b}$$

jest dopuszczalny i replikuje X.

Dowód. Gdy $X = f(S_T)$ to ze wzorów (9.16) i (10.6) mamy

$$\Pi_t(X) = E_{P^*}[f(S_T)e^{-r(T-t)}|\mathcal{F}_t] =$$
$$E_{P^*}[e^{-r(T-t)} f(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})|\mathcal{F}_t] = F(t, S_t), \tag{10.9}$$

gdzie F jest dane wzorem (10.7), gdyż S_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalne, a przyrost $\widehat{W}_T - \widehat{W}_t$ jest niezależny od $\mathcal{F}_t$ i ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, T-t)$.

Niech φ replikuje wypłatę X i niech

$$G(t,x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt}).$$

Wtedy $G \in C^{1,2}((0,T) \times \mathbb{R})$, $G(0,x) = F(0,x)$ i

$$V_t^*(\varphi) = e^{-rt}\Pi_t(X) = e^{-rt}F(t,S_t) = G(t, S_t^*), \tag{10.10}$$

a zatem $X = V_T(\varphi) = e^{rT}G(T, S_T^*)$. Stąd, by zakończyć dowód wystarczy znaleźć strategię replikującą $\varphi \in \Phi$ mającą przedstawienie

$$G(t, S_t^*) = V_0^*(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*$$

z procesem φ^1 zadanym w jawnej postaci.

Ze wzoru Itô dla procesu $G(t, S_t^*)$ oraz (9.11) mamy

$$\begin{aligned} G(t, S_t^*) &= G(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial u}(u, S_u^*)du + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial x}(u, S_u^*)dS_u^* + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(u, S_u^*)\sigma^2 (S_u^*)^2 du = \\ &= G(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial x}(u, S_u^*)dS_u^* + \int_0^t L_u du, \end{aligned} \tag{10.11}$$

gdzie

$$L_u = \frac{\partial G}{\partial u}(u, S_u^*) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(u, S_u^*)\sigma^2 (S_u^*)^2.$$

Ponieważ $G(t, S_t^*)$ jest martyngałem (wzór (10.10)), to z (10.11) i z tego, że martyngał ciągły o wahaniu ograniczonym jest stały otrzymujemy $L_t \equiv 0$, a stąd

$$G(t, S_t^*) = V_0^*(\varphi) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial x}(u, S_u^*)dS_u^*. \tag{10.12}$$

Mając tę reprezentację definiujemy strategię:

$$\varphi_t^1 = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t^*), \quad \varphi_t^0 = G(t, S_t^*) - \varphi_t^1 S_t^*.$$

Tak zdefiniowane φ spełnia $V_t^*(\varphi) = G(t, S_t^*)$. Stąd, z (10.1) i z lematu 9.2 wynika, że φ jest strategią dopuszczalną. Strategia φ replikuje wypłatę X, gdyż

$$V_T(\varphi) = G(T, S_T^*)B_T = X.$$

Z (10.10) widać natychmiast, że strategię φ można zapisać za pomocą funkcji F:

$$\varphi_t^1 = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \quad \varphi_t^0 = e^{-rt}[F(t, S_t) - \varphi_t^1 S_t].$$

□

Uwaga 10.3. Mając taką postać bogactwa strategii $V_t(\varphi)$ można się spodziewać, że będziemy potrafili znaleźć jawną postać strategii dopuszczalnej φ replikującej wypłatę $X = f(S_T)$ dla dużej klasy funkcji f takich, że F dane wzorem (10.7) należy do klasy $C^{1,2}((0,T)\times R)$. W szczególności do tej klasy funkcji należą funkcje definiujące opcję kupna i opcję sprzedaży.

Kontrakt forward na kupno akcji. Zajmiemy się teraz kontraktem forward na kupno akcji na rynku Blacka-Scholesa $(B, S, \Phi(P^*))$. Jak wiemy, wypłata z takiego kontraktu jest zadana wzorem $X = S_T - K$, gdzie K jest ceną kontraktu forward w chwili 0. Wypłata jest osiągalna, gdyż jest to kombinacja liniowa wypłat osiągalnych. Wiemy też, że

$$\Pi_t(X) = B_t E_{P^*}\Big(\frac{S_T - K}{B_T}|\mathcal{F}_t\Big). \tag{10.13}$$

Stąd, ponieważ S^* jest P^*-martyngałem, mamy

$$\Pi_0(X) = E_{P^*}\Big(\frac{S_T - K}{B_T}\Big) = S_0 - \frac{K}{B_T}.$$

Cena forward to taka wielkość K, że cena kontraktu w chwili 0 jest równa 0, wejście w kontrakt nic nie kosztuje, czyli $\Pi_0(X) = 0$, tzn.

$$K = B_T S_0 = e^{rT} S_0.$$

Znając K znajdujemy wartość kontraktu w chwili t korzystając z (10.13):

$$\Pi_t(X) = B_t[S_t^* - KB_T^{-1}] = S_t - B_t S_0 = S_t - e^{rt} S_0. \tag{10.14}$$

A jak wygląda portfel replikujący? Z (10.14) wiemy, że (φ^0, φ^1) replikuje X gdy $\varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t = S_t - e^{rt} S_0$, czyli na przykład gdy $\varphi_t^0 = -S_0$, $\varphi_t^1 = 1$. Ten portfel jest kombinacją portfeli „kup i trzymaj" (więc jest samofinansujący się); należy kupić jedną akcję pożyczając z banku kwotę na jej zakup i trzymać ten portfel bez zmian do momentu realizacji kontraktu. W powyższych rozważaniach nie wykorzystywaliśmy własności rynku specyficznych dla rynku Blacka-Scholesa, więc to rozumowanie jest prawdziwe dla dowolnego rynku z czasem ciągłym bez możliwości arbitrażu.

10.2. Wycena opcji europejskich

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem funkcji wypłaty, a mianowicie opcjami kupna. Wyprowadzimy sławne wzory Blacka-Scholesa.

Twierdzenie 10.4. *Cena arbitrażowa $C_t = C(S_t, t, T, K)$ w chwili $t \leqslant T$ europejskiej opcji kupna z ceną wykonania K i momentem wykonania T na rynku Blacka-Scholesa jest równa:*

$$C_t = c(S_t, T-t), \tag{10.15}$$

dla $t \in [0, T]$, przy czym funkcja $c\colon \mathbb{R}_+ \times [0,T] \to \mathbb{R}$ jest postaci

$$c(x,t) = xN(d_1(x,t)) - Ke^{-rt} N(d_2(x,t)),$$

gdzie

$$d_1(x,t) = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{10.16}$$

$$d_2(x,t) = d_1(x,t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{10.17}$$

a $N(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$. Ponadto, dopuszczalna strategia replikująca ma postać

$$\varphi_t^0 = -Ke^{-rt} N(d_2(S_t, T-t)), \quad \varphi_t^1 = N(d_1(S_t, T-t)). \tag{10.18}$$

Dowód. Obliczymy F zadane wzorem (10.7) dla funkcji $f(x) = (x-K)^+$. Mamy

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} \Big(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y\sqrt{T-t}} - K \Big)^+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\sigma y\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-r(T-t)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} d_1 = d_1(x, T-t) &= \frac{\ln \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 = d_2(x, T-t) &= d_1(x,t) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Korzystając z (10.9) otrzymujemy wzór (10.15). Postać (10.18) strategii dopuszczalnej replikującej wypłatę z opcji kupna otrzymujemy ze wzoru (10.1). □

Uwaga 10.4. a) Z tego twierdzenia wynika, że

$$C_0 = S_0 N(d_1(S_0, T)) - Ke^{-rT} N(d_2(S_0, T)).$$

b) Portfel replikujący zawiera $\frac{\partial C}{\partial S}$ akcji, jest więc delta zabezpieczeniem (por. wzór (5.8) dla modelu CRR), a ponieważ $\varphi_t^1 = N(d_1(S_t, T-t)) > 0$, to portfel replikujący nie korzysta z krótkiej sprzedaży.

Rozważymy teraz opcję sprzedaży. Ponieważ

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K,$$

więc

$$\Pi_t((S_t - K)^+) - \Pi_t((K - S_T)^+) = \Pi_t(S_T - K).$$

Stąd otrzymujemy formułę zgodności ceny opcji kupna i ceny opcji sprzedaży (parytet kupna-sprzedaży):

$$C(S_t, t, T, K) - P(S_t, t, T, K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T], \tag{10.19}$$

gdzie $C(S_t, t, T, K)$ i $P(S_t, t, T, K)$ oznaczają cenę w chwili t odpowiednio opcji kupna i opcji sprzedaży o cenie wykonania K i terminie wykonania T.

Z (10.19) i tw. 10.4 otrzymujemy cenę europejskiej opcji sprzedaży. Przyjmując

$$p(x, t) := Ke^{-rt} N(-d_2(x, t)) - xN(-d_1(x, t)) \tag{10.20}$$

mamy

Wniosek 10.1. *Cena arbitrażowa $P_t = P(S_t, t, T, K)$ w chwili $t \in [0, T]$ europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania K i momentem wykonania T równa się*

$$P_t = p(S_t, T-t), \tag{10.21}$$

gdzie p jest zadane wzorem (10.20), a d_1, d_2 wzorami (10.16) i (10.17).

Portfel replikujący ma postać

$$\varphi_t^0 = Ke^{-rt} N(-d_2(S_t, T-t)), \quad \varphi_t^1 = -N(-d_1(S_t, T-t)).$$

Dowód wniosku pozostawimy jako zadanie (ćw. 10.4).

Przykład 10.1. Rozważmy europejską opcję kupna. Termin wygaśnięcia tej opcji upływa za trzy miesiące. Bieżąca cena akcji wynosi 80, cena wykonania 100. Stopa wolna od ryzyka 10%, $\sigma = 1{,}5$. Obliczymy cenę opcji kupna i wartość opcji sprzedaży z tą samą ceną wykonania.

Skorzystamy ze wzoru (10.15) i parytetu kupna-sprzedaży. Wstawiamy dane: $t = 0$, $T = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $S_0 = 80$, $K = 100$, $r = 10\%$, $\sigma = 1{,}5$ i otrzymujemy $C_0 = 18{,}04$ oraz $P_0 = 18{,}04 - 80 + 100e^{-0{,}1 \cdot 0{,}25} = 35{,}57$. Cenę P_0 można też otrzymać nie korzystając z parytetu, wyliczamy ją ze wzoru (10.21).

Uwaga 10.5. Można udowodnić, że w modelu Blacka-Scholesa funkcja F zadająca proces ceny arbitrażowej wypłaty $X = f(S_T)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego (równania Blacka-Scholesa).

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(x, t) - rC(x, t) = 0, \tag{10.22}$$

$x > 0$, $t \in (0, T)$ z warunkiem końcowym $F(x, T) = f(x)$ dla $x \geqslant 0$.

To wskazuje, że można się spodziewać, że wzory Blacka-Scholesa można otrzymać korzystając z równań różniczkowych cząstkowych. I tak rzeczywiście jest (patrz ćw. 10.11).

10.3. Analiza wrażliwości cen opcji

. Warto zauważyć, że żadna z wielkości występujących w formułach Blacka-Scholesa nie zależy od oczekiwanej stopy zwrotu inwestora μ (zatem od jego oceny ryzyka i od jego preferencji). Zależą one natomiast od:
– bieżącej ceny akcji S_t,
– ceny wykonania K,
– czasu $T-t$ pozostałego do realizacji opcji,
– współczynnika zmienności σ,
– stopy procentowej bez ryzyka r.
Osoby zarządzające ryzykiem w instytucjach finansowych są zainteresowane tym, jak bardzo mogą zmienić się ceny opcji w ich portfelach inwestycyjnych, gdy zmienia się dokładnie jeden z powyższych parametrów, gdyż takie zmiany mają wpływ na wartość całego portfela. Zbadamy teraz pod tym kątem własności ceny opcji kupna. Dla prostoty rozważymy cenę opcji w chwili zero, tj.

$$C = C_0 = C(S_0, 0, T, K) = C(s, 0, T, K, \sigma, r),$$

gdzie $s = S_0$. Zbadamy, jak zmienia się cena opcji, gdy zmieniamy jeden parametr, a pozostałe są zamrożone. Będziemy korzystali z jawnej postaci wzoru na cenę opcji kupna (10.15) lub z przedstawienia

$$C = E_{P^*}(se^Y - Ke^{-rT})^+, \qquad \text{gdzie } \; Y \sim \mathcal{N}(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T). \tag{10.23}$$

Teraz przeanalizujemy zależność funkcji C od czynników wymienionych powyżej. Okazuje się, że
a) Funkcja C jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej s — bieżącej ceny akcji.
b) Funkcja C jest malejąca jako funkcja zmiennej K — ceny wykonania.
c) Funkcja C jest funkcją rosnącą jako funkcja czasu pozostałego do realizacji opcji.
d) Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej σ — współczynnika zmienności.
e) Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej r — stopy procentowej bez ryzyka.

Ćwiczenie 10.1. Udowodnić powyższe stwierdzenia

Rozwiązanie.
a) Y nie zależy od s, więc prawa strona (10.23) rośnie wtedy, gdy s rośnie. Własność ta oznacza, że cena opcji rośnie gdy wartość początkowa akcji rośnie.
b) Własność ta wynika z faktu, że prawa strona (10.23) maleje względem K. Jest to intuicyjnie oczywiste, bo wartość wypłaty z opcji $(S_T - K)^+$ jest większa, gdy K zmniejszymy.
c) Zaczniemy od uzasadnienia intuicyjnego. Jak wiemy na rynku dyskretnym cena europejskiej opcji kupna równa jest cenie amerykańskiej opcji kupna. Tego samego możemy oczekiwać dla modelu z czasem ciągłym, a dla opcji amerykańskiej wydłużenie czasu opcji zwiększa jej wartość (nabywca opcji ma więcej praw). Rachunek formalny — obliczamy pochodną:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = se^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} + rKe^{-rT} N(d_2) > 0.$$

d) Nabywca opcji zyskuje, gdy cena opcji bardzo wzrośnie w momencie wykonania, natomiast nie ma znaczenia spadek ceny poniżej ceny wykonania K, bowiem i tak nabywca opcji nic wtedy nie dostaje. Formalnie:

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = se^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2\pi}} > 0. \tag{10.24}$$

e) Istotnie, wyrażenie pod znakiem całki w (10.23) rośnie, gdy r rośnie, bo odjemna nie zależy od r, a odjemnik maleje. Inne uzasadnienie tego faktu wynika z dodatniości pochodnej

$$\frac{\partial C}{\partial r} = TKe^{-rT}N(d_2) > 0.$$

10.4. Szukanie współczynnika zmienności ceny akcji.

W praktyce, by obliczyć cenę opcji musimy znać współczynnik zmienności σ. Jest to wielkość rynkowa i trzeba ją znaleźć patrząc na zachowanie rynku. W tym celu powszechnie stosowane są dwie metody:

a) metoda zmienności historycznej (*historic volatility*) — estymacja σ z danych z przeszłości,
b) metoda zmienności implikowanej (*implied volatility*).

Omówimy je kolejno.

Ad a). Metoda ta opiera się na danych z rynku — danych historycznych. Aby estymować σ obserwujemy ceny w ustalonych okresach czasu o równej długości (np. codziennie, co tydzień itp.). Oznaczmy:

n — liczba obserwacji; obserwacji dokonujemy w chwilach $t_1, t_2, \ldots, t_n$, takich, że odstępy czasu pomiędzy obserwacjami są równe,

τ — długość przedziału czasu pomiędzy obserwacjami (liczona w latach),

s_i — zaobserwowana cena akcji na końcu i-tego przedziału czasu ($i = 1, \ldots, n$).

Niech $\bar{S}_i$ będzie teoretyczną ceną akcji na końcu i-tego przedziału, tj. $\bar{S}_i = S_{t_i}$ i niech

$$U_i = \ln \frac{\bar{S}_i}{\bar{S}_{i-1}}$$

— są to tzw. logarytmiczne zwroty cen. Wtedy $\bar{S}_i = \bar{S}_{i-1}e^{U_i}$, czyli U_i jest ciągłą stopą zwrotu w i-tym przedziale (ale nie w skali roku). Ponieważ założyliśmy, że rynek opisuje model Blacka-Scholesa, więc ze wzoru (9.5) wynika, że U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym z wariancją $\sigma^2\tau$ i wartością średnią $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ zależną od preferencji inwestora (rynku).

Z rynku mamy obserwacje cen, czyli wielkości $s_1, s_2, \ldots, s_n$, a stąd możemy wyznaczyć wielkości $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Odchylenie standardowe zmiennej losowej U_i jest równe $\sigma\sqrt{\tau}$, a estymatorem odchylenia standardowego U_i niezależnym od wartości średniej jest statystyka

$$\widehat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2},$$

gdzie $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$. Podkreślmy, że ten estymator nie zależy od wartości średniej. Zatem $\widehat{\sigma}_U$ estymuje $\sigma\sqrt{\tau}$. Stąd współczynnik zmienności σ jest estymowany przez $\widehat{\sigma} = \widehat{\frac{\sigma_U}{\sqrt{\tau}}}$. Błąd standardowy tej estymacji wynosi w przybliżeniu $\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$.

Wybranie właściwego n nie jest łatwe. Im większe n, tym lepszy estymator, ale używamy starszych danych, a jak powszechnie wiadomo, model Blacka-Scholesa w miarę poprawnie opisuje rynek dla krótkich okresów czasu. Z badań empirycznych wynika, że dla długich okresów czasu σ zmienia się w czasie (nie jest stacjonarne). Zawsze szacowanie przyszłej wartości σ na podstawie przeszłości obarczone jest błędem. Należy wybrać taki okres czasu, by estymator miał dobre własności i jednocześnie na tyle krótki, że założenie, iż rynek jest opisany przez model Blacka-Scholesa można zaakceptować. Na ogół przyjęcie długości okresu czasu używanego do estymacji jest dyktowane doświadczeniem osoby wykonującej takie szacowania. Podkreślmy jeszcze raz, że stosując metodę historyczną zakładamy, że parametr σ nie zmieni się w czasie, a więc metoda ta nie uwzględnia możliwych zmian wielkości parametru σ (czyli tego, że po pewnym czasie rynek opisuje model Blacka-Scholesa z inną zmiennością).

Ad b). Metoda zmienności implikowanej opiera się na przekonaniu, że zmienność jest zdeterminowana przez rynek.

Z (10.24) wynika, że cena opcji jest rosnącą funkcją parametru σ, gdy pozostałe czynniki są stałe. Zatem znając z rynku wielkości: S_t (cena akcji), K, $T-t$, r i $C_{obs} = C_{obs}(S_t, t, T, K, r)$ (cena opcji obserwowana na rynku) możemy znaleźć tę wartość σ, przy której cena teoretyczna opcji jest równa cenie rynkowej, czyli tę wartość σ dla której $C_{obs} = C_t$. Dokładniej, zakładamy, że r, t, T, K, S_t są ustalone i znane. Jak wiemy

$$C_t = C(S_t, t, T, K, \sigma, r) = S_t N(d_1(S_t, T-t)) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2(S_t, T-t)).$$

Definicja 10.1. Zmiennością implikowaną $\sigma_{imp} = \sigma_{imp}(K, T)$ nazywa się tę dodatnią wielkość I, dla której

$$C_{obs}(t, T, K) = C(S_t, t, T, K, I, r). \tag{10.25}$$

Inaczej mówiąc, σ_{imp} jest tą wielkością odchylenia standardowego stopy zwrotu z akcji, która przy zastosowaniu wzoru Blacka-Scholesa daje cenę teoretyczną opcji równą cenie opcji na rynku. Gdy $C_{obs}(S_t, t, T, K, r) > \lim_{\sigma \to 0^+} C(S_t, t, T, K, \sigma, r)$, to istnieje dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie (10.25), co wynika z (10.24). Zmienność implikowana σ_{imp} jest rozwiązaniem tego nieliniowego równania (10.25). Rozważamy to w obecnej chwili t, znamy S_t, więc bez straty ogólności możemy założyć, że $t = 0$.

Gdy ustalimy czas do wygaśnięcia opcji T i gdy rynek jest opisany przez model Blacka-Scholesa to σ_{imp} powinno być stałe i równe σ z modelu. W rzeczywistości, gdy używa się opcji o różnych cenach wykonania dla tej samej akcji, czyli rozpatrujemy funkcję $K \to \sigma_{imp}(K)$ (implikowana krzywa zmienności), to σ_{imp} jako funkcja K nie jest stałą, ma miejsce tzw. efekt uśmiechu zmienności (implikowana krzywa zmienności jest wypukła i ma minimum). W praktyce otrzymuje się różne kształty wykresu funkcji. Stąd jedną z metod znajdowania zmienności implikowanej dla rynku jest branie odpowiednio ważonej średniej ze współczynników zmienności implikowanej obliczanych dla różnych opcji, przy czym najlepiej brać te opcje, których cena jest bardziej czuła na zmiany parametru σ. Inną metodą jest wybór σ_{imp}, w taki sposób by ceny teoretyczne n wybranych opcji były jak najbliższe cen rynkowych tych opcji, tj. by

$$C_{obs}(t, T_i, K_i) \approx C(S_t, t, T_i, K_i, \sigma_{imp}, r)$$

dla $i = 1, \dots, n$. Zwykle wybiera się kryterium metody najmniejszych kwadratów, by ocenić, co to znaczy najbliższe, tj. rozwiązuje się problem minimalizacji

$$\min_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (C^i_{obs} - C^i)^2,$$

gdzie $C^i_{obs} = C_{obs}(t, T_i, K_i)$, $C^i = C(S_t, t, T_i, K_i, \sigma, r)$ i jako σ_{imp} przyjmuje się σ rozwiązujące ten problem. Jeszcze innym wyjściem jest taka modyfikacja modelu, w której parametr σ przestaje być stały (są to modele stochastycznej zmienności).

Uwaga 10.6. Z parytetu (który także wynika z argumentów arbitrażowych, a nie z konkretnego modelu) można oczekiwać, że zmienność implikowana wyznaczona za pomocą opcji sprzedaży (odpowiednik wzoru (10.25) zastosowany do $P_{obs}(S_0, T, K, r)$ i $P(S_0, T, K, \sigma, r)$) będzie równa zmienności implikowanej wyznaczonej za pomocą opcji kupna z tymi samymi K, T (patrz ćw. 10.12).

Uwaga 10.7. Z (10.19) wynika, że jeżeli rynek wycenia aktywa zgodnie z modelem Blacka-Scholesa i cena opcji kupna na rynku rośnie, to i cena opcji sprzedaży (oczywiście dla tych samych S_0, T, K) rośnie.

Z punktu widzenia praktyka można zapytać: po co szukać σ, przecież na rynku mamy ceny opcji kupna i sprzedaży zadane przez prawo popytu i podaży na rynku. Do handlowania tymi opcjami nie trzeba znać σ. To prawda, ale mając σ mamy dobrze opisany model cen i model rynku. Wtedy potrafimy wyceniać opcje egzotyczne i opcje tworzone na żądanie, których ceny nie są dostępne na rynku w każdej chwili, gdyż nie są to instrumenty płynne (dokładniej, możemy wtedy zastosować procedury, najczęściej przybliżone, konstruowane w celu wyceny opcji egzotycznych, patrz 11.2). Ponadto znajomość współczynnika zmienności σ jest niezbędna do konstruowania portfeli zabezpieczających.

Warto podkreślić, że procedura znajdowania wielkości implikowanych była możliwa, gdyż znaliśmy jawny wzór na ceny opcji i mogliśmy go odwrócić. Stąd widać jak ważne są w tym modelu rynku który konstruujemy jawne wzory na ceny instrumentów którymi handlujemy.

10.5. Opcje na instrument bazowy płacący dywidendy. Opcje walutowe

Rozważymy teraz opcje na akcje płacące dywidendy (wzór Mertona z roku 1973). Zaczniemy od rozumowania nieformalnego.

Niech akcja o cenie równej S_t płaci dywidendę z ciągłą stopą q w skali roku, proporcjonalną do poziomu ceny (sensowność takiego spojrzenia uzasadnili Samuelson [Sam] oraz Samuelson i Merton [Sam-M], q jest stałą. Wypłata dywidendy powoduje spadek ceny akcji (część wartości idzie na dywidendę). Zatem jeśli cena akcji wzrośnie z S_t do S_T, to gdyby nie było dywidendy, cena akcji wzrosłaby w okresie od t do T do wielkości $S_T e^{q(T-t)}$. Stąd cena opcji europejskiej na akcję o wartości S_t w chwili t płacącą dywidendę q jest równa cenie opcji na akcję nie płacącą dywidendy o cenie w chwili t równej $S_t e^{-q(T-t)}$, gdyż obie opcje wypłacają tyle samo w momencie T (korzystamy z prawa jednej ceny). Możemy zatem użyć wzorów Blacka-Scholesa zmniejszając cenę akcji do $S_t e^{-q(T-t)}$ i otrzymane w ten sposób wzory będą dawały ceny opcji na akcje płacące dywidendy.

Wyprowadzimy teraz te wzory formalnie. Rozpatrzmy rynek, na którym jest rachunek bankowy i akcja płacąca dywidendy o cenie zadanej, jak zawsze w modelu Blacka-Scholesa, wzorem

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \sigma > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{10.26}$$

Z założenia, proces wartości dywidendy D_t jest określony przez

$$dD_t = qS_t dt,$$

ale proces D_t nie jest aktywem, którym handlujemy, zatem trzeba dywidendę zainwestować w rynek: kupić akcje lub umieścić ją na rachunku bankowym. Biorąc pod uwagę dywidendę mówimy, że strategia (φ^0, φ^1) jest samofinansującą się, gdy proces bogactwa

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^1 S_t + \varphi_t^0 B_t$$

spełnia równanie:

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^1 dS_t + \varphi_t^1 dD_t + \varphi_t^0 dB_t, \tag{10.27}$$

a więc (z postaci S_t i D_t) otrzymujemy

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^1 (\mu + q) S_t dt + \sigma \varphi_t^1 S_t dW_t + \varphi_t^0 dB_t. \tag{10.28}$$

Rozpatrzmy proces $\bar{S}_t = e^{qt}S_t$ (intuicyjnie $\bar{S}_t$ jest procesem ceny akcji zwiększonym o stratę wynikającą z wypłaty dywidendy z ciągłą stopą q). Ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy, że $\bar{S}_t$ spełnia

$$d\bar{S}_t = (\mu + q)\bar{S}_t dt + \sigma \bar{S}_t dW_t. \tag{10.29}$$

Stąd $\bar{S}_t^* = \frac{\bar{S}_t}{B_t}$, czyli zdyskontowany proces $\bar{S}_t$ spełnia

$$d\bar{S}_t^* = (\mu + q - r)\bar{S}_t^* dt + \sigma \bar{S}_t^* dW_t. \tag{10.30}$$

Zmieniając miarę na równoważną miarę probabilistyczną Q o gęstości

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\Big(\frac{r-\mu-q}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\Big(\frac{r-\mu-q}{\sigma}\Big)^2 T\Big) \tag{10.31}$$

i korzystając z tego, że

$$\overline{W}_t = W_t - \frac{r-\mu-q}{\sigma}t$$

jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ względem $(\mathcal{F}_t)_t$ otrzymujemy z (10.30):

$$d\bar{S}_t^* = \sigma \bar{S}_t^* d\overline{W}_t. \tag{10.32}$$

Zbadajmy teraz dynamikę procesu wartości portfela φ spełniającego (10.28). Ze wzoru Itô i z (10.29) mamy

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^1 e^{-qt} d\bar{S}_t + \varphi_t^0 dB_t. \tag{10.33}$$

Dalej ze wzoru na całkowanie przez części, z (10.33) i (10.32) mamy

$$dV_t^*(\varphi) = \varphi_t^1 e^{-qt} d\bar{S}_t^* = \varphi_t^1 \sigma S_t^* d\overline{W}_t, \tag{10.34}$$

więc proces $V_t^*(\varphi)$ jest Q-lokalnym martyngałem. Dlatego na rynku, na którym handlujemy akcją płacącą dywidendy oraz istnieje rachunek bankowy można w standardowy sposób zdefiniować zbiór strategii dopuszczalnych $\Phi^d(Q)$, arbitraż i model rynku bez możliwości arbitrażu $(B, S, \Phi^d(Q))$. Powtarzając poprzednie rozumowania otrzymujemy wzory na ceny opcji kupna na tym rynku:

$$C_t^q = B_t E_Q\Big(\frac{(S_T - K)^+}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = e^{-qT}e^{-r(T-t)}E_Q((\bar{S}_T - e^{qT}K)^+|\mathcal{F}_t).$$

A ponieważ $\bar{S}^*$ jest Q-martyngałem, więc możemy powtórzyć rozumowanie przeprowadzone dla rynku Blacka-Scholesa albo starannie przyglądając się tamtym rachunkom zobaczyć, że

$$C_t^q = e^{-qT}C(\bar{S}_t, t, T, Ke^{qT}),$$

gdzie C jest wzorem dającym wycenę opcji kupna w modelu Blacka-Scholesa. W ten sposób otrzymujemy wzory Mertona:

Twierdzenie 10.5. *Cena arbitrażowa C_t^q w chwili $t \leqslant T$ europejskiej opcji kupna na akcję płacącą dywidendę z ciągłą stopą q w skali roku proporcjonalną do poziomu ceny jest równa:*

$$C_t^q = S_t e^{-q(T-t)} N(\bar{d}_1) - K e^{-r(T-t)} N(\bar{d}_2), \tag{10.35}$$
$$P_t^q = K e^{-r(T-t)} N(-\bar{d}_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-\bar{d}_1), \tag{10.36}$$

gdzie K jest ceną wykonania, T momentem wykonania opcji,

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= \bar{d}_1(S_t, T-t) = \\ &= d_1(\bar{S}_t, T-t) = \frac{\ln \frac{S_t e^{qt}}{K e^{qT}} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \\ &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned} \tag{10.37}$$

$$\bar{d}_2 = \bar{d}_2(S_t, T-t) = \bar{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{10.38}$$

Podkreślmy jeszcze raz, że wzory wyprowadziliśmy przy założeniu, że wypłacana dywidenda jest stała. Gdy q zmienia się, to jako przybliżenie q należy wziąć średnią z rocznych stóp. Stopa dywidendy q, którą można otrzymać z danych historycznych, zmienia się nieznacznie w ciągu kwartału, zatem dla opcji o krótkim terminie zapadalności można zakładać, że stopa q jest stała. W rzeczywistości założenie, że pojedyncza spółka płaci dywidendę zgodnie z modelem Samuelsona jest nierealistyczne. Ale okazuje się, że ten model można stosować z powodzeniem do indeksów giełdowych. W tym celu zakładamy, że indeks jest opisywany przez geometryczny proces Wienera. Teoretycznie tak nie musi być, bo jest to średnia ważona procesów cen, które są geometrycznymi procesami Wienera. Ale dla zastosowań praktycznych taki model jest sensowny i dobrze przybliża rzeczywistość.

Przykład 10.2. Europejska opcja sprzedaży i kupna na indeks S&P500 ma termin zapadalności 1 miesiąc. Obecna wartość indeksu wynosi 200, cena wykonania 210, stopa procentowa bez ryzyka jest równa 5% p.a., a zmienność indeksu 10% p.a. średnia dywidenda wynosi 3% p.a. Ceny opcji C^q, P^q obliczamy korzystając ze wzorów: (10.35) i (10.35) dla danych: $t = 0, T = 1$ miesiąc $= 1/12, S_0 = 200, K = 210, r = 5\%, \sigma = 10\%, q = 3\%$ i otrzymujemy: $C_0^q = 17{,}29$, $P_0^q = 4{,}85$.

Opcje walutowe. Wzory Mertona (10.35) i (10.36) można zastosować do wyceny opcji walutowych, czyli opcji wystawianych na walutę zagraniczną a wycenianych w walucie krajowej. Cena waluty zagranicznej S jest po prostu kursem wymiany i jest zadana wzorem (9.2) z odpowiednio dobranymi μ, σ. Posiadacz waluty zagranicznej otrzymuje dywidendę q, która jest stopą procentową bez ryzyka r_f dla tej waluty. Zatem można zastosować wzory (10.35) i (10.36) dla $q = r_f$. Jak łatwo zauważyć (patrz ćw. 10.13), cena kontraktu forward w chwili t na dostawę jednostki waluty zagranicznej w momencie T przy kursie wymiany S_t wynosi:

$$F_t = F_S(t, T) = e^{(r - r_f)(T-t)} S_t. \tag{10.39}$$

Korzystając z tego otrzymujemy wzory Garmana-Kohlhagena, niezależnie otrzymane przez Bigera i Hulla (1983), na ceny (w walucie krajowej) opcji kupna i sprzedaży wystawianych na walutę obcą:

$$\begin{aligned}
C_t^{rf} &= S_t e^{-r_f(T-t)} N(\bar{d}_1) - K e^{-r(T-t)} N(\bar{d}_2) = e^{-r(T-t)}[F_t N(\bar{d}_1) - K N(\bar{d}_2)], \\
P_t^{rf} &= K e^{-r(T-t)} N(-\bar{d}_2) - S_t e^{-r_f(T-t)} N(-\bar{d}_1) = \\
&= e^{-r(T-t)}[K N(-\bar{d}_2) - F_t N(-\bar{d}_1)],
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\bar{d}_1 &= \bar{d}_1(F_t, T-t) = \frac{\ln \frac{F_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
\bar{d}_2 &= \bar{d}_2(F_t, T-t) = \frac{\ln \frac{F_t}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
\end{aligned}$$

W standardowy sposób można otrzymać cenę w walucie krajowej dowolnej wypłaty X na rynku zagranicznym. Oczywiście jest ona równa cenie tej wypłaty w walucie zagranicznej (patrz ćw. 10.14).

Jak wiemy ze wzoru (10.39) cena forward w chwili 0 na dostawę jednostki waluty zagranicznej w momencie T przy kursie wymiany S wynosi:

$$F_0 = e^{(r-r_f)T} S_0 = E_Q S_T,$$

gdzie Q jest miarą martyngałową dla S^*. Gdy wymieniamy walutę zagraniczną na krajową, to kurs wymiany jest procesem $\frac{1}{S}$ i jego dynamika przy jego mierze martyngałowej $\overline{Q}$ (czyli przy mierze martyngałowej na rynku zagranicznym) jest równa

$$d\Big(\frac{1}{S_t}\Big) = (r - r_f)\frac{1}{S_t}dt + \sigma \frac{1}{S_t} d\overline{W}_t, \tag{10.40}$$

gdzie $\overline{W}$ jest procesem Wienera przy mierze martyngałowej $\overline{Q}$. Zatem cena forward jednostki waluty krajowej (w jednostkach waluty zagranicznej) jest równa

$$\overline{F}_0 = e^{(r-r_f)(T-t)} \frac{1}{S_0} = E_{\overline{Q}}\Big(\frac{1}{S_T}\Big),$$

a stąd wynika, że ceny forward są, jak należało oczekiwać na rynku bez możliwości arbitrażu, zgodne.

$$\overline{F}_0 = \frac{1}{F_0}. \tag{10.41}$$

Ale cena forward na dostawę jednej jednostki waluty zagranicznej w chwili T nie jest na ogół nieobciążonym estymatorem wartości kursu wymiany w chwili T. Jest to tzw. paradoks Siegela (patrz ćw. 10.15).

10.6. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 10.2. Czy na klasycznym rynku Blacka-Scholesa cena opcji kupna równa 40 i opcji sprzedaży równa 30 o terminie zapadalności 1 rok z ceną wykonania 38 przy obecnej cenie waloru 45 i współczynniku zmienności równym 20% stwarzają możliwość arbitrażu? Stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% dla wszystkich terminów do jednego roku. W przypadku istnienia arbitrażu, opisać go.

Rozwiązanie. Ponieważ $C_0 - P_0 < S_0 - Ke^{-rT}$, więc nie zachodzi parytet, zatem istnieje arbitraż, np. sprzedajemy krótko akcję, sprzedajemy opcję sprzedaży i kupujemy opcję kupna.

Ćwiczenie 10.3. Zbadać zachowanie ceny opcji europejskiej gdy $\sigma \to 0$.

Rozwiązanie. Gdy $S_0 > Ke^{-rT}$, to $d_1 \to \infty$, $d_2 \to \infty$ gdy $\sigma \to 0$ oraz

$$\lim_{\sigma \to 0} C(S_0, T, K, \sigma, r) = S_0 - Ke^{-rT} \tag{10.42}$$

Gdy $S_0 = Ke^{-rT}$, to $\lim_{\sigma \to 0} d_1 = 0, \lim_{\sigma \to 0} d_2 = 0$ i zachodzi (10.42).
Gdy $S_0 < Ke^{-rT}$, to $d_1 \to -\infty$, $d_2 \to -\infty$ i $\lim_{\sigma \to 0} C(S_0, T, K, \sigma, r) = 0$.
Warto zauważyć, że gdy $S_t = S_0 e^{rt}$ ($\sigma = 0$ i cena rośnie zgodnie ze stopą bez ryzyka), to cena europejskiej opcji kupna jest równa

$$e^{-rT} \max(S_0 e^{rT} - K, 0) = \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0),$$

i jest jednocześnie równa wielkości otrzymanej z przejścia granicznego ($\sigma \to 0$) we wzorach Blacka-Scholesa.

Ćwiczenie 10.4. Udowodnić wniosek 10.1, dający cenę europejskiej opcji sprzedaży.

Ćwiczenie 10.5. Znaleźć strategię dopuszczalną replikującą wypłatę z europejskiej opcji sprzedaży.

Ćwiczenie 10.6. Udowodnić, że cena europejskiej opcji:
a) kupna,
b) sprzedaży
jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania.

Ćwiczenie 10.7. Udowodnić, że cena europejskiej opcji:
a) kupna,
b) sprzedaży
jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja bieżącej ceny akcji.

Ćwiczenie 10.8. Znaleźć cenę wypłaty

$$X = \max(\min(K_1, S_T), K_2) - K_3.$$

gdzie K_1, K_2 i K_3 są stałymi.

Wskazówka. Patrz przykł. 4.1.

Ćwiczenie 10.9. Powiemy, że V_t reprezentuje wartość instrumentu, którym handluje się na rynku Blacka-Scholesa, gdy $V_t^* = \frac{V_t}{B_t}$ jest P^*-martyngałem (gdzie P^* jest miarą martyngałową dla S^*).
a) Wykazać, że $X_t = S_t^\beta$ dla $\beta > 1$ nie reprezentuje instrumentu, którym się handluje.
b) Dla jakiego α proces $Z_t = S_t^\alpha$ reprezentuje wartość instrumentu, którym się handluje?

Ćwiczenie 10.10. Udowodnić, że w modelu Blacka-Scholesa cena wypłaty postaci $X = g(S_T)$, gdzie $g \in C^2$, $g(0) = 0$ jest równa

$$\Pi_0(X) = S_0 g'(0) + \int_0^\infty C_T(y) g''(y) dy, \tag{10.43}$$

gdzie $C_T(y)$ jest ceną arbitrażową europejskiej opcji kupna akcji o cenie S z terminem wykonania T i ceną wykonania y.

Ćwiczenie 10.11. Udowodnić, że w modelu Blacka-Scholesa funkcja C zadająca proces ceny opcji kupna $C_t = C(S_t, t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego (równania Blacka-Scholesa).

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x,t) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(x,t) - rC(x,t) = 0, \tag{10.44}$$

$x > 0$, $t \in (0,T)$ z warunkiem końcowym $C(x,T) = (x-K)^+$ dla $x \geqslant 0$ oraz warunkiem brzegowym $C(0,t) = 0$ dla $t \in [0,T]$ (bo wypłata zerowa nic nie kosztuje).

Rozwiązanie. Z tw. 10.4 wiemy, że $C_t = C(S_t,t)$, $C \in C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R})$. Ze wzoru Itô dla $C_t^* = \frac{C(S_t,t)}{B_t}$ mamy

$$\begin{aligned}
dC_t^* &= B_t^{-1}dC(S_t,t) + C(S_t,t)dB_t^{-1} = \\
&= B_t^{-1}\Big[\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(S_t,t)(rS_tdt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2 dt\Big] + \\
&\quad - C(S_t,t)rB_t^{-1}dt = \\
&= B_t^{-1}\Big[\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(S_t,t) + \frac{\partial C}{\partial x}(S_t,t)rS_t - C(S_t,t)r\Big]dt + \\
&\quad + B_t^{-1}\sigma S_t\frac{\partial C}{\partial x}(S_t,t)dW_t.
\end{aligned}$$

Ponieważ C_t^* jest P^*-martyngałem, więc całka Lebesgue'a musi znikać i cena C spełnia (10.44). Warunki końcowy i brzegowy są oczywiste. Warto zauważyć, że w tym dowodzie nie wykorzystywaliśmy postaci funkcji C, a tylko wiedzę że $C \in C^{1,2}((0,T)\times R)$.

Ćwiczenie 10.12. Udowodnić, że σ_{imp} wyznaczona za pomocą wzoru (10.25) spełnia

$$P_{obs} = P(S_t, t, T, K, \sigma_{imp}, r).$$

Rozwiązanie. Z parytetu wynika, że

$$C_{obs} - P_{obs} = S_t - Ke^{-(T-t)}$$

(w przeciwnym przypadku istnieje arbitraż) oraz $C_t - P_t = S_t - Ke^{-(T-t)}$. Stąd

$$C_{obs} - C_t = P_{obs} - P_t. \tag{10.45}$$

Dla $\sigma = \sigma_{imp}$ lewa strona (10.45) jest równa zeru, więc i prawa.

Ćwiczenie 10.13. Znaleźć cenę forward dla kursu walutowego.

Rozwiązanie. Rozważmy portfel składający się w chwili zero z $\frac{1}{S_0}$ jednostek waluty zagranicznej, -1 jednostek waluty krajowej i $-\frac{1}{S_0}\exp r_f T$ kontraktów forward na otrzymanie jednej jednostki waluty zagranicznej z ceną forward w chwili 0 równą K. Nie zmieniamy tego portfela do chwili T. Wartość tego portfela w walucie krajowej w chwili 0 i T wynosi:

$$\begin{aligned}
V_0(\varphi) &= \frac{1}{S_0}S_0 - 1 = 0, \\
V_T(\varphi) &= \frac{1}{S_0}e^{r_f T}S_T - e^{rT} - (S_T - K)\frac{1}{S_0}\exp r_f T = \\
&= -e^{rT} + K\frac{1}{S_0}\exp r_f T = \text{const.}
\end{aligned}$$

Ponieważ na rynku nie ma możliwości arbitrażu, więc musi być $V_T(\varphi) = 0$, a stąd

$$F_0 = K = e^{(r-r_f)T}S_0.$$

Ćwiczenie 10.14. Udowodnić, że w chwili 0 cena opcji walutowej o wypłacie X jest identyczna w walucie krajowej i zagranicznej.

Rozwiązanie. (*szkic*). Jak wiemy, cena obcej waluty S jest kursem wymiany i przy mierze martyngałowej Q jest zadana równaniem

$$dS_t = (r - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

W jest Q-procesem Wienera i cena opcji w chwili 0 wynosi $E_Q(Xe^{-rT})$. Z punktu widzenia posiadacza waluty zagranicznej kurs wymiany jest procesem $Z = =1/S_t$, instrument bez ryzyka spełnia równanie $dD_t = r_f D_t dt$, a wypłata z opcji wynosi XS_T^{-1}. Naśladując postępowanie przeprowadzone dla akcji z dywidendą, otrzymujemy, że miara martyngałowa $\overline{Q}$ dla procesu cen Z spełnia

$$dQ = \exp\Big(- \sigma \overline{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T\Big) d\overline{Q},$$

gdzie $\overline{W}_t = W_t - \sigma t$ jest $\overline{Q}$-procesem Wienera. Cena wypłaty w walucie zagranicznej wynosi $E_{\overline{Q}}(XS_T^{-1}e^{-r_f T})$ i sprawdzamy, że

$$S_0 e^{-r_f T} E_{\overline{Q}}(XS_T^{-1}) = e^{-rT} E_Q X,$$

korzystając z tego, że potrafimy znaleźć postać Z:

$$Z_T = Z_0 e^{(q - r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma \bar{W}_T)}.$$

Ćwiczenie 10.15. a) Udowodnić wzór (10.40).

b) Wyjaśnić paradoks Siegela.

Rozwiązanie. a) Proces $1/S$ jest procesem Z z ćw. 10.14.
b) Nie wprost. Załóżmy, że jest to estymator nieobciążony. Wtedy dla prawdopodobieństwa rzeczywistego P otrzymalibyśmy $F(0) = E_P(S_T)$ dla waluty krajowej i $1/F(0) = E_P(S_T)$ dla waluty zagranicznej. Zatem

$$\frac{1}{E_P S_T} = E_P\Big(\frac{1}{S_T}\Big), \tag{10.46}$$

sprzeczność z nierównością Jensena (funkcja $\frac{1}{x}$ jest wypukła). Zatem estymator nieobciążony dla waluty krajowej nie może być estymatorem nieobciążonym dla waluty zagranicznej i na odwrót. Równość (10.46) zachodzi tylko w świecie deterministycznym, czyli gdy $\sigma = 0$.

11. Opcje amerykańskie i egzotyczne w modelu Blacka-Scholesa

11.1. Opcje amerykańskie

Celem tego paragrafu jest podanie podstawowych rezultatów dotyczących opcji amerykańskich w modelu Blacka-Scholesa. Jak wiemy, opcje te dają posiadaczowi prawo do wykonania opcji w dowolnej chwili, dlatego analogicznie jak w przypadku rynku skończonego trzeba zastosować inne podejście niż w przypadku opcji europejskich.

Zaczniemy od definicji opcji amerykańskiej. Niech $g\colon \mathbb{R}_+ \times [0,T] \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą.

Definicja 11.1. Opcją amerykańską (*american contingent claim*) z funkcją wypłaty g nazywamy instrument finansowy określony przez:

a) moment wygaśnięcia T,
b) wypłatę w chwili t równą $Z_t = g(S_t, t)$,
c) moment realizacji opcji — jest to moment stopu τ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ przyjmujący wartości w $[0,T]$, a zatem wypłata w momencie realizacji jest równa

$$X^a = g(S_\tau, \tau). \tag{11.1}$$

Wymiennie z terminem opcja amerykańska z funkcją wypłaty g będziemy używać terminu opcja amerykańska z procesem wypłaty Z_t lub opcja amerykańska o wypłacie X^a.

Intuicyjnie, moment wykonania opcji amerykańskiej bazuje na informacji o cenach. O tym, czy wykonać opcję w momencie t decydujemy obserwując ceny do chwili t. Dlatego moment wykonania jest momentem stopu i jest elementem rodziny $\mathcal{T}_{[0,T]}$, czyli rodziny momentów stopu o wartościach w $[0,T]$ (to uzasadnia założenie (c) w definicji). Wypłata zależy od wartości akcji S_τ w chwili realizacji, a nie od całej trajektorii S do momentu τ (stąd założenie (11.1) w definicji). Typowe przykłady opcji amerykańskich to opcja kupna o wypłacie w chwili realizacji:

$$X^a = (S_\tau - K)^+,$$

a także opcja sprzedaży o wypłacie w chwili realizacji:

$$Y^a = (K - S_\tau)^+.$$

Zatem funkcja wypłaty dla amerykańskiej opcji kupna ma postać $g^C(x,t) = =(x-K)^+$, a dla amerykańskiej opcji sprzedaży ma postać $g^P(x,t) = (K-x)^+$. Często dopuszcza się, że cena wykonania opcji zmienia się wraz z czasem, ale jest funkcją deterministyczną, tj. $K\colon [0,T] \to \mathbb{R}_+$, wtedy np. zmodyfikowana amerykańska opcja kupna ma wypłatę postaci

$$X^a = (S_\tau - K_\tau)^+,$$

tj. $g^C(x,t) = (x - K_t)^+$. Jest to przykład tzw. niestandardowej amerykańskiej opcji kupna (*nonstandard american call option*). Są to opcje, dla których warunki wczesnej realizacji są nietypowe. Przykładowo, cena realizacji może zależeć od czasu i tak np. dla 5-letniej opcji kupna cena wykonania K_t może wynosić 50 przez pierwszy rok, 55 przez drugi i trzeci, a 60 w ostatnich dwu.

Celem tego paragrafu jest znalezienie racjonalnej ceny i sensownego momentu wykonania opcji amerykańskiej za pomocą argumentów arbitrażowych. Dla prostoty zapisu skoncentrujemy się na momencie $t = 0$.

Przez strategię „kup i trzymaj” (*buy-and-hold*) związaną z opcją amerykańską o wypłacie X^a rozumiemy parę (c, τ), $c \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$. Interpretacja tej strategii jest następująca: gdy $c > 0$, to kupujemy c jednostek opcji amerykańskiej w chwili 0, a gdy $c < 0$ to przeprowadzamy krótką sprzedaż tych jednostek w chwili 0 i trzymamy je w portfelu do momentu τ, w którym zamykamy pozycję.

Definicja 11.2. Strategia samofinansująca się dla modelu (B, S, X^a) to trójka (φ, c, τ), gdzie φ jest strategią samofinansująca się w modelu Blacka-Scholesa, a (c, τ) jest strategią „kup i trzymaj” związaną z X^a i taką, że dla $t \in (\tau, T]$ zachodzi

$$\varphi^1_t = 0, \quad \varphi^0_t = \frac{\varphi^1_\tau S_\tau}{B_\tau} + \varphi^0_\tau + \frac{cg(S_\tau, \tau)}{B_\tau}.$$

W definicji strategii samofinansującej się zakładamy, że gdy wypłata amerykańska jest realizowana w momencie τ, to pozycja w aktywie jest w tym momencie zamykana i wszystko co pozostaje, jest wkładane na rachunek oszczędnościowy.

Przypomnijmy, że strategia $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ jest samofinansującą się w modelu Blacka-Scholesa, gdy proces bogactwa $V_t(\varphi) = \varphi^1_t S_t + \varphi^0_t B_t$ spełnia

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi^1_u dS_u + \int_0^t \varphi^0_u dB_u.$$

Wprowadziliśmy nowy instrument bazowy, którym możemy handlować na rynku, opcje amerykańskie. Gdy oznaczymy przez φ^2 liczbę opcji w portfelu, to strategię „kup i trzymaj” zapiszemy wzorem $\varphi^2_t = c\mathbf{1}_{[0,\tau)}(t)$.

Gdy U_0 jest wartością w chwili 0 opcji amerykańskiej z wypłatą X^a, to wartości portfela $\bar{\varphi} = (\varphi, c, \tau) = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2)$ w momencie początkowym i końcowym wynoszą:

$$V_0(\bar{\varphi}) = \varphi^0_0 + \varphi^1_0 S_0 + cU_0, \tag{11.2}$$

$$V_T(\bar{\varphi}) = e^{rT}\Big(\varphi^0_\tau + e^{-r\tau}\varphi^1_\tau S_\tau + e^{-r\tau} cg(S_\tau, \tau))\Big) = e^{rT}\varphi^0_T. \tag{11.3}$$

Mówimy, że portfel samofinansującej się $\bar{\varphi}$ jest dopuszczalny, gdy φ jest strategią dopuszczalną. Klasę strategii dopuszczalnych oznaczymy przez Ψ. Definiujemy klasę portfeli arbitrażowych:

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{df}}{=} \{\bar{\varphi} : V_0(\bar{\varphi}) < 0, V_T(\bar{\varphi}) \geqslant 0, \bar{\varphi} \text{ strategia dopuszczalna}\}.$$

Równoważnie jest to klasa portfeli dopuszczalnych $\bar{\varphi}$, takich że

$$V_0(\bar{\varphi}) = 0, \quad V_T(\bar{\varphi}) \geqslant 0, \quad P(V_T(\bar{\varphi}) > 0) > 0,$$

bo istnieje rachunek oszczędnościowy ze stopą procentową $r \geqslant 0$.

Definicja 11.3. Na rynku (B, S, X^a, Ψ) z ceną początkową U_0 wypłaty X^a istnieje arbitraż, gdy zachodzi jeden z warunków (a), (b):

a) istnieje arbitraż związany z pozycją długą (tj. posiadacza opcji amerykańskiej), czyli gdy istnieje moment stopu $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ taki, że dla pewnego φ strategia $\psi = (\varphi, 1, \tau) \in \mathcal{A}$,

b) istnieje arbitraż związany z pozycją krótką (tj. wystawcy opcji amerykańskiej), czyli gdy istnieje φ strategia taka, że dla wszystkich momentów stopu $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ strategia $\psi = (\varphi, -1, \tau) \in \mathcal{A}$.

Gdy nie istnieje arbitraż, to mówimy, że model jest wolny od arbitrażu.

Te dwa rodzaje arbitrażu wynikają z niesymetrycznej pozycji sprzedawcy i nabywcy opcji amerykańskiej. Nabywca może wybrać termin wykonania, a sprzedawca musi zabezpieczyć wypłatę.

Z definicji wynika, że na rynku nie ma arbitrażu, gdy zachodzą dwa warunki:

a) dla wszystkich φ i wszystkich τ mamy $(\varphi, 1, \tau) \notin \mathcal{A}$,

oraz

b) dla każdego φ istnieje τ takie, że $(\varphi, -1, \tau) \notin \mathcal{A}$.

Punkt a) mówi, że posiadacz opcji amerykańskiej nie może znaleźć momentu wykonania opcji τ i strategii φ działania na rynku akcji i rachunku bankowego dających zysk bez ryzyka. Natomiast punkt b) oznacza, że niezależnie od tego, jaką politykę prowadzi sprzedawca opcji (czyli niezależnie od φ), nabywca może wybrać taki moment wykonania τ, że sprzedawca nie ma zysku bez ryzyka.

Definicja 11.4. Ceną arbitrażową opcji amerykańskiej X^a nazywamy cenę U_0, dla której opisany model rynku jest modelem wolnym od arbitrażu.

Okazuje się, że założenie braku arbitrażu prowadzi do istnienia jednoznacznie wyznaczonej ceny arbitrażowej.

Twierdzenie 11.1. *Niech $g(x,t)$ będzie funkcją o liniowym wzroście (czyli spełniającą warunek $|g(x,t)| \leqslant Ax + B$). Załóżmy, że na rynku (B, S, X^a, Ψ) nie ma możliwości arbitrażu. Wtedy cena arbitrażowa w chwili t opcji amerykańskiej z funkcją wypłaty g jest równa:*

$$\Pi_t^a(X^a) = essup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} E_{P^*}(e^{-r(\tau - t)} g(S_\tau, \tau) | \mathcal{F}_t), \tag{11.4}$$

gdzie P^* jest miarą martyngałową dla rynku Blacka-Scholesa $(B, S, \Phi(P^*))$.

Przypomnijmy, że supremum istotne rodziny zmiennych losowych $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest to jedyna zmienna losowa η (ozn. $\eta = essup_{\alpha \in A} \zeta_\alpha$) o własnościach:

a) $\zeta_\alpha \leqslant \eta$ P-p.n. dla każdego α,

b) jeśli $\zeta_\alpha \leqslant \gamma$ P-p.n. dla każdego α, to $P(\eta \leqslant \gamma) = 1$.

Idea dowodu tw. 11.1 jest analogiczna do idei dowodu twierdzenia podającego cenę arbitrażową wypłaty amerykańskiej dla modelu z czasem dyskretnym. Korzysta się z ogólnych faktów z teorii optymalnego stopowania. Gdy $Z_t^* = e^{-rt} g(S_t, t)$ jest zdyskontowanym procesem wypłaty, to dowodzimy, że obwiednia Snella procesu Z^*, czyli najmniejszy nadmartyngał majoryzujący Z^*, jest postaci

$$I_t = essup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} E_{P^*}(Z_\tau^* | \mathcal{F}_t)$$

i daje nam cenę arbitrażową Π_t. Ponadto moment wykonania zadany jest wzorem:

$$\tau_t = \inf\{u \in [t,T] \ \ I_u = Z_u^*\}.$$

W szczególności

$$\Pi_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}} E_{P^*}(e^{-r\tau} g(S_\tau, \tau)),$$

a optymalny moment wykonania

$$\tau_0 = \inf\{u \in [0,T] \ : I_u = e^{-ru} g(S_u, u)\}.$$

Szczegóły techniczne można znaleźć w Myneni [Myn], Karatzas [Kar]. Warto zauważyć, że zachodzi też twierdzenie odwrotne: warunek

$$U_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}} E_{P^*}(e^{-r\tau} g(S_\tau, \tau))$$

implikuje, że na rynku (B, S, X^a, Ψ) nie ma możliwości arbitrażu (patrz ćw. 11.2).

Można udowodnić (patrz ćw. 11.1), że istnieje portfel dopuszczalny φ, spełniający warunki: $V_0(\varphi) = U_0$ i

$$V_t(\varphi) \geqslant g(S_t, t), \tag{11.5}$$

czyli φ jest portfelem zabezpieczającym opcję amerykańską z kapitałem początkowym równym cenie opcji amerykańskiej. Dla tego portfela zachodzi

$$V_{\tau_0}(\varphi) = g(S_{\tau_0}, \tau_0).$$

Ze wzoru (11.4) wynika, analogicznie jak w przypadku dyskretnym, że cena opcji amerykańskiej o wypłacie $(Z_t)_{t \leqslant T}$ jest nie mniejsza niż cena opcji europejskiej o wypłacie Z_T. Ponadto

Twierdzenie 11.2. *Europejska opcja kupna i standardowa amerykańska opcja kupna o tym samym terminie zapadalności i tej samej cenie wykonania mają równe ceny.*

Dowód. Załóżmy, że $t = 0$ (dla $t > 0$ dowód jest analogiczny). Niech $Z_t = g^C(S_t)$, gdzie $g^C(x) = (x - K)^+$. Wtedy z (11.4)

$$C_0 = E_{P^*}(e^{-rT}(S_T - K)^+) \leqslant \Pi_0^a(X^a),$$

zatem by zakończyć dowód trzeba pokazać nierówność przeciwną. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego momentu stopu $\tau \leqslant T$ zachodzi:

$$E_{P^*}(e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+) \leqslant C_0 = E_{P^*}(e^{rT}(S_T - K)^+), \tag{11.6}$$

gdyż stąd $\Pi_0^a(X^a) \leqslant C_0$. Ponieważ $S_t^* = \frac{S_t}{e^{rt}}$ jest P^*-martyngałem, $r \geqslant 0$, $\tau \leqslant T$, więc

$$S_\tau^* - e^{-r\tau}K \leqslant S_\tau^* - e^{-rT}K = E_{P^*}(S_T^* - e^{-rT}K|\mathcal{F}_\tau) \leqslant E_{P^*}(S_T^* - e^{-rT}K)^+|\mathcal{F}_\tau).$$

Prawa strona jest nieujemna, więc stąd

$$(S_\tau^* - e^{-r\tau}K)^+ \leqslant E_{P^*}((S_T^* - e^{-rT}K)^+|\mathcal{F}_\tau).$$

Biorąc wartość oczekiwaną obu stron otrzymujemy (11.6). □

Uwaga 11.1. Warto prześledzić inne rozumowanie prowadzące do tego wyniku. Gdy $t < T$, to z parytetu dla cen opcji europejskich

$$\Pi_t^a(g^c) \geqslant C_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} + P_t > (S_t - K)^+,$$

więc wartość amerykańskiej opcji kupna w chwili t jest większa niż zysk z jej realizacji w chwili t, czyli nie opłaca się realizować opcji przed jej wygaśnięciem.

Z tw. 11.2 wynika, że dla znalezienia ceny amerykańskiej opcji kupna możemy korzystać ze wzoru Blacka-Scholesa na cenę europejskiej opcji kupna.

W przypadku opcji sprzedaży cena amerykańska opcji jest różna od ceny europejskiej. Ma różne dobre własności, ale nie istnieje postać jawna ceny amerykańskiej opcji sprzedaży. Do wyliczenia tej ceny stosuje się inne metody: metody Monte Carlo, metody quasi Monte Carlo, metody aproksymacji modelem CRR lub metody numeryczne związane z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych.

11.2. Opcje egzotyczne

Są to opcje inne niż standardowe opcje kupna/sprzedaży europejskie i amerykańskie (które z kolei nazywa się opcjami *waniliowymi*). Zatem opcje egzotyczne mają funkcje wypłaty inne niż funkcje wypłaty związane z opcjami waniliowymi. Nie zawsze znajdują się one w obrocie giełdowym, są raczej opcjami na zamówienie (*over the counter options*). Są oferowane przez instytucje finansowe dla swoich klientów. Opiszemy przykładowo kilka najczęściej pojawiających się rodzajów takich opcji. Wyceny tych opcji pozostawimy jako zadanie (często bardzo trudne, jak w przypadku opcji azjatyckich).

1. Niestandardowe opcje amerykańskie, które opisaliśmy w poprzednim paragrafie.

2. Opcje bermudzkie (*Bermudan options*). Są to opcje, które mogą być realizowane tylko w pewne dni (zatem opcje te, obrazowo mówiąc, tworzą pomost pomiędzy opcjami europejskimi i amerykańskimi). Można je traktować jako specyficzny rodzaj opcji amerykańskich, dla których funkcja wypłaty $g(x,t) = 0$ dla tych chwil t, kiedy opcji nie możemy zrealizować.

3. Opcje startujące w przyszłości (*forward start options*). Niech $t_0 \in (0,T)$. W chwili t_0 jedna strona kontraktu otrzymuje opcję z terminem wygaśnięcia T i ceną wykonania S_{t_0} i płaci za to drugiej stronie w chwili zero. Przykładowo, dla opcji kupna startującej w przyszłości wypłata wynosi $X = (S_T - S_{t_0})^+$.

4. Opcje wyboru (*chooser options, as-you-like-it options*). Opcja, której właściciel w określonej chwili t_0 w przyszłości ma prawo zdecydować czy chce, żeby była to opcja sprzedaży czy kupna (czas realizacji T i cena wykonania K są określone z góry w momencie sprzedaży opcji). Właściciel opcji w chwili t_0 wybiera opcję o większej wartości, stąd wartość tej opcji w chwili t_0 wynosi

$$\begin{aligned} Z &= \max(C(S_{t_0}, t_0, T, K),\ P(S_{t_0}, t_0, T, K)) = \\ &= \max(C(S_{t_0}, t_0, T, K),\ \ C(S_{t_0}, t_0, T, K) + Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}) = \\ &= C(S_{t_0}, t_0, T, K) + \max(0, Ke^{-r(T-t)} - S_{t_0}), \end{aligned}$$

co pozwala łatwo ją wycenić.

5. Opcje binarne (*binary options*). Są to opcje, których wypłata zależy w sposób nieciągły od ceny instrumentu pierwotnego S_T w momencie wykonania opcji T.

Przykład 11.1. a) Opcja pieniądze albo nic (opcja *cash or nothing*).
Dla tej opcji wypłata X w chwili wygaśnięcia T wynosi:
— dla binarnej opcji kupna $X = Z\mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$,
— dla binarnej opcji sprzedaży $X = Z\mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$,
gdzie stałe Z i K zostały ustalone z góry.
b) Opcja walor albo nic (opcja *asset or nothing*).
Dla tej opcji wypłata X w chwili wygaśnięcia T wynosi:
— dla opcji kupna $X = S_T\mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$,
— dla opcji sprzedaży $X = S_T\mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$,
gdzie stała K została ustalone z góry.

Zauważmy, że opcje powyższe można porównać do zakładu, czy cena waloru jest większa czy nie od z góry ustalonego progu K. Opcja kupna daje niezerową wypłatę, gdy cena instrumentu pierwotnego S_T jest większa niż stała K (cena wykonania), natomiast opcja sprzedaży daje zysk, gdy $S_T < K$.

Takie opcje na ogół łatwo wyceniać (patrz ćw. 11.5). Inna spotykana nazwa takich opcji to opcje cyfrowe (*digital*).

6. Opcje zależne od trajektorii (*path-dependent options*). Są to opcje, dla których funkcja wypłaty zależy od cen akcji w całym okresie trwania kontraktu, tj. $X = f(S.)$, gdzie f jest funkcją rzeczywistą określona na przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,T]$ (dla ustalonej ω trajektoria procesu cen $S.(\omega)$ należy do przestrzeni $C[0,T]$).

a) Przykład takich opcji stanowią opcje azjatyckie, dla których wypłata zależy od średniej ceny waloru w określonym przedziale czasowym $[t_0, T]$. Są one bardzo popularne na rynku, gdyż są tańsze do odpowiadających im standardowych opcji europejskich, są użyteczne na rynkach o małej płynności, a więc na rynkach o większym ryzyku, a ponadto branie średniej zabezpiecza przed manipulacją cenami blisko daty wygaśnięcia opcji. Wypłatą z opcji kupna jest $X = \max(0, S_{sr} - K)$, a z opcji sprzedaży $X = \max(0, K - S_{sr})$, gdzie K jest ceną realizacji opcji, a S_{sr} średnią cena waloru. Są różne sposoby obliczania średniej S_{sr} np. dla kontraktu zawartego na n dni można wziąć S_{sr} jako średnią arytmetyczną z cen zamknięcia w i-tym dniu $i = 1, 2, \ldots, n$, czyli $S_{sr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(\frac{i}{N})$, gdzie N to liczba dni handlu w roku (zwykle przyjmuje się N równe 252), ale też można wziąć jako S_{sr} średnią geometryczną. Rozważa się też opcje ze średnimi „ciągłymi”:

— średnią arytmetyczną $S_{sr} = \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^{T} S(t)dt$,

— średnią geometryczną $S_{sr} = \exp\left(\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^{T} \ln S(t)dt\right)$

(te średnie otrzymujemy przez przejście graniczne dla średnich liczonych w sposób dyskretny). Opcje opisane powyżej są to opcje azjatyckie I rodzaju (*average value Asian option*). Rozważa się też opcje azjatyckie II rodzaju (*average strike Asian option*) — są to opcje o wypłatach $X = \max(S_T - S_{sr}, 0)$ (dla opcji kupna) i $X = \max(0, S_{sr} - S_T)$ (dla opcji sprzedaży).

b) Innym przykładem opcji zależnych od trajektorii są opcje typu lookback (*lookback option*).

Są to opcje, z których dochód zależy od maksimum lub minimum ceny instrumentu podstawowego. Właściciel opcji kupna typu lookback ma zagwarantowane kupno waloru (akcji) po najniższej cenie, po jakiej walor był sprzedawany w okresie ważności opcji, natomiast właściciel opcji sprzedaży sprzedaje walor po najwyższej cenie w okresie $[0,T]$. Zatem wypłata z opcji kupna wynosi $X = S_T - S_{min}$, a wypłata z opcji sprzedaży to $X = S_{\max} - S_T$, gdzie $S_{\min}$, $S_{\max}$ są, odpowiednio, najmniejszą i największą ceną instrumentu pierwotnego w ustalonym okresie $[0,T]$.

7. Opcje barierowe (*barrier options*). Te opcje są też zależne od trajektorii. Wypłata z tych opcji zależy od tego, czy w ustalonym okresie czasu cena waloru spadnie poniżej pewnej ustalonej wartości, lub/oraz czy cena waloru przekroczy pewną ustaloną wartość. Te ustalone wartości nazywa się barierami. Zasadniczo dzielimy je na opcje wyjścia (*knock-out option*) i wejścia (*knock-in option*). Opcje wyjścia przestają istnieć, gdy cena waloru przekroczy pewną ustaloną barierę, a opcje wejścia zaczynają istnieć, gdy cena waloru przekroczy barierę.

Standardowo wypłata z opcji barierowych jest wypłatą z opcji waniliowych, gdy zostanie spełniony warunek związany z barierą. Standardowo dla opcji kupna występują następujące rodzaje opcji:

- — Opcje, które zostają unieważnione, gdy zachodzi jeden z przypadków:
  - — cena waloru spadnie poniżej bariery B (opcja *down-and-out*), wtedy wypłata dla opcji kupna wynosi: $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \leqslant T} S_t \geqslant B\}}$,
  - — cena waloru przekroczy barierę B (opcja *up-and-out*), wtedy wypłata dla opcji kupna wynosi: $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \leqslant T} S_t \leqslant B\}}$.
- — Opcje, które uzyskują ważność, gdy zachodzi jeden z przypadków:
  - — cena waloru przekroczy barierę B (opcja *up-and-in*), wtedy wypłata dla opcji kupna wynosi: $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \leqslant T} S_t \geqslant B\}}$,
  - — cena waloru spadnie poniżej bariery B (opcja *down-and-in*), wtedy wypłata dla opcji kupna wynosi: $X = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \leqslant T} S_t \leqslant B\}}$.

Warto zauważyć, że suma wypłat z opcji typu *up*, jak i typu *out* są równe wypłacie ze standardowej opcji kupna.

Analogicznie określone są standardowe opcje barierowe związane z opcją sprzedaży.

Istnieje też wiele innych opcji tego typu (tzw. opcje kombinowane) np. opcja o wypłacie

$$X = f(S_\cdot) = (\max_{t \leqslant T} S_t - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \leqslant T} S_t \leqslant B\}}.$$

8. Opcje z nieliniową wypłatą. Są to opcje, których wypłata jest nieliniową funkcją ceny instrumentu pierwotnego S_T w momencie wykonania opcji T, zatem opcje kupna są to opcje o wypłacie $X = (h(S_T) - K)^+$, gdzie h jest dowolną nieliniową funkcją np. opcja potęgowa z parametrem α jest to opcja dla której $h(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Istnieje wiele innych opcji egzotycznych, m.in. złożone, kwantylowe, koszykowe. Więcej na ten temat można znaleźć np. w książkach Kwoka [Kwok] oraz A. Werona i R. Werona [Wer].

Jak już wspominaliśmy, wycena opcji egzotycznych jest na ogół trudnym zadaniem i bardzo często otrzymuje się formuły niejawne. Czasem można znaleźć wzór analityczny, np. dla opcji potęgowej z parametrem α otrzymujemy

$$\Pi_0((S_T^\alpha - K)^+) = \exp\Big[\Big(\alpha - 1\Big)\Big(r + \frac{\alpha\sigma^2}{2}\Big)T\Big] C(S_0^\alpha, T, K, \alpha\sigma, r_\alpha),$$

gdzie $r_\alpha = \alpha(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}$ (patrz ćw. 11.3).

Nie potrafimy już jednak znaleźć jawnych wzorów na cenę opcji nieliniowej o bardziej skomplikowanej postaci funkcji h. W takich przypadkach często stosuje się metody symulacyjne opierające się na mocnym prawie wielkich liczb. Zwykle takie wypłaty wycenia się za pomocą symulacji komputerowych i procedur numerycznych bazujących na przybliżaniu geometrycznego ruchu Browna przez model CRR.

Jak wiemy, osiągalna wypłata X w chwili T ma w chwili 0 cenę $\Pi_0(X) = e^{-rT} E_{P^*} X$. Zatem, aby znaleźć cenę wypłaty X, należy obliczyć wartość oczekiwaną $E_{P^*} X$ przy mierze martyngałowej P^*. Do wyliczenia tej wartości oczekiwanej używamy metod Monte Carlo. Symulujemy przebieg trajektorii procesu ceny instrumentu bazowego S w skończonej liczbie punktów (korzystamy z tego, że przy mierze martyngałowej P^* ceny S mają rozkład normalny (wzór (9.16)), który znamy, gdy znamy r i σ). Następnie obliczamy wartość wypłaty X przy tej realizacji trajektorii i otrzymujemy liczbę x_1. Powtarzamy to postępowanie niezależnie m razy i otrzymujemy z tej symulacji ciąg wypłat $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Korzystając z mocnego prawa wielkich liczb otrzymujemy, że cena wypłaty wynosi w przybliżeniu

$$\Pi_0(X) = e^{-rT} E_{P^*} X \approx e^{-rT} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Przykład 11.2. Prześledzimy to rozumowanie na przykładzie opcji lookback

$$X = S_T - \min_{t \leqslant T} S_t.$$

Zaczynamy od wyznaczenia trajektorii ceny akcji. Termin do wykonania opcji dzielimy na n równych odcinków czasu. Niech Y_i będzie ceną na końcu i-tego odcinka, $i = 1, \ldots, n$, $Y_0 = s$. Wtedy, jak wiemy z (9.16)

$$\frac{Y_i}{Y_{i-1}} = e^{U_i},$$

gdzie U_i ma rozkład normalny

$$U_i \sim \mathcal{N}\Big(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)\tau, \sigma^2\tau\Big),$$

przy czym τ jest długością odcinka czasu liczoną w skali roku, $T = n\tau$. Ponadto $U_1, U_2, \ldots, U_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Stąd

$$Y_n = Y_{n-1}e^{U_n} = Y_{n-2}e^{U_{n-1}}e^{U_n} = \cdots = se^{U_1+U_2+\cdots+U_n}. \tag{11.7}$$

Za pomocą tego przedstawienia wyliczamy trajektorie cen. Najpierw generujemy wyniki n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}((r - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma^2\tau)$ i otrzymujemy ciąg realizacji $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Następnie wyliczamy ceny na końcu każdego odcinka czasu korzystając z (11.7):

$$y_0 = s,\ y_1 = ye^{u_1},\ y_2 = y_1e^{u_2},\ \ldots, y_n = y_{n-1}e^{u_n}.$$

Dla tej konkretnej realizacji cen obliczamy zdyskontowaną wartość opcji *lookback*:

$$x_1 = e^{-rT}(y_n - \min_{i\leqslant n} y_i).$$

Powtarzamy tę procedurę m razy otrzymując ciąg wyników $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i bierzemy ich średnią arytmetyczną jako estymator Monte Carlo ceny opcji.

Klasyczna metoda Monte Carlo jest nieefektywna, więc stosuje się jej ulepszenia, ale idea wyceny pozostaje ta sama. Więcej informacji na ten temat, a także na temat innych metod numerycznych stosowanych w finansach, czytelnik może znaleźć w monografiach Glassermana [Gla], Jäckela [Ja] i Seydela [Sey].

11.3. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 11.1. Udowodnić, że istnieje portfel dopuszczalny φ o kapitale początkowym U_0 zabezpieczający wypłatę związaną z opcją amerykańską, tj. $V_t(\varphi) \geqslant g(S_t, t)$. Udowodnić, że dla tego portfela zachodzi równość

$$V_{\tau_0}(\varphi) = g(S_{\tau_0}, \tau_0),$$

gdzie τ_0 jest optymalnym momentem wykonania.

Rozwiązanie. Z tw. Dooba-Meyera $I_t = M_t - A_t$, gdzie M jest martyngałem, A — procesem rosnącym prognozowalnym, $A_0 = 0$. Z tw. o reprezentacji martyngału

$$I_t = I_0 + \int_0^t \theta_s d\bar{W}_s$$

dla pewnego procesu θ całkowalnego względem $\bar{W}$.
Strategia

$$\varphi^0 = I_t - \sigma^{-1}\theta_t, \qquad \varphi^1 = e^{rt}\sigma^{-1}\theta_t S_t^{-1} \tag{11.8}$$

spełnia warunki zadania. Istotnie, z (11.4)

$$V_t(\varphi) = e^{rt}I_t = \Pi_t^a(X^a) \geqslant g(S_t, t),$$

a dla τ_0 optymalnego momentu wykonania zachodzi równość.

Ćwiczenie 11.2. Udowodnić, że warunek

$$U_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[0,T]}} E_{P^*}(e^{-r\tau}g(S_\tau, \tau))$$

implikuje brak arbitrażu na rynku (B, S, X^a, Ψ).

Rozwiązanie. Nie wprost. Niech cena opcji amerykańskiej C^a spełnia $C^a > U_0$ (opcja jest na rynku przewartościowana).
Skonstruujemy arbitraż związany z pozycją krótką. Weźmy strategię φ daną wzorem (11.8) i strategię „kup i trzymaj” $(-1, \tau)$, gdzie $\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}$ jest dowolnym momentem stopu. Niech strategia $\bar{\psi} = (\psi^0, \psi^1, \psi^2)$ będzie zadana wzorem:

$$\begin{aligned}
\psi_t^0 &= \varphi_t^0 \mathbf{1}_{[0,\tau]}(t) + \mathbf{1}_{(\tau,T]}\Big(\varphi_\tau^0 + e^{-r\tau}\varphi_\tau^1 S_\tau - e^{-r\tau} g(S_\tau, \tau))\Big),\\
\psi_t^1 &= \varphi_t^1 \mathbf{1}_{[0,\tau]}(t),\\
\psi_t^2 &= -\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t).
\end{aligned}$$

Ponieważ φ spełnia (11.5), więc

$$V_T(\bar{\psi}) = e^{rT}\psi_T^0 \geqslant 0 \text{ p.n.},$$

a ponadto

$$V_0(\bar{\psi}) = \psi_0^0 + \psi_0^1 S_0 + \psi_0^2 C^a = U_0 - C^a < 0.$$

Zatem strategia $\bar{\psi}$ jest arbitrażem.
Rozpatrzymy teraz przypadek $C^a < U_0$ (opcja na rynku jest niedowartościowana).
Możemy założyć, że nabywca opcji zachowuje się racjonalnie i wybiera optymalny moment realizacji opcji. Gdy wybierze on portfel $-\bar{\psi}$, to

$$V_0(-\bar{\psi}) = C^a - U_0 < 0$$

i z określenia optymalnego momentu realizacji opcji wynika, że $V_T(\bar{\psi}) = 0$.

Ćwiczenie 11.3. Wycenić opcję potęgową

Ćwiczenie 11.4. W modelu Blacka-Scholesa wycenić na chwilę $t = 0$ opcje binarne płacące:
a) $X = Z \cdot \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$,
b) $H = \frac{S_T}{K_1}\mathbf{1}_{\{K_1 \leqslant S_T < K_2\}}$,
c) $(S_T - Z)\mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$,
gdzie $K, Z, K_1 < K_2$ są stałymi.

Rozwiązanie. Jak wiemy z uwagi 9.2, cena $S_T = S_0 e^Y$, gdzie

$$Y \sim N\Big(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)T, \sigma^2 T\Big),$$

a stąd a)

$$\begin{aligned}
\Pi_0(X) &= Z\, e^{-rT} P^*(S_T > K) = Z e^{-rT} P^*(-Y < lnS_0 - lnK) =\\
&= Z\, e^{-rT} N\Big(\frac{\ln S_0 - lnK + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\Big).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\Pi_0(H) &= \frac{e^{-rT}}{K_1} E_{P^*}(S_T \mathbf{1}_{\{K_1 \leqslant S_T < K_2\}}) =\\
&= e^{-rT}\frac{S_0}{K_1} E_{P^*}(e^Y \mathbf{1}_{\{K_1 \leqslant S_0 \ln e^Y < K_2\}}) = \frac{S_0}{K_1}[N(M_{K_1}) - N(M_{K_2})],
\end{aligned}$$

gdzie $M_{K_1} = \frac{\ln S_0 - \ln K + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ i $M_{K_2} = \frac{\ln S_0 - \ln K + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$. Ostatnią równość można otrzymać np. metodą zamiany miary, jak w dowodzie tw. Blacka.

Ćwiczenie 11.5. W modelu Blacka-Scholesa wycenić na chwilę $t = 0$ opcje binarne płacące:
a) $X = \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}$,
b) $H = \mathbf{1}_{\{S_T \leqslant K\}}$.
Wyprowadzić wzór łączący te dwie ceny.

Ćwiczenie 11.6. Znaleźć w chwili $t \leqslant t_0$ cenę zmodyfikowanej opcji startującej w przyszłości, czyli opcji o wypłacie $X = (S_T - \alpha S_{t_0})^+$, gdzie stała $\alpha > 0$.

12. Rynek Blacka-Scholesa kontraktów futures

Celem tego paragrafu będzie przedstawienie metody wyceny opcji na kontrakty futures. Gdy rozważamy instrument o cenie S, to na rynku bez możliwości arbitrażu cena (kurs rozliczeniowy) $f_S(t,T)$ kontraktu futures z datą wykonania T w chwili t na instrument o cenie S_t jest równa

$$f_S(t,T) = e^{r(T-t)}S_t \tag{12.1}$$

(co wynika z rozumowania arbitrażowego). Gdybyśmy zatem wyceniali opcje kupna na kontrakt futures z datą realizacji T na akcje na rynku Blacka-Scholesa, to $f_S(T,T) = S_T$ i wypłata wynosi

$$C_T^f := (f_S(T,T) - K)^+ = (S_T - K)^+, \tag{12.2}$$

czyli możemy skorzystać ze wzoru Blacka-Scholesa dla ceny opcji kupna. Problem zaczyna się gdy data realizacji opcji T na kontrakt futures jest różna od daty zamknięcia tego kontraktu futures U, gdyż wtedy wypłata nie spełnia warunku (12.2) (istotnie, $f_S(T,U) \neq S_T$ i $C_T^f = (f_S(T,U) - K)^+ \neq (S_T - K)^+$) i powyższe rozumowanie zawodzi. Jest to sytuacja typowa na rynku. Spróbujmy na to spojrzeć inaczej, tak by ominąć tę trudności. Ponieważ na rynku Blacka-Scholesa cena S_t jest dana wzorem (9.2), więc z (12.1) dla kontraktu futures o terminie wykonania $U = T$ mamy

$$f_S(t,U) = e^{r(U-t)}S_0e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t} = f_S(0,U)e^{(\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t}.$$

Oznaczając $f_t = f_S(t,U)$ otrzymujemy stąd, że f_t jest jedynym rozwiązaniem równania:

$$\begin{cases} df_t = (\mu - r)f_t dt + \sigma f_t dW_t, & t \in [0,U], \\ f_0 = S_0e^{rU}. \end{cases}$$

Ponieważ kontrakt futures nie musi być związany z konkretnym istniejącym aktywem, więc zapominamy o akcji i na kontrakt patrzymy jako na instrument finansowy, którego cena spełnia równanie:

$$\begin{cases} df_t = f_t\mu_f dt + \sigma_f f_t dW_t, & t \leqslant U, \\ f_0 = \gamma, \end{cases} \tag{12.3}$$

gdzie γ, μ_f, $\sigma_f > 0$ są stałymi. Instrument ten w dalszym ciągu jednak odzwierciedla sytuację, że w chwili t umawiamy się, iż w przyszłości w chwili T zapłacimy ustaloną cenę za ustalone w umowie dobro. Mając równanie opisujące ceny instrumentu finansowego, konstruujemy rynek kontraktów futures postępując analogicznie jak przy konstrukcji modelu rynku Blacka-Scholesa. Na rynku futures mamy dwa aktywa: bezryzykowne o cenie B i kontraktu futures o cenie f. Strategia to, jak zawsze, para procesów adaptowanych $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$, ale proces bogactwa jest zadany wzorem

$$V_t^f(\varphi) = \varphi_t^0 B_t, \quad t \in [0,T], \tag{12.4}$$

gdyż wejście w kontrakt futures nic nie kosztuje. Mówimy, że φ jest strategią samofinansującą się, gdy

$$V_t^f(\varphi) = V_0^f(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^0 dB_u + \int_0^t \varphi_u^1 df_u. \tag{12.5}$$

Definicja 12.1. Miarę probabilistyczną $\bar{P}$ nazywamy miarą martyngałową futures, gdy $\bar{P} \sim P$ i proces cen f jest $\bar{P}$-lokalnym martyngałem.

Twierdzenie 12.1. *Dla procesu f zadanego równaniem (12.3) miara martyngałowa futures $\bar{P}$ jest dana wzorem*

$$\frac{d\bar{P}}{dP} = \exp\Big(- \frac{\mu_f}{\sigma_f} W_T - \frac{1}{2}\frac{\mu_f^2}{\sigma_f^2} T\Big). \tag{12.6}$$

Dynamika cen f przy mierze $\bar{P}$ ma postać:

$$df_t = \sigma_f f_t d\overline{W}_t, \tag{12.7}$$

gdzie $\overline{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu_f}{\sigma_f}\right)t$ jest $\bar{P}$-procesem Wienera.

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy jako ćwiczenie. Warto zauważyć, że $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^f$.

Od tego momentu dla wygody będziemy pisać μ, σ zamiast μ_f, σ_f, czyli będziemy opuszczali wskaźnik dolny f we wzorach związanych z f_t. Z warunku (12.7) wynika, że

$$f_t = f_0 \, \exp\Big(\sigma\overline{W}_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\Big), \tag{12.8}$$

a więc f_t jest martyngałem dodatnim. Mówimy, że strategia φ jest dopuszczalna, gdy jest strategią samofinansującą się i $B_t^{-1}V_t(\varphi)$ jest $\bar{P}$-martyngałem. Zbiór takich strategii będziemy oznaczać przez Φ^f. Modelem Blacka rynku futures nazywamy trójkę $\mathcal{M}^f = (B, f, \Phi^f)$. Jest to rynek wolny od arbitrażu (ćw. 12.3).

Tak samo, jak dla rynku Blacka-Scholesa, wprowadzamy pojęcie ceny arbitrażowej. Wycenę opcji kupna przedstawia

Twierdzenie 12.2. *(Black) Cena arbitrażowa C^f opcji kupna na rynku futures $\mathcal{M}^f$ z terminem wykonania T i ceną wykonania K jest w chwili t równa*

$$C_t^f = C^f(f_t, T-t), \tag{12.9}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C^f(x,t) &= e^{-rt}(xN(\bar{d}_1(x,t)) - KN(\bar{d}_2(x,t))), \\ \bar{d}_1(x,t) &= \frac{\ln\frac{x}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}, \\ \bar{d}_2(x,t) &= \bar{d}_1(x,t) - \sigma\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ $C_t^f = B_t E_{\bar{P}}((f_T - K)^+ B_T^{-1} | \mathcal{F}_t)$, więc dowód przebiega analogicznie do dowodu formuły Blacka-Scholesa, choć z oczywistymi zmianami. □

Wzór (12.9) jest nazywany wzorem Blacka. Dla cen opcji kupna i sprzedaży na kontrakty futures zachodzi związek, nazywany jak zawsze formułą zgodności (parytetem)

$$C_t^f - P_t^f = e^{-r(T-t)}(f_t - K). \tag{12.10}$$

Stąd otrzymujemy wzór na cenę opcji sprzedaży

$$P_t^f = e^{-r(T-t)}(KN(-\bar{d}_2(f_t, T-t)) - f_tN(-\bar{d}_1(f_t, T-t))). \tag{12.11}$$

Przykład 12.1. Rozpatrzmy opcję sprzedaży na kontrakty futures na ropę naftową. Czas do wygaśnięcia to 4 miesiące. Obecna cena futures wynosi 30, cena wykonania 32, stopa procentowa bez ryzyka 5% p.a., a współczynnik zmienności 20% p.a. Cenę tej opcji obliczamy ze wzoru (12.11). Ponieważ $T - t = \frac{1}{3}$, $f_t = 30$, $K = 32$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$, więc $P_t^f = 2{,}60$; $C_t^f = 0{,}63$.

12.1. Zagadnienia i zadania na ćwiczenia

Ćwiczenie 12.1. Udowodnić tw. 12.1.

Ćwiczenie 12.2. Udowodnić, że jeśli kontrakt futures dotyczy instrumentu o cenie S, to $f_t = E_{\bar{P}}(S_T|\mathcal{F}_t)$.

Rozwiązanie. Wiemy z (12.8), że f_t jest martyngałem, a więc $f_t = E_{\bar{P}}(f_T|\mathcal{F}_t)$, a ponadto zachodzi $f_T = S_T$.

Ćwiczenie 12.3. Udowodnić, że rynek $\mathcal{M}^f$ jest wolny od arbitrażu.

Ćwiczenie 12.4. Znaleźć strategię replikującą opcję:
a) kupna na rynku futures,
b) sprzedaży na rynku futures.

Wskazówka. a) $\varphi_t^0 = e^{-rt}C^f(f_t, T-t)$, $\quad \varphi_t^1 = \frac{\partial C^f}{\partial x}(f_t, T-t)$.

Ćwiczenie 12.5. Udowodnić parytet dla cen opcji na kontrakty futures, tj. wzór (12.10).

Literatura