$Matematyka\ stosowana$ 

# Matematyczne metody mechaniki

Wojciech Wojtyński wowo@mimuw.edu.pl



Uniwersytet Warszawski, 2011

Streszczenie. Tu powinien być opis skryptu

Wersja internetowa wykładu: http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mmk

(może zawierać dodatkowe materiały)



Niniejsze materiały są dostępne na licencji Creative Commons 3.0 Polska: Uznanie autorstwa — Użycie niekomercyjne — Bez utworów zależnych.

Copyright © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011. Niniejszy plik PDF został utworzony 13 kwietnia 2011.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚ Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.



Skład w systemie LATEX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

## Spis treści

1.	Równania ruchu	5					
	1.1.       Wstęp	$5 \\ 6$					
2.	. Różne rodzaje sił						
	2.1.       Siły zachowawcze         2.2.       Siły potencjalne.	10 10					
3.	Energia mechaniczna	16					
	<ul> <li>3.1. Energia kinetyczna i energia całkowita.</li> <li>3.2. Przestrzeń konfiguracyjna i przestrzeń fazowa oraz całki pierwsze układów mechanicznych.</li> <li>3.3. Układy 1-wymiarowe i ich obrazy fazowe.</li> </ul>	16 17 19					
4.	Symetrie i całki pierwsze	21					
	<ul> <li>4.1. Pęd i moment pędu</li> <li>4.2. Układy izolowane</li> <li>4.3. Układy potencjalne</li> <li>4.4. Zagadnienie dwóch ciał.</li> </ul>	21 22 23 25					
5.	Symetria sferyczna w $\mathbb{R}^3$	27					
	5.1.Pola centralne $\ldots$ 5.2.Ruch w polu centralnym w $\mathbf{R}^2$ $\ldots$ 5.3.Całkowanie równań ruchu w polu centralnym w $\mathbf{R}^2$ $\ldots$	27 29 30					
6.	Ruch w polu potencjału grawitacyjnego w $\mathbb{R}^3$	32					
	<ul> <li>6.1. Całkowanie równań ruchu</li> <li>6.2. Geometryczny opis trajektorii.</li> <li>6.3. Prawa Keplera</li> </ul>	$32 \\ 34 \\ 36$					
7.	Rachunek wariacyjny, równania Eulera.	37					
	<ul> <li>7.1. Wprowadzenie</li></ul>	37 38 40 42					
8.	Równania Eulera - Lagrange'a	44					
	<ul> <li>8.1. Całka pierwsza energii</li></ul>	$ \begin{array}{r} 44\\ 45\\ 45\\ 46\\ 47\\ 49 \end{array} $					
9.	Metoda Hamiltona w optyce geometrycznej	51					
	9.1. Transformacja Legendre'a	51					
	9.2. Optyka geometryczna.	54 55 56					
10	10.Mechanika Hamiltonowska						
	10.1. Równania Hamiltona	58					

Matematyczne metody mechaniki CW.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

$\alpha$		. /	
SY	225	trese	•1
$\sim \mu$	100	01000	. 0

10.2. Informacje o geometrii symplektycznej.								
10.3. Kanoniczna struktura symplektyczna na wiązce kostycznej do rozmaitości.								
11. Miarowe, algebraiczne i strukturalne aspekty mechaniki Hamiltona.								
11.1. Redukcja symplektyczna.								
11.2. Pochodna Liego								
11.3. Miary niezmiennicze dla potoków hamiltonowskich.								
11.4. Algebraiczne tło mechaniki hamiltonowskiej.								
11.5. Relacje komutacyjne								
11.6. Strukturalne spojrzenie na formalizm Hamiltona								
12.Mechanika kwantowa.								
12.1. Uwagi ogólne								
12.2. Narodziny fizyki kwantowej								
12.3. Powstawanie mechaniki kwantowej								
12.4. Model Bohra atomu wodoru								
13.Równanie Schrödingera								
13.1. Fale materii de Broglie'a.								
13.2. Równanie Schrödingera.								
13.3. Równanie Schrödingera bez czasu								
14.Widmo operatora energii dla atomu wodoru								
14.1. Operator Laplace'a i współrzędne sferyczne.								
14.2. Metoda separacji zmiennych.								
14.3. Kroki redukujące								
14.4. Wielomiany Legendre'a								
14.5. Wartości własne operatora energii dla potencjału coulombowskiego. $\ldots\ldots\ldots\ldots$								
14.6. Funkcje własne operatora energii dla potencjału o symetrii sferycznej								
14.7. Wybór faktów z teorii reprezentacji grup zwartych								
Literatura								

## 1. Równania ruchu

#### 1.1. Wstęp

Mechanika klasyczna, a właściwie jej część zwana dynamiką, zajmuje się opisem ruchu ciał wynikającym z działania na nie sił. Zjawisko to może być obserwowane bez skomplikowanego sprzętu badawczego. Jego model matematyczny *mechanika teoretyczna* został najwcześniej rozwinięty i stał się podstawą dla innych działów fizyki matematycznej. Wprowadzając ten model, przyjmujemy ustalenia:

- 1. Przestrzeń fizyczną, będącą terenem naszych rozważań, opiszemy jako  $\mathbf{R}^3$ .
- 2. Interesujące nas obiekty ciała materialne będziemy utożsamiać z pojedynczymi punktami  ${\bf R}^3.$
- 3. Założymy, że istnieje absolutny czas. Wtedy ruch ciała punktu materialnego opiszemy, podając trzy aktualne współrzędne tego punktu. Zatem jego ewolucja to trójka funkcji  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  lub inaczej funkcja wektorowa o wartościach w  $\mathbf{R}^3$ . Dziedziną tej funkcji jest oś czasu lub jakiś jej podzbiór.
- 4. Rozważanie skończonego układu punktów materialnych (a do takich układów ograniczymy się w tym wykładzie) można zastąpić rozważaniem jednego punktu materialnego w przestrzeni większego wymiaru: rozpatrując układ n punktów w  $\mathbf{R}^3$  wyznaczamy 3n funkcji. Możemy te funkcje interpretować jako trajektorię jednego punktu w  $\mathbf{R}^{3n}$ . To spojrzenie ułatwia nam obserwowanie aparatu matematycznego kosztem pewnego zaciemnienia tła fizycznego.
- 5. Związek ruchu z wywołującego go siłą jest oparty na "drugim prawie mechaniki Newtona". Mówi ono, że w ustalonej chwili iloczyn masy bezwładnej ciała- parametru liczbowego -  $m_b$ - i przyspieszenia ruchu ciała - wektora- jest proporcjonalny do działającej na ciało w tej samej chwili siły. Matematycznie oznacza to (dla pojedynczego punktu materialnego), że trajektoria ruchu,  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  jest związana ze góry zadaną siłą

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{f}_3(\mathbf{x}, \mathbf{t}))$$
(1.1)

$$m_b \ddot{x}(t) = \mathbf{F}(x(t), t) \tag{1.2}$$

za pomocą wektorowego równania różniczkowego (czyli układu 3 równań skalarnych) o postaci:

Siła  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  ma wartość w  $\mathbf{R}^3$  i jest określona na  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$  natomiast x''(t) oznacza przyspieszenie ciała w tej samej chwili ,kiedy przechodzi ono przez punkt x , a  $m_b$  jest jego masą. W ogólnym przypadku  $m_b$  może też zależeć od czasu.

6. Często występuje sytuacja, kiedy swoboda ruchu poszczególnych punktów układu jest poddana ograniczeniom zwanymi umownie więzami. Prowadzi to do sytuacji, kiedy zbiór możliwych położeń układu nie stanowi całej przestrzeni R<sup>3n</sup> lecz jej podzbiór. Traktowany tutaj przypadek prowadzi do podzbiorów będących podrozmaitościami. Sytuacja taka dodaje do naszych rozważań interesujące aspekty geometryczne.

Dla wyjaśnienia powyższych ustaleń przedstawimy teraz kilka prostych przykładów. Dyskusja sytuacji bardziej skomplikowanych i refleksja nad ich strukturą stanowi przedmiot tego wykładu.

#### 1.2. Przykłady równań ruchu

Zaczniemy od kilku ustaleń dotyczących zapisu:

Ze względu na to, że pochodne szukanych funkcji występują często podniesione do kwadratu lub też w innych kłopotliwych konfiguracjach, wygodnym będzie wprowadzenie innego ich oznaczania, niż zwykle przyjmowane w matematyce. Będziemy mianowicie pisać  $\dot{x}(t)$  zamiast x'(t) i  $\ddot{x}(t)$  zamiast x''(t). Dla funkcji wektorowej  $\mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t) \rangle$  zapis  $\mathbf{x}^2(t)$  będzie oznaczać kwadrat długości wektora  $\mathbf{x}(t)$ , t.j.  $\mathbf{x}^2(t) = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}_1^2(t) + \mathbf{x}_2^2(t) + \mathbf{x}_3^2(t)$ , a |x(t)| jego długość t.j.

$$|\mathbf{x}(\mathbf{t})| = \sqrt{\mathbf{x}^2(\mathbf{t})} = \sqrt{\mathbf{x}_1^2(\mathbf{t}) + \mathbf{x}_2^2(\mathbf{t}) + \mathbf{x}_3^2(\mathbf{t})}.$$
 (1.3)

**Przykład 1.1.** Spadanie przedmiotów na Ziemię w pobliżu jej powierzchni bez uwzględniania oporu powietrza.

Zgodnie z obserwacjami (Stevin,Galileusz) wszystkie ciała znajdujące się blisko powierzchni Ziemi spadają tak samo, ze stałym przyspieszniem g wynoszącym około 9,  $81m/sek^2$ . Orientując oś pionową w górę i umieszczając zero na powierzchni Ziemi, otrzymamy równanie opisujące spadanie ciał w formie:

$$\ddot{x}(t) = -g. \tag{1.4}$$

Rozwiązanie równaniania (1.4) nie nastręcza trudności. Otrzymujemy kolejno  $\dot{x}(t) = -gt + c$ a następnie  $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + ct + d$ , gdzie c i d są stałymi. Obecność dwóch stałych dowolnych w ogólnej postaci rozwiązania równania (1.4) oznacza, że do wyodrębnienia konkretnego rozwiązania potrzebne są dwa dodatkowe warunki. Ze względu na pewność istnienia rozwiązania przy poniższych warunkach (twierdzenie o istnieniu jednoznaczności) a także ze względu na ich prosty sens fizyczny, najczęściej przyjmowane są tzw. warunki początkowe: żądamy, aby w wybranej chwili  $t_0$  nasze ciało znajdowało się w ustalonym punkcie  $x_0$  oraz aby miało zadaną prędkość  $\dot{x_0}$ . Dla naszego rozwiązania warunki początkowe prowadzą do następujących równań na stałe c i d:

$$-\frac{gt_0^2}{2} + ct_0 + d = x_0. \tag{1.5}$$

 $-gt_0 + c = \dot{x_0}$ 

z których wyznaczamy  $c=\dot{x_0}+gt_0$ oraz

$$d = x_0 + \frac{gt_0^2}{2} - (\dot{x}_0 + gt_0)t_0 = x_0 - \dot{x}_0t - \frac{gt_0^2}{2}.$$

Najłatwiej przeprowadzić te rachunki, gdy  $t_0 = 0$ . Wtedy po prostu  $c = \dot{x_0}$  oraz  $d = x_0$ .

**Przykład 1.2.** Spadanie przedmiotów na Ziemię w pobliżu jej powierzchni z uwzględnieniem oporu powietrza

Zauważmy, że równanie (1.4) możemy otrzymać z II prawa Newtona

$$m_b \ddot{x} = -g m_g \tag{1.6}$$

gdzie  $m_b$  jest masą bezwładną ciała a  $m_g$  jego masą grawitacyjną. Wielkość występująca po prawej stronie (1.6) jest wtedy siłą, z jaką Ziemia przyciąga ku swojemu środkowi ciało o masie  $m_g$ , znajdujące się na jej powierzchni. (Zobacz Przykład 1.3 poniżej). Ponieważ, jak wykazują wszystkie doświadczenia,  $m_b = m_g$ , upraszczając równanie (1.6) otrzymamy równanie (1.4).

Możemy teraz zmodyfikować równanie(1.2), dodając do siły po jego prawej stronie składnik reprezentujący opór powietrza. Zgodnie z doświadczeniem ma on postać

$$F_{op} = -k^2 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \dot{x}^2 \tag{1.7}$$

gdzie  $k^2$  jest współczynnikiem zależnym od wyboru jednostek i zależnym od ośrodka stawiającego opór (w naszym przypadku powietrza). Uwzlędniając równość  $m_b = m_g$  otrzymamy jednowymiarowe równanie ruchu o postaci:

$$\ddot{x} = -g + \frac{k^2}{m_b} \dot{x}^2 \frac{\dot{x}}{|x|}$$
(1.8)

#### Przykład 1.3. Spadanie z dużej wysokości

Oprzemy się na odkrytej przez Newtona zasadzie powszechnego ciążenia: dwa ciała o masach grawitacyjnych  $M_g$  i  $m_g$  przyciągają się z siłą działającą wzdłuż prostej łączącej środki ich mas wprost proporcjonalną do iloczynu  $M_g m_g$  i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi. Jeżeli  $r_{M_g}$  oznacza wektor położenia środka masy ciała o masie  $m_g$  a  $r_{M_g}$  wektor położenia środka masy ciała o masie  $m_q$ , to siła działająca na drugie ciało ma postać:

$$F(r_{M_g}, r_{m_g}) = \frac{r_{M_g} - r_{m_g}}{|r_{M_g} - r_{m_g}|} M_g \cdot m_g$$
(1.9)

W rezultacie, ograniczając nasze rozważania do prostej przechodzącej przez środek masy Ziemi i zorientowanej od tego środka, a następnie przyjmując jako zero punkt na osi i na powierzchni Ziemi, otrzymujemy z (1.9) równanie opisujące ruch po naszej osi 'spadanie z dużej wysokości' w postaci:

$$m_b \ddot{x} = -\frac{m_g M_g}{(r+x)^2} \tag{1.10}$$

a ponieważ  $m_g = m_b$ , redukując otrzymamy:

$$\ddot{x} = \frac{M_g}{(r+x)^2}.$$
(1.11)

Zestawiając ten wynik z Przykładem 1.1 widzimy, że w tamtej sytuacji przyjęliśmy siłę za stałą i równą  $-m_g g$  dla  $g = \frac{M_g}{r^2}$ , co stanowi dobre przybliżenie opisu (1.7) przy założeniu, że x jest małe w porównaniu z r.

#### Przykład 1.4. Drgania sprężyste

Wyobrażmy sobie koralik o masie  $m_b$  nanizany na pręt i przyciągany do obu końców pręta za pomocą takich samych sprężynek (rysunek poniżej):



Umieśćmy oś na linii pręta. Wtedy, przyjmując za zero pozycję na środku pręta, o której założymy że jest położeniem równowagi, widzimy, że (zgodnie z prawem Hooka) wychylenie o x od tego położenia wywołuje siłę  $-\alpha^2 x$ , ściągają koralik z powrotem do położenia równowagi. Zatem zgodnie z II prawem Newtona równanie ruchu będzie miało postać:

$$m_b \ddot{x} = -\alpha^2 x \tag{1.12}$$

gdzie $\alpha^2$ jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od wyboru jednostek i od własności sprężyn.

#### Przykład 1.5. Wahadło płaskie

Rozważmy punkt materialny o masie  $m_g$ , znajdujący się w jednorodnym polu grawitacyjnym (jak w (1.2)) i pozostający przez cały czas w ustalonej płaszczyźnie pionowej. Załóżmy też, że jego odległość od ustalonego punktu w tej płaszczyźnie pozostaje stała.



Jest to pierwszy z tej serii przykład układu z więzami. Chcąc opisać ten ruch możemy postąpić na dwa sposoby:

- 1. Do działającej siły dodać siły fikcyjne "'siły reakcji więzów"', zastępując w ten sposób (dla punktów znajdujących się na rozmaitości) faktycznie działającą siłę jej rzutem na hiperpłaszczyznę styczną do rozmaitośći. (Metodę tę omówimy systematycznie w dalszym kursie wykładu)
- 2. Drugim sposobem jest lokalne sparametryzowanie rozmaitości i zapisanie składowej stycznej działającej siły jako funkcji parametrów. Postępowanie to w przypadku naszego przykładu objaśnia poniższy rysunek:

Otrzymamy w ten sposób równanie opisujące niejako fikcyjny ruch w fikcyjnym świecie ograniczonym do naszej rozmaitości. Okazuje się, że metoda ta daje identyczny wynik co pierwszy sposób, co niejako ją legitymizuje. W naszym przypadku owo "wewnętrzne "równanie ma postać

$$m_b \Phi = -m_q g sin\Phi \tag{1.13}$$

co po uproszczeniu daje

$$\ddot{\Phi} = -gsin\Phi. \tag{1.14}$$

#### Przykład 1.6. Ruch drgający dwuwymiarowy

Za pomocą układu sprężyn, (jak na rysunku poniżej) możemy wykreować sytuację, w której wychyleniu w każdą możliwą stronę od punktu równowagi, towarzysz siła proporcjonalna do wychylenia lecz przeciwnie zorientowana, tzn. ściągająca ciało z powrotem do środka równowagi.



Rys 1.3

Umieszczając początek układu współrzędnych w punkcie równowagi, otrzymamy dwuwymiarową wersję Przykładu 1.4., gdzie ruch jest opisany równaniem wektorowym:

$$m_b \ddot{\mathbf{x}} = -\alpha^2 \mathbf{x} \tag{1.15}$$

gdzie

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \in \mathbf{R}^2. \tag{1.16}$$

### 2. Różne rodzaje sił

Siły, jakie obserwujemy, są kilku rodzajów. Po pierwsze są to siły pochodzące od istot żywych. Ich natura jest skomplikowana i nie będziemy się nimi tutaj zajmować. Drugim rodzajem sił są siły związane z urządzeniami mechanicznymi. Studiowanie ich oraz ich skutków w postaci ruchu mechanizmów jest w oczywisty sposób związane z projektowaniem tych ostatnich. Proste realizacje takich sytuacji występują w Przykładach 1.4 i 1.6 z poprzedniego wykładu. Trzecim rodzajem sił są "siły przyrody". Okazuje się, że są one czterech rodzajów, z których dwa: siły grawitacyjne i siły elektromagnetyczne występują w skali makro, natomiast dwa inne rodzaje tzw. oddziaływania mocne i słabe są właściwie dla świata mikro. Teoria oddziaływań mocnych i słabych należy do zaawansowanych fragmentów fizyki teoretycznej i jest poza obszarem naszych obecnych zainteresowań. Pozostają nam więc oddziaływania grawitacyjne i elektomagnetyczne. Teoria tych ostatnich dotyczy w znacznej mierze obiektów poruszających się z wielkimi prędkościami, gdzie jedno z naszych wstępnych założeń o bezwzględności czasu musi zostać zakwestionowane. Sytuacja ta tłumaczy widoczną w przytoczonych przykładach jednorodność rodzaju występujących sił. Większość z nich to (ewentualnie) przetransformowane, jak w Przykładzie 1.5 siły grawitacyjne.

#### 2.1. Siły zachowawcze

W dyskutowanych poprzednio przykładach wszystkie siły (poza Przykładem 1.2) zależały tylko od położenia i nie zależały od czasu. Niezależność od czasu prawych stron dyskutowanych równań ma liczne implikacje matematyczne. Oto jedna z nich:

*Uwaga* 2.1. Jeżeli siła  $\mathbf{F}$  w (1.4) nie zależy od czasu ani od prędkości  $\dot{\mathbf{x}}$  to wraz z  $\mathbf{x}(t)$  funkcja  $\mathbf{x}(-t)$  jest rozwiązaniem (1.4). Istotnie, dla  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(-t)$  widzimy, że  $\dot{\mathbf{y}}(t) = (-1)\dot{\mathbf{x}}(-t)$  oraz  $\ddot{\mathbf{y}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(-t)$ . Zatem

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(-t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(-t)) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)).$$

Wynika stąd, że (pomijając mało istotny wpływ pozostałych planet) wraz z ruchem planety po orbicie wokół Słońca, możliwy jest ruch po tej samej orbicie w odwrotnym kierunku, który możemy otrzymać niejako odwracając bieg czasu. Ten "odwrócony" porządek możemy zrealizować w normalnym świecie, zmieniając np. warunki początkowe w chwili 0 z  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$  na  $(\mathbf{x}_0, -\mathbf{x}_0)$ .

#### 2.2. Siły potencjalne.

W elementarnym kursie fizyki definiuje się pracę  $\Delta L$  stałej siły  $\Delta F$  na prostoliniowej drodze S przy założeniu, że siła jest równoległa do tej drogi i zgodnie z nią skierowana wzorem:

$$\triangle L = \triangle F \cdot \triangle S \tag{2.1}$$

gdzie  $\triangle S$  oznacza długość drogi. Zatem pracę stałego pola F określonego na odcinku [a,b] prostej zanurzonej w  $\mathbf{R}^n$  możemy przyjąć jako

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

$$\triangle L = \langle \triangle F, \frac{b-a}{|b-a|} \rangle |b-a| = \langle \triangle F, b-a \rangle$$
(2.2)

gdzie < ·, · > jest iloczynem skalarnym w  $\mathbf{R}^n$ , |b-a| jest długością odcinka [a, b], natomiast <  $\Delta F$ ,  $\frac{b-a}{|b-a|}$  > jest długością rzutu wektora  $\Delta F$  na oś wyznaczoną przez [a, b].

Wzór (2.2) jest krokiem wstępnym do określenia pracy  $\int_{\gamma} F d\gamma$  gładkiego pola wektorowego F, wzdłuż gładkiej krzywej  $\gamma$ . Przypomnimy znany z kursu Analizy II sens tego symbolu.

Niech  $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$  będzie krzywą klasy  $C^1$ , (tj. krzywą mającą ciągłą pochodną na  $[\alpha, \beta]$ ). Dla skończonego podziału

$$p: \alpha = t_1 < t_2, \dots < t_n = \beta$$
 (2.3)

odcinka  $[\alpha, \beta]$  utwórzmy sumę całkową:

$$S(p,\gamma,F) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle F(\gamma(t_i)), \frac{\gamma(t_{(i+1)}) - \gamma(t_i)}{|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|} \rangle \cdot |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$
(2.4)

której każdy składnik jest postaci (2.2). Następnie dla normalnego ciągu podziałów  $\{p_k\}$ rozpatrzmy granicę:

$$\lim_{k \to \infty} S(p_k, \gamma, F) \tag{2.5}$$

(Ciąg podziałów  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  nazywamy normalnym, jeżeli największa z różnic  $|t_{i+1} - t_i|$  między kolejnymi punktami tworzącymi k-ty podział, dąży do zera przy  $k \to \infty$ .)

Korzystając z różniczkowalności Fora<br/>z $\gamma,$  pokazuje się, że dla dostatecznie drobnego podział<br/>upróżnica

$$\left|S(p,\gamma,F) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left\langle F(\gamma(t_i)), \frac{\dot{\gamma}(t_i)}{|\dot{\gamma}(t_i)|} \right\rangle |\dot{\gamma}(t_i)| \left| t_{(i+1)} - t_i \right| \right)\right|$$
(2.6)

może być tak mała, jak chcemy.

Część druga (odjemnik) powyższej różnicy jest sumą całkową dla funkcji  $h(t) = \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$ . Wynika stąd, że sumy (2.4) mają dla każdego normalnego ciągu podziału granicę równą

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt =: \int_{\gamma} F d\gamma$$
(2.7)

Tak wprowadzona całka mogłaby zależeć od parametryzacji krzywej  $\gamma$ . Dowodzi się, że tak jednak nie jest.W dalszym ciągu wykorzystamy dwie następujące jej własności, które przyjmiemy bez dowodu:

**Stwierdzenie 2.1.** Jeżeli  $\gamma$  jest kawałkami gładką krzywą, będącą sumą dwóch rozłącznych części  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , wtedy dla dowolnego kawałkami gładkiego pola wektorowego F zachodzi:

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_{\gamma^1} F d\gamma_1 + \int_{\gamma^2} F d\gamma_2 \tag{2.8}$$

Jeżeli – $\gamma$  oznacza krzywą  $\gamma$  przebieganą w przeciwnym kierunku to

$$\int_{\gamma} Fd(-\gamma) = -\int_{\gamma} Fd\gamma.$$
(2.9)

Odpowiedź na poniższe pytanie ma podstawowe znaczenie dla tego wykładu.

**Problem 2.1.** Dane jest gładkie pole wektorowe F określone na  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Kiedy dla każdej pary krzywych  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  leżących w  $\Omega$  i łączących te same punkty zachodzi równość

$$\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F d\gamma_2. \tag{2.10}$$

O sytuacji opisanej wzorem (2.10) powiemy krótko, że praca pola nie zależy od drogi całkowania. Zanim ustosunkujemy się do Problemu 2.1, rozpatrzmy proste zadanie:

**Ćwiczenie 2.1.** Na zboczu rozległej góry znajdują się dwa domy (zob. rysunek poniżej). Łączą je dwie drogi. Pokazać, że (nie uwzględniając sił tarcia) człowiek ciągnący wózek z ładunkiem z domu A do domu B po każdej z tych dróg wykonuje taką samą pracę, której wielkość zależy tylko od różnicy wysokości położenia domów.



Rozwiązanie.

Zacznijmy od uściślenia sformułowań. Posuwając się pod górę pokonujemy opór siły z jaką Ziemia przyciąga wózek a dokładniej opór rzutu tej siły na oś styczną do drogi w jej aktualnym miejscu. Chcemy robić to możliwie ekonomicznie, nie rozpędzając niepotrzebnie wózka (porównaj początek następnego wykładu). W rezultacie, (co jest teoretyczną idealizacją), będziemy zakładać, że siła, którą działamy jest przeciwna do wyżej wymienionego rzutu siły ciężkości. Analogiczne założenie należy przyjąć w tej części drogi, kiedy posuwamy się w dół. Wprowadźmy układ współrzędnych prostokątnych, którego trzecia oś jest skierowana pionowo do góry. Siła, która popycha wózek, kiedy jedzie z góry lub którą trzeba przezwyciężyć, ciągnąc go pod górę, jest składową styczną do drogi siły (0,0 - $m_g g$ ). Porównaj Przykład (1.2), gdzie  $m_g$  jest masą grawitacyjną wózka a g przyspieszeniem ziemskim. Rozpatrzmy i-ty wyraz sumy całkowej (2.4), który (po uproszczeniu) jest równy:

$$\left\langle \mathbf{F}(\gamma(t_i)), \gamma(t_{(i+1)}) - \gamma(t_i) \right\rangle = -m_g g h_i,$$

gdzie  $h_i$  jest różnicą poziomów punktów  $\gamma(t_{(i+1)})$  i  $\gamma(t_i)$ . Zatem całka od A do B po każdej z tych dróg jest równa  $-m_g h$  gdzie h jest różnicą poziomów domów B i A. Możemy teraz podać odpowiedź na postawione pytanie:

**Twierdzenie 2.1.** Dane jest gładkie pole wektorowe F, określone na otwartym podzbiorze  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Następujące warunki są równoważne:

- 1. Praca pola F jest niezależna od drogi całkowania w  $\Omega$ .
- 2. Praca pola F wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej w  $\Omega$  wynosi 0.
- 3. Istnieje funkcja gładka  $U: \Omega \to \mathbf{R}$  taka, że:

$$F = (F_1, F_2, \dots F_n) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots -\frac{\partial U}{\partial x_n}\right) = -gradU.$$
(2.11)

Uwaga 2.2. Z matematycznego punktu widzenia można oczywiście zamiast poprzedniej formuły, zmieniając U na -U, napisać warunek:

$$F = gradU \tag{2.12}$$

Ponieważ (jak w naszym przykładzie), chcemy aby ruch wywołany siłą pochodzącą od potencjału odbywał się w kierunku jego mniejszych wartości, przyjmiemy znak '-' przed gradientem.

#### Dowód. (Szkic)

Równoważność (1)  $\Leftrightarrow$  (2) jest oczywista. Naszkicujemy dowody implikacji (1)  $\Rightarrow$  (3) oraz (3)  $\Rightarrow$  (1).

Dowód implikacji (1)  $\Rightarrow$  (3). Ponieważ wszystkie prace danej siły F po możliwych gładkich krzywych łączących dwa ustalone punkty  $x_1, x_2$  są z założenia równe, będziemy oznaczać je  $\int_{x_1}^{x_2} F$ . Wybierzmy punkt  $x_0$  i niech

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F$$

Chcemy pokazać, że dla każdego  $1 \leqslant \mathbf{i} \leqslant n$ zachodzi:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

Niech  $e_i$  będzie wersorem i-tej osi i napiszmy iloraz różnicowy:

$$\frac{U(x + \triangle te_i) - U(x)}{\triangle t} = \frac{1}{\triangle t} \cdot |big(\int_{x_0}^{(x + \triangle te_i)} F - \int_{x_0}^x F) = \frac{1}{\triangle t} \int_x^{(x + \triangle te_i)} F$$

Obierając drogę łączącą  $x \ge x + \triangle \cdot te_i$  w postaci  $\gamma : [0,1] \ni t \to x + t \triangle \cdot te_i \in \Omega$  otrzymamy  $\dot{\gamma}(t) = \triangle t \cdot e_i$ , a zatem zgodnie z (2.7)

$$\int_{x_0}^{(x+\triangle te_i)} F = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \triangle te_i \rangle dt = \triangle t \int_0^1 F_i(x+t \cdot \triangle te_i) dt.$$

W rezultacie, korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całek, otrzymamy (gdzie  $(0 \leq \Theta(\triangle x) \leq 1))$ 

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x) = \lim_{\Delta t \to 0} F_i(x + \Theta(\Delta t) \cdot \Delta t e_i) = F_i(x)$$

Dowód implikacji  $(3) \Rightarrow (1)$ .

Niech  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ... \gamma_n)$  będzie ustaloną krzywą łącząc<br/>ą $x_1$ z $x_2.$  Korzystając z (2.7) otrzymamy:

$$\int_{\gamma} F = \int_{t_1}^{t_2} \langle \left(F_1(\gamma(t), \dots, F_n(\gamma(t))), \left(\dot{\gamma}_{11}(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)\right) \right) dt = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t)\right) dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} U(\gamma(t)) dt = U(x_1) - U(x_2)$$
i.e., jak w zadaniu 2.3)

(Podobnie, jak w zadaniu 2.3)

Przykład 2.1. Wskażemy (bez sprawdzania) potencjały odpowiadające siłom dyskutowanym w przykładach 1.1 - 1.6 z poprzedniego wykładu. Wyniki ujmiemy w następującym zestawieniu

Przykład	siła	potencjał
1.1	$f(x) = -gm_g$	$U(x) = gm_g x$
1.2	Siła zależy także od prędkość	ci i nie jest potencjalna
1.3	$f(x) = -\frac{m_g M_g}{(r+x)^2}$	$U(x) = -\frac{m_g M_g}{r+x}$
1.4	$f(x) = -\alpha^2 x$	$U(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{2}$
1.5	$f(\phi) = m_g g \sin \phi$	$U(\phi) = m_g g \cos \phi$
1.6	$f(\mathbf{x}) = -\alpha^2 \mathbf{x}$	$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha^2 \mathbf{x}^2}{2}$
Przykład 2.2. Skończone u witacji są potencjalne. Dla	ıkłady punktów materialnych oddz większej przejrzystości przeprowa	iaływujących wzajemnie siłą gra- dzimy rozumowanie dla układu

pisu. Zgodnie z punktem (4) ze Wstępu w Wykładzie 1 potraktujemy nasz układ jako punkt  $\mathbf{x}$ w  $\mathbf{R}^9 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ . Wtedy  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  gdzie  $x_i \in \mathbf{R}^3$  jest położeniem *i*-tego punktu. Podobnie  $\mathbf{F} = F_1, F_2, F_3$ 

trzech punktów o masach  $m_1, m_2, m_3$ . Sytuacja ogólna różni się tylko większą komplikacją za-

jest siłą działającą na <br/>  ${\bf x},$ której potencjał chcemy wyznaczyć, natomias<br/>t $F_i$ jest wtedy siłą działającą na i-ty punkt. Zgodnie z (1.9)otrzymamy

$$F_{1} = m_{2}m_{1}\frac{\mathbf{x_{2}} - \mathbf{x_{1}}}{|\mathbf{x_{2}} - \mathbf{x_{1}}|^{3}} + m_{3}m_{1}\frac{\mathbf{x_{3}} - \mathbf{x_{1}}}{(|\mathbf{x_{3}} - \mathbf{x_{1}}|)^{3}}$$
$$F_{2} = m_{1}m_{2}\frac{\mathbf{x_{1}} - \mathbf{x_{2}}}{|\mathbf{x_{1}} - \mathbf{x_{2}}|^{3}} + m_{3}m_{2}\frac{\mathbf{x_{3}} - \mathbf{x_{2}}}{|\mathbf{x_{3}} - \mathbf{x_{2}}|^{3}}$$
$$F_{3} = m_{1}m_{3}\frac{\mathbf{x_{1}} - \mathbf{x_{3}}}{|\mathbf{x_{1}} - \mathbf{x_{3}}|^{3}} + m_{2}m_{3}\frac{\mathbf{x_{2}} - \mathbf{x_{3}}}{|\mathbf{x_{2}} - \mathbf{x_{3}}|^{3}})$$

Twierdzimy, że ta siła jest potencjalna w  $\mathbb{R}^9$ . Istotnie zauważmy, że w  $\mathbb{R}^3$  funkcja

$$U(x) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ma - gradientrówny

$$-grad \ U(x) = \frac{1}{2} \Big( \frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \frac{2x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \Big)$$

Zatem $-grad\;U=\frac{x}{|x|^3}$ Zauważmy też, że dla ustalonego wektora **r** 

$$-grad \ U(r-x) = -\frac{r-x}{|x-r|^3}$$

Wynika stąd, że siła  ${\bf F}$ jest w<br/>  ${\bf R}^9$  -gradientem funkcji

$$U(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) = -\left(\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}|} + \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{x_3} - \mathbf{x_1}|} + \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2}|}\right)$$

### 3. Energia mechaniczna

#### 3.1. Energia kinetyczna i energia całkowita.

Odwróćmy sytuację omawianą w Ćwiczeniu 2.1. Niech droga  $\gamma_1$  teraz będzie torem saneczkowym, biegnącym z punktu B do punktu A. Wyobraźmy sobie, że sanki ruszają z punktu B z prędkością 0. W kolejnych chwilach ich energia potencjalna związana z aktualną pozycją maleje i jednocześnie pojawia się, zależna od prędkości sanek i ich masy, energia ruchu czyli energia kinetyczna. Dowodem na jej istnienie są skutki ewentualnego zderzenia sanek z przedmiotem pozostającym na torze ich ruchu. Łatwo zauważyć, że energia kinetyczna nie zależy od położenia sanek ani od kierunku i zwrotu ich prędkości. (Tor zbudowany identycznie, ale znajdujący się w innym miejscu i inaczej zorientowany, spowodowałby takie same skutki zderzenia). Nietrudno też ustalić, że energia kinetyczna jest proporcjonalna do masy poruszającego się ciała. Oznaczmy energię kinetyczną literą T. Bardziej precyzyjne pomiary np. skutków ilościowych zderzenia a także względy matematyczne, powodują, że jako miarę energii kinetycznej przyjmujemy wyrażenie:

$$T(\dot{x}) = \frac{m}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} m \dot{x^2}.$$
(3.1)

Zdefiniujemy następnie całkowitą energię mechaniczną ciała jako

$$E(x, \dot{x}) = T(x) + U(x).$$
 (3.2)

Faktem o podstawowym znaczeniu (a także pokazującym trafność definicji T) jest

**Twierdzenie 3.1.** Dla ruchu pod wpływem siły potencjalnej energia całkowita jest stała w trakcie ruchu.

Dowód.Wystarczy pokazać, że jeżeli $t\to\gamma(t)$ jest krzywą ruchu, tj. rozwiązaniem równania

$$m\ddot{\gamma}(t) = \left(-\operatorname{grad}U\right)(\gamma(t))$$
$$\frac{d}{dt}E(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) = 0. \tag{3.3}$$

to

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + U(\gamma(t)) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[ \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t) \rangle, \ddot{\gamma}(t) \right] + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_{i}}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_{i}(t) =$$

$$\langle m \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + \langle gradU(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle m_{b} \ddot{\gamma}(t) + gradU(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

**Ćwiczenie 3.1.** Pokazać, że energia całkowita sanek zjeżdżających torem od punktu B do A pozostaje stała w trakcie ruchu.

$$m_b = m_g = m$$

*Dowód.* Niech *m* oznacza masę sanek oraz niech  $t \to \gamma(t)$  będzie "historią" naszego ślizgu od B do A. Zauważmy, że:

$$T(\dot{\gamma}(t_2)) - T(\dot{\gamma}(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (T(\dot{\gamma}(t))) dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{1m}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} m \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

Ponieważ nasz tor ruchu jest zmieniony w stosunku do toru ruchu pod wpływem siły F = (0, 0, -mg) = -grad U (porównaj Ćwiczenie 2.1), musi działać jakaś dodatkowa siła H zaginająca ten tor tak, że  $m_b \ddot{\gamma}(t) = F + H$ . Siłę  $H = m\ddot{\gamma} - F$  nazywamy siłą reakcji więzów. Założymy, że dla każdego punktu toru siła H w tym punkcie jest prostopadła do krzywej  $\gamma$ a więc, że  $\langle H\gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$  dla każdego t. Wtedy (porównaj dowód implikacji (3)  $\Rightarrow$  (1) w Twierdzeniu 2.1.

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle m_b \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle F(\gamma(t)) + H(\gamma(t)), \dot{\gamma} \rangle dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = -\left[ U(\gamma(t_2)) - U(\gamma(t_1)) \right] = U(\gamma(t_1)) - U(\gamma(t_2))$$

Otrzymujemy w rezultacie związek

$$T(\dot{\gamma}(t_2)) - T(\dot{\gamma}(t_1)) = U(\gamma(t_1)) - U(\gamma(t_2))$$

czyli

$$U(\gamma(t_2)) + T(\dot{\gamma}(t_2)) = U(\gamma(t_1)) + T(\gamma(t_1)).$$

Zwróćmy uwagę, że krzywa ruchu nie jest identyczna z torem ruchu swobodnego, więc Ćwiczenie 3.1 nie wynika bezpośrednio z Twierdzenia (3.1). Omówienie sytuacji, kiedy punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na powierzchni większego wymiaru (jak w przypadku np. kulki metalowej znajdującej się w sferycznym naczyniu w polu grawitacyjnym), odłożymy do momentu wprowadzenia wariacyjnego opisu ruchu.

## 3.2. Przestrzeń konfiguracyjna i przestrzeń fazowa oraz całki pierwsze układów mechanicznych.

Przedyskutujemy teraz niektóre skutki zaobserwowanej w Twierdzeniu (3.1) niezmienniczości energii całkowitej. Rozważmy ogólny układ potencjalny. Jego ruch opisany jest układem równań Newtona.

$$m\ddot{x} = -grad \ U(x) \tag{3.4}$$

Każde jego rozwiązanie jest związane wzajemnie jednoznacznie z warunkami początkowymi. Te z kolei wyznaczają wartość  $E_0$  energii całkowitej w chwili początkowej. Warunek stałości energii mający postać

$$m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$$

prowadzi do równania

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{E - U(x(t))}{m}}$$
(3.5)

wyznaczającego możliwe ewolucje naszego układu mechanicznego przy danym poziomie  $E_0$  energii całkowitej. Równanie (3.5) jest pierwszego rzędu i na ogół łatwiej je rozwiązać niż oryginalny układ (3.4).

Okazuje się, że poza potencjalnością występujących sił, można podać wiele innych warunków "symetrii" implikujących pojawienie się innych, niż energia całkowita funkcji zależnych od prędkości i położeń, które pozostają stałe w trakcie ruchu. Funkcje takie nazywa się *całkami pierwszymi* ruchu. Nazwa ta jest motywowana analogią teorioliczbową.

Warunek ich stałości prowadzi, podobnie jak w przypadku energii całkowitej, do uproszczenia równań ruchu. Dla uzyskania przejrzystości dalszych rozważań wprowadzimy następujące uzupełnienia naszego modelu matematycznego.

**Definicja 3.1.** Rozważmy układ mechaniczny  $\mathcal{M}$ . Zbiór wszystkich potencjalnie możliwych położeń chwilowych tego układu nazwiemy przestrzenią konfiguracyjną układu i będziemy oznaczać  $\mathcal{K}(\mathcal{M})$  (lub  $\mathcal{K}$ , jeżeli wiadomo, o jakim układzie mowa).

<u>Komentarz</u> Poprawne matematycznie podejście wymagałoby w tym momencie założenia u czytelnika znajomości pojęcia rozmaitości różniczkowej a następnie pojęcia wiązki stycznej do takiej rozmaitości. Ponieważ prezentowany kurs nie zależy w istotny sposób od tych pojęć , a rozpatrywane przykłady mogą służyć jako ich ilustracja i nie wymagają ogólnej teorii, zdecydowaliśmy się jedynie zasygnalizować czytelnikowi potrzebę jej poznania, starając się w miarę możliwości unikać komplikacji geometrycznych.

**Przykład 3.1.** (a) Niech  $\mathcal{M}_1$  lub składa się z punktu materialnego o masie *m* połączonego sztywnym nieważkim prętem o długości *l* z nieruchomym punktem  $0 \in \mathbb{R}^3$ . Wtedy  $\mathcal{K}(\mathcal{M}_1)$  jest sferą dwuwymiarową w  $\mathbb{R}^3$  o środku 0 i promieniu *l* 

(b) Niech  $\mathcal{M}_2$  składa się z dwóch punktów poruszających się swobodnie w  $\mathbb{R}^3$ , ale związanych ze sobą sztywnym, nieważkim prętem o długości l. Wtedy przyjmując dowolnie położenie pierwszego punktu o współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$  dostajemy warunek na współrzędne drugiego punktu  $(y_1, y_2, y_3)$  w formie:

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = l^2.$$
(3.6)

Dostajemy więc  $\mathcal{K}(\mathcal{M}_2)$  jako pięciowymiarową podrozmaitość w  $c \mathbf{R}^6$  opisaną warunkiem (3.6) (c)Przestrzeń konfiguracyjna układu *n*- punktów jest równa  $\mathbf{R}^{3n}$ .

Definicja 3.2. Wymiarem układu  $\mathcal{M}$  nazwiemy wymiar jego przestrzeni konfiguracyjnej.

**Definicja 3.3.** Przestrzenią fazową układu mechanicznego  $\mathcal{M}$  nazwiemy zbiór wszystkich potencjalnie możliwych par, składających się z położenia chwilowego i odpowiadającej temu położeniu prędkości chwilowej. Przestrzeń fazową układu  $\mathcal{M}$  będziemy oznaczać  $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ .

<u>Komentarz</u> Przestrzeń fazowa  $\mathcal{F}(\mathcal{M})$  ma strukturę wiązki stycznej, której bazą jest przestrzeń konfiguracyjna  $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ .

**Przykład 3.2.** Dla układów  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  i  $\mathcal{M}_3$  z Przykładów 3.1 jako ich przestrzenie fazowe otrzymamy odpowiednio: wiązkę styczną do  $S^2$ , wiązkę styczną do  $\mathcal{K}(\mathcal{M}_2)$  i wiązkę styczną do  $\mathbf{R}^{3n}$ 

**Definicja 3.4.** Niech dany będzie układ mechaniczny  $\mathcal{M}$ . Wraz z krzywą ruchu  $\mathbf{R} \ni t \to \gamma(t) \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$  rozważać będziemy jej kanoniczne rozszerzenie do przestrzeni fazowej, które oznaczać będziemy  $\dot{\gamma}$  (dla każdego  $t \ \dot{\gamma}(t)$  leży w przestrzeni stycznej do ( $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ ) w punkcie  $\gamma(t)$ ). Funkcję

(skalarną lub wektorową)  $\mathbf{P} : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}^k$  nazwiemy całką pierwszą  $\mathcal{M}$ , jeżeli funkcja złożona  $\mathbf{P}_0 \dot{\gamma}$  jest stała.

Poza układami opisującymi ruch kilku punktów w  $\mathbf{R}^{3n}$ , rozważać będziemy fikcyjne układy kilku punktów w  $\mathbf{R}^k$ . Ma to sens formalny, a rozważanie takich układów (na ogół dla k < 3) umożliwia lepsze zrozumienie układów fizycznych, usuwając, często nieistotne, trudności rachunkowe, występujące w większym wymiarze.

#### 3.3. Układy 1-wymiarowe i ich obrazy fazowe.

Wykorzystując prawo zachowania energii całkowitej, przeprowadzimy dyskusję układu 1-wymiarowego z zadanym potencjałem U. Rozważmy określony dla  $x_1 < x < x_2$  potencjał, którego wykres przedstawia rys.3.1.



Warunek stałości energii całkowitej  $E = \frac{m}{2}v^2 + U(x)$ , (gdzie U = U(x) a V oznacza prędkość w punkcie x) wyznacza krzywe - poziomice tej energii. Krzywe takie odpowiadające wartościom  $E_1, ..., E_6$  podaje rysunek 3.2. Są one opisane wzorem

$$U = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x(t)))}{m}} \tag{3.7}$$



Z rysunku 3.2 można odczytać wiele własności ruchu przy danym potencjale i zadanej wartości energii całkowitej.

## 4. Symetrie i całki pierwsze

#### 4.1. Pęd i moment pędu

Omówimy teraz kilka typowych przykładów symetrii w układach mechanicznych. Przez symetrię rozumiemy tu dodatkowe warunki, jakie spełniają siły występujące w rozważanym układzie mechanicznym.

Pierwszym takim warunkiem zaobserwowanym w poprzednim wykładzie (dla układu jednopunktowego) jest potencjalność występującej siły. Konsekwencją tej symetrii jest pojawienie się całki pierwszej - energii całkowitej rozpatrywanego punktu.

W dalszym tekście wygodnie będzie traktować układ n-punktów w  $\mathbf{R}^3$  jako jeden punkt w  $\mathbf{R}^{3n}$ . Jak zauważyliśmy w Wykładzie 3 przestrzeń fazową  $\mathcal{F}$  takiego układu, którą jest wiązka styczna do  $\mathbf{R}^{3n}$  możemy utożsamiać z

$$\mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}$$
 t.j.  $\mathcal{F} = \mathbf{R}^{6n}$ .

Punkt przestrzeni ${\mathcal F}$ ma wtedy współrzędne

$$(x_1, \dots x_n, v_1, \dots v_n) \tag{4.1}$$

gdzie  $x_i \in \mathbf{R}^3$ jest położeniem  $i-{\rm tego}$ punktu <br/>a $v_i \in \mathbf{R}^3$ jest jego prędkością.

**Definicja 4.1.** (a) Niech ruch punktu materialnego o masie M opisany będzie krzywą gładką  $\mathbf{R} \ni t \to x(t) \in \mathbf{R}^3$ . Pędem tego punktu w chwili t nazwiemy  $m\dot{x}(t) \in \mathbf{R}^3$ .

(b) Niech ruch układu  $\mathcal{M}$  *n*-punktów o masach  $m_1, ..., m_n$  opisany będzie krzywą w przestrzeni fazowej  $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}$ :

$$\dot{\gamma}: \mathbf{R} \ni t \to ((x_1(t), \dots x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots \dot{x}_1(t)) \ni \mathcal{F}(\mathcal{M}))$$

Pędem tego układu w chwili t nazwiemy wektor

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i(t) \in \mathbf{R}^3 \tag{4.2}$$

(c) Dla punktu materialnego (a) jego momentem pędu w chwili t nazwiemy wektor

$$[x(t), m\dot{x}(t)] \in \mathbf{R}^3$$

gdzie [a, b] oznacza iloczyn wektorowy wektorów  $a, b \in \mathbb{R}^3$ .

(d) Dla układu  $\mathcal M$ z punktu (b) momentem pędu tego układu w chwili t nazwiemy wektor

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ x_i(t), m_i \dot{x}(t) \right] \in \mathbf{R}^3 \tag{4.3}$$

Uwaga 4.1. (a) Zarówno w przypadku pędu jak i momentu pędu mamy do czynienia z następującą sytuacją. Na przestrzeni fazowej  $\mathcal{F}(\mathcal{M})$  są określone funkcje

 $P: \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}^3$  zwana pędem oraz

 $P: \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}^3$  zwana momentem pędu

takie, że formuły (4.2) i (4.3) otrzymamy jako superpozycje odpowiednio  $P \circ \dot{\gamma}$  i  $M \circ \dot{\gamma}$ .

(b) Można rozważać także moment pędu względem ustalonego punktu  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , dany formułą  $\mathbf{R} \ni t \to [x(t) - x_0, m\dot{x}(t)]$  z podobną zmianą formuły (4.3).

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

#### 4.2. Układy izolowane

Niech dany będzie układ n-punktów. Sił<br/>ę ${\cal F}_j$ działającą na $j-{\rm ty}$  punkt można zapisać w postaci

$$F_j = \sum_{i=1}^n F_{ij}$$

gdzie  $F_{ij}$  dla  $i \neq j$  jest siłą z jaką *i*-ty punkt oddziaływuje na *j*-ty, natomiast  $F_{jj}$  jest siłą działającą na *j*-ty punkt z zewnątrz. Będziemy przy tym zakładać, że siła  $F_{ij}$  jest równoległa do wektora  $x_i - x_j$ , gdzie  $x_i \in \mathbf{R}^3$  jest położeniem *i*-tego punktu.

Otrzymujemy zatem opis działających sił w formie macierzy

$$F = (F_{ij})_{i, j=1}^{n} \tag{4.4}$$

gdzie siłę działającą na punkt $j-{\rm ty}$ otrzymujemy jako sumę sił występujących w  $j-{\rm tej}$ kolumnie.

**Definicja 4.2.** Układ n-punktów nazwiemy izolowanym, jeżeli macierz F jest antysymetryczna, tj. jeżeli  $F_{ij} = -F_{ji}$ . Warunek ten zawiera dwa ważne warunki częściowe. Po pierwsze siła zewnętrzna  $F_{ij}$  działająca na j-ty punkt jest zerowa.

Po drugie suma wszystkich sił działających na punkty tworzące układ jest zerowa, tj

$$\sum_{i=1}^{n} F_j = 0 (4.5)$$

**Twierdzenie 4.1.** Dla układów izolowanych pęd układu P oraz moment pędu układu M są całkami pierwszymi ruchu.

Dowód. Niech

$$\dot{\gamma}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))$$

będzie krzywą ruchu w przestrzeni fazowej  $\mathcal{F}$  rozważanego układu.

Mamy pokazać, że

$$(P \circ \dot{\gamma})(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i(t) \text{ oraz } (M \circ \dot{\gamma})(t) = \sum_{i=1}^{n} [x_i(t), m_i \dot{x}_i(t)],$$

gdzie  $m_i$  jest masą i-tego punktu, są całkami pierwszymi.

Na mocy warunku (4.5) mamy

$$\frac{d}{dt}(P \circ \dot{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big( \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j(t) \Big) = \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Podobnie wykorzystując (4.5) oraz własność [w,w]=0dla  $w\in {\bf R}^3$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}(M \circ \dot{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big( \sum_{j=1}^{n} \left[ x_j(t), m_j \dot{x}_j(t) \right] \Big) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left( \left[ \dot{x}_j(t), m_j \dot{x}_j(t) \right] + \left[ x_j(t), m_j \ddot{x}_j(t) \right] \right) = \sum_{j=1}^{n} \left[ x_j(t), F_j(x_1, \dots x_n) \right] =$$

$$=\sum_{j=1}^{n} \left[ x_j(t), \sum_{i=1}^{n} F_{ij}(x_1, \dots x_n) \right] = \sum_{ij=1}^{n} \left[ x_j(t) F_{ij}(x_1, \dots x_n) \right]$$

Wykorzystując antysymetrię macierzy sił F możemy ostatnią sumę zapisać jako sumę po wszystkich parach (i, j)(j, i) podwójnych indeksów, gdzie drugi podwójny indeks otrzymujemy przez transpozycję pierwszego. Pokażemy, że wynik sumowania w każdej takiej parze daje zero, t.j., że

$$[x_i(t)F_{ji}(x_1,...x_n)] + [x_j(t)F_{ij}(x_1,...x_n)] = 0$$
(4.6)

Istotnie, z własności iloczynu wektorowego wynika, że w obydwu składnikach sumy w (4.6) możemy zastąpić odpowiednio  $x_i$  przez  $x_i + \lambda((x_1 - x_2) \text{ oraz } x_j \text{ przez } x_j + \mu((x_1 - x_2) \text{ (jest tak, bo } F_{ij}||(x_1 - x_2)).$  Zatem dobierając  $\lambda = \frac{1}{2}$  oraz  $\mu = -\frac{1}{2}$  dostaniemy ten sam wektor w, i z warunku  $F_{ij} = -F_{ji}$  wynika własność (4.6).

Dla układu  $\mathcal{M}$  składającego się z N punktów o położeniach  $x_i \in \mathbf{R}$  oraz masach  $m_i$  określmy środek masy  $x_0$  tego układu za pomocą wzoru

$$x_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \tag{4.7}$$

gdzie 
$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$
.

**Stwierdzenie 4.1.** Dla układu n-punktów położenie jego środka masy zmienia się tak, jak położenie punktu w  $\mathbf{R}^3$  o masie M na który działa siła  $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ .

Dowód. 
$$M\ddot{x}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^n F_i$$

**Wniosek 4.1.** Dla układu izolowanego jego środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Dowód. Na mocy (4.5) mamy wtedy  $M\ddot{x}_0 = 0.$ 

#### 4.3. Układy potencjalne

Niech  $\mathcal{M}$  będzie układem n-punktów o maasach  $m_1, ..., m_n$ , którego przestrzeń fazowa  $\mathcal{F}(\mathcal{M})$  ma współrzędne (4.1). Niech na punkty układu działają siły zewnętrzne oraz siły oddziaływania wzajemnego opisane przez macierz (4.4).

**Definicja 4.3.** Powiemy, że układ  $\mathcal{M}$  jest potencjalny, jeżeli istnieje funkcja  $U : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to R$ zależna tylko od zmiennych  $x_1, ..., x_n$  taka, że (traktując  $\mathcal{M}$  jako punkt przestrzeni  $\mathbf{R}^{3n}$ ) siła działająca na ten punkt ma postać

$$F(x_1, ..., x_n) = -grad \ U \ (x_1, ..., x_n). \tag{4.8}$$

Wtedy siła  $F_j$ działająca na  $j-{\rm ty}$ punkt jest opisana jako  $j-{\rm ta}$  (wektorowa) współrzędna siły F,tj

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$
(4.9)

**Definicja 4.4.** Energią kinetyczną układu  $\mathcal{M}$  nazwiemy funkcję  $T : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to R$  opisaną we współrzędnych (4.1) formułą

$$T(x_1, \dots x_n, v_1, \dots v_n) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$
(4.10)

Niech na przestrzeni fazowej układu  $\mathcal{M}$  dana będzie siła (4.9)<br/>(niekoniecznie potencjalna). Niech

$$\dot{\gamma}: \mathbf{R} \ni t \to (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$$

$$(4.11)$$

gdzie

$$m_i \ddot{x}_i(t) = F_i((x_1(t), \dots, x_n(t)))$$
  $i = 1, 2, \dots, n$ 

**Stwierdzenie 4.2.** Przyrost energii kinetycznej wzdłuż krzywej ruchu (??) jest równy pracy siły (4.9) wzdłuż tej krzywej t.j. dla  $t_2 > t_1$ 

$$T(\dot{\gamma}(t_2)) - T(\dot{\gamma}(t_1)) = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \langle F_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dot{x}_i(t) \rangle dt.$$

Dowód.

$$T(\dot{\gamma}(t_2) - T(\dot{\gamma}(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} T(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \Big( \sum_{i=1}^n \frac{m_1 \langle \dot{x}_i(t), \dot{x}_i(t) \rangle}{2} \Big) dt =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \langle m_1 \ddot{x}_i(t), \dot{x}_i(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \langle F_i((x_1(t), \dots, x_n(t)), \dot{x}_i(t)) \rangle dt.$$

Wniosek 4.2. Jeżeli siła F jest potencjalna, to energia całkowita układu

$$E(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = T(v_1, \dots, v_n) + U(x_1, \dots, x_n)$$

jest całką pierwszą ruchu.

Dowód. Zauważmy, że w przypadku siły potencjalnej mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \langle F_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dot{x}_i(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} U(x_1(t), \dots, x_n)(t))$$

zatem (porównaj dowód Stwierdzenia (4.3)).

$$T(\dot{\gamma}(t_1)) - T(\dot{\gamma}(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} U(\dot{\gamma}(t))(t) dt = U(\dot{\gamma}(t_2)) - U(\dot{\gamma}(t_1))$$

skąd wynika, że

$$T(\dot{\gamma}(t_1)) + U(\dot{\gamma}(t_1)) = T(\dot{\gamma}(t_2)) + U(\dot{\gamma}(t_2))$$

**Stwierdzenie 4.3.** Niech  $\mathcal{M}$  będzie układem izolowanym z macierzą działających sił o postaci (4.4). Jeżeli siła  $F_{ij}$  zależy tylko od odległości oddziaływujących punktów, t.j.

$$F_{ij}(x_1, \dots x_n) = f_{ij}(|x_i - x_j|) \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$$
(4.12)

gdzie  $f_{ij}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  jest ciągła oraz  $f_{ij} = f_{ji}$ , to układ  $\mathcal{M}$  jest potencjalny.

Dowód. Niech  $g_{ij}(t) = \int_1^t f_{ij}(s) ds$  będzie funkcją pierwotną funkcji  $f_{ij}$  i niech  $G_{ij}(x_1, ..., x_n) = g_{ij}(|x_i - x_j|)$  gdzie dla  $w = (w_1, w_2, w_3) \ni \mathbf{R}^3$ . przyjmiemy

$$|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$$

Ponieważ dla  $w = (w_1, w_2, w_3), v = ((v_1, v_2, v_3)$  zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial w_i}|w-v| = \frac{w_i - v_i}{|w-v|} \qquad ; \qquad \frac{\partial}{\partial v_i} = \frac{v_i - w_i}{|w-v|} \tag{4.13}$$

 $\mathrm{to}$ 

$$\frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(x_1, \dots x_n) = \begin{cases} 0 \quad \text{jeżeli} \ k \neq i \text{ oraz } k \neq j \\ f_{ij}(|x_i - x_j|) \cdot \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} & \text{jeżeli} \ k = i \\ f_{ij}(|x_i - x_j|) \cdot \frac{x_j - x_i}{|x_i - x_j|} & \text{jeżeli} \ k = j \end{cases}$$

a zatem

$$U(x_1, ..., x_n) = \sum_{j,i} G_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

jest potencjałem naszego układu.

#### 4.4. Zagadnienie dwóch ciał.

Przez zagadnienie n-ciał będziemy rozumieli problem rozwiązania równań opisujących ewolucję izolowanego i potencjalnego układu n-punktów materialnych. Zagadnienie to odegrało dużą rolę w rozwoju mechaniki. Pokazano, że dla  $n \ge 3$  nie istnieje możliwość "rozplątania" układu równań opisujących ruch i podania rozwiązania 'explicite'(rozwiązanie w kwadraturach). Dla dwóch punktów rozwiązanie takie istnieje. Istotnie, dla układu dwóch ciał o masach  $m_i m_2$ układ równań opisujący jego ewolucję ma zgodnie z Stwierdzeniem (4.3) postać

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} g_{1,2}(|x_1(t) - x_2(t)|) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} g_{1,2}(|x_1(t) - x_2(t)|) \end{cases}$$
(4.14)

gdzie  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  jest różniczkowalna.

**Twierdzenie 4.2.** Zmiana  $x_1 - x_2$  przy zagadnieniu dwóch ciał z potencjałem  $U_{1,2}$ odbywa się tak, jak zmiana położenia ruchu pojedynczego punktu o masie  $\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$  w  $\mathbf{R}^3$  pod wpływem potencjału  $V(x) = q_{1,2}(|x|)$ .

*Dowód.* Mnożąc pierwsze z równań (4.4.1) przez  $m_2$  a drugie przez  $m_1$  i odejmując stronami otrzymamy (porównaj (4.13))

$$m_1 m_2(x_1 - x_2) = m_2 \frac{\partial}{\partial x_1} g_{1,2}(|x_1 - x_2|) - m_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_{1,2}(|x_1 - x_2|) =$$
$$= m_2 \frac{dg_{1,2}}{dt}(|x_1 - x_2|) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} + m_1 \frac{dg_1}{dt}(|x_1 - x_2|) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} =$$

$$= -(m_1 + m_2)\frac{dg_{1,2}}{dt}(|x_1 - x_2|) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}$$

A zatem dla  $x = x_1 - x_2$  otrzymamy

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)}\ddot{x} = -\frac{dg_{1,2}}{dt}(|x|)\frac{x}{|x|} = -\frac{\partial}{\partial x}g_{1,2}(|x|).$$

Niech  $x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$  będzie środkiem masy naszego układu oraz niech  $x = x_1 - x_2$ . Wtedy

$$x_1 = x_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x$$
$$x_2 = x_0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x$$

a zatem, zgodnie z wnioskiem 4.2.4 otrzymamy  $x_0(t) + x_0 + v_0 t$ i dla wyznaczenia  $x_1$  oraz  $x_2$  wystarczy znależć x(t), tj podać opis ruchu punktu w  $\mathbf{R}^3$  pod wpływem danego potencjału o postaci U(x) = f(|x|). Zagadnienie to posiada rozwiązanie, które podamy w następnym wykładzie.

## 5. Symetria sferyczna w $\mathbb{R}^3$

#### 5.1. Pola centralne

**Definicja 5.1.** Polem centralnym w  $\mathbb{R}^3$  nazwiemy pole wektorowe F na  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  o postaci

$$F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|}$$
(5.1)

gdzie  $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$  jest funkcją ciągłą a  $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ . Pole (5.1) jest zawsze potencjalne z potencjałem V(x) = g(|x|) gdzie g jest funkcją pierwotną f. (Porównaj dowód Swierdzenia 4.3.).

**Definicja 5.2.** Grupą ortogonalną  $O(n, \mathbf{R})$  nazwiemy grupę przekształceń liniowych, scharakteryzowanych warunkiem:  $A \in O(n, \mathbf{R})$  wtedy i tylko wtedy, kiedy

$$\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \, \mathrm{dla} \, x, y \in \mathbf{R}^n$$

$$(5.2)$$

Warunek ten jest równoważny warunkowi podającemu opis macierzy przekształceń liniowych tworzących  $O(n, \mathbf{R}) : A \in O(n, \mathbf{R})$  wtedy i tylko wtedy, kiedy macierz [A] tego przekształcenia względem dowolnej bazy ortonormalnej spełnia warunek

$$[A]^{-1} = [A]^t \tag{5.3}$$

gdzie  $[A]^t$  oznacza macież transponowaną do [A].

**Stwierdzenie 5.1.** Pole centralne (5.1) jest niezmiennicze dla naturalnego działania w  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ grupy przekształceń ortogonalnych  $O(n, \mathbb{R})$ . Oznacza to, że dla każdego  $A \in O(n, \mathbb{R})$  oraz dla każdego  $x \in \mathbb{R}^n \{0\}$  zachodzi

$$F(A(x)) = (d_x A)(F(x))$$
(5.4)

*Dowód.* Dla przekształcenia liniowego B jego różniczka w dowolnym punkcie jest równa B. Zatem z (5.1) dla  $A \in O(n, \mathbf{R})$  oraz  $x \in \mathbf{R}^n$  wynika

$$F(A(x))) = f(|A(x)|)\frac{A(x)}{|A(x)|} = \frac{f(|x|)}{|x|}A(x) = A(F(x)) = (d_x A)(F(x))$$

Wykorzystaliśmy tu równość |A(x)| = |x| wynikającą z (5.2).

Stwierdzenie 5.2. Dla pola centralnego w  $\mathbb{R}^3$  moment pędu M jest całką pierwszą.

*Dowód.* Niech  $\mathbf{R} \ni \mathbf{t} \to \mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  będzie ruchem punktu o masie *m* pod działaniem centralnej siły *F.* Niech  $[\cdot, \cdot]$  oznacza iloczyn wektorowy w  $\mathbf{R}^3$ . Wtedy

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} [x(t), m\dot{x}(t)] = [\dot{x}(t), m\dot{x}(t)] + [x(t), m\ddot{x}(t)] = [x(t), F(x(t))] = 0$$

bo wektor F(x(t)) jest proporcionalny do x(t).

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Wniosek 5.1. Ruch w polu centralnym w  $\mathbb{R}^3$  jest płaski. Dokładniej:

(A) Jeżeli  $[x(0), m\dot{x}(0)] = M(0) \neq 0$  to ruch odbywa się w płaszczyźnie.

$$N = \{ y \in \mathbf{R}^3 : \langle y, M(0) \rangle = 0 \}, \tag{5.5}$$

którą też można opisać jako plaszczyznę rozpinaną przez x(0) oraz  $\dot{x}(0)$ . (B) Jeżeli M(0) = 0 to ruch odbywa się po prostej zawierającej 0 oraz x(0).

Dowód. (A) Ze stałości M(t) wynika, że  $[x(t), m\dot{x}(t)] = M(0)$ . Zatem  $x(t) \perp M(0)$  dla każdego t. Ponadto x(0) i  $\dot{x}(0)$  należą do N i nie są współliniowe.

(B) Jeżeli M(0) = M(t) = 0 to  $\dot{x}(t)||x(t)$  czyli

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \tag{5.6}$$

gdzie funkcja  $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  jest różniczkowalna ( bo  $t \to x(t)$ ) jest dwukrotnie różniczkowalna). Niech  $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$  będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy funkcja wektorowa y(t) = b(t)x(0) spełnia warunek

$$\dot{y}(t) = \frac{b(t)}{b(t)}y(t) = \frac{d}{dt}ln(b(t)) \cdot y(t),$$

który dla  $b_0(t) = e^{\int_1^t a(s)ds}$  przechodzi na (5.6). Z twierdzenia o jednoznaczności mamy więc

$$x(t) = b_0(t)x(0).$$

**Wniosek 5.2.** Niech F będzie polem centralnym w  $\mathbb{R}^3$ , a V podprzestrzenią w  $\mathbb{R}^3$ , rozpiętą przez dwie pierwsze osie współrzędnych. Każdą trajektorię ruchu w polu F można uzyskać jako obraz pewnej trajektorii tego pola, leżącej w V, za pomocą pewnego przeksztalcenia  $A \in O(3\mathbb{R})$ .

Dowód. Niech

$$\mathbf{R} \ni \mathbf{t} \to \gamma(\mathbf{t}) \in \mathbf{R}^3$$

będzie krzywą ruchu dla pola F. Rozpatrzmy przypadek kiedy

$$M(0) = \left[\gamma(0), m\dot{\gamma}(0)\right] \neq 0.$$

Przypadek M(0) = 0 zostawimy jako zadanie czytelnikowi. Niech  $A \in O(3, \mathbf{R})$  będzie takim przekształceniem ortogonalnym , że

$$A((0, 0, |M(0)|)) = M(0).$$

Wtedy A(V) = N (N jak w (5.5)). Niech

$$x_0 = A^{-1}(\gamma(0))$$
  $y_0 = A^{-1}(\dot{\gamma}(0))$ 

i niech  $\delta(t)$  będzie krzywą ruchu w polu F wyznaczoną przez warunki początkowe  $\delta(0) = x_0$ ,  $\dot{\delta} = y_0$ . Wtedy  $\delta(t) \in V$  oraz  $\gamma(t) = A(\delta(t))$ .

**Wniosek 5.3.** Każdy ruch w polu centralnym  $\mathbf{R}^3$  jest izometrycznie równoważny pewnemu ruchowi w polu centralnym w  $\mathbf{R}^2$ .

*Dowód.* Każde pole centralne w  $\mathbb{R}^2$  powstaje przez ograniczenie do przestrzeni  $V \simeq \mathbb{R}^2$  pewnego pola centralnego w  $\mathbb{R}^3$  - i odwrotnie - każde takie pole jest wyznaczone przez swoje ograniczenie do V.

#### 5.2. Ruch w polu centralnym w $\mathbb{R}^2$

Zaczniemy od sformułowania analogii Stwierdzenia 5.2 dla ruchu w centralnym polu w  $\mathbf{R}^2$ . Dla uproszczenia, w dalszej części tego punktu przyjmiemy, że m = 1. Zanurzając  $\mathbf{R}^2$  jako przestrzeń V w  $\mathbf{R}^3$  rozważmy ruch  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$  w  $\mathbf{R}^3$ . Wtedy

$$[x(t), \dot{x}(t)] = (0, 0, x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)).$$

Zatem funkcja

$$M(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)$$
(5.7)

jest (skalarną) całką pierwszą ruchu w polu centralnym w  $\mathbb{R}^2$ . Nadamy tej funkcji sens geometryczny, przechodząc do współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$ . Wtedy

$$x_1(t) = r(t) \cos \varphi(t)$$
$$x_2(t) = r(t) \sin \varphi(t)$$

a zatem

$$\dot{x}_1(t) = \dot{r}(t)\cos\varphi(t) - r(t)\sin\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{r}(t)\sin\varphi(t) + r(t)\cos\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}(t)$$

i otrzymamy

$$M(t) = r(t)\cos\varphi(t)(\dot{r}(t)\sin\varphi(t) + r(t)\cos\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}(t)) - -r(t)\sin\varphi(t)(\dot{r}(t)\cos\varphi(t) - r(t)\sin\varphi(t)\cdot\dot{\varphi}(t)) = r^{2}(t)\dot{\varphi}(t)$$

Widzimy, że wyrażenie (5.7) przyjmie we współrzędnych biegunowych postać

$$M(t) = M(r(t), \varphi(t)) = r^2(t) \cdot \dot{\varphi}(t).$$
(5.8)

**Stwierdzenie 5.3.** Dla ruchu w polu centralnym w  $\mathbf{R}^2$  opisanym za pomocą współrzędnych biegunowych zachodzi

$$M(t) = 2\frac{dP}{dt}(t) \tag{5.9}$$

gdzie

$$P(t) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^t r^2(t)\dot{\varphi}(t)dt$$
(5.10)

oznacza pole sektora ograniczonego promieniami  $\varphi(t_1), \varphi(t)$  oraz krzywą ruchu  $r(t) = r(\varphi(t)).$ Wielkość  $\frac{dP}{dt}(t)$  nazywamy prędkością polową.

Dowód.Ponieważ w przypadku koła o promieniu r pole wycinka kołowego opartego na łuku o kącie środkowym $\bigtriangleup\varphi$ wynosi

$$\triangle P = \pi r^2 \cdot \frac{\triangle \varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \triangle \varphi$$

to pole sektora krzywoliniowego ograniczonego promieniami $\varphi_1$ i $\varphi$ oraz krzywą $r(\varphi)$ otrzymamy jako

$$P(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2(\varphi) d\varphi$$
(5.11)

Zakładamy, że funkcja  $\varphi \to r(\varphi)$  jest ciągła na przedziale  $[\varphi_1, \varphi]$ . Jeżeli zarówno r jak  $\varphi$  są funkcjami t i przy tym  $\varphi$  jest monotoniczna,  $P(\varphi)$  przechodzi na (5.10) i wtedy

$$r^2(t)\dot{\varphi}(t) = 2rac{dP(t)}{dt}.$$

**Wniosek 5.4.** Ruch w polu centralnym w  $\mathbb{R}^3$  odbywa się w płaszczyźnie w taki sposób, że jego prędkość polowa względem centrum jest stała.

Reguła ta została doświadczalnie wykryta przez Keplera dla ruchu Marsa wokół Słońca.

### 5.3. Całkowanie równań ruchu w polu centralnym w $\mathbf{R}^2$

Ponieważ siła w polu centralnym w każdym punkcie jest skierowana radialnie, wygodnie będzie opisywać ruch, rozkładając w każdej chwili występujące wektory względem zmiennego układu ortogonalnego  $e_r, e_{\varphi}$  w taki sposób ,że dla punktu o współrzędnych biegunowych  $r(t), \varphi(t)$  stosowany w chwli t układ będzie miał postać:

$$e_r(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$$
$$e_{\varphi}(t) = (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))$$

#### Ostrzeżenie

Obserwowana poprzez liczenie pochodnych zmiana w czasie dotyczy układu nieruchomego i te pochodne dopiero po ich policzeniu rozkładamy względem zmieniającej się w czasie bazy.

Zaczniemy od obliczenia pochodnych funkcji  $t \to e_r(t)$  i  $t \to e_{\varphi}(t)$  i przedstawieniu ich w układzie ruchomym. I tak

$$\begin{cases} \dot{e}_r(t) = \left(-\sin\varphi(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)\dot{\varphi}(t)\right) = \dot{\varphi}(t)e_{\varphi}(t)\\ \dot{e}_{\varphi}(t) = \left(-\cos\varphi_{(t)}\dot{\varphi}(t), -\sin\varphi(t)\dot{\varphi}(t)\right) = -\dot{\varphi}(t)e_r(t) \end{cases}$$
(5.12)

(W dalszym ciągu dla większej przejrzystości długich wzorów zrezygnujemy z pisania explicite argumentu t. Zatem napiszemy  $\varphi$  zamiast  $\varphi(t)$ , podobnie  $\dot{\varphi}$  zamiast  $\dot{\varphi}(t)$  i tak dalej.)

Pisząc  $x(t) = r(t)e_r(t)$  i stosując (5.12) otrzymamy

$$\dot{x} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{\varphi}e_{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}e_{\varphi} - r\dot{\varphi}^2e_r = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_{\varphi}$$

Ponieważ  $F(x) = f(r)e_r$ , otrzymamy stąd dwa równania

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = f(r) \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$
(5.13)

Zauważmy, że zasada stałości prędkości polowej oznacza, że

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{5.14}$$

czyli

$$r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\varphi}) = 0$$

a zatem drugie z równa<br/>ń (5.13) jest równoważne warunkowi (5.14), który jest równoważny równości<br/>  $mr^2\dot{\varphi} = M$ . M jest stałą zależną od warunków początkowych, którą dla zwięzłości nazwiemy momentem pędu. Zatem

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2} \tag{5.15}$$

Wstawiając (5.15) do pierwszego z równań (5.13) sprowadzamy je do postaci zawierającej tylko funkcję r(t) i jej pochodne:

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{M^2}{mr^3}$$
 (5.16)

Podsumujemy nasze rozważania tak:

**Stwierdzenie 5.4.** Odległość od środka układu w ruchu centralnym w  $\mathbb{R}^2$  z momentem pędu M i potencjałem V(x, y) = g(r) zmienia się jak odległość od zera w jednowymiarowym ruchu z potencjałem

$$U(r) = g(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$
(5.17)

Dowód. Istotnie, możemy przepisać (5.16) w postaci

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}g(r) + \frac{M^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr}(g(r) + \frac{M^2}{2mr^2})$$
(5.18)

**Stwierdzenie 5.5.** Energia całkowita w ruchu dwuwymiarowym z ustalonym momentem pędu M jest taka sama, jak dla ruchu jednowymiarowego z potencjałem (5.17).

Dowód. W ruchu z potencjałem (5.17) otrzymamy

$$E_1 = \frac{m\dot{r}^2}{2} + g(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$
(5.19)

natomiast w ruchu dwuwymiarowym, kiedy  $x = re_r$ , mamy  $\dot{x} = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_{\varphi}$  a więc dla  $\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}$ otrzymamy energię kinetyczną w postaci

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{r^2M^2}{m^2r^4}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

Aby podać explicite rozwiązanie równań (5.13) posłużymy się jeszcze jedną całką prostą, jaką jest energia całkowita (5.19). Z (5.19) wynika, że przy ustalonych energii całkowitej E oraz momencie pędu M mamy

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - g(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right)$$

skąd

$$t_2 - t_1 = \pm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - g(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}}$$
(5.20)

Chcąc znależć postać  $\varphi(t)$  zauważmy, że ze związku  $\dot{\varphi}r^2 = M$  wynika, że  $\dot{\varphi}$  jest ustalonego znaku a więc  $\varphi$  jest monotoniczną funkcją  $t_1$  i ma funkcję odwrotną  $t(\varphi)$ . Wobec tego  $r(\varphi) = r(t(\varphi))$  z zatem

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$
 albo  $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}$ 

Podstawiając tu  $\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2}$  oraz  $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}$  otrzymamy

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{M}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r))}}$$

skąd

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \int_{r_1}^{r_2} \frac{M}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - g(r) - \frac{M^2}{2mr^2})}}$$

31

## 6. Ruch w polu potencjału grawitacyjnego w $\mathbb{R}^3$

#### 6.1. Całkowanie równań ruchu

Jak zauważyliśmy w Przykładzie 1.2 siła z jaką Ziemia przyciąga małe obiekty jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości od środka Ziemi. Występujący we wzorze iloczyn masy Ziemi i masy przyciąganego przez nią obiektu zastąpimy dodatnim współczynnikiem k. Sytuacja ruchu takiego obiektu w polu grawitacyjnym Ziemi odpowada ruchowi w centralnym polu w  $\mathbf{R}^3$  z potencjałem

$$U(r) = -\frac{k}{r}.$$

Zgodnie z rozważaniami z poprzedniego wykładu, podczas ruchu ciała o (stałym) momencie pędu M w centralnym polu w  $\mathbf{R}^3$  odległość r ciała od centrum zmienia się tak, jak w jednowymiarowym ruchu z potencjałem zredukowanym

$$W(r) = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Wykres tego potencjału ma postać:



Ze Stwierdzenia 5.5 wiemy, że stała energia całkowita wynosi  $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + W(r)$  a więc

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - W(r)) \tag{6.1}$$

Z (6.1) wynika, że dla jakiegokolwiek ruchu musi być  $(\dot{r}(t))^2 \ge 0$ , a zatem  $E \ge W(r)$ . Kształt wykresu W(r) pokazuje, że ostatni warunek przy  $E \ge 0$  zachodzi dla r stanowiących półoś  $[r_{min}, +\infty]$ , natomiast E < 0 zachodzi dla r z przedziałem  $[r_{min}, r_{max}]$ .

Wyprzedzając ilościowy opis, który nastąpi, powiemy, że dla  $E \ge 0$  mamy do czynienia z sytuacją, kiedy nadlatujący z kosmosu obiekt ma zbyt dużą energię żeby zostać "uwięziony" w roli satelity, jego tor ulega tylko zakrzywieniu i odlatuje z powrotem w kosmos.

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Przypadkowi E < 0 odpowiada okresowy ruch po orbicie wokół centrum. W każdej z dwóch powyższych sytuacji interesują nas jedynie wartości r, przy których zachodzi (6.1), zatem otrzymamy wtedy

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - W(r))} \tag{6.2}$$

przy czym znak " + " dotyczy części trajektorii, kiedy  $\dot{r} \ge 0$  a znak " - " ma zastosowanie, kiedy r maleje, czyli obiekt zbliża się do centrum. Jak pokazaliśmy (6.2) daje po rozwiązaniu zależność pomiędzy katem  $\varphi$  a promieniem r we współrzędnych biegunowych w postaci

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \sqrt{m} \int_{r_0}^r \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2(E + \frac{k}{r} - \frac{M^2}{2r})}}$$
(6.3)

Zwróćmy uwagę, że powyższy wzór odpowiada przyjętym dla r i dla  $\varphi$  jednostkomi. Zmieniając je np. tylko dla  $\varphi$  możemy zlikwidować czynnik liczbowy, pojawiający się po prawej stronie równości (6.3).

Oznaczając funkcję pierwotną funkcji podcałkowej w (6.3) przez F możemy też przyjąć  $\varphi_0 =$  $F(r_0)$ , co doprowadzi do wzoru  $\varphi = \pm F(r)$ . Aby znależć tę funkcję pierwotną przekształcimy funkcję podcałkowa do postaci:

$$C\frac{B(r)}{\sqrt{1-\left(A(r)\right)^2}}\tag{6.4}$$

gdzie  $B(r) = \frac{d}{dr}A(r)$  a C jest stałą ujemną. Ponieważ  $(\arccos s)' = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$  otrzymamy w rezultacie

$$\varphi = \pm C \arccos A(r) \tag{6.5}$$

Sprowadzimy funkcję podcałkowa do postaci jak w (6.4). Zauważmy, że

$$2E + \frac{2k}{r} - \frac{M^2}{r^2} = \left[ -\left(\frac{M}{r} - \frac{k}{M}\right)^2 + \left(2E + \frac{k^2}{M^2}\right) \right] = \left(2E + \frac{k^2}{M^2}\right) \left[ 1 - \left(\frac{\frac{M}{r} - \frac{k}{M}}{\sqrt{\left(2E + \frac{k^2}{M^2}\right)}}\right)^2 \right]$$

zatem przyjmując

$$A(r) = \frac{\frac{M}{r} - \frac{k}{M}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}}$$

otrzymamy

$$A'(r) = -\frac{M}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}} \cdot \frac{1}{r^2} = B(r)$$

i dla uzyskania (6.4) a więc i (6.5) wystarczy przyjąć  $C = -\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}$ .

W postępowaniu powyższym jest luka polegająca na braku informacji, że  $2E + \frac{k^2}{M^2} \ge 0$ , co uniemożliwia napisanie potrzebnych formuł. Jeżeli  $E \ge 0$  sprawa jest oczywista. Jeżeli E < 0, to z (6.1) wynika, że

$$2(E - W(r)) = 2E + \frac{2k}{r} - \frac{M^2}{r^2} \ge 0$$

a więc  $2Er^2 + 2kr - M^2 \ge 0$ . W przypadku E < 0 ostatnia nierówność może zajść jedynie, kiedy wyróżnik  $\triangle = 4k^2 + 8EM^2$  jest nieujemny, co jest równoważne z warunkiem, że  $2E + \frac{k^2}{M^2} \ge 0$ .

#### 6.2. Geometryczny opis trajektorii.

Przeskalowując $\varphi$ możemy uzyskać opis trajektorii ruchu w postaci związku

$$\pm \varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{k}{M}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}}$$
(6.6)

Przekształcając równocześnie licznik i mianownik argumentu funkcji arccos

$$\frac{M}{r} - \frac{k}{M} = \frac{k}{M} \left(\frac{M^2}{kr} - 1\right) \quad \text{oraz} \quad \sqrt{2E - \frac{k^2}{M^2}} = \left|\frac{k}{M}\right| \sqrt{\frac{2EM^2}{k^2} + 1}$$

i upraszczając, otrzymamy

$$\pm \varphi = \arccos \frac{\left(\frac{M^2}{kr} - 1\right)}{\sqrt{\frac{2EM^2}{k^2} + 1}} \tag{6.7}$$

Uproszczenie  $|\frac{k}{M}|$  z  $\frac{k}{M}$  w przypadku ujemnej wartości  $\frac{k}{M}$  zmienia znak argumentu arccos. Ponieważ  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ , uzyskujemy (6.7) po następnym przeskalowaniu i zmianie zwrotu na osi  $\varphi$ .

Wprowadźmy oznaczenia

$$\frac{M^2}{k} = p \qquad \qquad \text{oraz} \qquad \qquad \sqrt{\frac{2EM^2}{k^2} + 1} = e$$

otrzymamy

$$\pm \varphi = \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \tag{6.8}$$

skąd, z uwagi na parzystość funkcji cos

$$\cos\varphi = \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \tag{6.9}$$

lub inaczej

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{6.10}$$

Zauważmy ( porównaj wyjaśnienie kończące punkt 6.1), że  $\sqrt{\frac{2EM^2}{k^2}+1} \ge 0$ i dla E > 0otrzymamy e > 1 natomiast dla E < 0 jest e < 1.

**Stwierdzenie 6.1.** Zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne  $r, \varphi$  spełniają związek (6.10) może być również zdefiniowany następującym warunkiem geometrycznym.

Warunek.

Stosunek odległości punktu od zera do odległości punktu od prostej  $x = \frac{p}{e}$  (prostą tę nazywamy kierownicą) jest stały i wynosi e.

Dowód.Dla punktu a na płaszczyźnie jego odległość od zera wynosi r natomiast odległość od kierownicy wynonosi  $\frac{p}{r} - r \cos \varphi$ , zatem nasz warunek brzmi:

$$\frac{r}{\frac{p}{e} - r\cos\varphi} = e,$$

co po łatwych przekształceniach prowadzi do (6.10).

Specjalne położenie krzywej opisanej równaniem (6.10) w stosunku do kartezjańskiego układu współrzędnych, jest związane z dokonanym (implicite) obrotem układu współrzędnych, który nastąpił przy afinicznym przekształcaniu kąta  $\varphi$  wykonanym przy całkowaniu funkcji (6.6).

Dalsza część naszych rozważań dotyczy geometrycznej definicji stożkowych i jest z konieczności nieco szkicowa. Jej celem jest pokazanie w przypadku elips równoważności następującej dalej definicji geometrycznej (6.7), opisu (6.10) i opisu za pomoca równania osiowego dla elips. Rozważmy stożek S w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  z wierzchołkiem W i osia s (zob. rys 6.2 (A).



Przekrójmy stożek S płaszczyzną  $\mathcal{L}$ . Niech  $\theta$  będzie połową kąta rozwarcia stożka a  $\varphi$  kątem, jaki tworzy płaszczyzna  $\mathcal{L}$  z osią stożka s.

Definicja 6.1. Krzywą przecięcia stożka z płaszczyzną nazwiemy

- (a) elipsą, jeżeli  $\theta < \varphi$
- (b) parabolą, jeżeli  $\theta = \varphi$
- (c) hiperbolą, jeżeli  $\theta > \varphi$ .

**Stwierdzenie 6.2.** Niech  $A = \mathcal{L} \cap S$  będzie elipsą w sensie Definicji 6.1, wyznaczoną przez plaszczyznę  $\mathcal{L}$ . Istnieją na plaszczyźnie  $\mathcal{L}$  punkt  $F_1$  i prosta k takie, że dla dowolnego  $P \in A$ zachodzi

$$\frac{|P - F_1|}{\rho(P, k)} = \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} < 1$$

gdzie  $\theta$  i  $\varphi$  są kątami, jak w Definicji 6.1 a  $\rho$  (P, k) jest odległością punktu P od prostej k.

Dowód. Określimy najpierw punkt  $F_1$  i prostą k. Niech  $\mathcal{K}_1$  i  $\mathcal{K}_2$  będą kulami stycznymi do stożka i do płaszczyzny  $\mathcal{L}$  (zob. rys. 6.2 (B)). Jako punkt  $F_1$  przyjmiemy punkt  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}$  a jako prostą k przecięcie  $\mathcal{L}$  z płaszczyzną  $\mathcal{W}$  zawierającą  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{S}$  i prostopadłą do osi stożka s. Poprowadźmy płaszczyznę  $\mathcal{R}$  (płaszczyzna rysunku 6.2(C)) przez oś stożka S i dowolny ustalony punkt P, leżący na elipsie  $\mathcal{L} \cap S$ . Niech q będzie tworzącą stożka, przechodzącą przez P i niech  $M = q \cap \mathcal{W}$ . Niech wreszcie D będzie punktem na kierownicy k najbliższym P. Wtedy rzuty prostopadłe odcinków PD i PM na oś stożka są takie same. Istotnie, D i M leżą na płaszczyźnie prostopadłej do osi. Poza tym PD tworzy z osią s kat  $\varphi$  a odcinek PM kat  $\theta$  a długości odcinków  $PF_1$  i PM są równe. Zatem

$$\frac{|PF_1|}{|PD|} = \frac{|PM|}{|PD|} = \frac{\frac{a}{\cos\varphi}}{\frac{a}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}.$$

**Stwierdzenie 6.3.** Dla danej prostej k i danego punktu F na plaszczyźnie zbiór punktów zde-finiowany warunkiem  $\{P : \frac{|P-F|}{\rho(P,k)} = e < 1\}$  jest izometryczny z elipsą w sensie Definicji 6.1.

Dowód. (Szkic).

Prowadząc przez F prostą prostopadłą do k możemy znaleźć na niej punkt Q tak, że  $\frac{|Q-F|}{|Q-D|} =$  $e\,<\,1$  (Djest przecięcie<br/>mkz prostą prostopadłą). Następnie rozpatrując przecięcie stożka płaszczyzną zawierającą oś stożka oraz punkty styczności kul $\mathcal{K}_1$  i  $\mathcal{K}_2$  z  $\mathcal{L}$  oraz rozpatrując rodzinę płaszczyzn równoległych, dla których  $\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} = e$ , znajdujemy elipsę, o której należy pokazać, że jest izometryczna z naszą elipsą. 

#### 6.3. Prawa Keplera

Około 1609 roku J. Kepler sformułował trzy prawa dotyczące ruchu planet wokół Słońca. Podamy ich współczesne sformułowanie.

I. Planety krążą wokół Słońca po elipsach, w których ognisku znajduje się Słońce.

II. W ruchu każdej planety prędkość polowa w płaszczyźnie ruchu pozostaje stała.

III. Dla dowolnych dwóch planet stosunek drugiej potęgi ich okresów obiegu jest równy stosunkowi trzecich potęg długości ich długich półosi.

Prawo pierwsze pokazaliśmy w poprzednim punkcie.

Prawo drugie jest prawdziwe dla dowolnego ruchu w polu centralnym.

Pokażemy, że zachodzi trzecie prawo Keplera.

Dowód trzeciego prawa Keplera.

Nietrudne, lecz kłopotliwe rachunki pozwalają przekonać się, że krzywa opisana w układzie biegunowym równaniem  $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$ w układzie kartezjańskim ze środkiem w punkcie  $\left(\frac{-pe}{1-e^2},0\right)$ jest przedstawiona równaniem

 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , gdzie  $a = \frac{p}{1-e^2}$ ,  $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$  są długościami wielkiej i małej półosi. Niech T będzie okresem obiegu po takiej eliptycznej orbicie. Ze stałości prędkości polowej S(t) mamy  $T \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} T \cdot |M| = \pi ab$  i podstawiając tu wartości na *a* i *b* otrzymamy:

$$T \cdot |M| = 2\pi \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiając tu  $p = \frac{|M|^2}{k}$  i  $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2}}$  otrzymamy

$$T|M| = 2\pi \frac{|M|^4}{k^2} \cdot \left(\frac{k^2}{2|E||M|^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}|M|\frac{k}{(2|E|)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|M|}{\sqrt{k}} \left(\frac{k}{2E}\right)^{\frac{3}{2}}.$$
 (6.11)

Zauważmy teraz, że

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{|M|^2}{k} \cdot \frac{k^2}{2|E||M|^2} = \frac{k}{2|E|}$$

wobec tego otrzymujemy

$$T^2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot a^3$$
# 7. Rachunek wariacyjny, równania Eulera.

#### 7.1. Wprowadzenie

Przedmiotem rachunku wariacyjnego są warunki ekstremalności funkcji (tradycyjnie nazywanych funkcjonałami), których dziedziną są rodziny obiektów geometrycznych (np. krzywe, powierzchnie) a wartości należą do  $\mathbf{R}^k$ . Styk prezentowanej w tym wykładzie tematyki z rachunkiem wariacyjnym jest ograniczony do specjalnej sytuacji, którą charakteryzują poniższe założenia:

(A) Dziedziną badanego funkcjonału F jest rodzina W krzywych o wartościach w  $\mathbb{R}^n$ , określonych na wspólnym przedziale  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  i mających wspólny początek i wspólny koniec. Wszystkie krzywe z W są ustalonej klasy gładkości.

 $(\mathbf{B})$ Rozważane funkcjonały mają postać

$$F(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$
(7.1)

gdzie  $\gamma \in W$  a  $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^k$  jest klasy  $\mathbf{C}^2$ .

(C) Rozważanym problemem jest charakteryzacja punktów stacjonarnych funkcjonał<br/>uF,tj. takich  $\gamma_0 \in W,$ że

$$d_{\gamma_0}F = 0 \tag{7.2}$$

(zob. Uwaga 7.1).

Użycie określenia funkcjonał dla funkcji F miało zapewne na celu ułatwienie wysłowień, bo argumentami F są także funkcje. Konwencję tę podjęła też powstała później analiza funkcjonalna.

Uwaga 7.1. Warunek (7.2) wymaga komentarza: dziedzina W funkcjonału (7.1) jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni liniowej X, składającej się z wszystkich krzywych tej samej co dla W klasy gładkości, określonych na  $[t_1, t_2]$ . Istotnie, każdą krzywą  $\gamma \in W$  można jednoznacznie przedstawić w formie  $\gamma = \gamma_0 + \delta$ , gdzie  $\gamma_0$  jest ustaloną krzywą z W a  $\delta \in Y$ , gdzie  $Y = \{\gamma \in X : \gamma(t_1) = \gamma(t_2) = 0\}$  jest podprzestrzenią liniową X. Elementy Y będziemy nazywali wariacjami. Wracając do (7.2) ustalając  $\gamma_0$  możemy krzywe W zapisać w postaci  $\gamma = \gamma_0 + \delta$ . Zatem  $F(\gamma) = F(\gamma_0 + \delta)$ . Wprowadzając  $\Phi(\delta) = F(\gamma_0 + \delta) - F(\gamma_0)$  gdzie teraz  $\Phi$ jest funkcjonałem na Y, redukujemy pytanie o stacjonarność  $\gamma_0$  dla F do pytania, czy  $d_0 \Phi = 0$ .

Część rachunku wariacyjnego dotycząca założeń A, B, C przypomina więc fragment klasycznej analizy, dotyczący warunku koniecznego istnienia ekstremum. Sytuacja w rachunku wariacyjnym różni się tym, że dziedzina badanej funkcji jest nieskończenie wymiarowa. Za to same funkcje - "funkcjonały" - są bardzo specjalnej postaci. Schemat uwarunkowany założeniami A, B, C jest krokiem wstępnym, poza który w zasadzie nie wyjdziemy. Jedynym wyjątkiem jest uogólnienie warunku A do takiego, w którym W jest zbiorem krzywych przyjmujących swoje wartości w podrozmaitościach  $M \subset \mathbf{R}^3$ . Ta sytuacja pojawia się przy badaniu układów z więzami.

# 7.2. Przykłady zagadnień wariacyjnych.

Niech W będzie rodziną krzywych klasy  $C^1$  określonych na [0,1] i przyjmujących wartości w  $\mathbf{R}^2$ . Załóżmy, że wszystkie nasze krzywe zaczynają się w punkcie (0, 1) a kończą w (1,0). Rozpatrzmy na  $\mathbf{R}^2$  stałe pole wektorowe

$$F(x,y) = (0,-1). \tag{7.3}$$

**Problem 7.1.** Wśród krzywych rodziny W wskazać taką, żeby ruch po niej bez tarcia i pod wpływem pola F, zaczynający się od prędkości zero trwał możliwie jak najkrócej. Problem ten jest nazywany zagadnieniem krzywej najszybszego spadku (brachistochrony) z greckiego brachistos- najkrótszy, chronos - czas.

Uwaga 7.2. Ponieważ chodzi nam raczej o wprowadzenie do metod rachunku wariacyjnego niż o rozstrzygnięcie ogólnego pytania, ograniczymy się do krzywych, których zbiorem wartości są punkty o postaci (x, f(x)) dla  $x \in [0, 1]$  gdzie funkcja f jest klasy  $C^1$ , malejąca oraz f(0) = 1 i f(1) = 0. Zatem

$$\gamma(t) = f(x(t)). \tag{7.4}$$

Założymy ponadto, że x(0) = 0,  $\dot{x}(0) = 0$  i  $\dot{x}(t) > 0$  dla t > 0. Dowód, że przy rozwiązywaniu Problemu 7.1 można się ograniczyć do krzywych o postaci (7.4) i rosnących funkcji x(t), pozostawimy czytelnikowi.

#### Dyskusja wstępna.

Zauważmy, że siła (7.3) spełnia warunek  $F(x,y) = -grad \ U(x,y)$  przy

U(x,y) = y. Zaczniemy od wyprowadzenia wzoru na czas potrzebny do przebycia ustalonej krzywej. Bez założenia, że f jest malejąca, formuła ta mogłaby dać nieskończony czas na przejście, co skomplikowałoby formalnie nasze wywody. Zgodnie z Ćwiczeniem 3.1, w ruchu bez tarcia po zadanej krzywej pod wpływem pola potencjalnego, jest zachowywana energia całkowita E = T + U, gdzie T jest energią kinetyczną o postaci

$$T(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2(t)$$

(przyjmujemy, że masa poruszającego się punktu wynosi 1). Ponieważ dla krzywej (7.4) zachodzi

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\dot{x}(t), \ \frac{df}{dx} \ \left(x(t)\right) \cdot \dot{x}(t)\right)$$
(7.5)

otrzymamy:

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^{2}(t) \left[ 1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^{2}(x(t)) \right] + f(x(t))$$
(7.6)

Z uwagi na to, że  $\dot{x}(0) = 0$ , musi być E(t) = E(0) = f(1) = 1 zatem

$$\dot{x}^{2}(t) \left[ 1 + \left(\frac{dt}{dx}\right)^{2} (x(t)) \right] = 2(1 - f(x(t)))$$

a ponieważ  $\dot{x}(t) \ge 0$  otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \Big(\frac{2(1-f(x))}{1+(\frac{df}{dx})^2(x(t))}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ chcemy znależć czas przebycia krzywej, napiszmy dla  $x \neq 0$ 

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{1 + (f'(x))^2}{2(1 - f(x))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

skąd  $F(\gamma) = t(1)$  otrzymamy w formie

$$F(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{(1 - f(x))}} dx$$
(7.7)

Tak więc otrzymaliśmy funkcjonał (7.1) z funkcją  $L: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  o postaci

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+\dot{\gamma}}{1-\gamma}}$$

gdzie rolę zmiennej t pełni zmienna x przebiegająca przedział [0,1]. Drugie zadanie "zagadnienie krzywej łańcuchowej" ma charakter statyczny. Przyjmijmy, że w  $\mathbb{R}^2$  jest dane pole wektorowe we F(x, y) = (0, -1) i że w każdym interesującym nas punkcie siła działająca na masę m wynosi  $m \cdot F(x, y)$ . Wtedy energia potencjalna punktu o masie m jest U(x, y) = my. W polu tym zawieszamy idealnie giętką linę (łańcuch) o stałej liniowej gęstości masy 1 i długości  $l \ge 2$ . Punktami zawieszenia liny będą (-1, 0) i (1, 0).

#### Założenie

Przyjmiemy jako założenie, że zwisająca lina przyjmuje kształt, przy którym suma (całka) energii potencjalnych wszystkich jej punktów zwana dalej "potencjałem sumarycznym" jest możliwie najmniejsza.

Problem 7.2. Opisać krzywą zwisu liny.

#### Dyskusja wstępna.

Podobnie, jak poprzednio (por. Uwaga 7.2), przyjmiemy, że krzywa zwisu liny opisana jest jako wykres funkcji g należacej do zbioru W funkcji różniczkowalnych o ciągłej pochodnej na przedziałe [-1,1] i przyjmujących wartość 0 na końcach przedziału.

Z przedstawionych powyżej założeń wynika, że odcinek ds liny znajdujący się na wysokości g(x) ma energię potencjalną równą  $g(x) \cdot ds$ , gdzie

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

Zatem, "potencjał sumaryczny" ma postać:

$$V(g) = \int_{-1}^{1} g(x) \cdot \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$
(7.8)

Tego typu funkcja V nie byłaby oczywiście ograniczona z dołu na W gdyby nie dodatkowy warunek, że długość liny wynosi l. Warunek ten ma postać  $\Phi(g) = l$ , gdzie

$$\Phi(g) = \int_{1}^{1} \sqrt{1 + (g'(x))^{2}} dx.$$
(7.9)

Naszym zadaniem jest więc znalezienie punktów krytycznych funkcjonału V na poziomicy

$$N = \{g \in W : \Phi(g) = l\}$$

Podobnie, jak przy badaniu ekstremów warunkowych w analizie, rozwiążemy ten problem metodą mnożników Lagrange'a.

Polega ona na rozpatrzeniu rodziny funkcjonałów  $F_{\lambda}$ , o postaci

$$F_{\lambda}(g) = V(g) + \lambda \Phi(g)$$

gdzie parametr $\lambda \in \mathbf{R}$ Dla każdego z tych funkcjonałów szukamy punktów krytycznych leżących na N. Wyjaśnienie tego jest następujące:

Jeżeli  $d_{g_0}F_{\lambda} = 0$  dla  $g_0 \in N$ , to z uwagi na fakt, że różniczka  $d_{g_0}\Phi$ , ograniczona do przestrzeni stycznej w  $g_0$  do N jest zerowa, warunek  $d_{g_0}F_{\lambda} = 0$  pociąga, że  $d_{g_0}V = 0$  na tejże przestrzeni stycznej. Jednocześnie właściwy dobór  $\lambda$  umożliwia uzyskanie warunku  $d_{g_0}F_{\lambda} = 0$  także na przestrzeni prostopadłej do N w punkcie  $g_0$ .

Podsumowując: pierwszym krokiem do rozwiązania Problemu 7.2 jest znalezienie należących do N punktów krytycznych funkcjonałów

$$F_{\lambda}(g) = \int_{-1}^{1} \left( g(x) + \lambda \right) \sqrt{1 + \left( g'(x) \right)^2} dx$$
(7.10)

Widzimy, więc że funkcjonały  $F_{\lambda}$  mają postać (7.1), gdzie  $L_{\lambda} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  ma postać

$$L_{\lambda}(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma + \lambda)\sqrt{1 + \dot{\gamma}^2}.$$
(7.11)

## 7.3. Punkty krytyczne i równania Eulera

Będziemy poszukiwać warunków, przy których krzywa $\gamma_0$ jest punktem krytycznym funkcjonału

$$F(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma, \dot{\gamma}) dt \tag{7.12}$$

Pisząc  $\gamma = \gamma_0 + \delta$ , redukujemy nasz problem do pytania czy funkcjonał

$$\phi(\delta) = F(\gamma_0 + \delta) - F(\gamma_0) = \int_t^{t_2} \left[ L(\gamma_0 + \delta, \gamma_0 + \dot{\delta}) - L(\gamma_0, \dot{\delta}_0) \right] dt$$
(7.13)

ma w punkcie $\delta_0=0\in Y$  punkt krytyczny. ( Y jest tutaj przestrzenią liniową wariacji - zob. Uwagę 7.1.)

Wyposażmy Y w w strukturę przestrzeni Banacha, wprowadzając  $C^1$  normę:

$$||\delta||_{C^1} = \sup_{t_1 \le t \le t_2} |\delta(t_1)|_2 + \sup_{t_1 \le t \le t_2} |\dot{\delta}(t)|_2, \tag{7.14}$$

gdzie  $|\cdot|_2$  oznacza normę euklidesową w  $\mathbf{R}^n$ . Zamierzamy zapisać  $\Phi(\delta)$  w postaci

$$\Phi(\delta) = d_0 \Phi(\delta) + R(\delta), \tag{7.15}$$

gdzie  $d_0 \Phi(\delta)$  jest ciągłą w normie (7.14) operacją liniową, natomiast R spełnia warunek:

$$\lim_{\|\delta\|_{C^1} \to 0} \frac{\|R(\delta)\|_{C^1}}{\|\delta\|_{C^1}} = 0$$
(7.16)

**Definicja 7.1.** Powiemy, że funkcjonał (7.12) jest różniczkowalny w  $\gamma_0(\text{lub}, \text{że } (7.13) \text{ jest różniczkowalny w } 0)$ , jeżeli przestawienie (7.15) z warunkiem (7.16) jest możliwe. Operacja liniowa  $d_0\Phi$  jest wtedy wyznaczona jednoznacznie i nazywa się różniczką  $\Phi \le 0$  (lub różniczką  $F \le \gamma_0$ ). Powiemy, że  $\gamma_0$  jest punktem krytycznym  $\Phi$  jeżeli  $d_0\Phi = 0$  (tj.  $d_0\Phi(\delta) = 0$  dla każdego  $\delta$ ).

**Twierdzenie 7.1.** Jeżeli F jest postaci (7.12), gdzie funkcja L jest klasy  $C^2$ , to dla każdego  $\gamma_0$  istnieje  $d_{\gamma_0}F$ . Na to, aby krzywa  $\gamma$  była punktem krytycznym F potrzeba i wystarcza, by spełniała ona układ równań :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = 0 \quad j = 1, 2, ..n.$$
(7.17)

Równania powyższe noszą nazwę równań Eulera.

*Dowód.* Ustalimy najpierw możliwą postać operacji  $d_0\phi$ , występującej w formule (7.15).

Oznaczmy zmienne, od których zależy L jako  $x = (x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n)$ . Wtedy zgodnie ze wzorem Taylora dla przyrostu  $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n, \Delta v_1, ..., \Delta v_n)$  zachodzi

$$L(x + \Delta x) - L(x) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i}(x) \cdot \Delta x_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} v_i \cdot \Delta v_i \right) + R_2(\Delta x)$$

gdzie

$$\frac{|R_2(\triangle x)|}{|\triangle x|_2} \longrightarrow 0 \tag{7.18}$$

gdy  $|\Delta x|_2$  dąży do zera, a  $|\cdot|_2$  jest normą euklidesową w  $\mathbf{R}^{2\mathbf{n}}$ .

Podstawiając  $x_i = \gamma_i(t), v_1 = \dot{\gamma}_i(t)$  oraz  $\Delta x_i = \delta_i(t), \Delta v_i = \dot{\delta}_i(t)$  przy ustalonym t i dla i = 1, 2.., n oraz wycałkowując po t otrzymamy, zgodnie z (7.13):

$$\Phi(\delta) = \int_{t_1}^{t_2} \Big( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \big( \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \big) \cdot \delta_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i} \big( \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \big) \dot{\delta}_i(t) \Big) dt + \int_{t_1}^{t_2} R_2\big( \delta(t), \dot{\delta}(t) \big) dt \quad (7.19)$$

Część pierwsza, po prawej stronie równości (7.19) zależy liniowo od  $\delta(t)$  i przyjmujemy ją jako  $d_0\Phi$ . Także odpowiednio przyjmujemy

$$R(\delta) = \int_{t_1}^{t_2} R_2(\delta(t), \dot{\delta}(t)) dt.$$
(7.20)

Mamy wtedy

$$|d_0\Phi(\delta)| \leqslant \sum_{i=1}^n \Big( \sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \frac{\partial L}{\partial x_i} \big( \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \big) + \sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \frac{\partial L}{\partial x_i} \big( \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \big) \cdot \Big) ||\delta||_{C_1} \leqslant M ||\delta||_{C_1}$$

gdzie M jest stałą zależną  $\Phi$ . Zatem  $d_0\Phi$  jest ciągłym funkcjonałem liniowym. Pokażemy, że reszta R spełnia warunek (7.16). Zauważmy najpierw, że dla każdego ustalonego t

 $|\delta_1(t),...,\delta_n(t),\dot{\delta}_1(t),...\dot{\delta}_n(t)|_2\leqslant \sqrt{2n} \quad ||\delta||_{C^1}.$ 

Więc na mocy (7.14), (7.18) i (7.20) otrzymamy:

$$\frac{|R(\delta)|}{||\delta||_C'} \leqslant \sqrt{2n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{|R_2(\delta(t), \delta(t))|}{|\delta_1(t), \dots, \delta_n(t), \dot{\delta}_1(t), \dots \dot{\delta}_n(t)|_2} dt \to 0,$$

przy  $||\delta||_{C_1} \longrightarrow 0.$ 

Przejdźmy do wyprowadzenia równań (7.17). Warunek  $d_0 \Phi = 0$  oznacza, że dla każdego  $\delta \in Y$  zachodzi:

$$0 = d_0 \Phi(\delta) = \int_{t_1}^{t_2} \Big( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \delta_i(t) + \frac{\partial L}{\partial v_i} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\delta}_i(t) \Big) dt$$

Całkując przez części drugie człony składników sumy oraz uwzględniając, że  $\delta_i(t_1) = \delta_i(t_2) = 0$  otrzymamy:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \delta_i(t) dt = 0.$$
(7.21)

Przyjmując jako  $\delta(t)$ kolejno krzywe o postaci $(\underbrace{0,\ldots}_{j-1},\delta_j(t),0..0),$ gdzie $\delta_j$ może być dowolną

funkcją różniczkowalną taką, że z  $\delta_j(t_1) = \delta_j(t_2) = 0$ , otrzymamy n niezależnych warunków

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_j} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_j} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \delta_j(t) dt = 0.$$
(7.22)

j = 1, 2, ..., n.

Nietrudne rozumowanie pokazuje, że j-ty warunek (7.22) jest równoważny j-temu równaniu Eulera. Odwrotnie: spełnienie równań Eulera daje równania (7.22) a te przez wysumowanie warunek (7.21), z którego wynika z kolei, że  $d_0\Phi = 0$ .

*Uwaga* 7.3. Chcąc uniknąć wprowadzania zmiennych  $x_1, ..., x_n$  oraz  $v_1, ..., v_n$  zapisuje się równania, utożsamiając  $x_i$  z  $\gamma_i$  oraz  $v_i$  z  $\dot{\gamma}_i$  w postaci (7.17).

#### 7.4. Przykłady równań Eulera.

Na zakończenie napiszemy równania Eulera dla zagadnienia brachistochrony i zagadnienia krzywej łańcuchowej.

Przykład 7.1. Równanie Eulera dla zagadnienia brachistochomy.

Mamy znaleźć funkcję f argumentu x , który pełni rolę zmiennej t w równianiach Eulera (zobacz sformułowanie Twierdzenia 7.1). Będziemy pisać f zamiast  $\gamma$  oraz  $\dot{f}$  zamiast  $\dot{\gamma}$ . Nasza funkcja Lagrange'a ma zatem postać:

$$L(f, \dot{f}) = \left(\frac{1+\dot{f}^2}{1-f}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wtedy

$$\frac{\partial L}{\partial f}(f,\dot{f}) = \frac{1}{2} \Big(\frac{1+\dot{f}^2}{1-f}\Big)^{-\frac{1}{2}} \Big(\frac{1+\dot{f}^2}{(1-f)^2}\Big)$$

oraz

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}(f,\dot{f}) = \left(\frac{1+\dot{f}^2}{1-f}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\dot{f}}{1-f}.$$

Równanie Eulera

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = 0$$

przyjmie więc postać

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}{1 - f}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}{(1 - f)^2} + \frac{d}{dx} \left[ \left(\frac{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}{1 - f}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{df}{1 - f} \right] = 0$$
(7.23)

Przykład 7.2. Równanie Eulera dla krzywej łańcuchowej.

Podobnie, jak poprzednio, rolę t<br/> w równaniach Eulera pełni zmienna x, natomiast zamiast <br/>  $x_1$  napiszemy $\gamma$ a zamiast <br/>  $v_1$  napiszemy  $\frac{dg}{dx} = \dot{g}$ . Funkcja Lagrange'<br/>a z mnożnikiem  $\lambda$ ma postać:

$$L_{\lambda}(g, \dot{g}) = (g + \lambda)\sqrt{1 + \dot{g}^2}.$$

Wtedy

$$\frac{\partial L_{\lambda}}{\partial g} = \sqrt{1 + \dot{g}^2} \qquad ; \qquad \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial \dot{g}} = \frac{\dot{g}(g + \lambda)}{\sqrt{1 + \dot{g}^2}}$$

Zatem równania Eulera mają postać :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 - \frac{d}{dx}\frac{\frac{dg}{dx}(g+\lambda)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0.$$
(7.24)

Uwaga 7.4. Zarówno równanie (7.23) jak (7.24) mają bardzo skomplikowaną postać i raczej nie ma szans rozwiązać Problemów 1 i 2 na tej drodze. Znacznie prostszą metodę podamy w następnym wykładzie.

# 8. Równania Eulera - Lagrange'a

#### 8.1. Całka pierwsza energii

Jak widzieliśmy w punkcie 7.4 poprzedniego wykładu, układy równań Eulera są na ogół zbyt skomplikowane, aby umożliwić dokładny opis poszukiwanych krzywych. Z pomocą przychodzi następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 8.1.** W przypadku, kiedy funkcja Lagrange'a L nie zależy explicite od czasu, funkcja o postaci

$$E(\gamma, \dot{\gamma}) = L(\gamma, \dot{\gamma}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}_j$$
(8.1)

jest stała na krzywych będących rozwiązaniami układu równań Eulera (7.17). Funkcję (8.1) będziemy nazywać całką energii.

*Dowód.* W każdym z równań (7.17) wykonajmy różniczkowanie  $\frac{d}{dt}$ . Ponieważ L zależy od t za pośrednictwem  $\gamma_k$  oraz  $\dot{\gamma}_k$  k = 1, 2, ..., n, otrzymamy

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j}(\gamma, \dot{\gamma}) - \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j} \right) (\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_k} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j} \right) ((\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}_k \right] = 0$$
(8.2)

j=1,2,..,n. Pomnóżmy j-te równanie 8.2 prze<br/>z $\dot{\gamma}_j$ i dodajmy wszystkie równania stronami. Otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \gamma_j} (\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}_j - \sum_{j,k=1}^{n} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j} \right) (\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k + \frac{\partial}{\partial \gamma \dot{\gamma}_k} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j} \right) (\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}_j \ddot{\gamma}_k \right] = 0$$
(8.3)

Oznaczmy

$$M(\gamma, \dot{\gamma}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \gamma_j} (\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}_j.$$

Wtedy, uzupełniając każdy ze składników pierwszej sumy w (8.3) o  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}_j$ , i odejmując to samo wyrażenie w drugiej części, możemy (8.3) zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_j}(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j}(\gamma, \dot{\gamma})\ddot{\gamma}_j - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial \gamma_k} M(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}_k} M(\gamma, \dot{\gamma})\ddot{\gamma}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_k}(\gamma, \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}_k\right] = 0$$

czyli

$$\frac{d}{dt} (L(\gamma, \dot{\gamma}) - M(\gamma, \dot{\gamma})) = 0$$

co należało wykazać.

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

#### 8.2. Zastosowanie całki energii

Zastosujemy Twierdzenie (8.1) do wyznaczania postaci krzywej najszybszego spadku oraz krzywej łańcuchowej.

#### 8.2.1. Krzywa najszybszego spadku

W poprzednim wykładzie, dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy, że początek krzywej najszybszego spadku znajduje się w (0,1) a koniec w (1,0). czytelnik bez trudu zmodyfikuje otrzymane rozumowanie na przypadek nieco ogólniejszy - początek w (0,a) a koniec w (b,0).W następującym dalej wywodzie traktujmy ten ogólniejszy przypadek. Zgodnie z (7.6) funkcja Lagrange'a w zagadnieniu brachistochrony ma postać:

$$L(y, \dot{y}) = \left(\frac{1 + \dot{y}^2}{2(a - y)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

zatem całka pierwsza 8.1 wynosi:

$$E(y,\dot{y}) = \left(\frac{1+\dot{y}^2}{2(a-y)}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\dot{y}^2}{2(a-y)} \cdot \left(\frac{1+\dot{y}^2}{2(a-y)}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
(8.4)

Gdzie  $[0, b] \ni x \to y(x) \in [0, a]$  jest szukaną funkcją <br/>a $\dot{y}$ oznacza $\frac{dy}{dx}$ . Przyjmując, ż<br/>e $E(y, \dot{y}) = c$ , i mnożąc obie strony otrzymanego w ten sposób równania prze<br/>z $\Big(\frac{1+\dot{y}^2}{2(a-y)}\Big)^{\frac{1}{2}}$ , otrzymamy:

$$\frac{1}{2(a-y)(1+\dot{y}^2)} = c^2.$$
(8.5)

Wskażemy rozwiązania tego równania. Są one związane ze znanymi z geometrii cykloidami.

Definicja 8.1. Cykloida to krzywa, jaką zakreśla punkt okręgu, toczącego się po prostej.

Przyjmiemy, że promień okręgu wynosi r a prędkość kątowa  $\alpha > 0$ . Jeżeli założymy, że nasz punkt w chwili zero znajduje się w początku układu współrzędnych oraz, że okrąg toczy się w kierunku dodatnim po  $o\vec{x}$ , to przyjmując czas jako parametr, otrzymamy opis parametryczny naszej cykloidy w postaci:

$$x = r(\alpha t - \sin \alpha t)$$
  

$$y = r(1 - \cos \alpha t)$$
(8.6)

Jej wykres wygląda następująco.



Rys. 8.2.1.

Rozważmy krzywą powstającą z cykloidy (8.6) przez odbicie jej wykresu w osi poziomej i przesunięcie go o r w górę. Powstaje krzywa, której wykres narysowany jest linią przerywaną na rys 8.2.1 i której opis parametryczny ma postać:

$$\begin{aligned} x &= r(\alpha t - \sin \alpha t) \\ y &= r \cos \alpha t \end{aligned} \tag{8.7}$$

Chcąc obliczyć $\displaystyle \frac{1}{(\alpha-y)\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ dla krzywej (8.7) zauważmy, że $\dot{x}(t)>0$ i wobec tego $\displaystyle \frac{dy}{dx}(t)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ 

zatem

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{-r\alpha\sin\alpha t}{r\alpha - r\alpha\cos t} = \frac{-\sin\alpha t}{1 - \cos\alpha t}.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{(a-y(t))(1+(\frac{dy}{dx})^2(t))} = \frac{1-\cos\alpha t}{2(a-r\cos\alpha t)}$$
(8.8)

Widzimy więc, że stałą wartość  $\frac{1}{2\alpha}$  tego wyrażenia uzyskamy jedynie wtedy, kiedy r = a. Przy tym, chcąc uzyskać y(b) = 0 możemy przyjąć  $\frac{\pi}{r} = b$  tj  $\alpha = \frac{\pi}{L}$ .

Przy tym, chcąc uzyskać y(b) = 0 możemy przyjąć  $\frac{\pi}{\alpha} = b$  tj  $\alpha = \frac{\pi}{b}$ . Podsumowując: krzywa najszybszego spadku od punktu (0, a) do b, 0) ma postać (8.7) przy r = a oraz  $\alpha = \frac{\pi}{b}$  i jest rozwiązaniem równania (8.5) ze stałą  $c = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ .

# 8.2.2. Krzywa łańcuchowa

Zgodnie z rozważaniami z Wykładu 7 dla  $\lambda \in \mathbf{R}$  szukamy punktów krytycznych funkcjonału

$$F_{\lambda}(g) = \int_{-1}^{1} \left( g(x) + \lambda \right) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}(x) \ dx$$

przy warunku

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(x)} = l.$$
(8.9)

Mamy więc funkcję Lagrange'a

$$L_{\lambda}(g,\dot{g}) = (g+\lambda)\sqrt{1+\dot{g}^2}$$

i zgodnie z Twierdzeniem 8.1 otrzymujemy warunek

$$E_{\lambda}(g,\dot{g}) = \left((g+\lambda)\left(1+\dot{g}^{2}\right)^{1/2} - (g+\lambda) \dot{g}^{2}\left(1+\dot{g}^{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = c$$

skąd

$$\frac{\left(g+\lambda\right)^2}{1+\left(\frac{dg}{dx}\right)^2} = c^2 \tag{8.10}$$

Okazuje się, że rozwiązań tego równania można poszukiwać wśród funkcji o postaci  $g_{\mu\alpha}(x) = \mu \cosh \alpha x - \lambda$ . Istotnie, wtedy  $(g_{\mu\lambda} + \lambda)^2 = \mu^2 \cosh^2 \alpha x$  natomiast

$$1 + \left(\frac{dg_{\mu\lambda}}{dx}\right)^2 = \cosh^2 \alpha x - \sinh^2 \alpha x + \mu^2 \alpha^2 \sinh^2 \alpha x.$$

Dobierając  $\mu$  oraz  $\alpha$  tak, aby  $\mu \alpha = 1$  otrzymamy (8.10) dla  $c = \mu^2$ . Istotnie:

$$\frac{\left(g_{\mu\alpha}(x)+\lambda\right)^2}{\left(1+\frac{dg_{\mu\alpha}(x)}{dx}\right)^2} = \frac{\mu^2 \cosh^2 \alpha x}{\cosh^2 \alpha x} = \mu^2.$$

Musimy jeszcze zapewnić sobie spełnienie warunku (8.9), który przyjmuje postać

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2 \alpha x} \, dx = l$$

czyli

$$\frac{2\sinh\alpha}{\alpha} = l.$$

Podsumowując.

Krzywa zwisu łańcucha o długości l zawieszonego w punktach (-1, 0) oraz (1, 0) ma postać:

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha x - \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha,$$

gdzie  $\alpha$  jest rozwiązaniem równania  $2\sinh \alpha - l\alpha = 0$ .

#### 8.3. Równania Eulera - Lagrange'a

Niech  $\mathcal{M}$  będzie układem n- punktów materialnych o przestrzeni konfiguracyjnej  $\mathcal{K}$ , potencjale  $\mathbf{U}: \mathcal{K} \to \mathbf{R}$  i przestrzeni fazowej  $\mathcal{F}$ . Niech  $\gamma : \mathbf{R} \to \mathcal{K}$  będzie krzywą ruchu  $\mathcal{M}$  taką, że  $\gamma(t_1) = x_1$  i  $\gamma(t_2) = x_2$ . Rozważmy rodzinę krzywych

$$W = \{ \alpha : [t_1, t_2] \to \mathcal{K} : \alpha(t_1) = x_1, \alpha(t_2) = x_2 \}$$

oraz funkcjonał  ${\cal F}$ na Wo postaci

$$F(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) dt$$
(8.11)

gdzie  $L(g_1,...,g_n,v_1,...,v_n)$  jest funkcją gładką na przestrzeni  $\mathcal{F}$ . Lagrange zauważył, że jeżeli funkcja L ma postać

$$L(q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{{v_i}^2}{2} - U(q_1, \dots, q_n),$$
(8.12)

to zagadnienie wariacyjne (8.11) ma dokładnie jedną ekstremalę, będącą krzywą ruchu  $\mathcal{M}$ .

Funkcję (8.12) nazywa się "funkcją Lagrange'a" układu  $\mathcal{M}$ , funkcjonał (8.11) z funkcją Lagrange'a (8.12) - działaniem. Spostrzeżenie, że przyroda wybiera ekstremalę F jako krzywą realizującą ruch - nazywa się zasadą najmniejszego działania.

Zweryfikuj<br/>my rachunkiem spostrzeżenie Lagrange'a. Niech Lma postać 8.12. W<br/>tedy lewe strony równań Eulera

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{8.13}$$

mają formę:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2} \right] = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} m_i v_i$$

a zatem równania Eulera przyjmą postać równań Newtona

$$\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{8.14}$$

Uwaga 8.1. W sformułowaniu zagadnienia wariacyjnego (8.11) jako jego istotna część występuje wybór punktów  $x_1$  i  $x_2$ . Na ogół jednak nie mamy pewności, że przez z góry wybrane punkty przejdzie choćby jedna krzywa ruchu naszego układu. Dlatego zagadnienie wariacyjne jest przez nas używane jedynie do wygenerowania innego opisu ekstremali za pomocą równań Eulera-Lagrange'a, który to opis nie zależy od wyboru  $x_1, x_2$  Uwaga 8.2. Pozornie błahe spostrzeżenie, że równanie Newtona można otrzymać jako równanie związane z zasadą wariacyjną 8.11 przy odpowiednio dobranej funkcji L ma liczne i ważne konsekwencje. Oto kilka z nich.

- 1. Równania Newtona opierają się na oczywistej i dlatego niezauważalnej zasadzie, że iloraz różnicowy funkcji wektorowej jest wektorem, którego współrzędne są ilorazami różnicowymi odpowiednich współrzędnych rozważanych funkcji. Zasada ta załamuje się przy przejściu do współrzędnych krzywoliniowych. Przyjęcie jako punktu odniesienia zasady wariacyjnej pozwala otrzymać szukany ruch ekstremalę tej zasady posługując się dowolnymi współrzędnymi.
- 2. Idąc dalej tym tropem możemy *zdefiniować* krzywe ruchu jako rozwiązania układu (8.13) z odpowiednio dobraną funkcją Lagrange'a w sytuacji, kiedy bezpośrednie zastosowanie drugiej zasady mechaniki Newtona jest trudne lub niemożliwe.
- 3. Przykładem sytuacji z (2) są układy z więzami, których omówienie przeniesiemy do następnego punktu (8.4) tego wykładu.
- 4. Równania Eulera Lagrange'a, dzięki swej formie, wnoszą do dyskusji o opisywanym przez nas ruchu nową informację. Jeżeli rozważamy układ n cząstek, gdzie położenie i-tej cząstki opisuje wektor  $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3})$  oraz j-ta współrzędna  $q_{ij}$  wektora  $q_i$  nie występuje explicite w funkcji Lagrange'a (czyli potencjał U od niej nie zależy), to odpowiednie równanie 8.13 przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} = 0 \tag{8.15}$$

Oznacza to, że wielkość  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}}$ , zwana i, j- tym pędem uogólnionym i oznaczana  $P_{ij}$ , jest całką pierwsza ruchu.

5. Zauważmy, że dla funkcji Lagrange'a o postaci

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) = T(\dot{\gamma}) - U(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\dot{\gamma}_i^2}{2} - U(\gamma)$$
(8.16)

funkcja (8.1) przyjmuje postać

$$E(\gamma, \dot{\gamma}) = L(\gamma, \dot{\gamma}) - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_j} \cdot \dot{\gamma}_j = T(\dot{\gamma}) - U(\dot{\gamma}) - 2T(\dot{\gamma}) = -\left(T(\dot{\gamma}) + U(\gamma)\right)$$

tj całka energii (8.1) jest funkcją przeciwną do energii całkowitej. Uwaga ta daje jeszcze inny dowód prawa zachowania energii całkowitej (Twierdzenie 3.1).

#### 8.4. Układy z więzami.

Rozważmy podrozmaitośc M zanurzoną w  $\mathbb{R}^n$ . Wyobraźmy sobie, że traktowany przez nas układ mechaniczny jest realizowany przez punkt  $q \in \mathbb{R}^n$  a okoliczności zewnętrzne wymagają, aby w czasie ruchu pozostawał on na rozmaitości M. Te okoliczności zewnętrzne nazywają sie więzami holonomicznymi.

**Przykład 8.1.** 1. Kulka pozostająca wewnątrz pucharu o danym opisie analitycznym w polu ziemskiej grawitacji.

- 2. Para punktów o danych masach związana sztywno nieważkim prętem.
- 3. Ciało sztywne, czyli układ skończonej liczby punktów, których wzajemne odległości pozostają stałe.

**Definicja 8.2.** Niech M będzie m wymiarową podrozmaitością w  $\mathbf{R}^{3n}$  przestrzeni konfiguracyjnej punktów  $r_1, ..., r_n$  o masach  $m_1, ..., m_n$ . Oznaczmy przez  $q = (q_1, ..., q_m)$  dowolne lokalne współrzędne na rozmaitości M i niech  $U(r_1, ..., r_n)$  będzie potencjałem określonym na  $\mathbf{R}^{3n}$ . Ponieważ każdy punkt na rozmaitości M wyznacza swoje trójki współrzędnych  $(r_1, ..., r_n)$  w  $\mathbf{R}^{3n}$ , to ewolucję układu z więzami można opisać za pomocą ewolucji współrzędnych  $q_1(t), ..., q_m(t)$ . Ewolucja tych współrzędnych opisana jest układem Eulera -Lagrange'a.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{8.17}$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2(q, \dot{q}) - U(r(q))$$
(8.18)

a r(q) jest opisem parametrycznym, wyznaczonym przez współrzędne q.

Uwaga 8.3. Definicja 8.2 zawiera implicite fakt, że otrzymane rozwiązanie nie zależy od od wyboru lokalnej parametryzacji (lokalnych współrzędnych) na M. Istotnie, funkcję (8.18) w obszarze parametrów dla ustalonej parametryzacji otrzymamy, podstawiając  $r_i = r_i(q_1, ..., q_m)$  oraz

$$\dot{r}_i(q_1,...q_m,\dot{q}_1,...\dot{q}_m) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} (q_1,...q_m) \cdot \dot{q}_j$$

w funkcji Lagrange'a

$$\widetilde{L}(r_1, ...r_n, \dot{r}_1, ...\dot{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i - U(r_1, ...r_n)$$

dla ruchu pod wpływem potencjału  $U \le \mathbf{R}^{3n}$ . Mając  $L(q, \dot{q})$  jak s (8.18) i wprowadzając inne współrzędne q i wyliczając podobne  $L(q', \dot{q'})$  uzyskujemy różne przestawienia, zależne od wyboru współrzędnych dla tej samej funkcji Lagrange'a. Niezależność rozwiązań układu Eulera - Lagrange'a od wybranej parametryzacji jest konsekwencją Uwagi 8.2 (a).

# 9. Metoda Hamiltona w optyce geometrycznej

W roku 1828 William Rowan Hamilton opublikował fundamentalną pracę nadającą optyce geometrycznej nowe nieoczekiwane sformułowanie związane z geometrią symplektyczną. Poprzednio bieg promieni świetlnych opisywany był za pomocą równań Eulera, wynikających z wariacyjnej zasady minimalizującej "długość optyczną" przebywanej drogi. Dopiero 20 lat później zauważył Hamilton, że to samo postępowanie, wykorzystujące tym razem wariacyjną zasadę najmniejszego działania, umożliwia także w mechanice uzyskanie nowego, znacznie bardziej geometrycznego opisu, niż ten, za pomocą równań Eulera - Legendre'a. Postępując za Hamiltonem, omówimy kolejno transformację Legendre'a - kluczowe narzędzie w metodzie Hamiltona. Następnie pokażemy, jak uzyskuje się za jej pomocą nowy opis w optyce geometrycznej. Na koniec wrócimy do mechaniki.

#### 9.1. Transformacja Legendre'a

W całym tym paragrafie dla przestrzeni liniowej X przez X\* będziemy oznaczać przestrzeń form liniowych na X. Zaczniemy od sytuacji jednowymiarowej. Niech  $f : [a, b] \to \mathbf{R}$  będzie dwukrotnie różniczkowalna i niech f'' > 0 na [a, b]. Rozważmy przekształcenie

$$\alpha: [a,b] \ni x \to f'(x) = p \in \mathbf{R}^* \simeq \mathbf{R}.$$

Ponieważ f' jest ciągła i rosnąca, obrazem [a, b] na mocy własności Darboux jest przedział [f'(a), f'(b)] oraz na [f'(a), f'(b)] jest określone przekształcenie  $\beta$  odwrotne do  $\alpha$ .

**Stwierdzenie 9.1.** Istnieje  $g : [f'(a), f'(b)] \to \mathbf{R}$  taka, że  $\beta(p) = g'(p)$  dla  $p \ni [f'(a), f'(b)]$ . Funkcję g nazwiemy transformatą Legendre'a funkcji f i napiszemy  $g = \hat{f}$ .

**Stwierdzenie 9.2.** Ponieważ funkcja f i g są obecne w naszych rozważaniach jedynie za pośrednictwem swoich pochodnych, obie są wyznaczone z dokładnością do stałej. Wygodnie będzie więc przyjąć umowę, że f(0) = g(0) = 0.

Dowód. Dla  $(x, p) \ni [a, b] \times [f'(a), f'(b)]$  rozważmy funkcję

$$H(x,p) = xp - f(x) \tag{9.1}$$

Ustalając  $p_0$  oznaczmy  $h_{p_0}(x) = H(p_0, x) = xp_0 - f(x)$ . Wtedy

 $h'_{p_0}(x) = p_0 - f'(x)$ a ponieważ  $h'_{p_0}(b) < 0 < h'_{p_0}(a)$ oraz  $h'_{p_0}$  jest malejąca i ciągła, istnieje dokładnie jeden punkt  $x_{p_0}$  taki, że  $h'p_0 = 0$  tj. że  $f'(x_{p_0}) = p_0$  Przekształcenie

$$[f'(a), f'(b)] \in p \to x_p \ni [a, b]$$

jest oczywiście odwrotne do

$$[a,b] \in x \to f'(x) \in [f'(a), f'(b)],$$

i jako odwrotne do różniczkowalnego o niezerowej pochodnej, samo jest różniczkowalne.Podamy jego opis analityczny.

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Określmy

$$g(p) = H(x_p, p) = px_p - f(x_p)$$
(9.2)

0.77

wtedy

$$g: [f'(a), f'(b)] \to \mathbf{R}$$

jest różniczkowalne oraz

$$g'(p) = \frac{d}{dp}(px_p - f(x_p)) = x_p + px'_p - f'(x_p) \cdot x'_p = x_p$$

bo  $f'(x_p) = p$ .

Wniosek 9.1. Transformacja Legendre'a jest inwolucją t.j.  $\hat{f} = f$ .

Wyznaczyć transformatę Legendre'a następujących funkcji:

(a) 
$$f(x) = ax^2$$
  
(b)  $f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}$ 

Rozwiązanie.

(a) 
$$H(x,p) = xp - ax^2$$
 zatem  $\frac{\partial H}{\partial x} = p - 2ax$ 

i wobec tego

$$\widehat{f}(p) = H(x_p, p) = \frac{p}{2a} \cdot p - a \frac{p}{4a^2} = \frac{p^2}{4a}$$
(b) 
$$H(x, p) = xp - \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \quad \text{wiec} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = p - x^{\alpha - 1} \quad \text{zatem} \quad x_p = p^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

wobec tego

$$\widehat{f}(p) = H(x_p, p) = p^{\frac{1}{\alpha - 1}} \cdot p - \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}}{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot p^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \frac{p^{\beta}}{\beta}$$

gdzie  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$ 

Stwierdzenie 9.3. (Nierówność Younga ). Niech  $g = \hat{f}$  wtedy

$$px \leqslant f(x) + g(p) \tag{9.3}$$

Dowód. Dla każdego p punkt  $x_p$  jest punktem maksimum funkcji  $h_p(x) = xp - f(x)$ , t.j.

$$g(p) = px_p - f(x_p) \ge px - f(x),$$

skąd wynika (9.3).

Sytuacja n-wymiarowa.

W następującym tekście przyjmiemy konwencję, że wartość różniczki funkcji f w punkcie xna wektorze  $\zeta$  jest zapisywana jako  $d_x f(\zeta)$ . Niech f bedzie określona i ma ciągłe pochodne do rzędu 2 na otwartym zbiorze  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Niech ponadto  $d_x^2 f > 0$  dla  $x \in \Omega$ . Przyjmujemy tutaj podejście wiążące kolejne różniczki ze wzorem Taylora i traktujące  $d_n f$  jako odwzorowanie nliniowe tam występujące. W szczególności

$$d_x^2 f = \left(\frac{\partial_2 f}{\partial x_j, \partial x_i}(x)\right)_{i,j}^n \tag{9.4}$$

oznacza wtedy macierz formy kwadratowej a napis  $d_x^2 f > 0$  oznacza, że forma ta jest dodatnio określona. Rozważmy przekształcenie:  $\Omega \to d_x f \in (\mathbf{R}^n)^*$ .

**Stwierdzenie 9.4.** Jeżeli  $\Omega$  jest otwarty a f jest klasy  $C^2$  oraz  $d_x^2 f > 0$  dla  $x \in \Omega$ , to także zbiór  $\Lambda = \{d_x f : x \in \Omega\}$  jest otwarty.

*Dowód.* Różniczka  $d_x^2 f$  może być także interpretowana jako pierwsza różniczka w punkcie x odwzorowania  $\alpha : \Omega \in x \to d_x f \in (\mathbf{R}^n)^*$  Ponieważ warunek  $d_x^2 f > 0$  implikuje, że macierz  $d_x^2 f$  jest nieosobliwa, odwzorowanie  $\alpha$  jest otwarte i w szczególności  $\Lambda$  jest zbiorem otwartym.  $\Box$ 

Stwierdzenie 9.5. Przy założeniach i notacji Stwierdzenia 9.4. przekształcenie  $\alpha : \Omega \to \Lambda$  jest różnowartościowe. Przekształcenie do niego odwrotne jest podobnej postaci t.j. przy kanonicznym utożsamieniu  $\mathbf{R}^n \ z \ (\mathbf{R}^n)^{**}$  i traktowaniu  $\Omega$  jako podzbioru  $(\mathbf{R}^n)^{**}$ , istnieje funkcja  $g : \Lambda \to \mathbf{R}$  taka, że  $\beta(p) \simeq \alpha^{-1}(p) = d_p g$ .

Funkcję g nazywamy transformatą Legendre'a funkcji f.

Dowód. Pokażemy najpierw, że funkcja  $\alpha$  jest różnowartościowa. Niech  $x_1, x_2 \in \Omega$  i niech  $\Psi(t) = \alpha(x_1 + t(x_2 - x_1))$ . Wtedy  $\Psi''(t)$  jest równa wartości formy kwadratowej  $d^2_{(x_1+t(x_2-x_1))}f$  na argumencie  $(x_2 - x_1)$  a zatem jest dodatnia. Oznacza to, że funkcja  $\Psi'(t)$  jest rosnąca. Ale  $\Psi'(0) = d_{x_1}f(x_2 - x_1)$  natomiast  $\Psi'(t) = d_{x_2}f(x_2 - x_1)$  a ponieważ  $\Psi'(0) \neq \Psi'(1)$  zatem  $d_{x_1}f \neq d_{x_2}f$ .

Pokażemy następnie, że istnieje  $g : \Lambda \to \mathbf{R}$  klasy  $C^2$  taka, że  $d_p^2 > 0$  oraz, że  $\alpha^{-1}(p) = d_p g$ . Rozumowanie przebiega podobnie, jak w dowodzie Stwierdzenia 9.4. Dla  $(x, p) \in \Omega \ge \Lambda$  rozważamy funkcję

$$H(x,p) = \langle x, p \rangle - f(x)$$

gdzie < x, p > oznacza wartość formy liniowej  $p \in (\mathbf{R}^n)^*$  na wektorze  $x \in \mathbf{R}^n$ . W części pierwszej tego dowodu pokazaliśmy, że dla każdego  $p \in \Lambda$  istnieje dokładnie jeden  $x_p \in \Omega$  taki, że  $d_{x_p}f = p$ . Określmy

$$g(p) = H(x_p, p) = \langle x_p, p \rangle - f(x_p)$$

wtedy odworowanie  $\beta : p \to x_p$  jako odwrotne do  $\alpha : x \to d_x f = p$  ma wszędzie różniczkę nieosobliwą na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej. Pisząc  $g(p) = \langle \beta(p), p \rangle - f \circ \beta(p)$  i uwzględniając, że  $d_{\beta(p)}f = d_{x_p}f = p$  mamy wtedy

$$\begin{aligned} d_p g(\zeta) &= \langle d_p \beta(\zeta), p \rangle + \langle \beta(p), \zeta \rangle - d_{\beta(p)} \circ d_p \beta(\zeta) = \\ &= \langle d_p \beta(\zeta), p \rangle + \langle x_p \zeta \rangle - \langle p, d_p \beta(\zeta) \rangle = \langle x_p, \zeta \rangle \end{aligned}$$

co należało wykazać. Pokażemy wreszcie, że $d_p^2g>0.$ 

Traktując  $d_p^2 g$  jako różniczkę odwzorowania  $p \to d_p g$  odwrotnego do  $x \to d_x f$ , którego różniczką jest  $d_x^2 f$  widzimy, że teza wynika z obserwacji, że dla macierzy symetrycznej i dodatnio określonej, macierz odwrotna jest także symetryczna i dodatnio określona.

Ćwiczenie 9.1. Wyznaczyć transformatę Legendre'a funkcji:

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i^2 \qquad a_i > 0$$

wtedy

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n x_i p_i - \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i^2$$
$$\frac{\partial H}{\partial H} = n_i - 2a_i x_i \qquad \text{ration} \qquad x_i = \frac{p_i}{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = p_i - 2a_i x_i$$
 zatem  $x_{p_i} = \frac{p_i}{2a_i}$ 

i otrzymujemy

$$\widehat{F}(p_1, \dots p_n) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2a_i} - \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{p_i^2}{4a_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{4a_i^2}$$

## 9.2. Optyka geometryczna.

Optyka geometryczna nie wnika w fizyczną naturę światła lecz przyjmuje jako aksjomat, że droga promienia światlnego jest taką krzywą, która minimalizuje tzw. długość optyczną. Ta zasada wariacyjna, której precyzyjne sformułowanie podamy w dalszej części wykładu, ma związek z zasadą Fermata, mówiącą, że światło biegnąc od punktu do punktu wybiera drogę o najkrótszym czasie przejścia. Schemat przyjęty w optyce geometrycznej przedstawia się następująco:



Rys 9.1

Rozważmy "oś optyczną"  $\overrightarrow{0z}$ , którą wyobrazimy sobie jako prostą poziomą, leżącą w płaszczyźnie rysunku. Prostopadle do niej umieścimy dwie płaszczyzny A i B. Są one równoległe do dwóch pozostałych osi kartezjańskiego układu prostokątnego: poziomej osi  $\overrightarrow{0x_1}$  i pionowej osi  $\overrightarrow{0x_2}$ .

Przestrzeń między tymi płaszczyznami nazwiemy systemem optycznym. Jest ona scharakteryzowana za pomocą funkcji  $n(x_1, x_2, z)$  - "gęstości optycznej środowiska", przez które przebiega promień świetlny. Będziemy dalej zakładać, że tory promieni świetlnych są krzywymi rzutującymi się dyfeomorficznie na oś optyczną t.j, że dopuszczają opis  $\gamma(z) = (x_1(z), x_2(z), z)$ . Gęstość optyczna kształtuje tor następującą zasadą Fermata: promień świetlny opuszczający płaszczyznę A w punkcie  $(x_1(z_0), x_2(z_0))$  i w kierunku wyznaczonym przez  $(\dot{x}_1(z_0), \dot{x}_2(z_0))$  a następnie docierający do płaszczyzny B z analogicznymi współrzędnymi  $(x_1(z_1), x_2(z_2), \dot{x}_1(z_1), \dot{x}_2(z_1))$ robi to tak, że minimalizuje "długość optyczną"

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{z_0}^{z_1} n(x_1, x_2, z) ds = \int_{z_0}^{z_1} n(x_1, x_2, z) \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dz$$
(9.5)

gdzie  $\dot{x}_1$ oznacza $\frac{dx_1}{dz}(z)$ a $\dot{x}_2$ oznacza $\frac{dx_2}{dz}(z)$ Mamy zatem zagadnienie wariacyjne z funkcją Lagrange'a

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, z) = n(x_1, x_2, z) \cdot \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$
(9.6)

Wynik Hamiltona mówi, że po właściwej zmianie współrzędnych krzywe całkowe równań Eulera dla (9.5) są krzywymi całkowym "gradientu symplektycznego" funkcji  $\hat{L}$ . Omówimy kolejno dokonywaną zamianę współrzędnych, której istotą jest transformata Legendre'a oraz

wyprowadzimy równania Hamiltona, odkładając geometryczną interpretację tej sytuacji do następnego wykładu.

# 9.3. Legendre'owska zamiana współrzędnych.

**Lemat 9.1.** Dla ustalonych  $z, x_1, x_2$  funkcja (9.6) spełnia względem zmiennych  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  warunek:

$$d^{2}_{(z,x_{1},x_{2},\dot{x}_{1},\dot{x}_{2})}L(\triangle \dot{x}_{1},\triangle \dot{x}_{2}) > 0.$$

Istotnie, otrzymujemy ( dla zwięzłości będziemy pisać <br/> nzamiast $n(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{z})$ 

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \frac{n \dot{x}_1}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} &; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \frac{n \dot{x}_2}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} &= n \cdot (1 + \dot{x}_2^2) (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-3/2} &; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} &= n \cdot (1 + \dot{x}_1^2) (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-3/2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} &= -n \dot{x}_1 \dot{x}_2 (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

zatem druga różniczka L jest formą kwadratową o postaci:

$$d^{2}_{(z,x,y,\dot{x},\dot{y})}(\triangle \dot{x}_{1},\triangle \dot{x}_{2}) = n(1 + \dot{x}_{1}^{2} + \dot{x}_{2}^{2})^{-3/2} [(1 + \dot{x}_{2}^{2})(\triangle \dot{x}_{1})^{2} - 2\dot{x}_{1}\dot{x}_{2}\triangle \dot{x}_{1}\triangle \dot{x}_{2} + (1 + \dot{x}_{1}^{2})(\triangle \dot{x}_{2})^{2}]$$

ale dla

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \neq (0, 0)$$

mamy

$$n(1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)^{-3/2}[(\dot{x}_2\triangle\dot{x}_1-\dot{x}_1\triangle\dot{x}_2)^2+\triangle\dot{x}_1^2+\triangle\dot{x}_2^2]>0$$

Na mocy Lematu 9.1, ustalając zmienne  $z, x_1, x_2$ , możemy stosować Stwierdzenie 9.1 do funkcji:

$$f_{(z,x_1,x_2)}(\dot{x}_1,\dot{x}_2) = L(z,x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)$$

określając odwzorowanie

$$\alpha_{(z,x_1,x_2)} : (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \to \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\right) = (p_1, p_2) \tag{9.7}$$

i odwzorowanie odwrotne

$$\beta_{(z,x_1,x_2)}: (p_1, p_2) \to \left(\frac{\partial \widehat{f}_{(z,x_1,x_2,p_1,p_2)}}{\partial p_1}, \frac{\partial \widehat{f}_{(z,x_1,x_2,p_1,p_2)}}{\partial p_2}\right) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \tag{9.8}$$

W dalszym ciągu, dla oszczędności miejsca, będziemy zapisywać

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) \text{oraz} \ (\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{p}_1}, \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{p}_2}\right)$$

## 9.4. Wyprowadzenie równań Hamiltona

Napiszmy układ równań Eulera dla funkcjonału (9.5)

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad i = 1, 2$$
(9.9)

i zastąpmy w nim  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$  przez nową zmienną  $p_i$  (zgodnie z 9.7). Oznaczając  $\frac{dp_i}{dz}$  przez  $\dot{p}_i$ i = 1, 2 możemy zapisać wtedy (9.9) w postaci:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad \qquad i = 1, 2. \tag{9.10}$$

Otrzymujemy w ten sposób pierwsze dwa równania. Ponieważ  $\frac{\partial L}{\partial x_i}$  zależą od  $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ , chcąc zastąpić  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  przez  $p_1, p_2$  możemy skorzystać z odwrotnej transformacji Legendre'a (9.8) dodając do (9.10) warunki

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \hat{L}_{(z,x_1,x_2)}}{\partial \dot{p}_i}.$$
(9.11)

To, że układ warunków (9.10) i (9.11) daje układ czterech równań określających funkcje  $x_i(z)$  i  $p_i(z)$  wynika z następującego lematu.

**Lemat 9.2.** Niech dla ustalonych  $z, x_1, x_2$  funkcja  $\hat{L}(z, x_1, x_2, p_1, p_2)$  oznacza transformatę Legendre'a funkcji  $f_{(z,x_1,x_2)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ .

Wtedy

$$\frac{dL}{dx_i}(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = -\frac{d\hat{L}}{dx_i}(z, x_1, x_2, p_1, p_2)$$
(9.12)

Dowód. Funkcje L oraz  $\hat{L}$  związane są warunkiem

$$\widehat{L}(z, x_1, x_2, p_1, p_2) = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - L(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2).$$
(9.13)

gdzie  $(p_1, p_2) = \alpha(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$  przy ustalonych  $(z, x_1, x_2)$ . Obliczając  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  dla lewej strony (9.13) otrzymamy

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial p_i} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2.$$

Dla prawej strony 9.13 otrzymamy wyrażenie

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial p_2}{\partial x_i} \dot{x}_2 - \frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2.$$

Ale

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \dot{x}_j \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, 2$$

skąd wynika (9.12).

Na mocy lematu (9.4.) możemy więc przekształcić równanie (9.10), otrzymując ostateczny układ równań Hamiltona

$$\dot{p}_{i} = -\frac{\partial \hat{L}}{\partial x_{i}} \qquad i = 1, 2$$

$$\dot{x}_{i} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial p_{i}} \qquad i = 1, 2.$$
(9.14)

Wobec tego trudność przejścia od opisu wariacyjnego z funkcją Lagrange'a L do opisu (9.14) polega na znalezieniu transformaty Legendre'a  $\hat{L}$  funkcji L. Oczywiście cała procedura opiera się na założeniu, że przy ustalonych  $z, x_1, x_2$  funkcja L jest funkcją wypukłą ze względu na zmienne  $\dot{x}_1$  i  $\dot{x}_2$ .

Pokażemy teraz, jak wygląda $\widehat{L}$ dla funkcji Lagrange'a

$$L(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = n(z, x_1, x_2) \cdot \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

W dalszym ciągu, dla zwięzłości, będziemy pisać nzamiast $n(z,x_1,x_2).$  Wtedy (por. dowód lematu 9.1)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{n\dot{x}_i}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \qquad i = 1, 2$$

skąd

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{n} \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$n^2 - p_1^2 - p_2^2 = \frac{n^2}{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

a więc

$$\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2}}$$

i ostatecznie

$$\hat{L}(p_1, p_2) = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - L(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{\sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2}} - n\sqrt{1 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{n^2 - p_1^2 - p_2^2}} = -\sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2}$$

Podsumowując:

Stwierdzenie 9.6. Krzywe przebiegu promieni świetlnych

$$z \to (x_1(z), x_2(z), \dot{x}(z), \dot{x}_2(z))$$

opisane przez zasadę wariacyjną 9.5 z funkcją Lagrange'a

$$L(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = n(z, x_1, x_2)\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

 $po\ zamianie\ zmiennych$ 

$$(z, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \to (z, x_1, x_2, p_1, p_2)$$

gdzie

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{n(z, x_1, x_2) \cdot \dot{x}_i}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}$$

przechodzą na krzywe całkowe układu 9.14, gdzie

$$\widehat{L}(z, x_1, x_2, p_1, p_2) = -\sqrt{n(z, x_1, x_2) - p_1^2 - p_2^2}.$$

# 10. Mechanika Hamiltonowska

# 10.1. Równania Hamiltona

**Twierdzenie 10.1.** Niech  $\mathcal{M}$  będzie układem mechanicznym z funkcją Lagrange'a L = T - U, gdzie energia kinetyczna ma postać formy kwadratowej zmiennych  $\dot{x}_1, ... \dot{x}_n$ , to jest

$$T(x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ... \dot{x}_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, ..., x_n) \dot{x}_i \dot{x}_j$$
(10.1)

Załóżmy, że dla dowolnych ustalonych  $x_1, ..., x_n$  forma (10.1) jest dodatnio określona. Wtedy (a) po dokonaniu zamiany zmiennych

$$\alpha_{(x_1,\dots,x_n)}: (\dot{x}_1,\dots\dot{x}_n) \to \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1},\dots,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = (p_1,\dots,p_n) \tag{10.2}$$

analogicznie, jak w (9.7), gdzie przekształcenie odwrotne dane jest wzorem

$$\beta_{(x_1,\dots,x_n)}:(p_1,\dots,p_n)\to \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{p}_1},\dots,\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{p}_n}\right)=(\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n).$$
(10.3)

Układ równań Eulera - Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \qquad i = 1, 2, , n \tag{10.4}$$

przechodzi na układ Hamiltona

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \widehat{L}}{\partial x_i} \\ \dot{x}_i = -\frac{\partial \widehat{L}}{\partial p_i} \end{cases}$$
 i=1, 2,..,n (10.5)

(b) Wartość transformaty Lagrange'a  $\hat{L}(p)$  jest równa energii całkowitej układu E = T + Uw punkcie  $(x_1, ..., x_n, (\dot{x}_p)_1, ... (\dot{x}_p)_n)$ , gdzie  $\dot{x}_p = \beta(p)$ .

*Dowód.* (a) Wyprowadzenie równań (10.5) przebiega analogicznie, jak w przypadku równań (9.14) w poprzednim wykładzie i nie będziemy tego rozumowania powtarzać.

(b) Dla zwięzłości wzorów napiszemy x zamiast  $(x_1, ..., x_n)$   $\dot{x}$  zamiast  $(\dot{x}_1, ... \dot{x}_n)$  i p zamiast  $(p_1, ... p_n)$ . Twierdzimy, że zachodzi równość

$$2T(x,\dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}) \cdot \dot{x}_i = \langle p, \dot{x} \rangle.$$

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Istotnie, rozpatrując macierz formy (10.1) widzimy, że zmienna  $\dot{x}_i$  występuje tylko w i-tym wierszu i w i-tej kolumnie. Wobec tego

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} T(x, \dot{x}) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n a_{ji}(x) \dot{x}_j \dot{x}_i - a_{ii}(x) \dot{x}_i^2 \right)$$

zatem

$$\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}T(x,\dot{x})\right) \cdot \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_{j=1}^n a_{ji}(x)\dot{x}_j\dot{x}_i.$$

Wobec tego tworząc sumę  $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{i}}(x, \dot{x}) \dot{x}_{i}$  uzyskamy w niej każdy wyraz <br/>  $n_{ij}(x) \dot{x}_{i} \dot{x}_{j}$ dwukrotnie - raz jako stojący w i-tym wierszu a raz jako stojący w j-tej kolumnie. Zatem

$$L(x,p) = \langle p, \dot{x}_p \rangle - L(x, \dot{x}_p) =$$
  
= 2T(x, \dot{x}\_p) - (T(x, \dot{x}\_p) - U(x)) = T(x, \dot{x}\_p) + U(x) = E(x, \dot{x}\_p) (10.6)

**Definicja 10.1.** Transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a układu mechanicznego nazywamy funkcją Hamiltona lub hamiltonianem tego układu i oznaczamy literą H.

**Čwiczenie 10.1.** Podać hamiltonian układu n-punktów z potencjałem U i bez więzów. Napisać równania Hamiltona.

Oznaczmy położenie *i*-tego punktu o masie  $m_i$  przez  $x_i, i = 1, 2, ...$  Zgodnie z Definicją(10.1) i formułą (10.6) mamy

$$H(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n) = T((x_1, ..., x_n, (\dot{x}_p)_1, (\dot{x}_p)_n) + U(x_1, ..., x_n)$$

gdzie

$$T(x, \dot{x}_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_p)_i^2.$$

Na podstawie ćwiczenia (9.1) otrzymamy  $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i}.$ 

Hamiltonian układu ma więc postać

$$H(x_1, ...x_n, p_1, ...p_n) = \sum_{j=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + U(x_1, ...x_n)$$

a równania Hamiltona wyglądają następująco

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
  $\dot{x}_i = -\frac{p_i}{m}$   $i = 1.2, \dots n$ 

# 10.2. Informacje o geometrii symplektycznej.

W ustępie tym, inaczej niż w całym wykładzie, założymy znajomość kilku podstawowych pojęć geometrii różniczkowej. I tak dla sformułowania potrzebnych definicji potrzebować będziemy pojęć wiązki stycznej i wiązki kostycznej do rozmaitości różniczkowej a także założymy, że czytelnik ma podstawowe doświadczenie w operowaniu formami różniczkowymi. Sytuacja ta nie jest kontynuowana w dalszym ciągu wykładu i bez szkody dla jego zrozumienia można pominąć szczegóły techniczne.

Zacznijmy od algebry liniowej. Niech  $e_1, \dots e_n$  będzie bazą  $\mathbf{R}^n$  i niech

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

oraz niech

$$\omega: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ni (X, Y) \to \sum_{i=1}^n a_{i,j}, x_i, y_j \in \mathbf{R}$$
(10.7)

Formę (10.7) można zapisać w postaci macierzowej

$$\omega(X,Y) = [X]^{t} \Omega[Y]$$
(10.8)

gdzie [Y] jest macierzą o jednej kolumnie, składającej się ze współrzędnych wektora Y względem bazy  $e_1, ... e_n$ ,  $[X]^t$  jest macierzą o jednym wierszu, składającym się się ze współrzędnych X względem tejże bazy. Natomiast  $\Omega = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  jest macierzą współczynników (występujących w (10.7)) wymiaru  $n \times n$ . Wtedy wynik mnożenia w (10.8) jest macierzą  $1 \times 1$ , której jedyny współczynnik jest liczbą występującą na prawo od strzałki we wzorze (10.7). Powiemy, że forma jest nieosobliwa, jeżeli zachodzi implikacja:

$$(\omega(X,Y) = 0$$
 dla każdego  $Y) \Rightarrow (X = 0).$ 

Powiemy, że forma jest antysymetryczna, jeżeli  $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ . Następujące dwie własności opisu macierzowego (10.8) występują w podstawowym kursie algebry liniowej i ich dowody pominiemy.

**Stwierdzenie 10.1.** (a) ( $\omega$  jest antysymetryczna)  $\Leftrightarrow (\Omega^t = -\Omega)$ (b) ( $\omega$  jest nieosobliwa)  $\Leftrightarrow$  (det  $\Omega \neq 0$ ).

**Stwierdzenie 10.2.** Niech  $\omega : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$  będzie antysymetryczną i nieosobliwą formą dwuliniową. Wtedy

(a) n = 2m

(b) Istnieje baza  $d_1, ..., d_{2m}$ , względem której macierz formy  $\Omega$  ma postać blokową:

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline -I_m & 0 \end{array}\right) \tag{10.9}$$

gdzie  $I_m$  jest jednostkową macierzą wymiaru  $m \times m$ .

(c) Niech  $d_1^*, ..., d_{2m}^*$  będzie bazą przestrzeni  $(\mathbf{R}^{2m})^*$  dualną do bazy  $d_1, ... d_{2m}$  z punktu (b) wtedy

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} d_i^* \wedge d_{m+i}^* \tag{10.10}$$

Dowód. (a) Na mocy Stwierdzenia (10.1)  $\Omega^t = -\Omega$  zatem det  $\Omega = \det \Omega^t = \det (-\Omega) = (-1)^n \det \Omega$  a ponieważ  $\det \Omega \neq 0$  otrzymujemy stąd n = 2m.

(b) Indukcja względem m. Dla m = 1 rozważmy formę antysymetryczną i nieosobliwą  $\omega$  w  $\mathbf{R}^2$ . Z nieosobliwości  $\omega$  wynika, że istnieją niezerowe wektory  $x, y, \ni \mathbf{R}^2$  takie, że  $\omega(x, y) \neq 0$ . Wtedy x i y są liniowo niezależne.

Wtedy x i y są liniowo niezależne. Niech  $d_1 = \frac{x}{\omega(x,y)}$   $d_2 = y$ . Macierz  $\Omega$  formy  $\omega$  względem bazy  $d_1, d_2$  ma postać

$$\Omega = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

#### Krok indukcyjny.

Podobnie jak przy m = 1 znajdziemy dwa wektory liniowo niezależne  $d_1, d_{m+1} \in \mathbb{R}^{2m}$  takie, że  $\omega(d_1, d_{m+1}) = 1$ . Niech

$$Y = \{x \in \mathbf{R}^{2m} : \omega(d_1, x) = \omega(d_{m+1}, x) = 0\}$$

Z liniowej niezależności  $d_1$  i  $d_{m+1}$  i nieosobliwości  $\omega$  wynika, że dimY = 2m - 2. Ponieważ, jak widać ograniczenie  $\omega$  do Y jest formą nieosobliwą, z założenia indukcyjnego istnieje baza  $d_2, \dots d_m, d_{m+1}, \dots, d_{2m}$  przestrzeni Y taka, że  $\Omega$  ograniczona do Y ma względem tej bazy postać (10.9) z indeksem m - 1. Wtedy baza  $d_1, \dots, d_{2m}$  spełnia tezę Stwierdzenia.

(c) Niech  $d_1^*, \dots d_{2m}^*$  będzie bazą  $(\mathbf{R}^{2m})^*$  dualną do bazy  $d_1, \dots, d_{2m}$  skonstruowanej w punkcie (b). Wtedy macierz 2-formy  $d_i^* \wedge d_{m+i}^*$  ma postać

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -A_i \\ \hline A_i & 0 \end{array}\right)$$

gdzie  $A_i$  jest macierzą  $n \times n$  mającą same zera z wyjątkiem i-tego miejsca na przekątnej, gdzie występuje jedynka. Stąd i z formuły (10.9) wynika przedstawienie (10.9).

Ze Stwierdzenia (10.2) wynika, że w 2m wymiarowej przestrzeni rzeczywistej wszystkie nieosobliwe i antysymetryczne formy dwuliniowe są do siebie podobne w tym sensie, że opisywane są tą samą macierzą  $\Omega$ , tyle, że względem różnych baz.

**Definicja 10.2.** Tę jedyną (w powyższym sensie) formę na przestrzeni  $\mathbf{R}^{2m}$  nazwiemy m-tą formą symplektyczną.

**Definicja 10.3.** Rozmaitość różniczkową M wymiaru 2m nazwiemy rozmaitością symplektyczną jeżeli:

(a) w każdej przestrzeni stycznej  $T_x M$  dla  $x \in M$  jest określona forma symplektyczna  $\omega_x$ , której współczynniki gładko zależą od x,

(b) tak określona dwuforma różniczkowa  $\omega$  jest zamknięta, tj.  $d\omega = 0$ .

Poniższe twierdzenie jest lokalnym analogiem "punktowego" Stwierdzenia (10.2)

**Stwierdzenie 10.3.** (Darboux) Niech M będzie 2m-wymiarową rozmaitością symplektyczną z formą  $\omega$ . Dla każdego  $x \in M$  istnieje mapa  $(U, \varphi)$  w otoczeniu x taka, że dla  $y \in U$  forma  $\omega_y$ w każdej przestrzeni  $T_yM$  ma względem bazy  $\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots \frac{\partial}{\partial x_{2m}}(y)$ , wyznaczonej przez mapę  $\varphi$ , macierz (10.9).

Dowód.Niech będzie dana mapa  $(W,\Psi).$  Obrazy stałych pól bazowych  $e_i=(\underbrace{0,...1}_{i},...0)$ w $\mathbf{R}^{2m}$ za pomocą  $d\Psi^{-1}$ zapiszemy jako

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{2m}}$$

Pola te będziemy nazywać polami bazowymi dla mapy  $(W, \Psi)$ . Pola te są przemienne  $(tj. [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$  dla i, j, = 1, 2, ...,2n) oraz ich wartości  $\frac{\partial}{\partial x_1}(y), ..., \frac{\partial}{\partial x_{2m}}(y)$  stanowią dla każdego  $y \in M$  bazę przestrzeni stycznej  $T_y(M)$ . Formę  $\omega$  ograniczoną do  $T_y(M)$  oznaczymy  $\omega_y$ .

Dowód będzie przebiegał za pomocą indukcji względem m gdzie dimM = 2m.

(a) Niech dimM = 2 niech  $x \in M$  oraz niech  $(W, \Psi)$  będzie mapą w otoczeniu x. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że  $\Psi(x) = 0$  oraz , że macierz formy  $\omega_x$  względem bazy  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right)$  jest równa  $\Omega$ . ( $\Omega$  jak w (10.9)). Znaczy to, że

$$\omega_x\big(\frac{\partial}{\partial x_1}(x),\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\big)=1$$

Zatem dla y bliskich x (aby nie komplikować notacji przyjmijmy, że dla  $y \in W$ ) zachodzi

$$\omega_y \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \frac{\partial}{\partial x_2}(y)\right) = \alpha(y) \neq 0.$$

Wprowadźmy pola  $Y_1$  i  $Y_2$  zadane formułą:

$$Y_1(y) = \frac{1}{\alpha(y)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(y) \quad ; \quad Y_2(y) = \frac{\partial}{\partial x_2}(y). \tag{10.11}$$

Wtedy  $\omega_y$  ma z bazie  $Y_1(y), Y_2(y)$  macierz  $\Omega$ . Zauważmy też, że pola  $Y_1, Y_2$  powstają jako pola bazowe dla mapy  $(U, \varphi)$  gdzie dla  $(q_1, q_2) = \varphi(y)$  określamy

$$\varphi^{-1}(q_1, q_2) = \psi^{-1}(\frac{q_1}{\alpha(y)}, q_2).$$

(b) Krok indukcyjny.

Niech dimM = 2mi niech  $x \in M$ . Postępując, jak w punkcie (a) możemy znaleść mapę  $(W, \Psi)$  w otoczeniu x, taką, że

$$\omega_y \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}(y)\right) = 1.$$

Określmy na W dwie dystrybucje:  $\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{D}_2$ , kładąc

$$\mathbf{D}_{1}(y) = \left\{ v \in T_{y}(M) : v = \alpha \frac{\partial}{\partial x_{1}}(y) + \beta \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}(y) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$$
$$\mathbf{D}_{2}(y) = \left\{ v \in T_{y}(M) : \omega_{y}\left(\frac{\partial}{\partial x_{1}}(y), v\right) = \omega_{y}\left(\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}(y), v\right) = 0 \right\}$$

**Lemat 10.1.** Dystrybucje  $\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{D}_2$  są różniczkowalne i inwolutywne.

*Dowód.* Pola  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  i  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  są różniczkowalne i przemienne, skąd wynika teza dla  $\mathbf{D}_1$ . Dla dowodu, że  $\mathbf{D}_2$  jest różniczkowalna, rozważmy pola

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \omega \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}\Big) \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_1}\Big) \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}$$
(10.12)

Są one różniczkowalne, liniowo niezależne w każdym punkcie i dla  $i \neq 1, i \neq m+1$  należą do  $\mathbf{D}_2$ . Zatem dystrybucja  $\mathbf{D}_2$  jest różniczkowalna. Dla inwolutywności  $\mathbf{D}_2$  zauważmy, że warunek  $X \in \mathbf{D}_2$  można zapisać w formie dwóch warunków:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rfloor X \rfloor \omega = 0 \qquad \quad i = 1, m+1 \tag{10.13}$$

gdzie  $X \rfloor \omega$  jest formą liniową  $X \rfloor \omega = \omega(X, \cdot)$ . Tak więc, aby pokazać, że dla  $X \in \mathbf{D}_2$  jak i  $Y \in \mathbf{D}_2$  także  $[X, Y] \in \mathbf{D}_2$  wystarczy udowodnić, że

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rfloor \big[ X, Y \big] \rfloor \omega = 0 \qquad \quad i = 1, m+1$$

Dla dowodu tych warunków posłużymy się następującymi własnościami pochodnej Liego (por. Stwierdzenie (11.1)).

$$[X,Y] \rfloor \eta = \mathcal{L}_X(Y \rfloor \eta) \tag{10.14}$$

gdzie $\eta$ jest dowolną dwuformą, oraz

$$\mathcal{L}_X \cdot i_Y = i_Y \cdot \mathcal{L}_X. \tag{10.15}$$

Zwężając obie strony równości (10.14) przy  $\eta = \omega$  kolejno z polem  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  oraz  $\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}$  otrzymamy dla i = 1, m+1

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rfloor [X, Y] \rfloor \omega = \frac{\partial}{\partial x_i} \rfloor \mathcal{L}_X (Y \rfloor \omega)$$

i stosując do wyrażeń po prawej stronie ostatniej równości własność (10.15) dostaniemy

$$\mathcal{L}_X\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\rfloor Y\rfloor\omega\big) = 0,$$

bo wnętrza nawiasów są równe 0 na mocy założenia (10.13).

Na mocy Lematu i Twierdzenia Frobeniusa obie dystrybucje  $\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{D}_2$  są całkowalne, tj przez każdy punkt y rozmaitości  $M \cap W$  przechodzą dwie podrozmaitości  $D_1$  i  $D_2$ , takie, że  $\mathbf{D}_1(y)$  i  $\mathbf{D}_2(y)$  można utożsamić z przestrzenią  $T_y D_1$  i  $T_y D_2$  odpowiednio. Forma  $\omega$  ograniczona do  $D_1$ i do  $D_2$  pozostaje domknięta i nieosobliwa. Zatem, z założenia indukcyjnego, istnieje mapa w otoczeniu  $y \le D_2$ , dla której zachodzi teza Stwierdzenia (10.3). Produkt tej mapy i mapy w  $D_1(y)$  daje żądaną mapę na M.

**Wniosek 10.1.** Stwierdzenie (10.3) mówi, że każde dwie rozmaitości symplektyczne ustalonego wymiaru 2m są lokalnie identyczne z otoczeniem zera w  $\mathbf{R}^{2m}$  wyposażonym w formę:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d_{m+i} \tag{10.16}$$

Każdą mapę na M, której forma  $\omega$  ma postać (10.16) nazywamy mapą kanoniczną.

**Definicja 10.4.** Niech F będzie funkcją różniczkowalną na rozmaitości symplektycznej M. Gradientem symplektycznym funkcji F (lub polem hamiltonowskim wyznaczonym przez F) nazwiemy (jedyne) pole wektorowe X na M spełaniające warunek:

dla każdego różniczkowalnego pola ${\cal Y}$ na  ${\cal M}$ 

$$dF(Y) = \omega(X, Y) \tag{10.17}$$

Gradient symplektyczny F związany z formą  $\omega$  oznaczymy  $grad_{\omega}F$ .

Uwaga 10.1. Podobnie, jak w (10.9) ale używając macierzy jednostkowej zamiast macierzy (10.9) definiujemy "zwykły" gradient w  $\mathbf{R}^n$ .

Ćwiczenie 10.2. Wyznaczyć postać gradientu symplektycznego funkcji F w mapie kanonicznej.

*Rozwiązanie.* Niech  $X = grad_{\omega}F = (X_1, ..., X_{2m})$  i niech  $Y = (Y_1, ..., Y_{2m})$  będzie jakimś polem wektorowym. Zgodnie z (10.17), (10.8) i (10.9) zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot Y_i = \sum_{i=1}^m X_i Y_{m+i} - X_{m+i} Y_i$$

skąd wobec dowolności Y wynika, że:

$$grad_{\omega}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_{m+1}}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_{2m}}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_m}\right)$$
 (10.18)

Wniosek 10.2. Układ równań Hamiltona (10.5) można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = grad_{\omega}H(\gamma(t)) \tag{10.19}$$

 $gdzie \ \gamma(t) = \big(x(t), p(t)\big)$ 

# 10.3. Kanoniczna struktura symplektyczna na wiązce kostycznej do rozmaitości.

Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru n. Oznaczmy przez T(M) wiązkę styczną a przez  $T^*(M)$  wiązkę kostyczną do M. Niech  $\Pi : T^*(M) \to M$  będzie kanoniczną projekcją (tj. odwzorowaniem przeprowadzającym wszystkie elementy przestrzeni kostycznej do M w dowolnym ustalonym  $q \in M$  na q. Niech  $\Pi^* : T(T^*M) \to TM$  będzie przekształceniem indukowanym przez  $\Pi$  (podniesieniem  $\Pi$  do wiązki stycznej, różniczką  $\Pi$ ). Dla ustalonej mapy  $(U, \varphi)$ na M oraz  $q \in U$  niech  $\frac{\partial}{\partial x_1}(q), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(q)$  będzie bazą w  $T_q(M)$ . (Zobacz dowód Stwierdzenia (10.3)). I niech  $dx_1(q), ..., dx_n(q)$  będzie dualną bazą przestrzeni  $T^*_q(M)$ . Jednoformy  $dx_1, ...dx_n$ pozwalają utożsamiać  $\Pi^{-1}(U) \subset T^*M$  z produktem  $\varphi(U) \times \mathbf{R}^n$  za pomocą odwzorowania  $\tilde{\varphi}$ danego wzorem:

$$\widetilde{\varphi}: \Pi^{-1}(U) \ni \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i(q) \to (q_1, \dots q_n) \times (p_1, \dots p_n) \in \varphi(U) \times \mathbf{R}^n$$
(10.20)

gdzie  $\varphi(q) = (q_1, ..., q_n)$  dla  $q \in U$ . Parę  $(\Pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$  nazwiemy mapą na  $T^*(M)$  indukowaną przez mapę  $(U, \varphi)$  na M. Punkty  $\Pi^{-1}(U)$  będziemy oznaczać za pomocą ich współrzędnych (q, p) w mapie indukowanej. Niech X będzie polem wektorowym na  $\Pi^{-1}(U)$ . Wtedy X w punkcie (q, p) ma postać

$$X_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(q,p) \frac{\widetilde{\partial}}{\partial q_i} + b_i(q,p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$
(10.21)

gdzie

$$\big(\frac{\partial}{\partial q_1},...,\frac{\partial}{\partial q_n},\frac{\partial}{\partial p_i},...\frac{\partial}{\partial p_n}\big)$$

sa polami bazowymi na  $\Pi^{-1}(U)$  związanymi z mapą ( $\Pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}$ ). Przy czym  $\frac{\partial}{\partial q_1}$  oznacza teraz pole na  $T^*(M)$ , które przy lokalnym "ilorazowym" przedstawieniu  $\Pi^{-1}(U)$  w formie (10.20) odpowiada polu  $\frac{\partial}{\partial q_1}$  na M. Widzimy, że wtedy

$$\Pi^*(\frac{\partial}{\partial p_1}) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \Pi^*(\frac{\partial}{\partial q_1}) = \frac{\partial}{\partial q_1}$$

A więc

$$\Pi^*(X_{(q,p)}) = W_q = \sum_{i=1}^n a_i(q,p) \frac{\partial}{\partial q_1} \in T_q(M).$$

Na to pole wektorowe podziałajmy formą  $\alpha(X)$  na M, której wartość w  $T^*(M)$  ma postać

$$\alpha(X)_{(q)} = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

i zależy tylko od współrzędnych  $(p_1, \dots, p_n)$ . Otrzymamy więc przyporządkowanie

$$X_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(q,p) \frac{\partial}{\partial q_1} + b_i(g,p) \frac{\partial}{\partial p_i} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i a_i(q,p) \in \mathbf{R}.$$

To przyporządkowanie jest dla każdego ustalonego (q, p) liniową operacją na X a więc wyznacza formę liniową na  $T_{(q,p)}(T^*M)$ . Ta forma mnoży współrzędne przy  $\frac{\partial}{\partial q_i}$  przez liczbę  $p_i$ . Zatem postać jednoformy, którą w ten sposób uzyskujemy jest

$$\alpha_{(q,p)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \tilde{d}q_i \tag{10.22}$$

gdzie  $\tilde{d}q_i$  oznacza formę na  $T^*(M)$ , która przy "ilorazowym" przedstawieniu  $\Pi^{-1}(U)$  w formie (10.20)<br/>odpowiada formie  $dq_i$  na M. Formę (10.22) nazywa się formą Liouville'a <br/>n $T^*(M)$ .

Niech  $\omega = d\alpha$ . Wtedy  $\omega$  jest zamkniętą dwuformą o postaci:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{10.23}$$

Zatem jest nieosobliwą w każdym punkcie (por. Stwierdzenie(10.2) (c)).

Zgodnie z przyjętą powszechnie konwencją, piszemy tu  $dq_i$  zamiast bardziej poprawnego formalnie  $d\tilde{q}_i$ .

**Stwierdzenie 10.4.** Na wiązce kostycznej  $T^*(M)$  do dowolnej rozmaitości różniczkowej M istnieje forma symplektyczna  $\omega$ , która w mapach indukowanych przez mapy na M ma postać kanoniczną (10.22). Własność ta wyznacza formę  $\omega$ .

# 11. Miarowe, algebraiczne i strukturalne aspekty mechaniki Hamiltona.

#### 11.1. Redukcja symplektyczna.

Symetryczna budowa równań Hamiltona umożliwia postępowanie redukujące liczbę równań i liczbę szukanych funkcji w sytuacji, kiedy jedna ze współrzędnych nie występuje explicite w funkcji Hamiltona (nazywamy ją wtedy współrzędną cykliczną). Niech  $q_i$  będzie taką współrzędną. Wtedy i - te "pędowe" równanie jest postaci:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

Zatem pęd  $p_i$  pozostaje stały w czasie ruchu. Wstawiając jego stałą wartość  $p_i^0$  do hamiltonianu, otrzymujemy układ równań z funkcją Hamiltona nie zawierająca  $q_i$  ani  $p_i$  a zatem układ 2n-2 równań (przy początkowej liczbie 2n równań). Po ich ewentualnym rozwiązaniu pozostaje jeszcze scałkować równanie:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} (q_1(t), ...q_n(t), p_1(t), ...\dot{p}_i, ...p_n(t)) = f(t)$$

**Wniosek 11.1.** Układ o dwóch stopniach swobody (tj. dla n=2) i mający jedną współrzędną cykliczną, jest rozwiązalny w kwadraturach.

Dowód.Niech  $q_1$  będzie współrzędną cykliczną. Zgodnie z opisanym powyżej postępowaniem, redukujemy sytuację do układu

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$
 ,  $\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$  (11.1)

Układ ten ma całkę pierwszą  $H(p_1^0, p_2(t), q_2(t)) = c$ , która wyrażona za pomocą położeń i prędkości ma postać:

$$\frac{m\dot{q}_2^2}{2} + U(q_2) = c,$$
 co daje  $\dot{q}_2 = \pm \sqrt{\frac{2(c - U(q_2))}{m}}$ 

a zatem zagadnienie rozwiązania naszego układu sprowadza się do wyznaczenia dwu całek.

#### 11.2. Pochodna Liego

Niech  $X = (X_1, .., X_n)$  będzie polem wektorowym klasy  $C_1$  określonym na otwartym podzbiorze  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Rozważmy układ równań z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = X(y(t))\\ y(0) = x \end{cases}$$
(11.2)

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla takiego układu wynika, że przy każdym warunku początkowym x istnieje  $\epsilon(x) > 0$  oraz krzywa  $(-\epsilon(x), \epsilon(x)) \ni t \to y_x(t) \in \mathbf{R}^n$ , spełniająca (11.2). Ustalmy wartość t i zmieniajmy warunek początkowy x. Wtedy dla x takich, że  $|t| < \epsilon(x)$  jest dobrze określone odwzorowaniem  $\varphi_t^x$ .

$$\varphi_t^X(x) = y_x(t) \tag{11.3}$$

Z twierdzenia o gładkiej zależności rozwiązania (11.2) od warunków początkowych wynika, że odwzorowanie  $\varphi_t$  jest różniczkowalne a z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (11.2) wynika, że jeżeli wszystkie elementy następującej formuły (11.4) są dobrze określone, to zachodzi równość:

$$\varphi_{t_1+t_2}^X(x) = \varphi_{t_1}^X(\varphi_{t_2}^X(x)).$$
(11.4)

Zatem (na być może mniejszym zbiorze) odwzorowanie  $\varphi_t^X$  jest dyfeomorfizmem, na obraz tego zbioru - "lokalnym dyfeomorfizmem". W sytuacji, kiedy dla  $t \in \mathbf{R}$  dana jest rodzina przekształceń określonych dla każdego  $x \in \Omega$  i o wartościach w  $\Omega$  a przy tym spełnione są warunki (11.4) oraz  $\varphi_0 = id_\Omega$ , powiemy, że rodzina  $\mathbf{R} \ni t \to \varphi_t$  jest jednoparametrową grupą odwzorowań  $\Omega$ . Dla odwzorowań  $\varphi_t^X$  definiowanych za pomocą (11.3) sytuacja jest bardziej złożona. Globalnie na  $\Omega$  określone jest jedynie przekształcenie  $\varphi_0^X = id_{\mathbf{R}^n}$  natomiast dla  $t \neq 0$ każde przekształcenie  $\varphi_t^X$  ma swoją dziedzinę. Dziedziny te rosną, kiedy  $t \to 0$  oraz dla każdego  $x \in \mathbf{R}^n$  istnieje  $\epsilon(x)$ , że dla  $|t| < \epsilon(x) x$  znajduje się w dziedzinie  $\varphi_t^x$ . W tej sytuacji powiemy, że pole wektorowe X określa lokalną grupę 1- parametrowa lokalnych dyfeomorfizmów  $\Omega$ . Za pomoca tej grupy zdefiniujemy pochodną Liego pola tensorowego na  $\Omega$ .

**Definicja 11.1.** Niech X będzie polem wektorowym klasy  $C^1$  na otwartym podzbiorze  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Niech  $\{\varphi_t^X\}_t \in \mathbf{R}$  będzie lokalną 1-parametrowa grupą lokalnych dyfeomorfizmów  $\Omega$  określoną przez X. Niech W będzie polem tensorowym walencji (r, s). Pochodną Liego pola W wyznaczoną przez pole X (oznaczaną  $\mathcal{L}_X W$ ) nazwiemy pole tensorowe też o walencji (r, s), którego wartość w punkcie p otrzymujemy według następującej recepty realizowanej w dwóch krokach: Krok 1

Tworzymy tensor  $\widetilde{W}_p^t$ , będący formą (r+s)-liniową o argumentach  $\xi_i \in T_p(\Omega)$  i = 1, ..r oraz  $\alpha_j \in T_p^*(\Omega)$  j = 1, ..s przechodząc od  $W_{\omega_i^X(p)}$  do  $\widetilde{W}_t^p$  zgodnie z formułą:

$$\widetilde{W}_p^t(\xi_1, ..., \xi_r, \alpha_1, ..., \alpha_s) =$$
$$= W_{\varphi_t^x(p)}(d_p \varphi_t^x(\xi_1), ..., d_p \varphi_t^x(\xi_r), \alpha_1 \circ d_{p_t^x(p)} \varphi_t^x, ..., \alpha_s \circ d_{p_t^x(p)} \varphi_t^x).$$

Krok 2

Wyznaczamy granicę

$$\lim_{x \to 0} \frac{\widetilde{W}_p^t - W_p}{t}$$

Czytelnika zainteresowanego poprawnością i zakresem stosowalności tej definicji odsyłamy do książek o geometrii różniczkowej. My poprzestaniemy na zacytowaniu kilku własności pochodnej Liego potrzebnych w dalszym tekście.

**Stwierdzenie 11.1.** Niech X będzie polem wektorowym klasy  $C^1$  na  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Dla k-formy różniczkowej  $\omega$  określmy zwężenie  $X \mid \omega$  wzorem

$$(X \rfloor \omega)(\xi_1, .., \xi_{k-1}) = \omega(X, \xi_1, .., \xi_{k-1})$$

Wtedy

1.  $\mathcal{L}_X \omega = X \rfloor d\omega + d(X \rfloor \omega)$ 

- 2.  $d \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ d$
- 3.  $\mathcal{L}_X f = X f$  dla funkcji różniczkowalnej f 4.  $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$  dla pola wektorowego Y

- 5.  $[X, Y] \rfloor \eta = \mathcal{L}_X(Y \rfloor \eta)$ 6.  $\mathcal{L}_X \circ i_Y = i_Y \circ \mathcal{L}_X \ gdzie \ i_Y(\omega) = Y \rfloor \omega$

# 11.3. Miary niezmiennicze dla potoków hamiltonowskich.

Niech  $X = (X_1, ..., X_n)$  będzie polem wektorowym klasy  $C_1$  określonym na otwartym podzbiorze  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ . Niech  $\{\varphi_t^X\}_{t \in \mathbf{R}}$  będzie lokalną grupą lokalnych dyfeomorfizmów  $\Omega$  określoną przez pole X. Powiemy, że lokalny dyfeomorfizm  $\varphi_t^X$  zachowuje miarę  $\mu$  jeżeli

$$\mu(\varphi_t^X(A)) = \mu(A)$$

dla każdego otwartego  $A \subset \Omega$ , dla którego  $\varphi_t^X$  jest określony.

Diwergencją pola nazwiemy funkcję

$$divX(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$$

**Stwierdzenie 11.2.** (Liouville) Jeżeli divX = 0 to lokalne difeomorfizmy  $\varphi_t^X$  związane z polem X zachowują miarę Lebesque'a na  $\Omega$ .

Dowód. Ponieważ  $\dot{y}(t) = X(y(t))$ , korzystając z wzoru Taylora, dostaniemy

$$\varphi_t^X(y) = y + X(y) \cdot t + 0(t^2).$$

Niech D będzie otwartym zbiorem ograniczonym, takim że  $\varphi_t^X$  jest określone dla  $x \subset D$ . Oznaczając przez volA miarę Lebesque'a zbioru A, rozważmy funkcję  $v(t) = vol(\varphi_t^X(D))$ . Wtedy

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \Big( vol \big( \varphi_{\Delta t}^X \big( \varphi_t^X(D) \big) \Big) - vol \varphi_t^X(D) \Big) = \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{\varphi_t^X(D)} \Big( J \varphi_{\Delta t}^X(y) - 1 \Big) dy,$$

gdzie  $J\varphi_{\Delta t}^X(y)$  jest jakobianem przekształcenia  $\varphi_{\Delta t}^X$  w punkcie  $y \in \varphi_t^X(D)$ . Ponieważ chcemy obliczyć granicę przy  $\Delta t \to 0$ , zobaczymy jak zależy od  $\Delta t$  wyrażenie  $J\varphi_{\Delta t}^X(y)$ . Ponieważ

$$\varphi_{\Delta t}^X(y) = y + X(y) \cdot \Delta t + 0((\Delta t)^2)$$

macierz różniczki  $d_y \varphi^X_{\bigtriangleup t}$ ma wyrazy

$$a_{ij} = \delta_j^i + \frac{\partial X_i}{\partial y_j}(y) \cdot \triangle t + 0((\triangle t)^2)$$

a więc

$$J\varphi_{\Delta t}^{X}(y) = \left|\det d_{y}\varphi_{\Delta t}^{X}\right| = \left|1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_{i}}{\partial y_{j}}(y) \Delta t + 0\left((\Delta t)^{2}\right)\right|$$

Z założenia, żedivX=0wynika więc, że  $\frac{dv'}{dt}=0,$  zatem $vol\varphi_t^X(D)=vol(D),$ dla każdego t.  $\ \ \Box$ 

**Wniosek 11.2.** Niech M będzie rozmaitością symplektyczną wymiaru 2n i niech  $(U, \varphi)$  będzie mapą symplektyczna na M. Wtedy lokalne dyfeomorfizmy związane z polami hamiltonowskimi  $grad_{\omega}F$  zachowują miarę Lebesque'a na  $\varphi(U)$ .

Dowód. Ponieważ zgodnie z (10.16)

$$grad_{\omega}F = \Big(\frac{\partial F}{\partial X_{n+1}}, ..., \frac{\partial F}{\partial X_{2m}}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\Big)$$

mamy  $div(grad_{\omega}F) = 0.$ 

## 11.4. Algebraiczne tło mechaniki hamiltonowskiej.

Związek równań (10.19) z fizyką polega na dwóch założeniach.

- Po pierwsze - w przypadku ewolucji układu fizycznego, rozmaitość M powinna być wiązką kostyczną do przestrzeni konfiguracyjnej naszego układu

- Po drugie - prawe strony rozważanych równań powinny być współrzędnymi gradientu symplektycznego funkcji H równej całkowitej energii naszego układu, wyrażonej za pomocą pędów i położeń.

Abstrahując od takich fizycznych ograniczeń możemy rozważać układ o postaci:

$$\dot{x}(t) = grad_{\omega}F(x) \tag{11.5}$$

dla dowolnej rozmaitości symplektycznej  $(M, \omega)$ . (Zgodnie z Definicją 10.4 i wzorem (10.17) prawa strona w (11.5) jest zdefiniowana niezależnie od współrzędnych lokalnych na M). Następujące dalej obserwacje pokazują algebraiczne tło ewolucji opisywanej układem (11.5). Obecność tej struktury w tle mechaniki klasycznej była jedną ze wskazówek przy budowaniu formalizmu mechaniki kwantowej.

**Definicja 11.2.** Niech M będzie 2m wymiarową rozmaitością symplektyczną z formą  $\omega$ . Niech  $C^{\infty}(M)$  będzie algebrą funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych o wartościach w **R** (lub w **C**) na M. Określmy operację

$$C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \ni (f,g) \to \{f,g\} \in C^{\infty}(M)$$

(zwaną nawiasem Poissona ) za pomocą formuły

$$\{f,g\} = (grad_{\omega}f) \cdot g \tag{11.6}$$

**Stwierdzenie 11.3.** (a) Nawias Poissona jest operacją dwuliniową i antysymetryczną. (b) Dla  $f, g, h, \in C^{\infty}(M)$  spełniona jest tożsamość Jacobiego.

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g\{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$
(11.7)

*Dowód.* (Szkic) (a) Z formuły (10.18) widać, że (11.6) zależy liniowo od f. Wynika z niej również opis lokalny nawiasu  $\{f, g\}$  w mapie symplektycznej:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_{m+i}}$$
(11.8)

Zatem  $(grad_{\omega}f)g = (-grad_{\omega}g)f$  a więc nawias Poissona jest formą antysymetryczną. (b) Wykorzystując antysymetrię nawiasu Poissona, przekształćmy (11.7) otrzymując:

 $\{f,\{g,h\}\}-\{g\{f,h\}\}=\{\{f,g\},h\}.$ 

Równość tę można odczytać jako równość

$$grad_{\omega}f((grad_{\omega}g)h) - grad_{\omega}g((grad_{\omega}f)h) = (grad_{\omega}\{f,g\})h$$

Ponieważ zachodzi ona przy dowolnym h, traktując pola wektorowe jako operacje liniowe, możemy napisać

$$(grad_{\omega}f) \circ (grad_{\omega}g) - (grad_{\omega}g) \circ (grad_{\omega}f) = grad_{\omega}\{f,g\}$$
 (11.9)

i oznaczając komutator tych operacji jako nawias Liego odpowiednich pól możemy (11.9)zapisać w postaci

$$\left[grad_{\omega}f, grad_{\omega}g\right] = grad_{\omega}\{f, g\}$$
(11.10)

Przedstawione przejścia można też przeprowadzić w przeciwnym kierunku, co dowodzi, że równości (??) i (11.10) są równoważne. Wykażemy, że zachodzi równość (11.10). W tym celu zastąpimy ją równoważną (ze względu na nieosobliwość  $\omega$ ) równością

$$\left[grad_{\omega}f,grad_{\omega}g\right] \rfloor \omega = \left(grad_{\omega}\{f,g\}\right) \rfloor \omega.$$
(11.11)

Na mocy Stwierdzenia 11.1 punkty 5, 2, i 3 oraz równości (10.17) zapisanej w formie  $(grad_{\omega}f)|_{\omega} = df$  możemy lewą stronę (11.11) przedstawić w postaci

$$\mathcal{L}_{grad_{\omega}f}(dg) - \mathcal{L}_{grad_{\omega}g}(df) = d((grad_{\omega}f)) \cdot g) = d\{f, g\}$$

Natomiast strona prawa przyjmuje postać  $grad_{\omega}\{f,g\}|\omega = d\{f,g\}.$ 

Uwaga 11.1. Punkty (a) i (b) Stwierdzenia 11.3 można podsumować mówiąc, że przestrzeń liniowa  $C^{\infty}(M)$  wyposażona w dwuliniową operację

$$C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \ni (f,g) \to \{f,g\} \in C^{\infty}(M)$$

jest algebrą Liego. Również przestrzeń liniowa<br/>  $\Gamma^{\infty}(M)$ wszystkich pól wektorowych klasy $C^{\infty}$ n<br/>aM,wyposażona w nawias Liego jest algebrą Liego. Zauważ<br/>my, że z (11.10) wynika, że odw<br/>zorowanie

$$grad_{\omega}: (C^{\infty}(M), \{\cdot, \cdot\}) \ni f \longrightarrow grad_{\omega}f \in (\Gamma^{\infty}(M), [\cdot, \cdot])$$

jest homomorfizmem tych algebr. Jako obraz tego homomorfizmu otrzymujemy zbiór wszystkich pól hamiltonowskich, który stanowi zatem algebrę Liego. Jądrem homomorfizmu  $grad_{\omega}$  są funkcje stałe. Powyższa struktura algebry Liego jest związana z konkretnym układem mechanicznym uwzględniając jedynie jego przestrzeń konfiguracyjną.

#### Stwierdzenie 11.4. (Poisson)

Niech M będzie rozmaitością symplektyczną z formą  $\omega$ . Niech  $H \in C^{\infty}(M)$ . Rozpatrzmy ewolucję  $\mathbf{R} \ni t \to x(t) \in M$  opisaną układem równań Hamiltona

$$\dot{x}(t) = grad_{\omega}H(x(t)) \tag{11.12}$$

Wtedy

(a) jeżeli {f, H} = 0 to f jest całką pierwszą układu (11.12)
(b) jeżeli f<sub>1</sub> i f<sub>2</sub> są całkami pierwszymi tej ewolucji, to także {f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>} jest całką pierwszą.

Dowód. (a) Mamy

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \left(grad_{\omega}H(x(t))\right) \cdot f = \{H, f\}(x(t))$$

Zatem f jest całką pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{f, H\} = 0$ . (b) Z tożsamości Jacobiego (??) wynika, że

$$\{H, \{f_1, f_2\}\} = \{f_1\{f_2, H\} - \{f_2\{H, f_1\}\},\$$

ale  $\{f_2, H\} = \{H, f_1\} = 0$ . Zatem  $\{H\{f_1, f_2\}\} = 0$ , co należało pokazać.

Uzupełnieniem poprzedniego stwierdzenia jest pochodzące od Emmy Noether.

**Stwierdzenie 11.5.** Niech będą dane dwa układy o postaci (11.5) i o prawych stronach równych  $grad_{\omega}F_i$ , i = 1, 2. Jeżeli 1-parametrowa grupa lokalna  $t \to x_t^1$  związana z polem  $grad_{\omega}F_1$ zachowuje  $F_2$ , to  $F_1$  jest całką pierwszą układu  $\dot{x} = grad_{\omega}F_2$ .

Dowód. Niech  $x \in M$  i rozważmy krzywą całkową  $x_t^1(x)$ , gdzie  $x_0^1 = x$  wtedy

$$F_2(x_t^1(x)) = F_2(x) = const$$

a zatem

$$((grad_{\omega}F_1) \cdot F_2)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}F_2(x_t^1) = 0$$

czyli

$${F_2, F_1}(x) = 0$$

i ze Stwierdzenia 11.4 (a) wynika teza.

11.5. Relacje komutacyjne.

Przy powstawaniu formalzmu mechaniki kwantowej ważną wskazówką były wartości nawiasu Poissona dla kilku podstawowych funkcji, jakimi są położenia  $q_1, ..., q_n$  i pędy  $p_1, ..., p_2$ , będące współrzędnymi w wiązce kostycznej do przestrzeni konfiguracyjnej naszego układu. Dla mapy symplektycznej, w której nawias Poissona zadany jest formułą (11.12) otrzymamy

$$\{p_i, p_j\} = 0 \qquad i, j, = 1, \dots n \qquad (11.13)$$

Aby uzyskać (11.13) wystarczy w formule (11.12) przyjąć

$$f = p_i$$
,  $g = p_j$ , oraz  $(x_1, \dots, x_n) = (q_1, \dots, q_n)$  i  $(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = (p_1, \dots, p_n)$ .

W analogiczny sposób otrzymamy

$$\{q_i, q_j\} = 0 i, j = 1, \dots n (11.14)$$

$$\{p_i, q_j\} = -\delta_j^i \mathbf{1}$$
  $i, j = 1, ....$  (11.15)

gdzie 1 oznacza funkcję stałą, przyjmującą wartość 1.

#### 11.6. Strukturalne spojrzenie na formalizm Hamiltona.

Teoria zajmująca się opisem zmian w czasie układu fizycznego składa się na ogół z trzech części. Po pierwsze podaje matematyczny model rzeczywistości podlegającej ewolucji. Opis tej rzeczywistości w ustalonej chwili nazwiemy stanem układu w tej chwili.

Drugą częścią teorii - najważniejszą fizycznie - jest matematyczne sformułowanie prawa ewolucji. Najczęściej prawo takie jest opisane równaniem różniczkowym. Trzecim składnikiem teorii jest wyróżnienie elementów dających informację o stanach układu, które z jednej strony powinny taki stan wyznaczać, a z drugiej strony mogłyby być wyznaczane za pomocą obserwacji i doświadczeń.

Elementy takie nazwiemy obserwablami.

W hamiltonowskim ujęciu mechaniki, opisem rzeczywistości jest przestrzeń fazowa  $\mathcal{F}$  układu. W najprostszym przypadku, układu n-punktów poruszających się swobodnie w  $\mathbf{R}^3, \mathcal{F}$  jest wiązką kostyczną do  $\mathbf{R}^{3n}$ . Stanami naszego układu będą punkty  $\mathcal{F}$ . Prawem opisującym ewolucję
układu są równania Hamiltona, określone przez naturalną strukturę symplektyczną na  $\mathcal{F}$  oraz przez funkcję Hamiltona H = T + V, gdzie T jest energia kinetyczną a V potencjałem. We współrzędnych kartezjańskich równania te mają postać

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i(q)$$
(11.16)

a ewolucja to przejście od stanu początkowego wyznaczającego warunki początkowe  $q(t_0) = q_0 \quad p(t_0) = p_0$  do stanu w chwili T wyznaczonego w wyniku rozwiązania układu (11.16). Obserwablami dla naszego układu będą funkcje na  $\mathcal{F}$ , takie, jak współrzędne, pędy, momenty pędu energia etc. Na równi z ewolucją obserwabli  $q_1, ...q_n, p_1, ...p_n$  daną równaniami (11.16) moglibyśmy badać bezpośrednio ewolucję innych obserwabli. I tak ewolucję obserwabli B(q, p, t) możemy bezpośrednio opisać równaniem

$$\frac{\partial B(q, p, t)}{\partial t} = D_H \cdot B(q, p, t) \tag{11.17}$$

gdzie  $D_H$  jest polem wektorowym na  $\mathcal{F}$  o postaci

$$D_H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + F_i(q) \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Równanie to możemy interpretować jako równanie zwyczajne w przestrzeni funkcji na  $\mathcal{F}$ . Istotnie pisząc  $B_t(q, p)$  uzyskamy równanie opisujące krzywą  $\mathbf{R} \ni t \to B_t$  w postaci

$$\frac{dB_t}{dt} = D_H B_t$$

gdzie  $D_H$  jest operatorem liniowym  $D_H(B_t) = D_H \cdot B_t$ .

# 12. Mechanika kwantowa.

## 12.1. Uwagi ogólne.

Lata 1900 - 1930 były okresem zmian fizyce. Najważniejsze z nich to powstanie teorii względności oraz narodziny fizyki kwantowej. Jej podstawą jest mechanika kwantowa - nauka o zachowaniu atomów i cząstek elementarnych pod wpływem działajacych na nie sił.

Teoria względności stanowiła rewizję dotychczasowego systemu pojęć, była dziełem indywidualnym i w fazie powstawania niezależnym od fizyki eksperymentalnej. W odróżnieniu mechanika kwantowa dotyczyła nie znanych wcześniej aspektów rzeczywistości. Jej narodziny było procesem i wynikiem pracy wielu osób. Kolejne etapy tego procesu są związane ze znaczącymi odkryciami w teoriach elektromagnetyzmu, promieniotwórczości i cząstek elementarnych.

Główną trudnością, której pokonanie stanowi być może największe dokonanie dotychczasowej fizyki, było znalezienie właściwego modelowania matematycznego dla paradoksalnej i odległej od bezpośredniej inspekcji rzeczywistości świata mikro.

Inspiracja przy poszukiwaniu adekwatnego opisu pochodziła głównie z dwóch działów: mechaniki klasycznej i teorii elektromagnetyzmu Maxwella. W pierwszej z nich badanymi obiektami są ciała materialne, traktowane jako pojedyncze punkty lub ich sztywne układy. Ewolucja opisywana jest za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych. Pociąga to implicite jej determinizm. Opisywane obiekty nie mogą się przenikać, co przy przyjętym modelowaniu nie wznosi znaczących trudności. Każdy obiekt zajmuje w dowolnej chwili ustalone miejsce w przestrzeni.

Modelowanie teorii elektromagnetyzmu różni się znacznie. Mamy tu do czynienia nie z poruszjącymi się punktami lecz ze zmieniającymi się w czasie polami wektorowymi. Ewolucja tych pól opisywana jest za pomocą układu równań różniczkowych cząstkowych. Jest także deterministyczna. Rozwiązaniem równań Maxwella sa (w niestacjonarnej sytuacji) fale elektromagnetyczne. Zajmują one całą rozważaną przestrzeń i mogą się przenikać (interferować).

### 12.2. Narodziny fizyki kwantowej

Nie ma sporu co do daty narodzin fizyki kwantowej. Jest nią 14 grudnia 1900r. W tym dniu Max Planck zaprezentował na posiedzeniu Niemieckiego Towarzystwa Fizycznego w Berlinie hipotezę porcjowego (czyli kwantowego) charakteru emisji fal elektromagnetycznych. Celem referatu było uzasadnienie fenomenologicznego wzoru na intensywnośc promieniowania ciała doskonale czarnego. Podana pół roku wcześniej także przez Plancka formuła (kolejna i najlepiej odpowiadająca doświadczeniom z ciągu wcześniej proponowanych) opisywała ilość emitowanej energii na jednostkę czasu i jednostkę powierzchni:

$$e(\lambda,T) = a\lambda^{-5} \left(\frac{1}{exp\frac{b}{k\lambda T} - 1}\right)$$
(12.1)

gdzieTjest temperaturą ciała,  $\lambda$ długością emitowanej fali, k stałą Boltzmana, natomiast aibstałymi o nieznanym znaczeniu fizycznym.

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Przedstawione przez Plancka rozumowanie zakładło, że  $e((\lambda, T)$  zmienia się skokowa w porcjach będących wielokrotnością najmniejszej możliwej porcji dla danej długości fali. Porcja taka jest wyrażona za pomocą częstości fali  $\nu$  wzorem

$$E = h \ \nu \tag{12.2}$$

gdzie h jest stałą uniwersalną (stałą Plancka) mającą wymiar iloczynu jednostki pracy (1 Joul) mnożonej przez jednostkę czasu (1 sek). Potocznie h jest nazywana kwantem działania.

W rezultacie Planck uzyskał teoretyczne potwierdzenie wzoru (12.1) a co więcej stałe *a* i *b* uzyskały interpretację fizyczną.

$$a = 8\pi hc$$
 oraz  $b = hc$  (12.3)

gdziecoznacza prędkość światła w próżni.

Uwzględniając (12.3) formuła (12.1) zestawiona w wynikiem doświadczalnym dla  $e(\lambda, T)$  pozwala wyznaczyć stałą Plancka h. Obecnie przyjmuje się  $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} j \cdot sek$ 

Przymiotnikiem "klasyczny" określa się obecnie całą teorię przedkwantową. Należą do niej np. mechanika klasyczna, elektrodynamika Maxwella, klasyczna mechanika statystyczna, termodynamika i teoria grawitacji.

Następnym potwierdzeniem kwantowej natury energii była praca Alberta Einsteina z 1905r. Zawierała ona koncepcyjną dyskusję kwantowego charakteru promieniowania elektromagnetycznego a w końcowym fragmencie pokazywała, jak przyjęcie hipotezy kwantowego charakteru energii pozwala wyjaśnić niezgodne z klasyczną elektrotermodynamiką cechy zjawiska fotoelektrycznego (tj. zjawiska wyzwalania stacjonarnych elektronów przez padające światło). Jedna z takich cech głosi, że natężenie prądu elektrycznego powstającego w fotokomórce zależy wprost proporcjonalnie od natężenia padającego na nią światła, natomiast energia indywidualnych elektronów od niego nie zależy.

Inne prace wczesnego okresu teorii kwantowej dotyczyły różnych niezgodności przewidywań klasycznych w odniesieniu do ciepła właściwego ciał, własności sieci krystalicznych itd.

Około roku 1911 świadomość sukcesu teorii kwantowej w wyjaśnianiu różnych aspektów drgań harmonicznych (pola elektromagnetycznego sieci krystalicznych) stała się powszechna.

## 12.3. Powstawanie mechaniki kwantowej

Impulsem, który przyspieszył powstanie mechaniki kwantowej był wynik doświadczenia Rutherforda, Geigera i Marsdena z 1909r. Wykazało ono w sposób nie pozostawiający wątpliwości, że atomy zawierają małe i ciężkie jądra. Po dwóch latach dalszych badań Rutherford zaproponował model planetarny atomów. Model ten w wielu aspektach odpowiadał wynikom doświadczeń rozproszeniowych, ale jego trwałość była niezgodna z klasyczną elektrodynamiką. Pomysł przezwyciężenia tego paradoksu za pomocą postulatów kwantowych pojawił się w 1913r. za sprawą duńskiego fizyka Nielsa Bohra.

Bohr zauważył, że planetarny model budowy atomu nie daje żadnej wskazówki co do jego rozmiarów. Na podstawie znajomości ładunków i mas nie można bowiem nic powiedzieć o odległościach. Potrzebna jest do tego jeszcze jedna wielkość wymiarowa, za którą Bohr przyjął stałą Plancka h.

Praca Bohra była oparta na następujących założeniach:

- 1. Energia promieniowania elektromagnetycznego nie jest wysyłana lub pochłaniana w sposób ciągły (zgodnie z klasyczną elektrodynamiką) ale jej wypromieniowanie następuje tylko przy przechodzeniu z jednego "stanu stacjonarnego" do innego takiego stanu.
- 2. Dynamiczna równowaga układu w stanie stacjonarnym ustalana jest prawami mechaniki klasycznej. Przy przejściach między stanami stacjonarnymi prawa te nie obowiązują.

- 3. Przejściu od jednego stanu stacjonarnego do innego towarzyszy wysyłanie promieniowania o ustalonej częstości  $\nu$ , której związek z wypromieniowaną energią E dany jest wzorem Plancka  $E = h\nu$ .
- 4. Dla układu składającego się z pojedynczego elektronu krążącego wokół jądra po orbicie kołowej, stan stacjonarny jest wyróżniony warunkiem, że moment pędu elektronu jest równy całkowitej wielokrotności  $\frac{h}{2\pi}$ . Wśród wszystkich stanów stacjonarnych najważniejszy jest

stan podstawowy, dla którego moment pędu jest równy  $\frac{h}{2\pi}$ .

Jak już było powiedziane, doświadczenia rozproszeniowe (takie jak Rutherforda, Geigera i Marsdena z 1909r.) nie były w stanie obalić ani potwierdzić tych założeń.

W sukurs dalszemu rozwojowi fizyki przyszedł szczęśliwy przypadek związany z osobą Johannesa Balmera (1825 -1898). Miał on wykształcenie techniczne, pracował w Bazylei, ucząc arytmetyki i rysunku w wyższej szkole dla dziewcząt. Z zamiłowania był numerologiem, tj poszukiwaczem prawidłowości w układach liczb mających "walor obiektywności". Ponieważ tego typu układy są rzadkością, Balmer był wdzięczny koledze, który dostarczył mu ciąg czterech liczb  $H_{\alpha}, H_{\beta}, H_{\gamma}, H_{\delta}$ , będących długościami fal ( w angstremach) dla linii widmowych wodoru. Pomiarami linii widmowych zajmowano się od czasu odkrycia przez Bunsena i Kirchhoffa, że stanowią one "linie papilarne " identyfikujące pierwiastek. Rozpoznaniem związków pomiędzy sprezentowanymi Balmerowi liczbami zajmowano się już dawniej, bez widocznego skutku. Balmer jednak odniósł błyskotliwy sukces. Zauważył mianowicie, że jeżeli każdą z przedstawionych mu liczb (widocznych w poniższej tabeli w kolumnie "pomiar"), podzieli się przez "liczbę bazową"

b = 3645,6, to otrzyma się z dużą dokładnością niewielkie ułamki.

Linia	Pomiar	Ze wzoru	Różnica
$H_{\alpha}$	6562.10	6562.08	+0,02
$H_{\beta}$	4860.74	4860.8	-0.06
$H_{\gamma}$	4340.1	4340,0	+0.1
$H_{\delta}$	4101.2	4101.3	-0,1

Konkretnie, liczby w kolumnie "Ze wzoru" możemy przedstawić w formie:

$$b \cdot \frac{9}{5}, \qquad b \cdot \frac{4}{3}, \qquad b \cdot \frac{25}{21}, \qquad b \cdot \frac{9}{8}.$$

Następnie Balmer zauważył, że powyższe liczby można też zapisać jako:

$$b \cdot \frac{9}{5}, \qquad b \cdot \frac{16}{12}, \qquad b \cdot \frac{25}{21}, \qquad b \cdot \frac{36}{32},$$

co już sugeruje prawidłowość.

$$b \cdot \frac{n^2}{n^2 - k^2}$$
 dla  $k = 2$  oraz  $n = 3, 4, 5, 6$  (12.4)

Dokładność opisu danych doświadczalnych za pomocą wzoru Balmera (12.4) nie pozostawia wątpliwości, że zgodność ta nie jest dziełem przypadku. Odkrycie Balmera stało się początkiem rewolucji w opisie linii widmowych i doprowadziło do powstania empirycznej zasady Rydyberga - Ritza, według której *częstości* linii widmowych dają się przedstawić jako różnice:

$$\nu = \frac{K}{(k+\alpha_r)^2} - \frac{K}{(n+\alpha_s)^2}$$
(12.5)

gdzie n, k są liczbami naturalnymi <br/>a $K, \alpha_r, \alpha_s,$  stałymi zależnymi tylko od pierwiastka i serii wid<br/>mowej.

Dla atomu wodoru i dla serii Balmera we wzorze (12.5) należy przyjąć  $K = \frac{R}{h}$ ,  $\alpha_r = \alpha_s = 0$ , k = 2, oraz n = 3, 4, 5, 6. Otrzymujemy wtedy

$$\nu_n = \frac{R}{\hbar} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \qquad n = 3, 4, 5, 6 \tag{12.6}$$

gdzieRjest stałą Rydyberga,  $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ ahjest stałą Plancka.

### 12.4. Model Bohra atomu wodoru.

Atom wodoru (według modelu planetarnego Rutherforda ) składa się z jądra o dodatnim ładunku +e i obiegajacego go elektronu o ładunku -e. Elektron jest przyciągany przez jądro siłą Coulomba o potencjale

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$
 (12.7)

gdzie  $\epsilon_0$  jest stałą dielektryczną próżni. Zgodnie ze Stwierdzeniem 5.4 zmiana promienia r odbywa się jak w ruchu 1-wymiarowym z potencjałem zredukowanym

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

gdzie M jest stałym w czasie ruchu momentem pędu.

Przyjmiemy, że stan podstawowy odpowiada wartości r, dla której V(r) ma minimum, a zatem wtedy kiedy

$$V'(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{M^2}{mr^3} = 0,$$

skąd

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 M^2}{me^2}$$

W modelu Bohra przyjmuje się, że dla stanu podstawowego ma być  $M = \hbar$ , otrzymujemy stąd wzór na promień  $a_1$  orbity stanu podstawowego

$$a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}.\tag{12.8}$$

Dla n-tego stanu stacjonarnego otrzymamy analogicznie, przyjmując wartość  $M_n = n\hbar$ 

$$a_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2}.$$

Energię  $E_n$  na n-tej orbicie wyznaczymy ze wzoru:

$$E_n = \frac{|p_n|^2}{2m} + U(a_n)$$

Zauważmy, że z uwagi na kołowość n-tej orbity mamy:

$$|M_n| = |p_n| \cdot a_n$$

skąd

$$|p_n| = \frac{n\hbar}{a_n} = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{n}$$

zatem

$$E_n = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 n^2h^2} =$$
$$= -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Wielkość  $\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}$  nosi nazwę stałej Rydyberga, ma wymiar energii i jest oznaczana literą R. Wygodne jest przyjąć R jako jednostkę energii odpowiednią dla świata atomowego.

Zatem energia całkowita elektronu znajdującego się na n<br/>-tej orbicie Bohra wyróżnionej warunkiem  $M=n\hbar$ wynosi

$$E_n = -\frac{R}{n^2}$$
  $n = 1, 2, ...$  (12.9)

Uwzględniając wzór Plancka  $E = \nu h$  otrzymamy stąd częstotliwość promieniowania emitowanego przy przejściu z n - tej na k-tą orbitę dla n > k (tj. dla  $E_n > E_k$ ). (Porównaj (12.6)).

$$\nu_{n,k} = \frac{E_n - E_k}{h} = \frac{R}{h} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$
(12.10)

Okazuje się więc, że częstotliwości dla serii Balmera odpowiadają spadaniu na drugą orbiteę Bohra.

Dalszy rozwój teorii Bohra zmierzał do objęcia podobnym schematem bardziej skomplikowanych atomów i polegał na poszukiwaniu ogólniejszych postaci warunków kwantowych, które można by wtedy stosować.

Warunki te, których nie będziemy omawiać, znane są pod nazwą waunków Bohra - Sommerfelda. Znalazły one różne zastosowania, mi.in. do wyznaczania poziomów energetycznych atomu wodoru z uwzględnieniem dynamiki relatywistycznej.

Okres tych poszukiwań, zwany starszą teorią kwantów, nie przyniósł ostatecznego sformułowania mechaniki kwantowej. Ośrodkiem badań nad starszą teorią kwantów stał się Instytut Fizyki w Kopenhadze, stworzony dla Bohra przez rząd duński. Do dziś istnieje pojęcie "kopenhaskiej interpretacji" mechaniki kwantowej, z którą związane są dwie zasady:

Zasada odpowiedniości, mówiąca, że dla dużych liczb kwantowych prawa mechaniki kwantowej powinny być prawie zgodne z prawami mechaniki klasycznej.

Drugą jest zasada komplementarności, mówiąca że opis zjawisk atomowych powinien być możliwy w dwóch modelach - korpuskularnym i falowym.

Zanim przejdziemy do rewolucji lat dwudziestych XX wieku, która przyniosła ostateczną formę mechaniki kwantowej, opiszemy fikcyjne doświadczenie pomysłu R. Feynmana, ukazujące problem z modelowaniem zjawisk kwantowych.

Opisane poniżej doświadczenie jest zachowującą istotę rzeczy alegorią rzeczywistych eksperymentów. Wnioski z nich stanowią istotną przesłankę dla konstrukcji formalizmu mechaniki kwantowej.

Doświadczenie dotyczy elektronów, których źródło znajduje się w punkcie A (zobacz rysunek 12.1). W pewnej odległości od A znajduje się przesłona B, w której są otwory, przez które elektrony mogą się przedostawać w kierunku ekranu C. Za pomocą urządzenia rejestrującego możemy obserwować pojawienie się elektronu, w postaci pojedynczego impulsu.



W wyniku wielokrotnych prób można więc ustalić z jaką częstością (z jakim prawdopodobieństwem ) elektrony pojawiają się się w danym miejscu ekranu C przy ustalonej konfiguracji otworów w przesłonie B.

Przeprowadzimy trzy eksperymenty, działając w opisany wyżej sposób przy trzech różnych konfiguracjach otworów.

W pierwszym eksperymencie otwarty jest tylko otwór 1, w drugim tylko otwór 2 a w trzecim otwarte są oba otwory. Otóż okazuje się, że tak przeprowadzone trzy doświadczenia dają prawdopodobieństwo znalezienia się elektronu na ekranie C, opisane przez gęstości prawdopodobieństwa  $f_1, f_2, f_3$ , jak na rysunku poniżej:



gdzie rysunek (1) odpowiada sytuacji doświadczenia 1 itd. Zastanówmy się, co to oznacza. Przyjmując dla uproszczenia, że otwory 1 i 2 umieszczone są symetrycznie względem os<br/>i $0_x$ , możemy przyjąć, że częstości trafiania elektronu w każdy z otworów są takie same. Wobec tego, przy otwartych obu otworach połowa elektronów będzie zachowywać się zgodnie ze statystyką  $f_1$ a druga połowa zgodnie z<br/>  $f_2$ . W rezultacie statystyka łączna F miałaby postać

$$F = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \neq f_3.$$

Narzuca się tu porównanie sytuacji z falami na wodzie.



Wtedy, traktując elektron jako falę kulistą o środku w A po jej dojściu do otworów 1 i 2, staje się ona (zgodnie z zasadą Huygensa) źródłem nowych fal kulistych. Fale te następnie interferują, wzmacniając się lub osłabiając, co doprowadza do sytuacji (1) + (2) na ekranie C.

Mamy tu więc sytuację, że wprawdzie elektron na ekranie C sygnalizuje swoje pojawienie się w ustalonym jego miejscu, ale jednocześnie, mając otwarte oba otwory w przesłonie, korzysta z obu z nich.

Eksperyment ten sugeruje następującą interpretację

- 1. Położenie elektronu daje się ustalić doświadczalnie, ale nie daje się przewidzieć w sposób pewny. To co możemy powiedzieć o jego przyszłym położeniu to tylko prawdopodobieństwo znalezienia się w pewnym obszarze.
- 2. Prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie C, jeżeli wiemy że był on poprzednio w stanie B, nie jest otrzymywane jako prawdopodobieństwo warunkowe.

Przytoczone doświadczenie sugeruje, że opisywane przejście od stanu B do ostatecznego rozkładu na ekranie C nie produkuje ostatecznego prawdopodobieństwa  $f_3$  w postaci  $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ . Elektron bowiem przebywa w punkcie 1 z prawdopodobieństwem 1/2 i w punkcie 2 też z prawdopodobieństwem 1/2.

Okazuje się (nie wynika to z jakościowego opisu  $f_3$ ,) że właściwym modelowaniem jest rozważanie funkcji o wartościach zespolonych, dla których  $f_1, f_2if_3$  są ich wartościami bezwzględnymi. To znaczy, że należy rozważyć

$$F_{i}(x) = f_{i}(x)e^{i\varphi_{j}(x)}, \quad j = 1, 2, 3 \text{ gdzie } i = \sqrt{-1}$$

Wtedy, przy odpowiednim doborze czynników fazowych  $e^{i\varphi_j(x)}$  j = 1, 2, 3 otrzymamy

$$f_3(x) = |F_1(x) + F_2(x)|.$$

# 13. Równanie Schrödingera

### 13.1. Fale materii de Broglie'a.

Rok 1926 można uważać za początek współczesnej mechaniki kwantowej. Pierwszą jaskółką nowych czasów była praca Heisenberga z lata 1925r. W niej to pojawiła się po raz pierwszy idea, że położenie i pęd powinny być opisywane wielkościami nieprzemiennymi, przy czym stała Plancka jest miarą ich nieprzemienności. Od tej pory zaczął się utrwalać pogląd, że przejście od mechaniki klasycznej do kwantowej (tzw. kwantowanie) polega na zastąpieniu - z zachowaniem pewnych reguł - klasycznych przemiennych obserwabli (por. (11.6)) nieprzemiennymi operatorami.

Zrozumienie matematyki, która stoi za tym przejściem, przychodziło stopniowo i dziś oryginalne prace z okresu tzw. mechaniki macierzowej (Heisenberg, Bohr, Jordan, Dirac) są zupełnie nieczytelne.

Mechanika macierzowa odniosła szereg sukcesów, rozpracowując kwantowy odpowiednik oscylatora harmonicznego (Heisenberg, Dirac) oraz, potwierdzając nowymi metodami, wzór Balmera - Bohra (12.10) (Pauli, Dirac). Słabą jej stroną był brak opisu ewolucji, (np. układów rozproszeniowych) oraz ogromne trudności rachunkowe.

Przełom nastąpił w wyniku połączenia mechaniki macierzowej z mechaniką falową de Broglie'a - Schrödingera.

W 1924r. L. de Broglie w swojej pracy doktorskiej przyjął jako założenie istnienie pewnego periodycznego zjawiska związanego z ruchem każdej porcji materii. Założył on, że cząstkom swobodnym (tj. punktom materialnym, pozostającym w polu stałego potencjału), których ruch (z dokładnością do położenia początkowego) jest scharakteryzowany przez energię całkowitą E i pęd p, odpowiadają zespolone fale płaskie. tj funkcje

$$\mathbf{R}^{3} \times \mathbf{R} \ni (x,t) \to \psi(x,t) = A \cdot e^{2\pi i (\langle k,x \rangle - \nu t)} \in \mathbf{C}$$
(13.1)

gdzie  $k \in \mathbf{R}^3$  jest wektorem a  $\nu \in \mathbf{R}$  liczbą.

Wektor k występuje we wzorze (13.1.1) wyznaczając formę liniową i wobec tego ewolucja wszystkich wektorów, dla których  $\langle x, k \rangle$  ma ustaloną wartość (tj. leżących na ustalonej płaszczyźnie, będącej translacją płaszczyzny

$$p = \{x : < x, k \ge 0\}$$

przebiega podobnie - stąd nazwa "fala płaska".

Stała A - amplituda fali  $\Psi$  - ma w naszych rozważaniach znaczenie drugorzędne, podobnie jak położenie początkowe punktu materialnego, odpowiadającego fali  $\Psi$ .

Odpowiedniość de Broglie'a polega na przyporządkowaniu parze (p, E), gdzie p jest pędem a E energią całkowitą cząstki swobodnej pary  $(k, \nu)$ , wyznaczającej falę płaską z dokładnością do amplitudy A. Przyjmujemy wtedy

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad k = \frac{p}{h}, \tag{13.2}$$

gdzie h jest stałą Plancka.

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Oznaczmy dla wygody  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Wtedy (13.1) i (13.2) dają:

$$\Psi(x,t) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \left( \langle p, x \rangle - Et \right)}$$
(13.3)

Niech  $p = (p_1, p_2, p_3)$  i przyjmijmy

$$E - U = \hbar^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m}$$

gdzie m jest masą cząstki.

Stwierdzenie 13.1. Funkcja (13.3) spełnia równanie falowe o postaci

$$\left(\frac{E-U}{E^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{2m}\Delta\Psi,\tag{13.4}$$

$$gdzie \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$
 jest operatorem Laplace'a.

Dowód polega na policzeniu pochodnych funkcji  $\Psi$  i nie będziemy go przytaczać.

### 13.2. Równanie Schrödingera.

Pokażmy teraz, jak od równania falowego i fal płaskich można przejść do zmodyfikowanej sytuacji - równania Schrödingera i fal prawdopodobieństwa.

Zauważmy najpierw, że poza geometryczną cechą płaskości, fale (13.3) są wyróżnione tym, że mają postać iloczynu funkcji zależnej od x i funkcji zależnej od t. Istotnie,

$$\Psi(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar} < k, x >} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

Postąpmy o krok dalej i rozważmy ogólniejsze funkcje

$$\varphi(x,t) = A(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$
(13.5)

gdzie A jest funkcją zespoloną, na którą następnie narzucimy warunki wynikające z probalistycznej interpretacji opisywanej sytuacji.

Rozważmy także równanie

$$\left(\frac{E-U}{E^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{2m}\ \Delta\Psi,\tag{13.6}$$

które formalnie wygląda, jak równanie (13.4), ale tym razem E jest liczbą (poziomem energii całkowitej) natomiast U jest funkcją rzeczywistą (potencjałem) na  $\mathbb{R}^3$ .

Rozważmy przestrzeń  $L^2({\bf R}^3)$ funkcji o wartościach zespolonych, określonych na ${\bf R}^3,$ takich, że

$$\int_{\mathbf{R}^3} |f(x)| \, dx < +\infty. \tag{13.7}$$

W związku ze zmodyfikowanym równaniem (13.6) wprowadzimy operator (nieograniczony) działający na przestrzeni  $L^2(\mathbf{R}^3)$  "operator energii" H za pomocą wzoru:

$$Hf = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \ \bigtriangleup + U\right)f \tag{13.8}$$

- (a)  $\varphi$  spełnia równanie (13.6),
- (b) HA = EA
- (c)  $\varphi$  spełnia równanie

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi$$
 (13.9)

 $Dowód.~({\rm a})\Rightarrow$ (b). Jeżeli $\varphi(x,t)=A(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ to po wstawieniu  $\varphi$ do równania (13.6) otrzymamy

$$\frac{E-U}{E^2} \cdot \left( -\frac{E^2}{\hbar^2} A(x) \ e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \cdot \bigwedge (A)(x)$$

i upraszczając czynnik  $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$  otrzymamy

$$-(E-U)A(x) = \hbar^2 \left( \bigwedge A \right)(x)$$

skąd

$$-EA(x) = \left(\hbar^2 \bigtriangleup -U\right)A(x)$$

czyli

$$HA = EA$$

(b)  $\Rightarrow$  (a) Wszystkie przejścia poprzedniego dowodu można przeprowadzić też w przeciwnym kierunku.

(c)  $\Rightarrow$  (b). Niech  $\varphi(x,t)=A(x)\cdot\alpha(t)$  i niech

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \bigwedge +U\right) \varphi.$$

Wtedy

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} \cdot A(x)t = \alpha(t) \ H(a)(x)$$

czyli dla tych t,dla których  $\alpha(t) \neq 0$ 

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{H(A)(x)}{A(x)}$$

Ponieważ lewa strona zależy od t a prawa od x, musi istnieć stała E, dla której

$$i\hbar \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{i}{\alpha} = E = \frac{H(A)(x)}{A(x)}.$$

Z równości tej wynikają dwa związki:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E$$
 oraz  $H(A)(x) = E \cdot A(x)$ 

Z pierwszego wynika postać  $\alpha(t) = C \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}Et}$ a drugi jest identyczny z warunkiem (b):

(b) $\Rightarrow$  (c). Jeżeli HA = EH to dla to dla  $\varphi(x,t) = A(x)e^{-\frac{1}{\hbar Et}}$  zachodzi

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = EA(x)e^{-\frac{1}{\hbar Et}} = E \cdot \varphi = H\varphi$$
, co oznacza (c).

**Definicja 13.1.** Równanie (13.9) nazywa się (pełnym) równaniem Schrödingera. Warunek Hf = Ef, czyli

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right)f = Ef \tag{13.10}$$

nazywa się równaniem Schrödingera bez czasu.

Uwaga 13.1. Pokazane przez nas przejście: równanie falowe (13.4) i fale płaskie  $\Rightarrow$ , równanie (13.6) i fale  $\varphi(x,t) = A(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E(t)} \Rightarrow$  równanie HA = EA i równanie Schrödingera  $i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi$ ujawniają związek między falami płaskimi i falami (13.5). Nie jest to jednak droga, na jakiej Schrödinger doszedł do sformułowania równań (13.9) i (13.10).

Pokazane przejścia są oparte na założeniu, że rozważane przez nas funkcje mają postać

$$\varphi(x,t) = A(x) \cdot \alpha(t), \tag{13.11}$$

co nie jest regułą dla rozwiązań dyskutowanych równań. (Równania są liniowe, więc np. suma rozwiązań o postaci (13.11) jest też rozwiązaniem). Jak pokazuje równoważność (b)  $\iff$  (c) w Stwierdzeniu 13.2, rozwiązania tej postaci odpowiają stanom stacjonarnym, to jest takim, kiedy amplituda A funkcji  $\varphi$  jest funkcją własną operatora energii H.

Uwaga 13.2. Erwin Schrödinger wprowadzając w 1926r. równania (13.9) i (13.10) nie miał jasnej interpretacji fizycznej ich rozwiązań. Interpretację taką podał wkrótce potem Max Born. Przyjął on, że rozwiązanie  $\psi(t,x)$  równania Schrödingera (13.9) mające tę własność, że dla każdego ustalonego t funkcja  $F_t(x) = \psi(t,x)$  należy do  $L^2(\mathbf{R}^3, dx)$ , można interpretować jako ewolucję w czasie rozkładu prawdopodobieństwa. Wtedy  $\int_M |\psi(t,x)|^2 dx$  ma interpretację prawdopodobieństwa zdarzenia, że cząstka (lub układ cząstek) znajduje się w chwili t w podzbiorze M przestrzeni konfiguracyjnej  $\mathbf{R}^3$  lub  $\mathbf{R}^{3n}$ . Okazuje się, że spełnienie warunku  $\psi(t,x) \ni L^2(\mathbf{R}^3, dx)$  dla pewnego t pociąga spełnienie analogicznego warunku także dla pozostałych t, co uzasadnia traktowanie równania (13.9) jako równania zwyczajnego

$$\frac{d}{dt}F_t = -\frac{i}{\hbar}HF_t$$

w  $L^2(\mathbf{R}^3, dx)$ i wiąże równanie Schrödingera z teorią jednoparametrowych grup unitarnych w przestrzeni Hilberta.

Interpretacja Borna oznacza, że wprawdzie położenie indywidualnej cząstki nie jest przewidywalne, ale ewolucja rozkładu prawdopodobieństwa tego położenia jest w pełni deterministyczna.

### 13.3. Równanie Schrödingera bez czasu.

Przy przejściu od mechaniki klasycznej do kwantowej operator występujący po prawej stronie równania (13.9), odpowiada funkcji Hamiltona układu. Stąd jego nazwa - operator energii. Jak wiemy, jedną z podstawowych cech natury jest występowanie energii w porcjach. Ponieważ są one niezmiernie małe, cecha ta nie ingeruje w formaliźmie dotyczącym zjawisk w skali makro. Staje się natomiast jednym z głównych czynników kształtujących opis w skali atomowej. Aby uzyskać porcjowy charakter obserwowanych wartości energii, zmienimy nasze myślenie o obserwablach. Realizujemy je jako operatory, których widmo jest związane z obserwowanymi wartościami np. energią. Pełny opis kwantyzacji polegający na zastąpieniu klasycznych obserwabli - funkcji na przestrzeni fazowej - ich odpowiednikami kwantowymi - operatorami w przestrzeni Hilberta jest poza możliwościami aktualnej prezentacji. Zamiast tego pokażemy, że zbiór wartości własnych operatora energii dla potencjału odpowiadającego atomowi wodoru jest istotnie dyskretny i jego wartości zgadzają się z poziomami energetycznymi orbit odpowiadających stanom stacjonarnym modelu Bohra.

Stwierdzenie 13.3. Niech  $\lambda$  będzie wartością własną operatora H tj.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right)f = \lambda f, \qquad (13.12)$$

gdzie  $f \in L^2(\mathbf{R}^3, dx)$  oraz f jest ciągła. Jeżeli potencjał U przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

Dowód. Mnożąc obie strony (13.12) przez  $\overline{f}$ i odejmując stronami od tej równości, równość otrzymaną przez sprzężenie obu stron i pomnożenie ich przez f otrzymamy

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\Delta f\right)\overline{f} - \left(\Delta \overline{f}\right)f\right] = (\lambda - \overline{\lambda})|f|^2.$$
(13.13)

Stosując tożsamość

$$\sum g \cdot h - \sum h \cdot g = div(h \cdot gradg - g \ gradh),$$

w której przyjmiem<br/>y $g=f,h=\overline{f}$ i uwzlędniając wzór Gaussa- Ostrogradzkiego

$$\int_{\Omega} divF \ dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} \ ds$$

gdzie F jest polem wektorowym na  $\mathbb{R}^3$ , otrzymamy

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_{\Omega} |f|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\Omega} div (\bar{f}gradf - fgrad\bar{f}dx) = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\partial\Omega} (\bar{f}gradf - fgrad\bar{f})\vec{n} \, ds$$

zatem

$$\lambda - \bar{\lambda} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\partial\omega} \left( \bar{f} gradf - fgrad\bar{f} \right) \vec{n} \, ds \cdot \left( \int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{-1} \tag{13.14}$$

Niech  $f(x_0) \neq 0$ . Mnożąc obie strony równości (13.12) przez odpowiednią liczbę, możemy założyć, że  $\bar{f}(x_0) \cdot gradf(x_0) \in \mathbf{R}$ .

Wtedy  $\bar{f}(x_0) \cdot gradf(x_0) - f(x_0) \cdot grad\bar{f}(x_0) = 0$ . Podstawmy po prawej stronie (13.14) za  $\Omega$  kulę  $K_n$  o środku w  $x_0$  i promieniu  $\frac{1}{n}$ . Wtedy wartość prawej strony dąży do 0, kiedy  $n \longrightarrow \infty$ . Wynika stąd, że  $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ 

W dalszym ciągu tego wykładu zajmiemy się opisem widma operatora energii w przypadku kiedy U jest potencjałem coulombowskim , tj.

$$U(x) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \tag{13.15}$$

(porównaj (12.7) oraz Stwierdzenie 5.1).

Symetria kulista funkcji U sugeruje, że ten problem jest związany z grupą  $S0(3\mathbf{R})$ . Grupa ta składa się z macierzy ortogonalnych wymiaru 3, tj. macierzy  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$  gdzie  $a_{ij} \in \mathbf{R}$  takich, że  $A^1 = A^t$ . Ustalmy  $\lambda \in \mathbf{R}$ . W dalszym ciągu wygodnie będzie rozpatrywać operator  $H_{\lambda}$  o postaci

$$H_{\lambda}(f) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U - \lambda I \qquad (13.16)$$

Wtedy  $H(f) = \lambda f$  oznacza, że  $H_{\lambda}(f) = 0$ .

Dla grupy  $SO(3\mathbf{R})$  określmy jej naturalną reprezentację (tj homomorfizm) w grupę operatorów ograniczonych i odwracalnych w  $L^2(\mathbf{R}^3, dx)$  przyporządkowując elementowi  $A \in SO(3, \mathbf{R})$ operator  $\widetilde{A} : L^2(\mathbf{R}^3, dx) \to L^2(\mathbf{R}^3, dx)$  wzorem

$$\widetilde{A}f(x) = f(Ax) \tag{13.17}$$

Ponieważ dla dowolnego zbioru mierzalnego  $\Omega$  oraz  $A \in SO(3, \mathbf{R})$  zachodzi  $\mu(\Omega) = \mu(A\Omega)$ , gdzie  $\mu$  jest miarą Lebesque'a w  $\mathbf{R}^3$  to dla  $f \in L^2(\mathbf{R}^3, dx)$  oraz  $A \in SO(3, \mathbf{R})$  mamy  $\|\tilde{A}f\| = \|f\|$ .

Stwierdzenie 13.4. Niech  $A \in SO(3\mathbf{R})$  wtedy

$$\triangle \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \triangle \tag{13.18}$$

Dowód. Krok pierwszy.

Niech A będzie macierzą o trzech wierszach i trzech kolumnach i niech  $A \in \mathbf{R}^3$ . Oznaczmy

$$\frac{\partial}{\partial a}f(p) = \lim_{t \to \infty} \frac{f(p+ta) - f(p)}{t}$$

a przez  $\frac{\partial}{\partial a}$  oznaczymy operację liniową tej pochodnej przy zmiennym f. Niech  $\widetilde{A}f(x) = f(Ax)$ . Wtedy

lech Af(x) = f(Ax). Wiledy

$$\frac{\partial}{\partial a} \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \frac{\partial}{\partial (Aa)}.$$
(13.19)

Dowód polega na łatwych rachunkach i pozostawimy go czytelnikowi.

Oznaczmy  $\frac{\partial^2}{\partial b \ \partial a} = \frac{\partial}{\partial b} \circ \frac{\partial}{\partial a}$  wtedy z (13.3.8) otrzymamy  $\frac{\partial^2}{\partial b} \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \frac{\partial^2}{\partial a}$ 

$$\frac{\partial^2}{\partial b \ \partial a} \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \frac{\partial^2}{\partial (Ab) \ \partial (Aa)}.$$
(13.20)

Krok drugi.

Niech  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3 \in SO(3, \mathbf{R})$ . Oznaczając przez  $e_i$  i = 1, 2, 3 wersory osi mamy

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial e_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial e_2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial e_3)^2}$$

zatem z (13.20)

$$\Delta \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \Big(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial A e_i)^2}\Big)$$

ale

$$\frac{\partial^2}{(\partial Ae_i)^2} = \frac{\partial}{\partial (\sum_{k=1}^3 a_{ki}e_k)} \circ \frac{\partial}{\partial (\sum_{j=1}^3 a_{ji}e_j)} = \\ = \left(\sum_{k=1}^3 a_{ki}\frac{\partial}{\partial e_k}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^3 a_{ji}e_k\right)\frac{\partial}{\partial e_j}\right) = \sum_{j,k=1}^3 a_{ki}a_{ji}\frac{\partial}{\partial e_k\partial e_j}$$

zatem

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial A e_i)^2} = \sum_{i=1}^{3} \left( \sum_{j,k=1}^{3} a_{ki} a_{ji} \frac{\partial}{\partial e_k \partial e_j} \right) = \sum_{j,k=1}^{3} \left( \sum_{i=1}^{3} a_{ki} a_{ji} \right) \frac{\partial^2}{\partial e_k \partial e_j}$$

i z warunku  $A^t = A^{-1}$  wynika, że współczynnik przy  $\frac{\partial}{\partial e_k \partial e_j}$  wynosi 1 jeżeli j = k oraz 0 jeżeli  $j \neq k$ , co należało wykazać.

Oznaczmy

$$ker H_{\lambda} = \{ f \in L^2(\mathbf{R}^3, dx) : H_{\lambda} = 0 \}$$
 (13.21)

**Wniosek 13.1.**  $kerH_{\lambda}$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową  $L^{2}(\mathbf{R}^{3}, dx)$ , która jest niezmiennicza dla naturalnej reprezentacji  $SO(3, \mathbf{R})$ , tj dla  $A \in SO(3, \mathbf{R})$  oraz  $f \in kerH_{\lambda}$  także  $\widetilde{A}f \in kerH_{\lambda}$ .

Dowód. Część pierwsza jest konsekwencją domkniętości operatora  $H_{\lambda}$ , której nie będziemy uzasadniać. Jeżeli $f\in kerH_{\lambda}$ , tj $H_{\lambda}f=0$ to

$$H_{\lambda}(\widetilde{A}f) = (H_{\lambda} \circ \widetilde{A})(f) = \widetilde{A}(H_{\lambda}f) = 0$$

Dalszy ciąg naszych rozważań będzie poświęcony pytaniu

**Problem 13.1.** Ustalmy  $\lambda \in \mathbf{R}$  i niech U ma postać (13.15). Dla jakich wartości  $\lambda$  przestrzeń  $H_{\lambda}$  nie jest {0}?

Pytanie to w języku fizyki formułuje się: jakie są możliwe poziomy energii stanów stacjonarnych atomu wodoru?

# 14. Widmo operatora energii dla atomu wodoru

### 14.1. Operator Laplace'a i współrzędne sferyczne.

Jak pokazaliśmy w Stwierdzeniu (13.4), operator Laplace'a jest przemienny z operatorami naturalnej reprezentacji grupy  $SO(3\mathbf{R})$ . Sytuacja ta sugeruje spojrzenie na  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  jako na produkt sfery  $S^2$  i prostej R.

Technicznie odbywa się ono poprzez wprowadzenie na sferze współrzędnych "geograficznych": współrzędnej  $\theta$ - "szerokości geograficznej", stałej na "równoleżnikach" i podającej liczony od 0 do $\pi$ kąt między wektorem położenia a "osią obrotu Ziemi" (<br/>osią 0x<sub>3</sub> przyjętego układu kartezjańskiego) oraz współrzędnej<br/>  $\varphi$ - "długości geograficznej" - stałej na południkach - podającej kąt liczony od 0 do 2<br/> $\pi$  od "południka0", za który przyj<br/>miemy linię przecięcia sfery z półpłaszczyzną  $x_1x_2$  dl<br/>a $x_1 > 0$ . Zatem mamy

$$x_{1} = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$x_{2} = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_{3} = r \cos \theta$$
(14.1)

gdzie $0 < \theta < \pi, 0 < \varphi > 2\pi$ oraz $0, r < +\infty$ jest odległością od zera. Współrzędne  $(\theta, \varphi)$ dają po wyrzuceniu południka 0 wraz z biegunami wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie płaskiej mapy na sferę.

Wzory (14.1) można traktować albo jako równoległy do kartezjańskiego opis punktów  $W = \mathbf{R}^3 \setminus \{\text{półpłaszczyzna} \ x_1 x_2 \ \text{dla} \ x > 0\}$  albo jako wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie  $S: \Omega \to W$ , gdzie

$$\Omega = \{(\theta, \varphi, r) : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < r\}$$
 na W

Tej zamianie współrzędnych odpowiada nowy opis operatora Laplace'a. Przenosząc funkcję F(x, y, z) określoną na W do zbioru  $\Omega$ , tak że jej obraz wynosi

$$F(\theta, \varphi, r) = (F \circ S)(\theta, \varphi, r).$$

Po żmudnych rachunkach otrzymujemy

$$\Delta(\tilde{F}) = \frac{1}{r^2} \Big[ \frac{\partial}{\partial r} \Big( r^2 \ \frac{\partial}{\partial r} \Big) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \big( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \big) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Big] \tilde{F}(\theta, \varphi, r) \tag{14.2}$$

Przedmiotem naszego zainteresowania w tym wykładzie będzie widmo punktowe  $\sigma_p H$  operatora energii (13.8) to znaczy zbiór wartości własnych H. Wiemy już (Stwierdzenie 13.3), że dla potencjału U, przyjmującego wartości rzeczywiste widmo  $\sigma_p(H)$  przyjmuje wartości rzeczywiste.

W dalszym ciągu dla ustalonej liczby  $\lambda \in \mathbf{C}$  wygodnie będzie rozważać operator  $H_{\lambda} = H - \lambda I$ . Oznaczając

$$kerH_{\lambda} = \{ f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3, dx) : H_{\lambda}f = 0 \}$$

Możemy wtedy widmo punktowe H opisać warunkiem:

$$\sigma_p(H) = \{\lambda \in \mathbf{R} : ker H_\lambda \neq \{0\}\}$$
(14.3)

Matematyczne metody mechaniki © W.Wojtyński, Uniwersytet Warszawski, 2011.

Oczywiście widmo H zależy od potencjału U.

W tym rozdziale skupimy się na potencjale coulombowskim

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi \in_0} \frac{1}{r}$$
(14.4)

Strategia naszego postępowania jest następująca:

Korzystając z tego, że potencjał (14.4) jest niezmienniczy dla naturalnego działania grupy  $SO(3, \mathbf{R})$  użyjemy niebanalnego faktu (którego dowód naszkicowany jest w punkcie 14.4), że w przypadku potencjału sferycznie symetrycznego zachodzi implikacja:

$$(kerH_{\lambda} \neq \{0\}) \Rightarrow (kerH_{\lambda} \quad \text{zawiera funkcję} \quad F \text{ o postaci (14.5)})$$
  
 $F(\theta, \varphi, r) = \Delta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \cdot R(r).$  (14.5)

Następnie, korzystając z postaci (14.2) operatora Laplace'a zastosujemy "metodę separacji zmiennych ", prowadzącą do trzech równań różniczkowych zwyczajnych na funkcje  $\Delta$ ,  $\Phi$  i R z osobna.

Równania te nie są niezależne - łączy je występowanie wspólnych "stałych separacji". Ich wyznaczenie za pomocą równań na  $\varphi$  i na  $\theta$  stanowi drugą część postępowania. Nie korzysta ona z postaci (14.4) naszego potencjału a jedynie z jego symetrii sferycznej.

Krok ostatni, to dyskusja równania na R(r) z wykorzystaniem (14.4). Przynosi ona opis możliwych wartości własnych H zgodny z warunkami Bohra i Balmera. A zatem potwierdza trafność równania Schrödingera.

## 14.2. Metoda separacji zmiennych.

W przypadku sferycznie symetrycznego potencjału V, korzystając z opisu (14.2) operatora Laplace'a, otrzymany dla operatora  $H_{\lambda} = H - \lambda I$  warunek  $H_{\lambda}F = 0$  w postaci

$$\left[\left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \ \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}V(r) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\lambda\right) + \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right](F) = 0, \ (14.6)$$

Jak widzimy, nasz operator zapisuje się w formie

$$H_{\lambda} = \left(H_{\lambda}\right)_{r} + \left(H_{\lambda}\right)_{\theta\varphi}$$

gdzie część  $(H_{\lambda})_r$  zawiera tylko różniczkowanie względem r i mnożenie przez funkcje zależne od r. Analogicznie wygląda sytuacja dla  $(H_{\lambda})_{\theta\varphi}$ , tym razem względem  $\varphi$  i  $\theta$  oraz funkcji tych argumentów.

Zastosujmy ten operator do funkcji (14.5). Wtedy  $(H_{\lambda})_r$  działa tylko na R(r) a  $(H_{\lambda})_{\theta\varphi}$  tylko na  $\Delta(\theta) \cdot \phi(\varphi)$ . W rezultacie dzieląc całości przez F i przenosząc na prawą stronę część zależną od  $\theta, \varphi$  otrzymamy

$$\frac{(H_{\lambda})_{r}R(r)}{R(r)} = -\frac{(H_{\lambda})_{\theta,\varphi} \cdot \Delta(\theta) \ \phi(\varphi)}{\Delta(\theta) \ \phi(\varphi)}$$
(14.7)

Ponieważ po lewej stronie (14.7) mamy funkcję zmiennej r a po prawej zmiennych  $\theta$  i  $\varphi$ , równość ta może zachodzić tylko wtedy , kiedy obie strony są stałe. Otrzymamy więc:

$$(H_{\lambda})_{r}R(r) = cR(r)$$

$$(H_{\lambda})_{\theta,\varphi} \cdot \underline{\bigwedge}(\theta) \ \phi(\varphi) = -c \underline{\bigwedge}(\theta) \ \phi(\varphi)$$

Ostatnia równość po podstawieniu postaci $(H_{\lambda})_{\theta,\varphi}$ i po pomnożeniu przez $\sin^2\theta$  przyjmie formę:

$$\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Delta(\theta)\phi(\varphi) = -c\Delta(\theta)\phi(\varphi) \cdot \sin^2\theta,$$

Wykonując różniczkowania, dzieląc przez  $\Delta(\theta)\phi(\varphi)$ , i przenosząc wyrazy zawierające  $\theta$  na jedną stronę a zawierające  $\varphi$  na drugą, otrzymamy

$$\frac{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})\Delta(\theta)}{\Delta(\theta)} + c\sin^2\theta = \frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}}{\phi}$$

skąd, podobnie jak poprzednio lewa strona i prawa strona równe są stałe<br/>jd. Otrzymamy zatem równania

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = d\phi \tag{14.8}$$

oraz

$$\sin^2\theta \quad \frac{d^2\Delta}{d\theta^2} + \sin\theta \ \cos\theta \ \frac{d\Delta}{d\theta} + (c\sin^2\theta - d) \ \Delta = 0.$$
(14.9)

Każde rozwiązanie równania (14.8) jest kombinacją liniową funkcji  $e^{i\sqrt{d}\varphi}$  gdzie  $\sqrt{d}$  ma dwie wartości zespolone. Na to, aby  $\phi(\varphi)$  była funkcją  $2\pi$  okresową - co wynika z opisu we współrzędnych sferycznych, różniczkowalnej na  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  funkcji  $F(\theta, \varphi, r) = R(r) \Delta(\theta) \Phi(\varphi)$ , potrzeba i wystarcza by  $d = m^2$  dla  $m \in \mathbb{Z}$ . Zatem stała separacji c musi być taka żeby określone na  $(0, \pi)$  równanie (14.9) miało rozwiązania określone na  $(0, \pi)$ .

### 14.3. Kroki redukujące.

Zajmiemy się równaniem (14.9). Naszym celem jest pokazanie, że ma ono niezerowe rozwiązanie na  $(0, \pi)$  tylko wówczas, gdy c = l(l+1) dla l = 0, 1, 2, ...

Postępowanie polega na przechodzeniu do coraz prostszych równań w taki sposób, że kolejne równania zawierają c jako parametr oraz, że posiadanie rozwiązania przy ustalonym cprzez równanie poprzednie implikuje posiadanie rozwiązania przy tym samym c przez równanie następne. W rezultacie po pewnej liczbie kroków dochodzimy do równań:

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2f}{dx^2} - 2x\frac{df}{dx} - cf = 0 \tag{14.10}$$

Zagadnienie, przy jakim c takie równanie posiada rozwiązania na (-1, 1), jest jednym z klasycznych zadań analizy i wiąże się z teorią wielomianów Legendre'a. w innym sformułowaniu jest to pytanie o widmo punktowe operatora

$$Af = \left(1 - x^2\right) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx}.$$
 (14.11)

Nasze postępowanie przebiega w kilku krokach. Krok pierwszy:

Od równania (14.9) przejdziemy do równania

$$\left[(1-w^2)\frac{d^2}{dw^2} - 2w\frac{d}{dw} + (c - \frac{m^2}{1-w^2})\right]G(w) = 0$$
(14.12)

gdzie G ma być funkcją określoną na (-1,1). Przejścia dokonujemy, podstawiając  $\theta = \arccos w$ , tak, że  $G(w) = \Delta(\arccos w)$  lub inaczej:

$$\Delta(\theta) = G(\cos\theta) \tag{14.13}$$

Z (14.13) otrzymujemy

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = -\sin\theta \cdot \frac{dG}{dw}$$

oraz

$$\frac{d^2 \Delta}{d\theta^2} = \sin^2 \theta \frac{d^2 G}{dw^2} - \cos \theta \frac{dG}{dw}$$

Wstawiając te wartości do (14.9), po przekształceniach, otrzymamy (14.13). Krok drugi:

Od równania (14.13) przejdziemy do równania (14.14), rozważanego, podobnie jak (14.13), na odcinku (-1, 1).

$$\left[ (1 - w^2) \frac{d^2}{dw^2} - 2w(m+1) \frac{d}{dw} + (c - m(m+1)) \right] U_m(w) = 0 \qquad (m) \qquad (14.14)$$

Indeks *m* pojawia się w (14.14) w związku z następującą dalej redukcją, obniżającą *m* do m-1 i w konsekwencji doprowadzającą do (14.10) przy (m=0).

Aby przejść od (14.13) do (14.14)(m), przyjmijmy

$$U_m(w) = \frac{G(w)}{(1-w^2)^{\frac{m}{2}}}$$

a zatem

$$G(w) = U_m(w)(1 - w^2)^{\frac{m}{2}}.$$
(14.15)

Po prostych, lecz pracochłonnych obliczeniach, pokazujemy, że spełnienie przez G o postaci (14.15) warunku (14.12) implikuje, że  $U_m$  spełnia równanie (14.14)(m).

<u>Krok trzeci:</u>

**Lemat 14.1.** (a) Jeżeli  $U_{m-1}$  jest rozwiązaniem (14.14)(m-1) to  $\frac{dU_{m-1}}{dx}$  jest rozwiązaniem równania (14.14)(m).

(b) Każde rozwiązanie (14.14)(m) powstaje jako pochodna pewnego rozwiązania równania(14.14)(m-1).

Dowód.Niech h będzie jakąś funkcją różniczkowalną na (-1,1)i obliczmy wartość wyrażenia

$$\frac{d}{dw} \Big[ (1 - w^2) \frac{d^2 h}{dw^2} - wm \frac{dh}{dw} + (c - (m - 1)m)h \Big]$$
(14.16)

Oznaczmy  $\frac{dh}{dw} = F(w)$ . Wtedy wyrażenie (14.17) przyjmie postać:

$$-2w\frac{dF}{dw} + (1-w^2)\frac{d^2F}{dw^2} - 2mF - 2wm\frac{dF}{dw} + (c-(m-1)m)F = (1-w^2)\frac{d^2F}{dw^2} - 2w(m+1)\frac{dF}{dw} + (c-m(m+1))F.$$

Zatem, dla dowodu (a) należy jako  $h \le (14.16)$  podstawić  $U_{m-1}$ . Wtedy wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe identycznościowo zeru a wobec tego F spełnia równanie (14.14) (m).

Dla dowodu (b) niech F będzie rozwiązaniem (14.14) (m). Wtedy F jest funkcją różniczkowalną, a więc ma funkcję pierwotną h. Przeprowadzając przytoczone rachunki w odwrotnym kierunku i podstawiając  $F = \frac{dh}{dw}$  otrzymamy równość mówiącą, że wyrażenie (14.17) jest równe zeru. Oznacza to, że *h* spełnia równanie (14.14)(m-1), w kórym zero po prawej stronie zostało zastąpione przez jakąś stałą. Wtedy modyfikacja *h* przez dodanie do niego odpowiedniej stałej sprawi, że tak zmienione *h* spełni (14.14)(m-1).

**Wniosek 14.1.** Jeżeli równanie (14.9) z parametrem c ma rozwiązanie na  $(0, \pi)$ , to równanie (14.10) z parametrem c ma rozwiązanie na (-1, 1).

### 14.4. Wielomiany Legendre'a.

Pojawiają się one w związku z kilku zagadnieniami analizy. Powodem naszego zainteresowania jest ich związek z równaniem Laplace'a. Nie mając zamiaru przedstawić w pełny sposób tej klasy funkcji specjalnych, skoncentrujmy się na jej własnościach związanych z pytaniem:

**Problem 14.1.** Dla jakich wartości parametru zespolonego c równanie (14.10) posiada niezerowe rozwiązanie?

Definicja 14.1. Wielomian

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$
(14.17)

nazwiemy n-tym wielomianem Legendre'a . Przyjmiemy dodatkowo  $P_0 = 1$ . (Mnożenie przez czynnik  $\frac{1}{2^n n!}$  daje własność  $P_n(1) = 1$ i jest naturalne przy innej definicji wielomianów Legendre'a).

### Stwierdzenie 14.1. (a) Stopień $P_n$ wynosi n.

(b) Wielomian  $P_n$  spełnia równanie (14.10) ze stałą c równą (n-1)n. (Stałą zero w przypadku  $P_0$ ). Znaczy to, że dla operatora

$$A = \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d}{dx} \right]$$
(14.18)

zachodzi

$$AP_n = (n-1)nP_n$$

(c) Jeżeli  $c_1, c_2$  są wartościami własnymi operatora (14.11) oraz  $c_1 \neq c_2$  a  $f_1$  i  $f_2$  są odpowiadającymi im funkcjami własnymi,to

$$\int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x) dx = 0.$$

(d) Funkcje  $P_0, P_1, P_2, \dots$  stanowią ortogonalny układ zupełny w przestrzeni  $L_2([-1, 1], dx)$ 

Dowód. (a)  $P_n$  otrzymujemy, różniczkując n-krotnie wielomian  $(x^2 - 1)^n$  stopnia 2n.

(b) Niech  $W_n$  oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych, których stopień nie przekracza n. Ponieważ dla operatora liniowego A danego wzorem (14.11)  $A(x^n)$  jest też wielomianem stopnia n o współczynniku przy  $x^n$  równym n(n-1), widzimy, że  $A(W_n) = W_n$  dla n = 0, 1, 2...

Pisząc z kole<br/>i ${\cal A}$ w formie

$$A = \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d}{dx} \right] \tag{14.19}$$

i wykonując dwukrotnie całkowanie przez części, pokazujemy, że

$$\int_{-1}^{1} (Af) \cdot g dx = \int_{-1}^{1} f \cdot A(g) dx \tag{14.20}$$

dla dowolnych f i g.

Pokażemy, że w przestrzeni  $W_n$  istnieje baza ortogonalna  $f_0, f_1, \dots f_n$  taka, że stopień wielomianu  $f_n$  wynosi n, oraz  $Af_n = n(n-1)f_n$ .

Postępując indukcyjnie przyjmiemy  $f_0 = 1$ , wtedy  $Af_0 = 0$ .

Niech będą określone  $f_0, ..., f_{n-1}$ , stanowiące bazę ortogonalną  $W_{n-1}$  i będące wektorami własnymi A.

Niech  $f_n \in W_n$  będzie (jedynym z dokładnością do proporcjonalności) wektorem ortogonalnym do  $W_{n-1}$ . Wtedy na mocy (14.20)  $Af_n$  jest też ortogonalny do  $W_{n-1}$  a więc  $Af_n = \lambda f_n$ . Z tego, że  $Ax^n$  jest stopnia *n* oraz ma współczynnik przy  $x^n$  równy n(n-1) wynika, że  $\lambda = n(n-1)$ .

Pokażemy, że  $f_n = P_n$  (po odpowiednim unormowaniu). W tym celu wystarczy pokazać, że

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0 \qquad \text{dla} \qquad n \neq m \tag{14.21}$$

Istotnie,  $P_0 = 1 = f_0$  oraz  $P_0, P_1, P_{n-1}$ rozpinają  $W_{n-1}$  podobnie jak

 $f_0, f_1, ..., f_{n-1},$ a z pokazanego poprzedni<br/>o $f_0, ..., f_k$ stanowią bazę ortogonalną  $W_k$ dl<br/>ak=1,2,...,n.

Pokażemy, że zachodzi (14.21).

Posłużymy się lematem:

**Lemat 14.2.** Niech k < n, we dy  $\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^n = 0$  dla  $x \pm 1$ .

Istotnie

$$P_k = \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1) (x^2 - 1)^{n-1} = \sum_{j=0}^2 \binom{k}{j} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1) \cdot \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} (x^2 - 1)^{n-1}$$

Pierwszy składnik sumy po stronie prawej zawiera czynnik  $(x^2 - 1)$ , do pozostałych dwóch składników można stosować założenie indukcyjne. Wykorzystując lemat uzyskujemy (indukcyjnie) (14.21), całkując przez części.

(c) Z warunków 
$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{df_i}{dx} \right] = c_i f_i$$
 dla  $i = 1, 2$  otrzymamy  
$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \left( \frac{df_1}{dx} f_2 - \frac{df_2}{dx} f_1 \right) \right] dx = (c_1 - c_2) \int_{-1}^{1} f_1 f_2 dx$$

Lewa strona jest równa  $(1-x^2)\left(\frac{df_1}{dx}f_2 - \frac{df_2}{dx}f_1\right)$  w granicach 1,-1 a zatem wynosi 0.

(d) Z (b) i (c) wynika ortogonalność funkcji  $P_i$  a z (a) wynika, że przestrzeń liniowa rozpinana przez  $P_0, \dots P_n$ , jest zarazem przestrzenią rozpinaną przez  $1, x, x^2, \dots, x^n$ .

**Wniosek 14.2.** Jedynymi liczbami zespolonymi c, dla których równanie (14.10) ma rozwiązanie są  $0, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, ...m(m + 1), ...$ 

*Dowód.* Funkcja P spełniająca równanie (14.10) jest różniczkowalna na  $\mathbf{R}$ , więc należy do  $L^2([-1,1],dx)$ . Na podstawie punktu (c) Stwierdzenia 14.1 dla c różnego od m(m+1) przy m = 0, 1, 2...) f jako funkcja własna operatora (14.12) byłaby ortogonalna do przestrzeni wszystkich wielomianów, co nie jest możliwe.

# 14.5. Wartości własne operatora energii dla potencjału coulombowskiego.

Badając wartości własne operatora energii

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \bigwedge + U \tag{14.22}$$

rozważamy rodzinę operatorów  $H_{\lambda} = H\lambda - I$  dla  $\lambda \in \mathbb{C}$  i badamy warunek  $H_{\lambda} = 0$ . W przypadku potencjału coulombowskiego

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi \in_0} \frac{1}{r},$$
(14.23)

gdzie e jest ładunkiem elektronu a  $\in_0$  stałą dielektryczną próżni, wygodnie jest w opisie  $H_{\lambda}$ przejść do współrzędnych sferycznych, zapisując warunek  $H_{\lambda} = 0$  w postaci (14.6).

Jak pokazaliśmy, metoda separacji zmiennych prowadzi do równania  $(H_{\lambda})_r - cR(r) = 0$ , które po wykonaniu różniczkowań, podzieleniu przez  $r^2$ , podstawieniu za U potencjału coulombowskiego (14.23) oraz uwzględnieniu, że stała separacji c musi przyjmować jedną z wartości l(l-1) dla l = 1, 2, 3, ... przybiera postać:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \quad \frac{d}{dr} + \frac{2l}{\hbar^2} \left(\lambda + \frac{e^2}{4\pi \in 0r}\right) + \frac{l(l-1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$
(14.24)

Naszym celem będzie zbadanie, dla jakich  $\lambda$  powyższe równanie posiada rozwiązanie oraz powiązanie otrzymanego warunku z występującymi tu parametrami fizycznymi. (Przypomnijmy, że ze Stwierdzenia(13.3) wynika, że  $\lambda \in \mathbf{R}$ ). W celu możliwie jaknajwiększego uniezależnienia współczynników naszego równania od parametrów fizycznych, przejdziemy do "unormowanej" zmiennej  $\rho = \frac{r}{a_1}$ , gdzie  $a_1 = \frac{4\pi \in_0 \hbar^2}{me^2}$  jest promieniem Bohra (porównaj (12.8)). Oznaczymy też  $\mu = -\frac{8\pi \in_0 a_1}{e_2} \cdot \lambda$ . W wyniku tych zmian otrzymamy równanie

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l-1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \mu\right]R(\rho) = 0, \qquad (14.25)$$

gdzie "obecna" funkcja R jest równa dawnej funkcji R od zmiennej  $a_1 \cdot \rho$ . Warunek  $F \in L^2(\mathbf{R}^3, dx)$  dla  $F(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Lambda(\theta) \cdot \phi(\varphi)$  prowadzi do warunku:

$$\int_{0}^{+\infty} \left| R(\rho) \right|^2 \rho^2 d\rho < +\infty \tag{14.26}$$

i będziemy szukać rozwiązań (14.24) spełniających (14.25). Przekształcimy równanie (??), aby zależność od parametru l było łatwiej poddać kontroli a także, aby uprościć jego postać.

Wskazówka przy szukaniu odpowiedniego podstawienia moga być następujące dwie obserwacje: Uproszczenie równania (14.24) do

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l-1)}{\rho^2}\right]\alpha(\rho) = 0$$
(14.27)

daje równanie o podobnych (mamy nadzieję) rozwiązaniach dla małych wartości  $\rho$ . Co więcej, dla (14.27) możemy odgadnąć dwa liniowo niezależne rozwiązania. Są nimi

$$\alpha_1(\rho) = \rho^{l-1} \text{ oraz } \alpha_2(\rho) = \rho^{-l}.$$

Z nich tylko  $\alpha_1$  spełnia dla małych  $\rho$  warunek (??). Podobnie dla dużych  $\rho$  możemy (14.24) uprościć do

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \mu\right]\beta(\rho) = 0. \tag{14.28}$$

Równanie to ma dwa liniowo niezależne rozwiązania  $\beta_1(\rho) = e^{-\sqrt{\mu}\rho}$  i  $\beta_2 = e^{\sqrt{\mu}\rho}$ . Ponieważ, jak pokazaliśmy w Stwierdzeniu 13.3,  $\lambda$  a zatem  $\mu$  są rzeczywiste, to całkowalność rozwiązań (14.28) mamy szansę uzyskać tylko dla  $\mu > 0$  (zatem  $\lambda < 0$ ).

W wyniku tych obserwacji zapropononujemy podstawienie

$$R(\rho) = \rho^l e^{-\sqrt{\mu}\rho} L(\rho). \tag{14.29}$$

Wtedy

$$\frac{dR}{d\rho} = l\rho^{l-1}e^{-\sqrt{\mu}\rho}L(\rho) - \sqrt{\mu}\rho^l \quad e^{-\sqrt{\mu}\rho}L(\rho) + \rho^l e^{-\sqrt{\mu}\rho}\frac{dL}{d\rho}$$

oraz

$$\begin{split} \frac{d^2 R}{d\rho^2} &= l(l-1)\rho^{l-2} e^{-\sqrt{\mu}\rho} L(\rho) - 2l\sqrt{\mu})\rho^{l-1} L(\rho) &+ \mu \rho^l e^{-\sqrt{\mu}\rho} L(\rho) + 2l\rho^{l-1} e^{-\sqrt{\mu}\rho} \frac{dL}{d\rho} - \\ &- 2\sqrt{\mu}\rho^l e^{-\sqrt{\mu}\rho} \frac{dL}{d\rho} + \rho^l e^{-\sqrt{\mu}\rho} \frac{d^2 L}{d\rho^2} \end{split}$$

I w rezultacie podstawiając te wartości oraz (14.29) do równania (14.27), widzimy, że L musi spełniać równanie:

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho\sqrt{\mu})\frac{d}{d\rho} + 2(\frac{l}{\rho} - (l+1)\sqrt{\mu} + 1)\right]L(\rho) = 0$$
(14.30)

Rozwińmy funkcję L w szereg Laurenta o środku w 0, to jest niech:

$$L(\rho) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \rho^n.$$
(14.31)

Wtedy

$$\frac{dL}{d\rho}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\rho^n + \sum_{n=-2}^{-\infty} (n+1)a_n\rho^n$$
(14.32)

Widzimy (14.30), że n-ty współczynnik funkcji otrzymanej jako lewa strona równania (identycznościowo równej zero na mocy tegoż równania wynosi:

$$b_n = n(n+1)a_{n+1} + 2(l+1)(n+1)a_{n+1} - 2\sqrt{\mu}na_n + (-2\sqrt{\mu}(l+1) + 2)a_n + 2la_{n+1}a_{n+1} + 2(l+1)(n+1)a_{n+1} - 2\sqrt{\mu}na_n + (-2\sqrt{\mu}(l+1) + 2)a_n + 2la_{n+1}a_{n+1} + 2(l+1)(n+1)a_{n+1} - 2\sqrt{\mu}na_n + (-2\sqrt{\mu}(l+1) + 2)a_n + 2la_{n+1}a_{n+1} - 2\sqrt{\mu}a_n + (-2\sqrt{\mu}(l+1) + 2)a_n + 2la_{n+1}a_{n+1} - 2\sqrt{\mu}a_n + (-2\sqrt{\mu}(l+1) + 2)a_n + 2la_{n+1}a_{n+1}a_{n+1} - 2\sqrt{\mu}a_n + (-2\sqrt{\mu}(l+1) + 2)a_n + 2la_{n+1}a_{$$

Ponieważ funkcja równa identycznościowo zeru ma wszystkie współczynniki równe zeru, otrzymamy stąd

$$a_{n+1}\left[(n+1)(n+2(l+1))+2l\right] = a_n\left[2\sqrt{\mu}n + 2\sqrt{\mu}(l+1)\right]$$

skąd

$$a_{n+1} = 2 \quad \frac{\sqrt{\mu} \quad (n+l+1) - 1}{(n+1) \quad (n+2(l+1)) + 2 \ l} \cdot a_n \tag{14.33}$$

Ze wzoru tego wynika, że dla dużych n stosunek  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  zachowuje się jak  $\frac{2\sqrt{\mu}}{(n+1)}$ , skąd można wyprowadzić, że  $L(\rho)$  zachowuje się dla dużych  $\rho$  jak  $e^{2\sqrt{\mu}\rho}$  a zatem  $R(\rho)$  nie może być funkcją całkowalną. Jedynym wyjątkiem jest sytuacja, kiedy  $a_n = 0$  począwszy od pewnego n.

To się może stać wtedy, kiedy

$$\mu = \frac{1}{\left(n + \left(l + 1\right)\right)^2}$$

Przypomnijmy, że przyjęliśm<br/>y $\mu = -\frac{8\pi \in_0 a_1}{e^2} \lambda$ , gdzie $a_1 = \frac{4\pi \in_0 \hbar^2}{me^2}$ jest promieniem Bohra (12.8). Wted<br/>y $\mu = -\frac{\lambda}{R}$ gdzie $R = \frac{me^4}{32\Pi^2 \in_0^2 \hbar^2}$ jest stałą Rydyberga. Ostatecznie otrzymujemy warunek

$$\lambda = -\frac{R}{\left(n + \left(l + 1\right)\right)^2}$$

dla  $l = 0, 1, 2, \dots$  oraz  $n = 0, 1, 2, \dots$  zgodny z (12.9).

### 14.6. Funkcje własne operatora energii dla potencjału o symetrii sferycznej.

W punkcie tym pokażemy, że w przypadku potencjału V, który we współrzędnych (14.1) zależy jedynie od r, przestrzeń  $kerH_{\lambda}$ , o ile nie jest równa {0} zawiera funkcje o postaci

$$F(r,\theta,\varphi) = R(r) \cdot \underline{\bigwedge}(\theta) \cdot \phi(\varphi). \tag{14.34}$$

Redukcja ta nie zależy od postaci operatora  $H_{\lambda}$  a jedynie od tego, że jest on przemienny z naturalną reprezentacją grupy  $SO(3, \mathbf{R})$ , Wynika stąd, że  $Y = kerH_{\lambda}$  jest zachowana przez operatory  $\widetilde{A}$  dla  $A \in SO(3\mathbf{R})$ .

Dla krótkości niech  $G = SO(3, \mathbf{R})$ , niech  $\rho$  oznacza naturalną reprezentację  $G \le L^2(\mathbf{R}^3, dx)$ , to znaczy dla  $G \ni g = A \in SO(3, \mathbf{R})$  niech  $\rho_q(f) = \widetilde{A}f$ .

Pierwszym krokiem do pokazania (14.34) jest następujący

**Lemat 14.3.** Jeżeli  $Y \neq \{0\}$  jest domkniętą przestrzenią niezmienniczą reprezentacji  $\rho$  skladającą się z funkcji różniczkowalnych, to Y zawiera funkcje o postaci

$$F(r,\theta,\varphi) = R(r) \cdot \mathcal{H}(\theta,\varphi) \tag{14.35}$$

Dowód lematu korzysta z teorii reprezentacji unitarnych zwartych grup topologicznych. Potrzebne fragmenty tej teorii podane są w następnym punkcie tego wykładu.

Idea dowodu Lematu

Niech  $d\mu_r$  oznacza unormowaną miarę Lebesque'a na sferze  $S_r$  (tj. o środku 0 i promieniu r) w  $\mathbb{R}^3$ . Niech  $\rho^r$  oznacza reprezentację  $G \le L^2(S_r, d\mu_r)$  indukowaną przez naturalne działania G na  $S_r$ .

Dla ustalonego r określmy  $\Pi_r : Y \longrightarrow L^2(S_r, d\mu_r)$ , kładąc  $\Pi_r f = \gamma$  gdzie  $\gamma(\theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi)$ . Z Twierdzenia 14.1 wynika, że istnieje skończenie wymiarowa  $\rho$ -niezmiennicza podprzestrzeń zespolona  $Z \subset Y$ , taka, że  $\rho$  ograniczona do Z jest nieprzywiedlna.

Jeżeli funkcje  $f_i(r, \theta, \varphi)$  i = 1, 2, ..., d stanowią bazę ortonormalną Z, to reprezentację  $\rho$  ograniczoną do Z można opisać wzorem

$$\rho_g f_i(r,\theta,\varphi) = \sum_{j=1}^d b_{ij}(g) f_j(r,\theta,\varphi)$$
(14.36)

gdzie  $B(g) = (b_{ij}(g))_{ij=1}^d$  przebiega pewną (nieprzywiedlnie działającą na  $\mathcal{C}^d$ ) podgrupą grupy unitarnej U(d).

Ponieważ działanie grupy G dotyczy współrzędnych  $\theta$  i  $\varphi$  to z  $\rho$ -niezmienniczości przestrzeni Z wynika  $\rho$ -niezmienniczość przestrzeni  $Z_r = \prod_r(Z)$ . Oznaczmy

$$h_i^r = \prod_r f_i \ i = 1, ...d \text{ gdzie } h_i^r(\theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi)$$

Wtedy

$$\rho_g^r h_i^r(\theta,\varphi) = \sum_{i=1}^d b_{ij}(g) h_i^r(\theta,\varphi)$$
(14.37)

Zauważmy teraz, że dla każdej pary  $r_1, r_2$  przekształcenie  $i_{r_1,r_2}(r,\theta,\varphi) : S_{r_1} \longrightarrow S_{r_2}$  określone we współrzędnych sferycznych wzorem  $i_{r_1,r_2}(r_2,\theta,\varphi) = (r_1,\theta,\varphi)$  pozwala utożsamić  $S_{r_1}$  z  $S_{r_2}$  i indukuje przekształcenie unitarne

$$I_{r_1,r_2}: L^2(S_{r_1}, d\mu_{r_1}) \to L^2(S_{r_2}, d\mu_{r_2})$$

i przy tym, dla dowolnych  $r_1, r_2$  oraz  $g \in G$ 

$$I_{r_1,r_2} \cdot \rho_g^{r_1} = \rho_g^{r_2} \cdot I_{r_1,r_2} \tag{14.38}$$

Zatem  $I_{r_1,r_2}$  dają utożsamienie przestrzeni  $L^2(S_r, d\mu_r)$  wraz z działaniem G.

Zauważmy, że przy każdym r funkcje  $h_i$  są liniowo niezależne. Istotnie, gdyby k spośród nich rozpinało przestrzeń  $Z_r$  dla pewnego k < d to operatory B(g) dla  $g \in G$  działaby z przestrzenią niezmienniczą w  $\mathcal{C}^d$ .

Z utożsamienia (??) reprezentacji  $\rho^r$  dla różnych r wynika, że wszystkie one mają ten sam rozkład na ortogonalną sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych. Z tego, że reprezentacje  $\rho^r$  są cykliczne wynika, że każda reprezentacja nieprzywiedlna może pojawić się w tym rozkładzie tylko skończoną ( $\leq$  od swojego wymiaru) liczbę razy. Dwie reprezentacje nieprzywiedlne pojawiające się w rozkładzie są identyczne lub działają w przestrzeniach ortogonalnych.

Ponieważ małej zmianie r odpowiada mała zmiana bazy ( $h_1^r, ..., h_d^r$ ) i ponieważ wzór (14.36) określa reprezentację nieprzywiedlną, wynika stąd,  $h_i^r$  nie zależą od r, to jest

$$h_i^r(\theta, \varphi) = h_i(\theta, \varphi)$$
 dla wszystkich r

Ale to wtedy znaczy, że

$$f_i(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot h_i(\theta, \varphi).$$

Wynika stąd teza.

Uwaga 14.1. Przytoczone rozumowanie pokazuje też, że  $Z_r = Z_1 \cdot \frac{R(r)}{R(1)}$ .

Niech S będzie sferą w  $\mathbf{R}^3$  i  $d\mu$  unormowaną miarą Lebesque'a na S. Ograniczmy reprezentację  $\rho$  do 1-parametrowej podgrupy  $SO(3\mathbf{R})$  składającej się z obrotów wokół osi  $x_3$ , to jest w przyjętych współrzędnych sferycznych przekształcenie  $A_{\varphi_0}$ , będące obrotem o kąt  $\varphi_0$ , ma postać

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (\theta, \varphi + \varphi_0) \pmod{2\pi}.$$

**Lemat 14.4.** Niech  $Z \neq \{0\}$  będzie domkniętą przestrzenią niezmienniczą dla przekształceń  $A_{\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . Istnieje  $0 \neq h \in Z$  oraz liczba całkowita  $n_0$  takie, że

$$h(\theta,\varphi) = e^{in_0\varphi} \cdot \underline{\bigwedge}(\theta). \tag{14.39}$$

Dowód. Dla liczby całkowitej n rozpatrzmy operator  $T_n$  dany wzorem

$$T_n(f) = \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \tilde{A}_{\varphi}(f) d\varphi \qquad (14.40)$$

Twierdzimy, że istnieje  $n_0$  oraz  $f \in Z$ , że  $T_{n_0}(t) \neq 0$ . Istotnie, w przeciwnym razie dla każdej funkcji ciągłej  $\chi$  mielibyśmy:

$$\int_{0}^{2\pi} \chi(\varphi) \widetilde{A}_{\varphi}(f) d\varphi = 0 \quad \operatorname{czyli}_{0} \int_{0}^{2\pi} \chi(\varphi) f(\theta, \psi + \varphi) d\varphi \equiv 0$$

Nie tracąc ogólności możemy założyć, że  $f(\theta_0, \varphi_0) \neq 0$ , że f jest ciągła,  $\chi$  jest rzeczywista nieujemna oraz, że nośnik  $\chi$  jest zawarty w dowolnie małym otoczeniu (( $\theta_0, \varphi_0$ ). Dostajemy stąd sprzeczność. Szczegóły pozostawiamy czytelnikowi.

Niech zatem  $T_{n_0}f \neq 0$  dla pewnej funkcji  $f \in Z$ . Wtedy  $T_{n_0}f \in Z$  i twierdzimy, że  $T_{n_0}f(\theta,\varphi) = e^{-in_0\varphi} \cdot \underline{\Lambda}(\theta)$ .

Istotnie

$$e^{-in_0\varphi} \cdot T_{n_0}(f)(\theta,\varphi) = e^{in_0\varphi} \cdot \int_0^{2\Pi} e^{in_0\alpha} f(\theta,\varphi+\alpha) d\alpha =$$
$$= \int_0^{2\Pi} e^{in_0(\alpha+\varphi)} f(\theta,\alpha+\varphi) d\alpha = \int_0^{2\Pi} e^{in_0\alpha} f(\theta,\alpha d\alpha) = \Delta(\theta)$$

Wniosek 14.3. W każdej różnej od zera przestrzeni ker $H_{\lambda}$  znajduje się funkcja F postaci

$$F(r,\theta,\varphi) = R(r) \cdot \bigwedge(\theta) \cdot e^{in_0\varphi}$$
(14.41)

### 14.7. Wybór faktów z teorii reprezentacji grup zwartych.

**Definicja 14.2.** Grupą topologiczną nazywamy grupę G, która jest jednocześnie przestrzenią topologiczną, przy czym odwzorowanie

$$G \times G \ni (a, b) \longrightarrow a_{-1}b \in G$$

jest ciągłe.

Grupę topologiczną nazywamy zwartą (odpowiednio lokalnie zwartą) jeżeli jako przestrzeń topologicznie jest ona zwarta (lokalnie zwarta).

**Definicja 14.3.** Miarę  $\mu$  określoną na  $\sigma$ - ciele  $\sum$  podzbiorów grupy G nazywamy lewostronnie (odpowiednio prawostronnie) niezmienniczą jeżeli dla każdego  $A \in \sum$  oraz  $g \in G$  zbiór  $gA \in \sum$  ( odpowiednio  $Ag \in \sum$ ) oraz jeżeli  $\mu(gA) = \mu(A)$  (odpowiednio (  $\mu(Ag) = \mu(A)$ ).

Uwaga 14.2. Przekształcenie  $G \ni g \longrightarrow g^{-1} \in G$  indukuje odwzorowanie miar. Obrazem miary lewostronnie niezmienniczej jest miara prawostronnie niezmiennicza (i odwrotnie). Wobec tego każde zdanie o miarach lewostronnie niezmienniczych ma swój odpowiednik dla miar prawostronnie niezmienniczych. W dalszym ciągu w związku z lewicowymi sympatiami autora będziemy formułowac teorię dla miar lewostronnie niezmienniczych. Twierdzenie 14.1. (Alfred Haar)

Na każdej lokalnie zwartej grupie topologicznej G istnieje określona na  $\sigma$ -ciele  $\sum$  podzbiorów borelowskich G regularna miara lewo niezmiennicza. (Regularność miary oznacza, że dla każdego  $\mathcal{E} > 0$  i  $A \in \sum$  istnieje zbiór zwarty Z i otwarty Q, takie, że  $Z \subset A \subset Q$  oraz  $\mu(Q \setminus Z) < \mathcal{E}$ .)

Miara ta ( zwana lewą miarą Haara) jest jedyna w tym sensie, że każde dwie takie miary są proporcjonalne. Miara Haara  $\mu$  grupy zwartej jest skończona ( na ogół normuje się ją tak, żeby  $\mu(G) = 1$ ). Własność skończoności miary Haara charakteryzuje grupy zwarte w klasie grup lokalnie zwartych.

**Definicja 14.4.** Niech G będzie grupą <br/>aGL(X) grupą wszystkich odwracalnych przekształceń liniowych prze<br/>strzeni liniowej X ze złożeniem przekształceń jako operacją grupową.

Homomorfizm  $\rho: G \longrightarrow GL(X)$  nazwiemy reprezentacją G.

Reprezentację nazwiemy skończenie wymiarową (wymiaru n<br/>) jeżeli ${\cal X}$ ma wymiar n.

Najczęściej rozważa się reprezentacje, gdzie X jest przestrzenią nad C. Dla grup topologicznych właściwym jest rozważanie reprezentacji ciągłych. Wtedy X powinna też być przestrzenią topologiczną. Najczęściej używanym posulatem ciągłości reprezentacji jest warunek ciągłości trajektorii (nazywany w dalszym tekście ciągłością reprezentacji): dla każdego ustalonego  $x \in X$ funkcje  $G \ni g \longrightarrow \rho_g(x) \in X$  są ciągłe.

Reprezentacja jest cykliczna, jeżeli istniej<br/>e $x \in X$ taki, że przestrzeń liniowa $Y_x$ rozpinana przez trajektorię

$$G \cdot x = \{ y \in X : y = \rho_q(x) \ g \in G \}$$

jest gęsta w X.

Jeżeli warunek gęstości  $Y_x$ zachodzi dla każdego <br/>  $x \neq 0,$ to reprezentacja nazywa się nieprzywiedlna.

Reprezentacja  $\rho$  nazywa się unitarną, jeżeli X jest przestrzenią Hilberta a operatory  $\rho_g$  reprezentacji  $\rho$  są operatorami unitarnymi to jest  $(\rho_g)^* = (\rho_g)^{-1} = \rho_{g^{-1}}$  dla  $g \in G$ . O dwóch reprezentacjach  $\rho_1$  i  $\rho_2$  grupy G działających odpowiednio w przestrzeniach  $X_1$  i  $X_2$  powiemy, że są równoważne, jeżeli istnieje liniowy izomorfizm  $I : X_1 \longrightarrow X_2$  (topologiczny, jezeli  $X_1$  i  $X_2$  są topologiczne) taki, że  $I\rho_1(g) = \rho_2(g)I$  dla  $g \in G$ . Reprezentacje równoważne są w pewnym sensie takie same a różnią się tylko opisem.

**Stwierdzenie 14.2.** Każda lokalnie zwarta grupa topologiczna posiada injektywną reprezentacją unitarną. Jest nią lewa regularna reprezentacja opisana w następujący sposób:

Przestrzenią X jest  $L^2(G, d\mu)$ , gdzie  $d\mu$  oznacza lewą miarę Haara, natomiast  $(\rho_g f)(h) = f(gh)$ .

**Twierdzenie 14.2.** (Podstawowe twierdzenie o ciąglych reprezentacjach unitarnych grup zwartych).

(a) Każda ciągła reprezentacja nieprzywiedlna grupy zwartej jest skończenie wymiarowa.

(b) Każda ciągła hilbertowska reprezentacja grupy zwartej równoważna jest reprezentacji unitarnej.

(c) Każda ciągła reprezentacja unitarna grupy zwartej w ośrodkowej przestrzeni Hilberta rozkłada się na ortogonalną sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych

$$X = \oplus X_n \tag{14.42}$$

gdzie każda z przestrzeni  $X_n$  w (14.42) jest  $\rho$ -niezmiennicza oraz  $\rho$ -ograniczona do  $X_n$  jest nieprzywiedlna. Krotnością występowania danej reprezentacji nieprzywiedlnej w rozkładzie (14.42) nazwiemy liczbę składników, dla których eprezentacja  $\rho$  ograniczona do  $X_i$  jest równoważna tej reprezentacji.

(d) Reprezentacja o rozkładzie (14.42) jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy krotność występowania w tym rozkładzie dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej jest niewiększa niż jej wymiar. Literatura