

*Matematyka stosowana*

# Analiza Portfelowa i Rynki Kapitałowe 1

Piotr Mormul

mormul@mimuw.edu.pl

Mariusz Baryło

mbarylo@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski, 2012



Streszczenie.

Wersja internetowa wykładu:

<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=pk1>

(może zawierać dodatkowe materiały)



Niniejsze materiały są dostępne na [licencji Creative Commons 3.0 Polska](#):  
*Uznanie autorstwa — Użycie niekomercyjne — Bez utworów zależnych.*

---

Copyright © P.Mormul, M.Baryło, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2012. Niniejszy plik PDF został utworzony 3 stycznia 2012.

---



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach  
[Europejskiego Funduszu Społecznego](#).



---

Skład w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji:  
Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

## Spis treści

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| Wstęp . . . . .                                   | 4   |
| 1. Wykład I, 2.X.2009 . . . . .                   | 6   |
| 2. Wykład II, 9.X.2009 . . . . .                  | 14  |
| 3. Wykład III, 16.X.2009 . . . . .                | 22  |
| 4. Wykład IV, 23.X.2009 . . . . .                 | 32  |
| 5. Wykład V, 30.X.2009 . . . . .                  | 40  |
| 6. Wykład VI, 6.XI.2009. . . . .                  | 48  |
| 7. Wykład VII, 13.XI.2009 . . . . .               | 60  |
| 8. Wykład VIII, 20.XI.2009 . . . . .              | 71  |
| 9. Wykład IX, 27.XI.2009 . . . . .                | 77  |
| 10. Wykład X, 4.XII.2009 . . . . .                | 92  |
| 11. Wykład XI, 11.XII.2009 . . . . .              | 99  |
| 12. Wykład XII (kolokwium), 18.XII.2009 . . . . . | 112 |
| 13. Wykład XIII, 8.I.2010 . . . . .               | 116 |
| 14. Wykład XIV, 15.I.2010 . . . . .               | 129 |
| 15. Wykład XV, 22.I.2010 . . . . .                | 149 |
| Literatura . . . . .                              | 164 |

# Wstęp

## UWAGA FORMALNA DOTYCZĄCA AUTORSTWA WYKŁADÓW

Treść Wykładu I, wygłoszonego przez M. Baryło, jest oparta na jego dwóch artykułach popularno-naukowych opublikowanych w latach 2007–08 w czasopiśmie *Delta*. Treści wszystkich następnych wykładów, wygłoszonych (w przypadku Wykładu XII – ułożonych) przez P. Mormulę, stanowią jego autorską prezentację podstawowych tematów i zagadnień analizy portfelowej, które poznawał on najpierw prowadząc w latach 1995 – 2004 ćwiczenia do wykładów [13] profesora K. Krzyżewskiego na Wydziale MIM UW. Nie jest łatwo formalnie rozdzielić wkłady merytoryczne obu wykładowców, gdyż to przecież profesor Krzyżewski wprowadził analizę portfelową do praktyki akademickiej i dydaktycznej na Wydziale MIM UW, a potem w sposób pionierski przybliżał całej społeczności wydziałowej rezultaty uzyskane przez dwa pokolenia wiodących ekonomistów z krajów zachodnich (w tym szereg noblistów z dziedziny ekonomii), czyszcząc przy okazji dowód niejednego ich twierdzenia.

Sytuacja bardzo przypomina, *toute proportion gardée*, opis dany w przypisie na pierwszej stronie klasycznej obecnie pracy [26] autorstwa W. F. Sharpe’a, cytat: ”His greatest debt (...) is to Dr. Harry M. Markowitz (...), with whom he was privileged to have a number of stimulating conversations during the past year. It is no longer possible to segregate the ideas in this paper into those which were his, those which were the author’s, and those which were developed jointly. Suffice it to say that the only accomplishments which are unquestionably the property of the author are those of authorship—first of the computer program and then of this article.”

Później w trakcie niniejszych wykładów z APRK1 w kilku miejscach podawane będą konkretne odniesienia do terminologii i rezultatów pojawiających się dawniej w wykładach K. Krzyżewskiego. Jednakże prezentowane tu dalej wykłady są – powtórzmy to – samoistną, autorską i, wydaje się nam, spójną propozycją dydaktyczną, dla której wcześniejsze wykłady [13] były tylko punktem startu. Ponadto cały szereg rozbudowanych przykładów ilustrujących wykładaną tu teorię pochodzi od słuchaczy wykładów P. Mormuli, co jest za każdym razem opisywane i stanowi cenny *feedback*, za który wykładowca składa słuchaczom w tym miejscu podziękowanie.

Autorzy chcieliby podkreślić tutaj, iż pewna część oznaczeń oraz nazewnictwa w niniejszym wykładzie zaczerpnięta jest z wykładów K. Krzyżewskiego [13] (bądź jest na tych wykładach wzorowana). I tak, są to:

- oznaczenia dla oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka portfela (Wykłady I i II),
- termin „portfel optymalny względem stopy zwrotu pozbawionej ryzyka” (Wykład II),
- termin „odwzorowanie Markowitza i zmodyfikowane odwzorowanie Markowitza” wraz z oznaczeniami oraz zbiory możliwości wyrażone w terminach tych odwzorowań (Wykład II),
- uwaga 3.1 dotycząca historycznych współczynników korelacji.
- terminy „granica minimalna” i „granica maksymalna” wraz z oznaczeniami,
- przykłady wyznaczania zbiorów możliwości, gdy każda para walorów jest doskonale dodatnio lub ujemnie skorelowana (Wykład III),
- definicja punktu krytycznego zmodyfikowanego odwzorowania Markowitza i jego charakteryzacja (Wykład V),
- granica efektywna w terminach odwzorowania Markowitza (Wykład VII),

- 
- oszacowanie liczby boków łamanej portfeli relatywnie minimalnego ryzyka i problem jego optymalności (Wykład II i X),
  - przykład 7.1 (Wykład VII) i ćwiczenie 2 (Wykład XII),
  - termin „portfel relatywnie minimalnego ryzyka” (Wykład X).

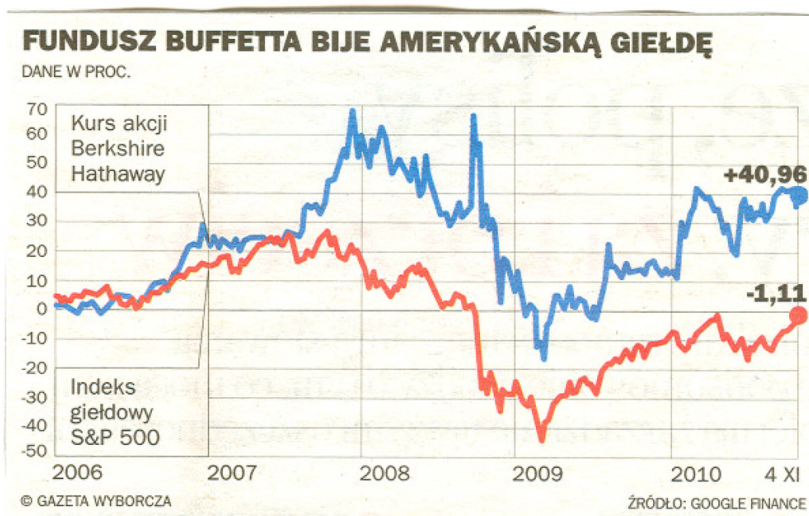
## 1. Wykład I, 2.X.2009

Zacznijmy od krótkiego przeglądu faktów z historii giełd na świecie:

- W roku 1531 w Antwerpii (obecnie w Belgii, wówczas – w odległej prowincji Królestwa Hiszpanii) zostaje otwarta pierwsza giełda (towarowo-pieniężna).
- W XVII wieku w Nowym Jorku (nazywanym się wówczas Nowym Amsterdamem) wzdłuż jego północnej granicy ciągnął się drewniany płot. W 1652 roku został on zastąpiony wysoką palisadą, wzmacnianą w obawie przed atakiem rdzennych amerykańskich plemion lub Brytyjczyków. W roku 1685 powstały pierwsze plany stworzenia na miejscu palisady ulicy. Z czasem powstający mur (ang. *wall*) był wzmacniany, ale już w roku 1699 Brytyjczycy rozebrali fortyfikację; jednak ulica pozostała.
- Na wolnym powietrzu, na placu przy Exchange Alley w Londynie powstaje giełda londyńska. Przed rokiem 1725 przeniesiono ją do Jonathan's Coffee House, którego nazwę zmieniono na Stock Exchange w roku 1773.
- W Stanach Zjednoczonych pierwsza zorganizowana giełda powstała w roku 1792, gdy 24 finansistów podpisało stosowne ustalenia (tzw. Buttonwood Agreement). Datę tę uznaje się za moment powstania New York Stock & Exchange Board.
- W roku 1863 giełda ta zmienia nazwę na New York Stock Exchange, NYSE i przenosi się do majestatycznego budynku przy Wall Street, gdzie pozostaje po dziś dzień.
- Na przełomie XIX i XX wieku giełda w Nowym Jorku rozwija się: najważniejsze spółki z tamtego okresu to: US Steel, AT&T, Westinghouse, Eastman Kodak, Procter & Gamble, Pillsbury, Sears, Kellogg (niektóre z tych nazw brzmią znajomo dla współczesnych inwestorów!).
- 28 i 29 października 1929 roku indeks Dow Jones spadł o 69 punktów, osiągając poziom 230 punktów – wartość sprzed kilkunastu lat – wiele osób straciło swój majątek.
- W roku 1952 Harry M. Markowitz publikuje w *The Journal of Finance* artykuł „Portfolio Selection” [19] – rozpoczyna się epoka współczesnej teorii portfelowej.

Podstawową ideą, leżącą u podstaw analizy portfelowej jest tzw. *dywersyfikacja portfela* (potocznie formułowana jako zasada: „don't put all eggs in one basket”), która ma prowadzić do zmniejszania ryzyka (rozumianego jako odchylenie standardowe lub czasem jako wariancja stopy zwrotu z portfela akcji – patrz dalsza część tego wykładu).

Warto też zwrócić uwagę na fakt, iż istnieje teoria stojąca w całkowitej opozycji do idei dywersyfikacji – jest to tzw. inwestowanie skoncentrowane (*the focus investment strategy*), polegające na zakupie akcji niewielkiej liczby spółek. Najbardziej znanym zwolennikiem tej teorii jest Warren Buffett – amerykański inwestor, znajdujący się w roku 2009 (wg magazynu *Forbes*) na drugim miejscu na liście najbogatszych ludzi świata. Jego strategia polega właśnie na zakupie dużych pakietów akcji kilku doskonale poznanych przedsiębiorstw. Uważa on, iż takie działanie umożliwia kontrolowanie zmian tych walorów i dokonywanie ewentualnych korekt, co byłoby trudniejsze w przypadku portfela z akcjami wielu spółek. Wyniki ogromnego funduszu inwestycyjnego Berkshire Hathaway zarządzanego przez Buffetta są, także w ostatnich latach, dobre – patrz zestawienie procentowej zmiany kursu jego akcji w porównaniu ze zmianą indeksu S&P 500 (biorąc za punkt odniesienia początek roku 2006) przytoczone tu poniżej.



Rysunek 1.1. Fundusz Warrena Buffetta versus indeks S&P 500.

Tak więc wywodząca się od Markowitza analiza portfelowa nie jest jedyną strategią dostępną graczom giełdowym. Zostawiając teraz na boku wielkiego inwestora (który w pierwszych tygodniach obecnego kryzysu kupował jesienią 2008 za 8 miliardów dolarów akcje Goldman & Sachs i General Electric), wracamy do idei, które upowszechnił Markowitz. Wprowadzimy mianowicie ideę opisu i mierzenia ryzyka przy kupnie akcji. W tym celu przyjrzymy się najpierw następującemu przykładowi.

Wyobraźmy sobie, że możemy zagrać w grę *A*, polegającą na tym, iż rzucamy raz symetryczną (uczciwą) monetą i jeśli wypadnie orzeł, to dostajemy złotówkę, natomiast jeśli wypadnie reszka, to my płacimy złotówkę. Jest to tzw. gra sprawiedliwa, gdyż szanse wygranej naszego rywala i nasze są równe (mówiąc nieco inaczej, średnia wygrana w tej grze jest równa zero). Każdy zapewne zgodziłby się po krótkim namyśle zagrać w taką grę – możemy się wzbogacić o złotówkę, a jeśli nawet przegramy, to nic szczególnie strasznego się nie stanie. Możemy więc uznać, że gra *A* jest mało ryzykowna.

Dość podobna jest gra *B*. Również rzucamy raz symetryczną monetą i jeśli wypadnie orzeł, to dostajemy 1000 zł, zaś jeśli wypadnie reszka, to płacimy 1000 zł. I ta gra jest sprawiedliwa – szanse wygranej są dla każdego z grających takie same. Widać jednak, że większość osób niechętnie zgodziłaby się zagrać w tę grę.

Zadajmy sobie więc pytanie, co różni obie te gry? Co sprawia, że jedna z nich wydaje się „niegroźna”, zaś w drugą zagrałibyśmy już bardzo niechętnie? Bez wątpienia czujemy, że gra *B* niesie ze sobą dużo większe RYZYKO – możemy co prawda wiele zyskać, ale również bardzo dużo stracić. Jak jednak porównać ryzyka, wiążące się z tymi grami? Wyznamy najpierw średnie wygrane w każdej z gier.

Wygrana w grze *A* jest zmienną losową (oznaczymy ją przez  $X$ ), przyjmującą dwie wartości: 1 z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  (jest to szansa wyrzucenia orła w rzucie symetryczną monetą) oraz  $-1$  (stratę rozumiemy, jako wygraną ujemną) również z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  (szansa wyrzucenia reszki). Zatem średnia wygrana w tej grze będzie wartością oczekiwaną zmiennej losowej, oznaczającej wygraną w grze *A*. Wynosi więc ona  $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$ . Analogicznie wyznaczamy średnią wygraną w grze *B*. Również wynosi ona 0. Widzimy stąd, że wielkość średniej wygranej nie rozróżnia w żaden sposób naszych gier (mówi ona tylko, że obie

gry są sprawiedliwe). Kolejną miarą, odnoszącą się do zmiennych losowych, jest wariancja. Jest to jedna z tzw. *miar rozproszenia*. Obliczmy teraz wariancję wygranej w grze  $A$ . Jest ona równa  $\sigma^2(X) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0)^2 = 1$ . Wariancja wygranej w grze  $B$  wynosi zaś  $\sigma^2(Y) = \frac{1}{2} \cdot (1000 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1000 - 0)^2 = 1000000$ . Mamy więc coś, co wyraźnie odróżnia nasze gry! Gra  $A$  ma wariancję małą, zaś gra  $B$  olbrzymią. Widać jednak, iż wariancja, jak na miarę ryzyka związanego z naszymi grami, jest nieco „przesadna”. Gdyby wyciągnąć pierwiastek z wariancji wygranych, otrzymalibyśmy tzw. *odchylenie standardowe* (oznacza się je symbolem  $\sigma(X)$ ), wynoszące odpowiednio 1 i 1000. Widzimy więc, że jest to w naszym wypadku całkiem niezła miara ryzyka! Nie dość, że dla mało ryzykownej gry  $A$  przyjmuje małą wartość, zaś dla bardzo ryzykownej dużą, to jeszcze te wartości są akurat równe możliwej stracie lub zyskowi (tak jest tylko dla prostej gry symetrycznej).

Zastosujmy więc zdobytą wiedzę do analizy ryzyka na giełdzie. Każdy, kto słyszał o giełdzie wie, że najbardziej typowym zajęciem inwestorów jest kupowanie i sprzedawanie akcji wybranych spółek, notowanych na giełdzie. Inwestorzy starają się to robić w ten sposób, aby oczywiście zyskać możliwie dużo. Niektórzy obserwują tylko zmiany kursów akcji i starają się wybierać takie spółki, które np w ostatnim czasie zaczynają zyskiwać na wartości i mają nadzieję, że ta tendencja będzie się utrzymywała w najbliższej przyszłości; inni czekają na moment, kiedy akcje jakiejś spółki znacznie spadną i je kupują, licząc na wzrost ich wartości... Są to najprostsze sposoby, wymagające jedynie obserwacji zmian *stóp zwrotu*.

Jeżeli na początku ustalonego okresu dana akcja miała notowanie  $C_{\text{pocz}}$ , zaś na końcu ma, czy będzie miała, notowanie  $C_{\text{kon}}$ , to *stopą zwrotu* w tym okresie nazywa się stosunek zysku (może on być ujemny!) z zakupu tej akcji do początkowego jej kursu (zakładamy, że kursy uwzględniają już ewentualne wypłacane dywidendy). Stopa zwrotu jest zatem równa

$$R = \frac{C_{\text{kon}} - C_{\text{pocz}}}{C_{\text{pocz}}}.$$

Warto zauważyć, że stopa zwrotu teoretycznie może przyjmować dowolną wartość nie mniejszą niż  $-1$ . Najmniejsza wartość  $-1$  odpowiada sytuacji, gdy notowanie akcji na końcu interesującego nas okresu wyniesie 0, czyli gdy stracimy wszystkie zainwestowane pieniądze. Oczywiście wymyślono rozmaite sposoby przewidywania, kiedy warto daną akcję kupić, a kiedy sprzedać (są to metody należące do tzw. *analizy technicznej*). My jednak przyjrzymy się jeszcze innemu podejściu do inwestowania na giełdzie. Będzie to spojrzenie na akcje nie tylko pod kątem stopy zwrotu, ale właśnie uwzględniające też ryzyko.

Jakie ryzyko wiąże się z zakupem akcji? Oczywiście niebezpieczeństwo spadku ich wartości. Nasuwa się więc pytanie, jak można by zmierzyć to ryzyko? Przypomnijmy sobie, jak wyglądała sytuacja z grami  $A$  i  $B$ . Ryzykowna była ta gra, która charakteryzowała się dużą potencjalną stratą, czyli dla której odchylenie możliwych wyników gry od wartości średniej było duże. Podobnie rzecz się ma z akcjami: za bardziej ryzykowną uznamy tę, która wykazywała w przeszłości większe wahania, gdyż występuje wówczas większe niebezpieczeństwo, że również i teraz, po jej zakupie, zmieni ona gwałtownie swą wartość (oczywiście dla kupującego groźny jest tylko spadek wartości akcji). Spróbujmy więc użyć odchylenia standardowego również do oceny ryzyka inwestowania w akcje. Przy ewentualnych decyzjach inwestycyjnych będziemy zawsze rozważać jakiś okres inwestycyjny od chwili bieżącej do ustalonego momentu w przyszłości. Stopa zwrotu będzie więc *zmienną losową*: cena  $C_{\text{pocz}}$  będzie znana, zaś cena  $C_{\text{kon}}$  – przyszła i nieznana. Parametry takiej zmiennej losowej będziemy jedynie *estymować* na podstawie dotychczasowych notowań akcji spółki.

W tym celu należy najpierw wybrać pewien reprezentatywny z naszego punktu widzenia okres historyczny (np tydzień, miesiąc, kwartał, rok, pięć lat, ...). Potem estymować czy (o)szacować *oczekiwaną stopę zwrotu* na podstawie danych historycznych nt stóp zwrotu w po-

szczególnych *podokresach* (np dniach, tygodniach, itp) wybranego okresu. Następnie można już szacować ryzyko akcji, rozumiane jako odchylenie standardowe zmiennej losowej stopy zwrotu z tych akcji.

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy już wyznaczone  $n$  wartości stopy zwrotu z danej akcji, wynoszących kolejno  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , to oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji w tę akcję liczymy (w istocie tylko estymujemy!) jako średnią arytmetyczną tych wartości. Jest to *estymator nieobciążony* wartości oczekiwanej zmiennej losowej stopy zwrotu  $R$ , która w tych wykładach będzie oznaczana symbolem  $\mathbb{E}(R)$ . Mamy więc wzór  $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t$ . Ten estymator wartości oczekiwanej  $\mathbb{E}(R)$  jest nazywany **historyczną oczekiwaną stopą zwrotu**.

Natomiast odchylenie standardowe stopy zwrotu szacujemy (estymujemy) ze wzoru

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{R})^2},$$

gdzie  $\bar{R}$  jest historyczną oczekiwaną stopą zwrotu. To jest nasz (i przy tym najczęściej używany) estymator odchylenia standardowego zmiennej  $R$ , które w tych wykładach będzie oznaczane symbolem  $\sigma(R)$ .

Załóżmy, że w przeciągu ostatnich dwóch miesięcy cotygodniowe dane na temat kursów dwu spółek X i Y kształtowały się następująco:

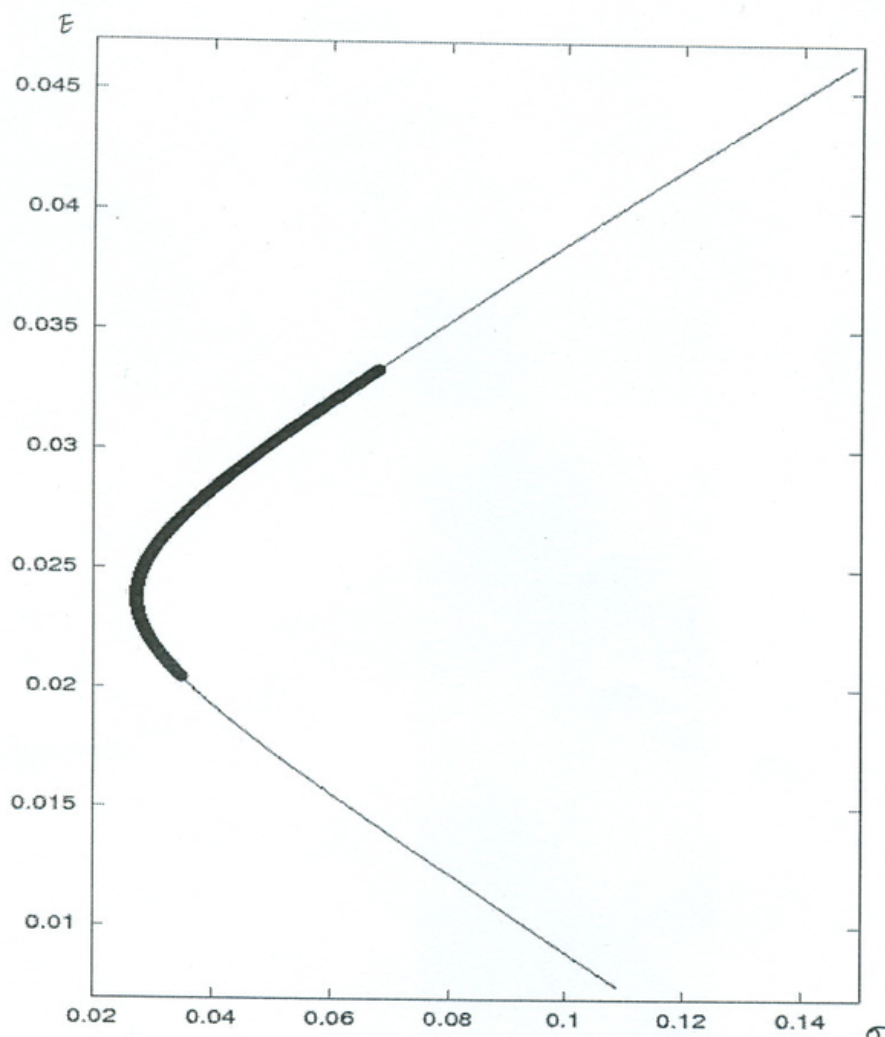
|   |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| X | 21.60 | 22.12 | 20.10 | 22.40 | 24.90 | 25.65 | 25.10 | 26.75 |
| Y | 22.40 | 23.60 | 23.90 | 23.45 | 23.10 | 22.95 | 23.80 | 25.70 |

Możemy wyznaczyć więc stopy zwrotu w kolejnych tygodniach. Liczymy je tak, jak to już zostało wcześniej opisane, np stopa zwrotu dla spółki X w pierwszym tygodniu wynosi  $r_1 = \frac{22.12-21.60}{21.60} = 0.024074$ , itd. W ten sposób dostajemy ciąg próbek – tygodniowych stóp zwrotu dla obu spółek (podajemy je w %, jak to się zwykle robi):

|   |        |         |         |         |         |         |        |
|---|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| X | 2.4074 | -9.1320 | 11.4428 | 11.1607 | 3.0120  | -2.1443 | 6.5737 |
| Y | 5.3571 | 1.2712  | -1.8829 | -1.4925 | -0.6494 | 3.7037  | 7.9832 |

Historyczna tygodniowa oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w akcje spółki X, na podstawie dwumiesięcznego okresu obserwacji, wynosi więc 3.3315% (jest to, powtarzamy, średnia arytmetyczna liczb z pierwszego wiersza powyższej tabeli). Wyestymowane ryzyko zmiennej stopy zwrotu z akcji X wyznaczamy w sposób wspomniany już wyżej; wynosi ono 7.3471%. Jeśli chodzi o akcje spółki Y, historyczna (też tygodniowa) oczekiwana stopa zwrotu z tej inwestycji, na podstawie wybranego przez nas do obserwacji okresu dwóch miesięcy, wynosi 2.0415%, natomiast wyestymowane ryzyko to 3.7591%. Widzimy więc, że co prawda akcje spółki X miały w przeciągu wybranego przez nas historycznego okresu obserwacji większą stopę zwrotu niż akcje spółki Y, jednak odchylenie standardowe stóp zwrotu akcji spółki X jest większe. Do inwestora więc należy decyzja, czy wybrać akcje, charakteryzujące się większą historyczną stopą zwrotu, ale i większym ryzykiem, czy też zgodzić się na nieco mniejszą stopę zwrotu w zamian za mniejsze ryzyko. Niestety, w rzeczywistości tak właśnie najczęściej bywa – im wyższe są stopy zwrotu osiągnęte przez akcje, tym większe wiąże się z nimi ryzyko. Podczas dalszych wykładów poznamy metody porównywania i wyboru walorów „lepszyc” w określonym sensie. Jako przedsmak czekających nas tu atrakcji i możliwości przytaczamy poniżej wykres zależności ryzyka i wartości oczekiwanej w tym właśnie przykładzie, tylko rozumianym w szerszym sensie – gdybyśmy mianowicie zaczęli *kombinować* czyli łączyć inwestowanie w akcje spółek X i Y. Możliwe by były wtedy różne *portfele* akcji spółek X i Y. Wartości oczekiwane (pochodzące z estymacji) zmieniałyby się wtedy płynnie między 2.0415% i 3.7591%, zaś ryzyka (też pochodzące z estymacji) czasem

schodziłyby nawet *poniżej* mniejszego z dwóch ryzyk – tego związanego ze spółką Y! Teoria, którą niebawem rozwinie za Markowiczem i jego kontynuatorami, prowadzi do następującej dokładnej zależności między ryzykiem i wartością oczekiwaną *portfela* akcji spółek X i Y:



Rysunek 1.2. Zależność między ryzykiem i oczekiwaną stopą zwrotu dla mieszanych portfeli akcji spółek X i Y.

Przeanalizujemy teraz dokładniej zjawisko zasygnalizowane na tym wykresie, rozważając problem inwestycji mieszanych w akcje dwu **innych** spółek A i B, zupełnie analogicznie do budowania portfela z akcji spółek X i Y branych w różnych proporcjach.

Założmy, że odnaleźliśmy notowania takich spółek A i B z ostatnich dwóch miesięcy i na ich podstawie obliczyliśmy 7 tygodniowych stóp zwrotu (w praktyce należałoby wziąć pod uwagę dłuższy okres historyczny – wówczas wyniki można by traktować jako bardziej wiarygodne). Otrzymaliśmy następujące dane:

|   |       |       |       |       |       |      |      |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| A | 0.25  | -0.25 | 0.35  | 0.55  | 0.25  | 0.35 | 0.25 |
| B | -0.15 | 0.05  | -0.25 | -0.65 | -0.15 | 0.35 | 0.45 |

Są to historyczne wartości, które służą, jak już wiemy, do estymowania parametrów zmiennych losowych stóp zwrotu  $R_A$  i  $R_B$ . Historyczna tygodniowa oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w akcje spółki A, na podstawie wybranego przez nas okresu dwóch miesięcy, wynosi  $\bar{R}_A = 0.25$ , zaś dla spółki B jest to wielkość  $\bar{R}_B = -0.05$ . Natomiast dla estymatorów ryzyk zmiennych stóp zwrotu  $R_A$  i  $R_B$  dostajemy, odpowiednio:  $\hat{\sigma}_A = \sqrt{0.06} \approx 0.2449$ ,  $\hat{\sigma}_B = \sqrt{0.14} \approx 0.3741$ .

Jakie wnioski nasuwają się po obejrzeniu tych wyników? Co prawda poznaliśmy tylko estymatory nieznanych dokładnie wielkości  $\mathbb{E}(R_A)$ ,  $\mathbb{E}(R_B)$ ,  $\sigma(R_A)$ ,  $\sigma(R_B)$ , jednak tak jest *zawsze* w analizie portfelowej – nigdy nie znamy dokładnych rozkładów zmiennych stóp zwrotu, porównaj już pierwszą i podstawową pracę Markowitza [19]! Wnioskujemy i oceniamy tylko na podstawie estymatorów  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\hat{\sigma}_A$ ,  $\hat{\sigma}_B$ .

Oczywiście od razu nasuwa się nam wybór akcji spółki A, jako zdecydowanie lepszej! Wykazuje ona dużą historyczną stopę zwrotu (25%), podczas gdy akcje spółki B „zachowywały się” fatalnie — przynosiły niemal ciągle straty, dając ostatecznie stopę zwrotu  $-5\%$ ! Co więcej, spółka A może pochwalić się wahaniami (24.49%) zdecydowanie mniejszymi, niż wahania i tak kiepskiej spółki B (37.41%). Nie ma więc żadnej wątpliwości, jaką decyzję należy podjąć i nonsensem wydaje się branie pod uwagę „słabej” spółki!

Czy rzeczywiście jednak B nic nam nie może zaoferować? Przekonajmy się, że nie jest to wcale takie oczywiste.

Wyobraźmy sobie, że postanowiliśmy w naszej inwestycji uwzględnić również spółkę B. Oczywiście nie chcemy zrezygnować ze świetnej spółki A, zatem postanawiamy nabyć akcje obydwu tych spółek. Inwestorzy nazywają taką sytuację zakupem *portfela akcji*. Nasz portfel będzie tylko dwuelementowy. Spróbujmy opisać go w ścisły sposób. Wystarczy do tego płaszczyzna kartezjańska  $\mathbb{R}^2$ . Nasz portfel to punkt  $x = (x_1, x_2)^T$ , gdzie  $x_1$  oraz  $x_2$  będą częściami naszego kapitału, zainwestowanymi w akcje spółki A oraz B odpowiednio. Widzimy, że  $x_1 + x_2 = 1$ . Ponadto sensowne portfele muszą mieć współrzędne nieujemne (najmniejszą ilością akcji, które możemy kupić, jest zero). Zauważmy, że wszystkie portfele o tych własnościach tworzą na płaszczyźnie odcinek, będący fragmentem prostej o równaniu  $x_2 = 1 - x_1$  zawartym między punktami  $(0, 1)^T$  i  $(1, 0)^T$ . Tak więc jeżeli rozważamy zakup akcji dwu spółek, to możemy wybierać spośród nieskończenie wielu portfeli z tego odcinka — nazywa się go *zbiorem portfeli dopuszczalnych*. Np jeżeli mamy do dyspozycji 1000 zł i postanowiliśmy nabyć akcje spółki A za 850 zł oraz akcje spółki B za 150 zł, nasz portfel ma postać  $(0.85, 0.15)^T$ . Ściślej rzecz ujmując, jeżeli posiadamy w chwili początkowej kwotę  $L_{\text{pocz}}$  i akcje spółki A zakupimy za  $x_1 \cdot L_{\text{pocz}}$ , zaś akcje spółki B za  $x_2 \cdot L_{\text{pocz}}$ , to kapitał końcowy (losowy – nieznany w chwili początkowej!) wynosić będzie  $L_{\text{kon}} = L_{\text{pocz}} \cdot x_1 \cdot (1 + R_A) + L_{\text{pocz}} \cdot x_2 \cdot (1 + R_B)$ , gdzie  $R_A$  oraz  $R_B$  to oczywiście zmienne losowe – stopy zwrotu z akcji spółek A i B.

Przez stopę zwrotu z portfela  $(x_1, x_2)^T$  (wielkość losową!) rozumiemy stosunek (losowego) zysku inwestora posiadającego dany portfel akcji do kwoty (znanej, nielosowej) zainwestowanej w ten portfel na początku; jest to więc zmienna losowa

$$\frac{L_{\text{kon}} - L_{\text{pocz}}}{L_{\text{pocz}}} = \frac{L_{\text{pocz}} \cdot x_1 \cdot (1 + R_A) + L_{\text{pocz}} \cdot x_2 \cdot (1 + R_B) - L_{\text{pocz}}}{L_{\text{pocz}}} = x_1 \cdot R_A + x_2 \cdot R_B.$$

Zatem wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela  $x = (x_1, x_2)$ , oznaczana teraz i w dalszych wykładach  $E(x)$ , wynosi

$$E(x) = x_1 \cdot \mathbb{E}(R_A) + x_2 \cdot \mathbb{E}(R_B).$$

Natomiast wariancję stopy zwrotu z portfela  $x$ , oznaczaną teraz i w dalszych wykładach  $\sigma^2(x)$ , liczymy trochę spokojniej

$$\sigma^2(x) = \sigma^2(x_1 \cdot R_A + x_2 \cdot R_B) = \sigma^2(R_A)x_1^2 + 2\text{cov}(R_A, R_B)x_1 \cdot x_2 + \sigma^2(R_B)x_2^2.$$

Jest to *forma kwadratowa* od  $x$ . Jej współczynniki mają w analizie portfelowej (i też szerzej w rachunku prawdopodobieństwa) swoje klasyczne oznaczenia

$$\sigma^2(x) = \sigma_{1,1} \cdot x_1^2 + 2\sigma_{1,2} \cdot x_1 \cdot x_2 + \sigma_{2,2} \cdot x_2^2.$$

Przypominamy tutaj, że wielkości te tylko estymujemy, gdyż nie mamy wiedzy, by poznać je dokładnie. Dla naszych danych w przykładzie otrzymujemy wyniki, celowo nie rozróżniając już tu niżej między estymatorami i prawdziwymi (de facto nieznanymi) wartościami:  $\sigma_{1,1} = 0.06$ ,  $\sigma_{1,2} = -0.035$ ,  $\sigma_{2,2} = 0.14$ . Zatem dla wszystkich dopuszczalnych portfeli  $x = (x_1, x_2)^T$  wariancje ich stopy zwrotu opisane są wzorem

$$\sigma^2(x) = 0.06 x_1^2 - 0.07 x_1 \cdot x_2 + 0.14 x_2^2.$$

Jeżeli zauważymy teraz, że w naszej sytuacji  $x_2 = 1 - x_1$ , to wzór na wariancję portfela, trochę nadużywając oznaczeń po lewej stronie, uprości się do postaci

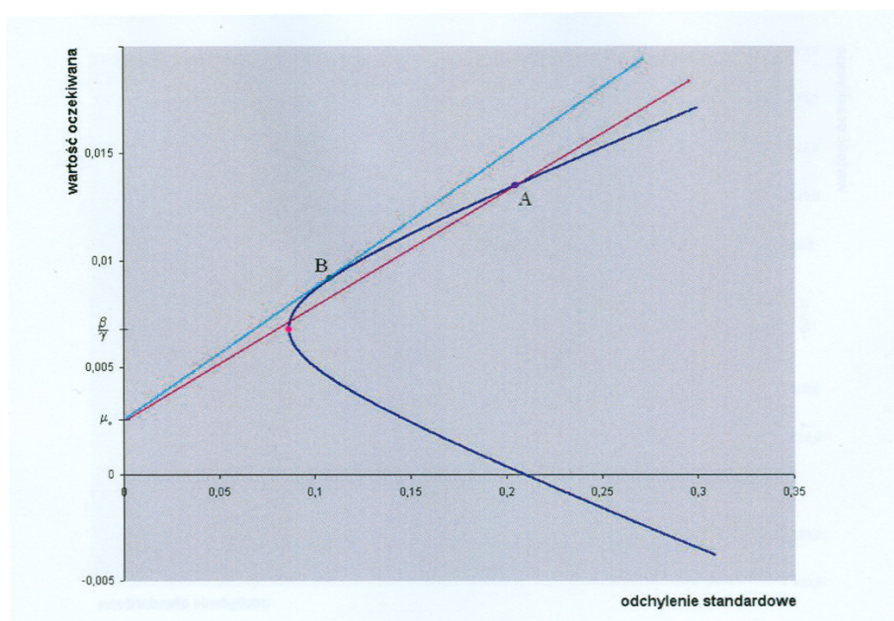
$$\sigma^2(x_1) = 0.27 x_1^2 - 0.35 x_1 + 0.14,$$

gdzie  $x_1$  jest dowolną liczbą z przedziału  $[0, 1]$ . Widzimy więc, że w ten sposób uzyskaliśmy prosty przepis, jak możemy manipulować ryzykiem naszego portfela poprzez odpowiedni dobór jego składników (czyli zakup akcji A i B w stosownej proporcji). Powyższa funkcja przyjmuje swoje minimum (globalne) w punkcie  $x_1 = \frac{35}{54} \approx 0.648$  i wynosi ono  $\sigma^2\left(\frac{35}{54}\right) = \frac{287}{10800} \approx 0.027$ . Zatem gdybyśmy za około 65% posiadanych pieniędzy nabyli akcje spółki A, zaś pozostałe 35% przeznaczyci na zakup (kiepskich!) akcji spółki B, ryzyko naszego portfela (mierzone odchyleniem standardowym jego stopy zwrotu) byłoby najmniejsze z możliwych i wyniosłoby  $\sqrt{\frac{287}{10800}}$ , czyli około 16.30%! Jest to o wiele mniej, niż 24.49% dla akcji spółki A, czy 37.41% dla akcji spółki B. (Proszę spojrzeć w tym momencie na wykres ilustrujący poprzedni przykład!) Niech nam się jednak nie wydaje, że dokonaliśmy jakiegoś cudu — owszem, przy pomocy „kiepskich” akcji udało się znacznie zmniejszyć ryzyko, jednak kosztem stopy zwrotu! Obliczmy oczekiwaną stopę zwrotu z takiego portfela:  $E(x) = \frac{35}{54} \cdot 25\% + \frac{19}{54}(-5\%) \approx 14.44\%$ . Jest to niestety mniej niż 25% możliwe do uzyskania z inwestycji wyłącznie w „lepsze” akcje. Znowu więc powraca pytanie, co wybrać: wyższy zwrot ale i wyższe ryzyko, czy też zwrot niższy, ale przy niższym poziomie ryzyka? Narzędziem, pomagającym w tego rodzaju dylematach okazuje się (najczęściej, nie jedynie) tzw. wskaźnik, lub współczynnik Sharpe’a danego portfela. W tych wykładach jest on systematycznie badany o wiele później, poczynając od Wykładu IX (patrz w szczególności Uwaga 9.1 w tamtym wykładzie).

Definiuje się go jako stosunek tzw. premii za ryzyko (mierzonej różnicą między stopą zwrotu z inwestycji w portfel akcji i stopą zwrotu pozbawioną ryzyka  $\mu_0$  — związaną z nabywaniem bonów skarbowych, obligacji, itp., czyli papierów wartościowych, z których mamy zagwarantowany konkretny dochód) do ryzyka (mierzonego odchyleniem standardowym stopy zwrotu portfela). Formalnie, dla danego portfela  $x$ ,

$$S_{\mu_0}(x) = \frac{E(x) - \mu_0}{\sigma(x)}. \quad (1.1)$$

Można więc powiedzieć, że współczynnik Sharpe’a jest to *względna premia* za podjęcie ryzyka inwestycji w akcje. Zauważmy, że gdyby ryzyka portfeli były takie same, to większy współczynnik Sharpe’a oznaczałby wyższą stopę zwrotu. I podobnie, gdyby stopy zwrotu portfeli były równe, większy współczynnik Sharpe’a oznaczałby mniejsze ryzyko. Widzimy więc, jak naturalna jest przesłanka, by inwestorzy wybierali portfele, mające możliwie największy wskaźnik Sharpe’a. Niech za ilustrację tego służy następujący poglądowy rysunek,



Rysunek 1.3. Graficzna interpretacja współczynnika Sharpe'a dla różnych portfeli.

na którym na pionowej osi widać punkt odniesienia – stopę bezryzykowną  $\mu_0$  i gdzie od razu widzimy, że portfel, którego obrazem Markowitza jest punkt **B**, ma większy wskaźnik Sharpe'a niż np portfel, którego obrazem jest punkt **A**. Czy ten pierwszy (dający punkt **B**) nie ma przypadkiem największego możliwego, w jakiejś niesprecyzowanej jeszcze klasie portfeli, współczynnika Sharpe'a?

(Obraz Markowitza danego portfela – podstawowe pojęcie w teorii Markowitza – to punkt na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$  mający współrzędne: odchylenie standardowe i wartość oczekiwana tego portfela. Będziemy systematycznie używać tego pojęcia już od Wykładu II. Czy czytelnik, odczytując optycznie dane z Rysunku 1.3, jest w stanie policzyć, według wzoru (1.1), przybliżone wartości wskaźników Sharpe'a tych portfeli, których obrazami Markowitza są punkty **A** i **B**?)

Wracamy teraz do drugiego głównego przykładu dyskutowanego w tym wykładzie. Przyjmijmy (w nim), że obecnie  $\mu_0 = 5\%$ . Wtedy dla inwestycji w akcje spółki A wskaźnik Sharpe'a wynosi  $\frac{0.25-0.05}{\sqrt{0.06}} \approx 0.816$ . Natomiast dla naszego portfela  $x$  o minimalnym ryzyku mamy  $S_{5\%}(x) = \frac{0.1444-0.05}{\sqrt{287/10800}} \approx 0.579$ . Jest to wynik zdecydowanie słabszy!

Pozostaje jednak pytanie: czy jeżeli chcielibyśmy znaleźć portfel, dla którego współczynnik Sharpe'a przyjmuje wartość największą z możliwych (porównaj też Rysunek 1.3 powyżej), to czy właściwą odpowiedzią będzie ten złożony tylko z akcji „najlepszej” spółki? Otóż niekoniecznie! Często istnieje portfel „lepszy” i od portfela dającego najwyższą stopę zwrotu i od portfela o minimalnym ryzyku. Portfel taki ma wtedy stopę zwrotu znajdującą się pomiędzy stopami zwrotu powyższych dwóch portfeli i nazywa się go *portfelem optymalnym ze względu na daną stopę zwrotu pozbawioną ryzyka*. Okazuje się, że w tym przykładzie jest to  $x_{op} = (\frac{49}{51}, \frac{2}{51})^T$ . I rzeczywiście, jego wskaźnik Sharpe'a wynosi około 0.818, odrobinę lepiej, niż dla portfela zawierającego wyłącznie akcje „najlepszej” spółki! W późniejszych wykładach, poczynając od dziewiątego, poznamy teorię dającą sposoby dochodzenia do takiego wyniku przy dwu lub też większej (dowolnej) ilości spółek w modelu.

## 2. Wykład II, 9.X.2009

### Co wiemy na temat rzeczywistych rozkładów zmiennych stóp zwrotu?

Najczęściej nie wiemy nic konkretnego na temat rozkładów zmiennych stóp zwrotu z akcji spółek notowanych na giełdzie. Markowitz był tego świadom od samego początku. Na stronie 82 w swoim podstawowym artykule [19] pisał

*... Perhaps there are ways, by combining statistical techniques and the judgment of experts, to form reasonable probability beliefs  $(\mu_i, \sigma_{ij})$ . We could use these beliefs to compute the attainable efficient combinations of  $(E, V)$ . The investor, being informed of what  $(E, V)$  combinations were attainable, could state which he desired. We could then find the portfolio which gave this desired combination.*

(Początkową część tego cytatu czytelnik znajdzie też dalej w tych wykładach – na Rysunku 7.2 w Wykładzie VII, gdzie strona 82 została trochę ucięta przy skanowaniu.)

Natomiast całą pracę [19] kończył Markowitz takimi oto uwagami, rozwijającymi i ukonkretniającymi te wcześniejsze.<sup>1</sup>

*To use the E-V rule in the selection of securities we must have procedures for finding reasonable  $\mu_i$  and  $\sigma_{ij}$ . These procedures, I believe, should combine statistical techniques and the judgment of practical men. My feeling is that the statistical computations should be used to arrive at a tentative set of  $\mu_i$  and  $\sigma_{ij}$ . Judgment should then be used in increasing or decreasing some of these  $\mu_i$  and  $\sigma_{ij}$  on the basis of factors or nuances not taken into account by the formal computations. Using this revised set of  $\mu_i$  and  $\sigma_{ij}$ , the set of efficient E, V combinations could be computed, the investor could select the combination he preferred, and the portfolio which gave rise to this E, V combination could be found.*

*One suggestion as to tentative  $\mu_i$  and  $\sigma_{ij}$  is to use the observed  $\mu_i, \sigma_{ij}$  for some period of the past. I believe that better methods, which take into account more information, can be found. I believe that what is needed is essentially a „probabilistic” reformulation of security analysis. I will not pursue this subject here, for this is „another story”. It is a story of which I have read only the first page of the first chapter.*

Zgodnie z sugestią Markowitza zawartą w drugim akapicie powyższego cytatu, estymujemy zatem podstawowe parametry takich zmiennych stóp zwrotu, używając estymatorów z jednokowymi (mówi się też: jednorodnymi) wagami, jak w przykładach w Wykładzie I.

Realnie zmienne losowe w analizie portfelowej mogą mieć najrozmaitsze rozkłady. Oto pewna para takich rozkładów, pojawiająca się w obecnie już klasycznym przykładzie „5 stanów giełdy” (pochodzącym z dawniejszych wykładów [13] profesora Krzyżewskiego na Wydziale MIM UW; przykładzie wtedy przesuniętym na ćwiczenia, a teraz analizowanym tutaj aż do Rysunku 2.1 włącznie, z niespodziewanym nawrotem do niego jeszcze w Przykładzie 3.3 w Wykładzie III):

---

<sup>1</sup> To quasi-powtórzenie pokazuje, jaką wagę przykładał on do zagadnienia znalezienia właściwych parametrów w analizie portfelowej.

| stan         | prawdopodobieństwo wystąpienia | $R_A$ | $R_B$ |
|--------------|--------------------------------|-------|-------|
| hossa        | 0.2                            | 40%   | 30%   |
| wzrost       | 0.3                            | 20%   | 20%   |
| stabilizacja | 0.1                            | 10%   | 10%   |
| spadek       | 0.3                            | -10%  | -20%  |
| bessa        | 0.1                            | -30%  | -20%  |

Wartości zmiennych losowych  $R_A$  i  $R_B$  to stopy wzrostu (które mogą też być ujemne) notowań spółek A i B w zaproponowanych tu możliwych stanach giełdy, w ustalonym okresie inwestycyjnym.

Na podstawie tak podanych danych surowych tworzymy tabelę rozkładu łącznego zestawu zmiennych  $(R_A, R_B)$ , albo, jak niektórzy wolą powiedzieć, tabelę rozkładu zmiennej losowej dwuwymiarowej.

Następnie obliczamy podstawowe parametry rozkładów zmiennych  $R_A$  i  $R_B$  (tj rozkładów brzegowych wspomnianej zmiennej losowej dwuwymiarowej):

$$\mathbb{E}(R_A) = 0.09, \mathbb{E}(R_B) = 0.05, \sigma^2(R_A) = 0.0489, \sigma^2(R_B) = 0.0445,$$

$$\text{cov}(R_A, R_B) = 0.0445, \rho_{AB} (= \text{cor}(R_A, R_B)) = 0.9539,$$

$$\sigma(R_A) = 0.22113, \sigma(R_B) = 0.21095.$$

*Uwaga 2.1.* W dwóch przykładach w Wykładzie I mogliśmy tylko policzyć estymatory tych parametrów dla zmiennych stóp zwrotu  $R_X, R_Y$  oraz  $R_A, R_B$ ; rozkładów tamtych zmiennych nie znaleźliśmy. Dzięki estymatorom policzonym dla pierwszej pary tamtych zmiennych mogliśmy m.in. dopracować się wykresu podanego na Rysunku 1.2 w Wykładzie I.

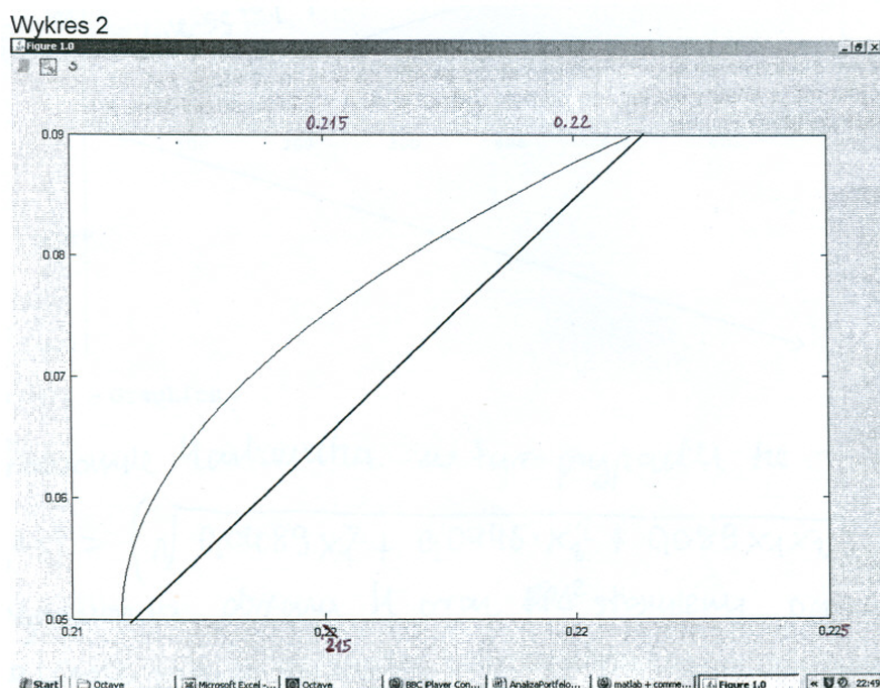
Teraz zmienne losowe znamy dokładnie. Postawmy pytanie, jak w przykładzie „5 stanów giełdy” wygląda analogiczny do tamtego wykres na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ ?

(Dla nas na tym wykresie ważny jest tylko zaznaczony łuk hiperboli. Znaczenie odcinka prostej widocznego poniżej łuku hiperboli znane jest tylko studentowi – autorowi wykresu.)

Wprowadzimy teraz cały zestaw oznaczeń ogólnie przyjętych w teorii Markowitza [19, 21, 22] – tzw. *Markowitz setup*:

- Ilość spółek notowanych na giełdzie oznaczamy  $k$ .
- Zmienne losowe – stopy zwrotu z notowań tych spółek w ustalonym okresie inwestycyjnym oznaczamy  $R_1, R_2, \dots, R_k$ . Są to zmienne losowe na tej samej (bliżej nie precyzowanej, por. powyższy długi cytat z pracy Markowitza) przestrzeni probabilistycznej, przyjmujące wartości z  $[-1, +\infty)$ , o których zawsze będziemy zakładać, że ich wartości oczekiwane  $\mathbb{E}(R_i)$  oraz wariancje  $\sigma^2(R_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , są wszystkie skończone.
- Będziemy pisali krótko:  $\mathbb{E}(R_i) = \mu_i$ ,  $\sigma(R_i) = \sigma_i$ ,  $\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ , gdzie  $\rho_{ij} = \text{cor}(R_i, R_j)$  dla  $1 \leq i \neq j \leq k$ .
- Wektor wartości oczekiwanych  $\mu_i$  oznaczamy  $\mu = [\mu_i]_{i=1}^k$ , zaś wektor zmiennych losowych  $R_i$  oznaczamy  $R = [R_i]_{i=1}^k$ .
- Będziemy mówić, że wektorowa zmienna losowa  $R$  ma wektorową wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}(R) = \mu$ . Wektor odchyleń standardowych będziemy (czasem) oznaczać  $\sigma = [\sigma_i]_{i=1}^k$ .
- Wreszcie macierz kowariancji wektorowej zmiennej losowej  $R = (R_1, R_2, \dots, R_k)^T$  oznaczamy

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{ij} & \\ & \sigma_{ij} & \ddots & \\ & & & \sigma_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j & \\ & \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j & \ddots & \\ & & & \sigma_k^2 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 2.1. Związek między ryzykiem i wartością oczekiwaną w przykładzie „5 stanów giełdy”.

- Teoria, którą będziemy poznawać na tych wykładach, nie jest (o ile ktoś miałby jeszcze co do tego wątpliwości) oderwana od życia. Oto – dla ilustracji tej tezy – treść ulotki banku ING BSK z roku 2009, reklamującej pewien nowy produkt banku: „Na wysokość wypłaty na koniec programu wpływa wzrost wartości portfela inwestycyjnego. Strategia inwestycyjna została oparta na innowacyjnym modelu matematycznym, który zdobył nagrodę Nobla (Markowitz Efficient Frontier Theory). Jego unikalność polega na tym, że generuje stabilne dochody zarówno na rynkach wzrostowych, jak i spadkowych.”
- W Wykładzie I (Rysunek 1.1) dowiedzieliśmy się, jak fundusz wielkiego inwestora Warrena Buffetta „bije” (w długim i trudnym okresie czasu 2006 - 2010 obejmującym kryzys finansowy lat 2008-9) amerykańską giełdę. W naszym kraju też zdarzają się godne uwagi osiągnięcia na podobnym polu. Dokładniej, w pierwszej połowie roku 2010, w V Mistrzostwach Polski Inwestorów, zwycięzca w kategorii akcje (pan Andrzej Laskowski z Redy) zwiększył wartość swojego portfela aż o 78%.

### Obserwacja. 2.1

$$\Sigma = \mathbb{E}((R - \mu)(R - \mu)^T).$$

Dowód wynika wprost z wcześniej podanych (i znanych już z wykładu RP 1) definicji.

**Przykład 2.1.** W przykładzie „5 stanów giełdy”, wobec obliczeń zrobionych już wcześniej, wektor  $\mu$  i macierz  $\Sigma$  to

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.09 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.0489 & 0.0445 \\ 0.0445 & 0.0445 \end{pmatrix}.$$

**Przypomnienie.** Kryterium Sylwestera, poznane na I roku na wykładach z GALu, wyjaśnia, kiedy macierz  $\Sigma$  rzeczywista i symetryczna wymiaru  $k \times k$  jest dodatnio określona:

$$\Sigma > 0 \iff \Sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} > 0 \text{ dla } p = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie  $\Sigma \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix}$  to minor  $p \times p$  w macierzy  $\Sigma$  używający wierszy o numerach  $i_1, i_2, \dots, i_p$  oraz kolumn o numerach  $j_1, j_2, \dots, j_p$  (używamy tu oznaczeń ze zbyt mało w Polsce znanego podręcznika z teorii macierzy i algebry liniowej [6]). Minory  $\Sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}$  w kryterium Sylwestera to minory *główne* macierzy  $\Sigma$ .

Znane jest też podobne kryterium na temat nieujemnej określoności macierzy, aczkolwiek nie wchodzi ono do standardowego kursu GALu. Mianowicie, dla macierzy  $\Sigma$ , kwadratowej  $k \times k$  rzeczywistej symetrycznej,

$$\Sigma \geq 0 \iff \Sigma \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \text{ dla } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k,$$

przy wszystkich  $p = 1, 2, \dots, k$ . Minory  $\Sigma \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$  to minory *centralne* macierzy  $\Sigma$ .

To nowe kryterium jest w istocie dość szybkim wnioskiem z kryterium Sylwestera – patrz [6], strona 270. Kluczowe miejsce w rozumowaniu, aczkolwiek piękne, jest tam jednak zredagowane niezmiernie lakonicznie. Dla wygody czytelnika, poniżej przytaczamy właściwy fragment wspomnianej strony z [6].

(W rozwinięciu  $\epsilon^p + \dots$  minora centralnego  $A_\epsilon \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$  występują wyrazy z *nieujemnymi* współczynnikami przy potęgach  $\epsilon^{p-1}, \dots, \epsilon^1, 1$  — dlaczego?)

W tej chwili mamy już język, lecz jest on jeszcze dla nas martwą literą. Jak Markowitz koduje, czy modeluje, swoje portfele? Wskazówki dostarcza już Wykład 1, gdzie co prawda występują tylko dwie spółki, zaś portfele opisywane są punktami  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  leżącymi na prostej  $x_1 + x_2 = 1$  w pierwszej ćwiartce (czyli spełniającymi warunki  $x_1 \geq 0$  i  $x_2 \geq 0$ ). Ze swojego kapitału  $L$ , inwestor przeznaczał tam  $x_1 L$  na zakup akcji pierwszej spółki (i kupował tych akcji  $\frac{x_1 L}{C_{1,\text{pocz}}}$ ) oraz  $x_2 L$  na zakup akcji drugiej spółki (których kupował  $\frac{x_2 L}{C_{2,\text{pocz}}}$ ).

Teraz, gdy dostępne są akcje spółek o numerach  $1, 2, \dots, k$ , inwestor dzieli swój kapitał  $L$  na części

$$x_1 L + x_2 L + \dots + x_k L = L,$$

gdzie oczywiście  $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$  oraz  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$ . Następnie, dla  $i = 1, 2, \dots, k$ , za kwotę  $x_i L$  kupuje on akcje spółki numer  $i$ .

Możliwe portfele inwestora są więc teraz opisywane punktami

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

takimi, że  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$  oraz  $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$ .

Теорема 4. Для того чтобы квадратичная форма  $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k$  была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы коэффициентов были неотрицательны:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \quad p = 1, 2, \dots, n). \quad (40^*)$$

Доказательство. Введем вспомогательную форму

$$A_\varepsilon(x, x) = A(x, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\varepsilon > 0).$$

Очевидно,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(x, x) = A(x, x)$ .

Из неотрицательности формы  $A(x, x)$  следует положительная определенность формы  $A_\varepsilon(x, x)$  и, следовательно, неравенства (см. следствие из теоремы 3)

$$A_\varepsilon \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \quad p = 1, 2, \dots, n).$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем условия (40\*).

Пусть, наоборот, даны условия (40\*). Из этих условий следует

$$A_\varepsilon \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} = \varepsilon^p + \dots \geq \varepsilon^p > 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \quad p = 1, 2, \dots, n).$$

Но тогда (согласно теореме 3)  $A_\varepsilon(x, x)$  — положительно определенная форма:

$$A_\varepsilon(x, x) > 0 \quad (x \neq 0).$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем отсюда

$$A(x, x) \geq 0.$$

Теорема доказана.

Условия неположительности и отрицательной определенности формы получаются соответственно из неравенств (39) и (40), если эти неравенства применить к форме  $-A(x, x)$ .

Теорема 5. Для того чтобы квадратичная форма  $A(x, x)$  была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n D_n > 0. \quad (39')$$

Теорема 6. Для того чтобы квадратичная форма  $A(x, x)$  была неположительной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$(-1)^p A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \quad p = 1, 2, \dots, n). \quad (40')$$

Rysunek 2.2. Dowód twierdzenia charakteryzującego macierze symetryczne nieujemnie określone.

Zbiór wszystkich takich punktów oznaczamy symbolem  $\Delta^k$ ,  $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ . Jest to tzw. *sympleks standardowy* w  $\mathbb{R}^k$  [w wersji pdf Rysunek 2.3 wypada dopiero na następnej stronie]:

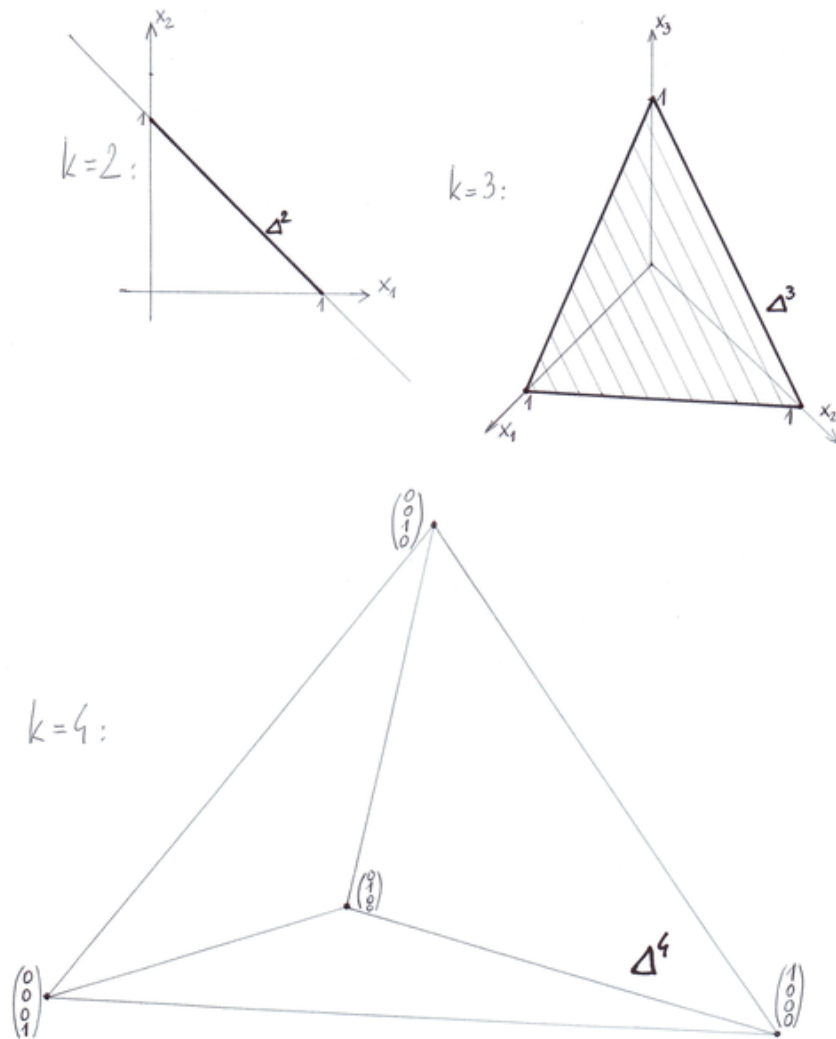
W Wykładzie I widzieliśmy, że zainwestowanie własnego kapitału w akcje spółek A i B, opisane (czy zakodowane) portfelem  $(x_1, x_2)^T \in \Delta^2$  ma stopę zwrotu (lub, krócej: taki portfel ma stopę zwrotu)  $x_1 R_A + x_2 R_B$ .<sup>2</sup> Czy analogicznie jest gdy inwestuje się kapitał w akcje  $k$  spółek? Tzn czy w dalszym ciągu ma miejsce odpowiedniość

$$\Delta^k \ni x \longleftrightarrow \text{zmienna losowa } x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_k R_k = x^T R \quad (2.1)$$

wiążąca dany portfel Markowitza ze zmienną losową stojącą po prawej stronie w (2.1) jako jego stopę zwrotu?

Tak jest w istocie. Jeżeli przez  $L$  oznaczmy kapitał inwestora, wtedy  $x_i \cdot L$  będzie kwotą przeznaczoną przez niego na zakup akcji spółki numer  $i$ . Jeśli  $C_{i, \text{pocz}}$  i  $C_{i, \text{kon}}$  oznaczają notowania akcji  $i$ -tej spółki odpowiednio na początku i na końcu okresu inwestycyjnego (pamiętamy,

<sup>2</sup> To w dalszym ciągu jest zmienna losowa!



Rysunek 2.3. Sympleksy standardowe  $\Delta^k$  dla  $k = 2, 3, 4$ .

że ta druga wielkość jest zmienną losową) oraz  $\frac{x_i \cdot L}{C_{i, \text{pocz}}}$  jest ilością nabytych przez inwestora akcji  $i$ -tej spółki, wtedy jego portfel  $x = (x_1, \dots, x_k)^T$  ma łączną stopę zwrotu

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^k C_{i, \text{kon}} \cdot \frac{x_i \cdot L}{C_{i, \text{pocz}}} - L}{L} &= \frac{\sum_{i=1}^k C_{i, \text{kon}} \cdot \frac{x_i \cdot L}{C_{i, \text{pocz}}} - \sum_{i=1}^k C_{i, \text{pocz}} \frac{x_i \cdot L}{C_{i, \text{pocz}}}}{L} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \frac{C_{i, \text{kon}} - C_{i, \text{pocz}}}{C_{i, \text{pocz}}} \\ &= \sum_{i=1}^k x_i R_i. \end{aligned}$$

To spostrzeżenie motywuje następującą

**Definicja 2.1.** Dla każdego portfela Markowitza  $x \in \Delta^k$

- (i) Wartością oczekiwaną portfela  $x$ , oznaczaną  $E(x)$ , nazywamy wartość oczekiwaną zmiennej stopy zwrotu przy inwestowaniu w ten portfel, czyli zmiennej losowej stojącej po prawej stronie w (2.1):  $E(x) = \mathbb{E}(x^T R)$ .
- (ii) Odchyleniem standardowym (względnie wariancją) portfela  $x$ , oznaczanym  $\sigma(x)$  ( $\sigma^2(x)$ ), nazywamy odchylenie standardowe (wariancję) zmiennej losowej  $x^T R$ :  $\sigma(x) = \sigma(x^T R)$  ( $\sigma^2(x) = \sigma^2(x^T R)$ ).

### Obserwacja. 2.2

- (i)  $E(x) = x^T \mu$  dla  $x \in \Delta^k$ .
- (ii)  $\sigma^2(x) = x^T \Sigma x$  dla  $x \in \Delta^k$ .
- (iii) Macierz  $\Sigma$  jest nieujemnie określona i  $\sigma(x) = \sqrt{x^T \Sigma x}$  dla  $x \in \Delta^k$ .

*Dowód.* (i)  $E(x) = \mathbb{E}(x^T R) = x^T \mathbb{E}(R) = x^T \mu$ ,

$$(ii) \quad \sigma^2(x) = \sigma^2(x^T R) = \mathbb{E}(x^T R - \mathbb{E}(x^T R))^2 = \mathbb{E}(x^T (R - \mu))^2 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}(x^T (R - \mu)(x^T (R - \mu))^T) = \\ \mathbb{E}(x^T (R - \mu)(R - \mu)^T x) = x^T \mathbb{E}((R - \mu)(R - \mu)^T) x \stackrel{\text{Obs. 2.1}}{=} x^T \Sigma x.$$

(iii) Dowolnie ustalamy  $y \in \mathbb{R}^k$  i rozważamy zmienną losową  $y_1 R_1 + y_2 R_2 + \dots + y_k R_k$  niezwiązaną ściśle z analizą portfelową. Powtarzając rachunki z dowodu (ii) (w którym nie wykorzystaliśmy założenia  $x \in \Delta^k$ ),

$$0 \leq \sigma^2(y^T R) = y^T \Sigma y,$$

zaś wzór na  $\sigma(x)$  dla  $x \in \Delta^k$  wynika z już udowodnionej części (ii). □

W teorii Markowitza kluczową rolę odgrywa *odwzorowanie Markowitza*  $\mathcal{M}$ :

$$\Delta^k \ni x \mapsto \mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ E(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^T \Sigma x} \\ \mu^T x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2(\sigma, E).$$

Często używane też jest *zmodyfikowane odwzorowanie Markowitza*  $\widetilde{\mathcal{M}}$ :

$$\Delta^k \ni x \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}(x) = \begin{pmatrix} \sigma^2(x) \\ E(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T \Sigma x \\ \mu^T x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2(\sigma^2, E).$$

*Uwaga 2.2.* a) W oryginalnych pracach Markowitza (i tylko Markowitza) kolejność zmiennych jest odwrócona:  $E$  jest odkładana na osi odciętych, natomiast  $\sigma$  (względnie  $\sigma^2$ ) – na osi rzędnych. Oczywiście sam Markowitz nie nazywał tak tych odwzorowań. Mówił on tylko o ‘attainable  $(E, V)$  combinations’ – patrz np strona 82 w [19]. Powyższe nazwy i sam symbol  $\mathcal{M}$  wprowadził, być może nie jako jedyny na świecie, Krzyżewski w [13].

b) W późniejszej części teorii, którą poznaje się na wykładach z analizy portfelowej, odwzorowania  $\mathcal{M}$  i  $\widetilde{\mathcal{M}}$  będą miały o wiele większą dziedzinę

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k : x_1 + \dots + x_k = 1\}. \quad (2.2)$$

Będzie to więc hiperpłaszczyzna afinicznie rozpięta przez sympleks standardowy  $\Delta^k$  (oczywiście  $\Delta^k \subset H$ ). Okaże się przy tym, że odwzorowania  $\mathcal{M}$  i  $\widetilde{\mathcal{M}}$  idące z  $H$  zachowują swoje wzory definicyjne z podejścia Markowitza! Patrząc na to z innej strony, tylko przez jakiś czas zajmować się będziemy wyłącznie portfelami Markowitza leżącymi w sympleksach standardowych  $\Delta^k$  i (tym samym) mającymi wszystkie współrzędne nieujemne.

c) Obraz  $\mathcal{M}(\Delta^k)$  będziemy nazywali *zbiorem osiągalnym* (niektórzy mówią też: *zbiór możliwości*) w teorii Markowitza. Podobnie,  $\mathcal{M}(H)$  będzie zbiorem osiągalnym w tej sygnalizowanej w b) szerszej teorii, która później włączy w siebie teorię Markowitza.

**Ćwiczenie 2.1.** Uzasadnić, że punkt  $(1, 2, 3)^T \in \mathbb{R}^3$  i pięć innych punktów powstających z niego przez wszelkie możliwe permutacje współrzędnych, leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie (inaczej mówiąc: wymienione punkty są współpłaszczyznowe).

**Ćwiczenie 2.2** (nie takie natychmiastowe). Na płaszczyźnie  $H \subset \mathbb{R}^3$  zdefiniowanej w (2.2) przy  $k = 3$  rozważamy **prostą**  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$  oraz **prostą**  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b'$ ; nie wszystkie współczynniki  $a_i$  są sobie równe. Wyznaczyć odległość tych prostych jako podzbiorów przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  wyposażonej w metrykę euklidesową.

*Rozwiązanie.* Ta odległość jest niemniejsza (najczęściej większa) niż odległość

$$\frac{|b' - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

odpowiednich płaszczyzn w  $\mathbb{R}^3$ .

Jaki wektor wyznacza kierunek obu tych prostych? Oczywiście iloczyn wektorowy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ a_1 - a_3 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Z kolei, jaki wektor jest równoległy do  $H$  i prostopadły do obu tych prostych? Oczywiście

$$v = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ a_1 - a_3 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 - a_3 \\ -a_1 + 2a_2 - a_3 \\ -a_1 - a_2 + 2a_3 \end{pmatrix}.$$

Za chwilę przyda się też jego długość  $\|v\| = \sqrt{3}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2}$ .

Ile tego wektora przenosi pierwszą prostą z zadania na drugą? Taka wielokrotność  $t v$ , że  $(a_1 \ a_2 \ a_3) t v = b' - b$ , czyli w postaci rozwiniętej

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) t \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 - a_3 \\ -a_1 + 2a_2 - a_3 \\ -a_1 - a_2 + 2a_3 \end{pmatrix} = b' - b.$$

Stąd po krótkim rachunku

$$t = \frac{3(b' - b)}{\|v\|^2}$$

(długość wektora  $v$  jest już wyznaczona wcześniej). Tak więc szukana odległość prostych to

$$\|t v\| = \frac{3|b' - b|}{\|v\|^2} \|v\| = \frac{3|b' - b|}{\|v\|} = \frac{\sqrt{3}|b' - b|}{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2}}.$$

**Ćwiczenie 2.3.** Kiedy odległość prostych z Ćwiczenia 2.2 (wycinanych na  $H$  przez płaszczyzny o podanych równaniach) jest **równa** odległości samych płaszczyzn  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$  i  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b'$ ?

*Wskazówka.* Okazuje się, że aby tak było, współczynniki  $a_1, a_2, a_3$  winny spełniać pewne równanie.

### 3. Wykład III, 16.X.2009

Przykłady obliczeń odwzorowania Markowitza w najprostszych sytuacjach – gdy okazuje się ono być liniowe lub kawałkami liniowe. (Od takich prostych przykładów zaczyna się najczęściej, bo rzadkie są sytuacje, gdy odchylenie standardowe portfela Markowitza da się policzyć bez wyciągania pierwiastka kwadratowego. Wykłady [13] też od tego zaczynały. Wielokąty wypukłe i odbicie w pionowej osi  $\overrightarrow{OE}$ , które czytelnik zobaczy poniżej, pojawiały się już w [13]. Natomiast specyfiką **bieżących** wykładów jest wielokrotne używanie w różnych sytuacjach modeli  $\pm$  doskonale skorelowanych. Dokładniej, szereg interesujących przykładów będzie się brał z odpowiedniego *zaburzania* macierzy kowariancji postaci jak tu niżej w **I** i **II**. Np przykład dany w przypisie nr 3 w Wykładzie XI (w wersji html jest to przypis nr 31) – do macierzy  $\pm$  doskonale skorelowanej dodana tam zostanie macierz Id.)

**I.** Załóżmy przez chwilę, że zmienne losowe  $R_1, \dots, R_k$  są wszystkie doskonale  *dodatnio* skorelowane, tzn  $\rho_{ij} = 1$  dla  $1 \leq i \neq j \leq k$ , albo też  $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j$  dla  $i \neq j$ , tzn  $\Sigma = \sigma \sigma^T$ . Wtedy  $x^T \Sigma x = x^T \sigma \sigma^T x = (\sigma^T x)^2$ ,  $\sqrt{x^T \Sigma x} = \sigma^T x$  dla  $x \in \Delta^k$ .

Zatem  $\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} \sigma^T x \\ \mu^T x \end{pmatrix}$  dla  $x \in \Delta^k$ . Odwzorowanie Markowitza jest w tym przypadku liniowe (dokładniej: zapisuje się liniowymi wzorami; jego dziedzina  $\Delta^k$  rzecz prosta nie jest przestrzenią liniową; nawet powłoka afiniczna dziedziny, czyli hiperpłaszczyzna  $H$  zdefiniowana w Wykładzie II wzorem (2.2), nie jest przestrzenią liniową).

**II.** Zmienne losowe  $R_1, \dots, R_k$  rozpadają się na dwie grupy  $R_1, \dots, R_r$  oraz  $R_{r+1}, \dots, R_k$  gdzie  $1 \leq r \leq k-1$ . Zakładamy, że zmienne w każdej z grup są parami doskonale  dodatnio skorelowane, zaś między grupami są doskonale  ujemnie skorelowane. Innymi słowy macierz

współczynników korelacji to

|       |     |       |
|-------|-----|-------|
|       | $r$ | $k-r$ |
| $r$   | +1  | -1    |
| $k-r$ | -1  | +1    |

, albo jeszcze inaczej

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \\ -\sigma_{r+1} \\ \vdots \\ -\sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r & -\sigma_{r+1} & \dots & -\sigma_k \end{bmatrix}$$

*Uwaga 3.1.* Chociaż tak skrajne rozbiecie spółek giełdowych na dwie antagonistyczne grupy nigdy nie występuje w praktyce, to jednak coś trochę zbliżonego obserwowano na giełdzie w Tokio bezpośrednio po katastrofalnym trzęsieniu ziemi w mieście Kobe w styczniu 1995 roku. Wtedy korelacje między stopami zwrotu z akcji firm budowlanych i ubezpieczeniowych były między  $-0.6$  i  $-0.2$ , podczas gdy w warunkach stabilnych prawie wszystkie współczynniki korelacji są między  $0.5$  i  $0.7$ . (Średni współczynnik korelacji na NYSE wynosi  $0.6$ .)

W tej sytuacji  $\sigma^2(x) = x^T \Sigma x =$

$$x^T \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \\ -\sigma_{r+1} \\ \vdots \\ -\sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r & -\sigma_{r+1} & \dots & -\sigma_k \end{bmatrix} x = \left( \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r & -\sigma_{r+1} & \dots & -\sigma_k \end{bmatrix} x \right)^2$$

oraz  $\sigma(x) =$

$$\sqrt{x^T \Sigma x} = \left| \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r & -\sigma_{r+1} & \dots & -\sigma_k \end{bmatrix} x \right| = |\sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_r x_r - \sigma_{r+1} x_{r+1} - \dots - \sigma_k x_k|,$$

dla  $x \in \Delta^k$ . Zatem

$$\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} |\sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_r x_r - \sigma_{r+1} x_{r+1} - \dots - \sigma_k x_k| \\ \mu^T x \end{pmatrix}, \quad x \in \Delta^k.$$

Odwzorowanie Markowitza jest więc złożeniem liniowego przenoszącego  $\Delta^k$  na pewien wielokąt wypukły położony po obu stronach osi  $\overrightarrow{OE}$  i „nakładki”  $\mathbb{R}^2(\sigma, E) \rightarrow \mathbb{R}^2(\sigma, E)$ ,  $\begin{pmatrix} \sigma \\ E \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |\sigma| \\ E \end{pmatrix}$ .

Pierwsze z narzucających się tu pytań to

- Czym są zbiory osiągalne  $\mathcal{M}(\Delta^k)$  w sytuacjach **I** i **II**?
- Czym są granice: minimalna  $F_{\min}$  i maksymalna  $F_{\max}$  dla  $\mathcal{M}(\Delta^k)$  w sytuacjach **I** i **II**, gdzie te granice definiowane są, i to ogólnie, nie tylko w sytuacjach doskonałych, w sposób następujący

$$F_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{zbiór lewych krańców zbiorów liniowych } \mathcal{M}(\Delta^k) \cap \{E = \text{const}\} \right\},$$

$$F_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{zbiór prawych krańców zbiorów liniowych } \mathcal{M}(\Delta^k) \cap \{E = \text{const}\} \right\}.$$

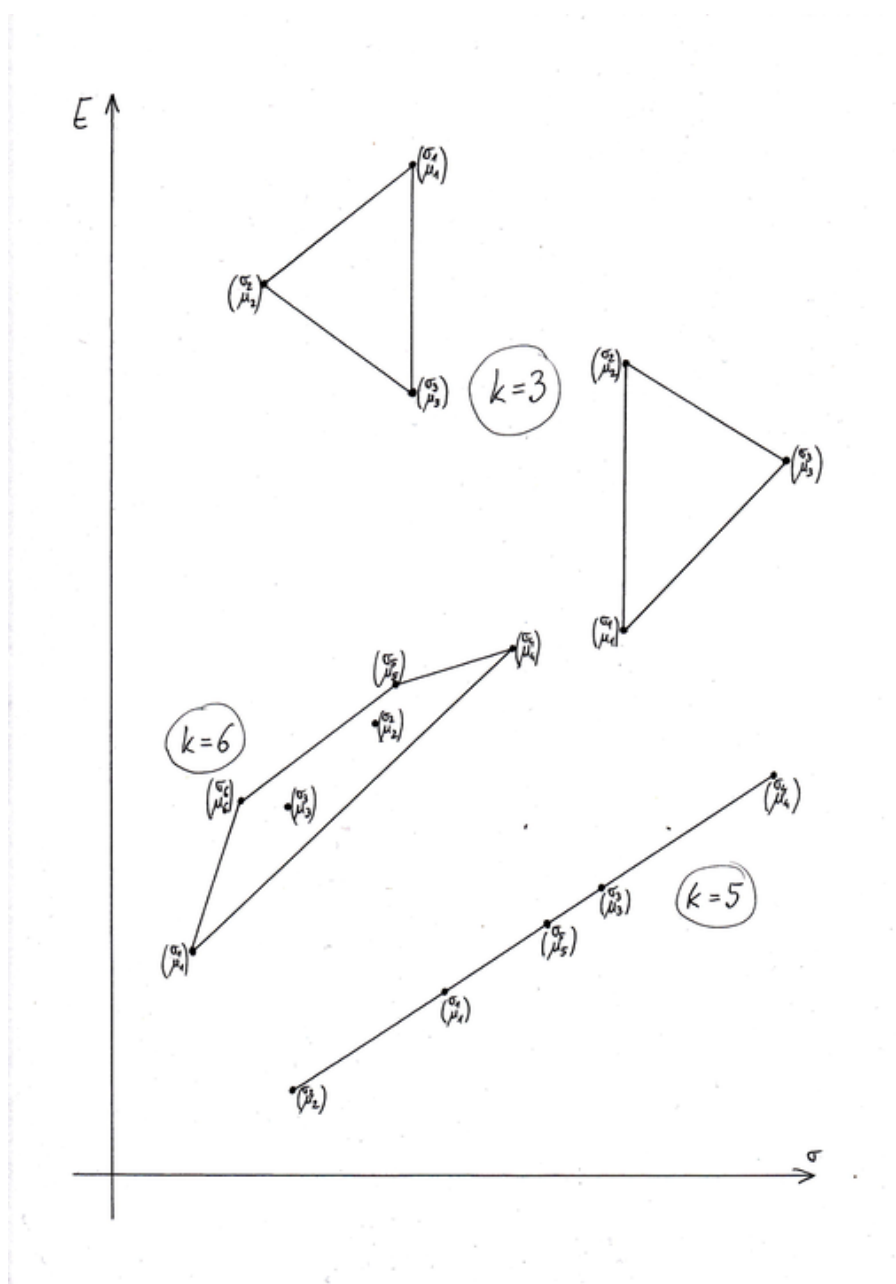
(Zbiory liniowe występujące w tych definicjach zawsze są ograniczone, bo  $\mathcal{M}(\Delta^k)$  jest zbiorem zwartym w  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ .)

Na temat zbiorów osiągalnych:

W sytuacji **I**

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\Delta^k) &= \mathcal{M} \left( \text{conv} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \text{conv} \left( \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \mu_i \end{pmatrix} \mid i = 1, 2, \dots, k \right\}, \end{aligned}$$

jest to więc  $l$ -kąt wypukły,  $1 \leq l \leq k$ , położony w prawej (otwartej) półpłaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ , bo  $\sigma_1, \dots, \sigma_k > 0$ . Dlaczego ogólnie  $l$ -kąt, a nie po prostu  $k$ -kąt? Ponieważ niektóre (lub wiele z nich) obrazy wierzchołków sympleksu  $\Delta^k$  mogą *nie* być punktami ekstremalnymi tego zbioru



Rysunek 3.1. Zbiory osiągalne w modelu Markowitza przy stopach zwrotu doskonale dodatnio skorelowanych.

wypukłego. Lub też, w sytuacji skrajnej, wszystkie te obrazy mogą się pokrywać, dając w wyniku po prostu punkt (1-kąt wypukły).

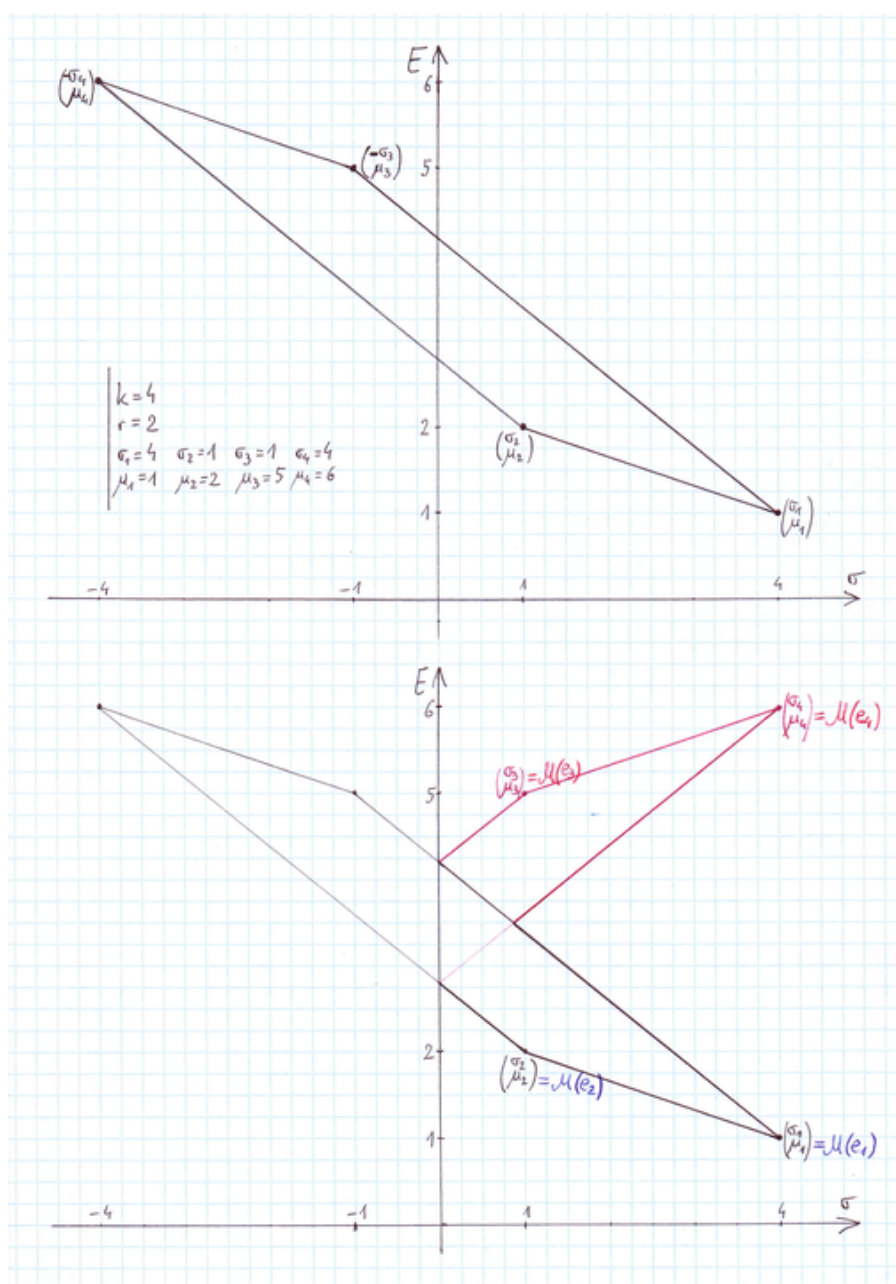
Niektóre z możliwych tu sytuacji są przedstawione na Rysunku 3.1 poniżej.

Natomiast w sytuacji **II**,

by uzyskać  $\mathcal{M}(\Delta^k)$ , najpierw tworzymy pomocniczy wielokąt wypukły  $\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \mu_i \end{pmatrix} : i = 1, 2, \dots, r; \begin{pmatrix} -\sigma_j \\ \mu_j \end{pmatrix} : j = r + 1, \dots, k \right\}$ , który – uwaga – położony jest po obu stronach osi  $\overrightarrow{OE}$ . Dokładniej, chwilowo ignorujemy znak wartości bezwzględnej w aktualnym wzorze na  $\mathcal{M}$  i stosujemy rachunek wypukły z sytuacji **I**. Jedyna różnica w porównaniu do **I** jest taka, że teraz dostajemy jakiś  $l$ -kąt wypukły, gdzie  $2 \leq l \leq k$  (nie dostajemy pojedynczego

punktu, bo trafiamy w obie półpłaszczyzny). Szukany  $\mathcal{M}(\Delta^k)$  jest obrazem tego  $l$ -kąta przy przekształceniu  $\mathbb{R}^2(\sigma, E) \rightarrow \mathbb{R}^2(\sigma, E)$ ,  $\begin{pmatrix} \sigma \\ E \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |\sigma| \\ E \end{pmatrix}$ , które zachowuje punkty w prawej półpłaszczyźnie, zaś punkty z lewej półpłaszczyzny odbija w pionowym lustrze do prawej.

**Przykład 3.1.** Weźmy  $k = 4$ ,  $r = 2$  oraz  $\sigma_1 = 4$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = 1$ ,  $\sigma_4 = 4$ ;  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 5$ ,  $\mu_4 = 6$ . Na Rysunku 3.2 tuż poniżej pokazane jest powstawanie zbioru  $\mathcal{M}(\Delta^4)$  we wspomnianych dwóch krokach;  $e_1, e_2, e_3, e_4$  to, oczywiście, kolejne wierzchołki sympleksu  $\Delta^4$ .



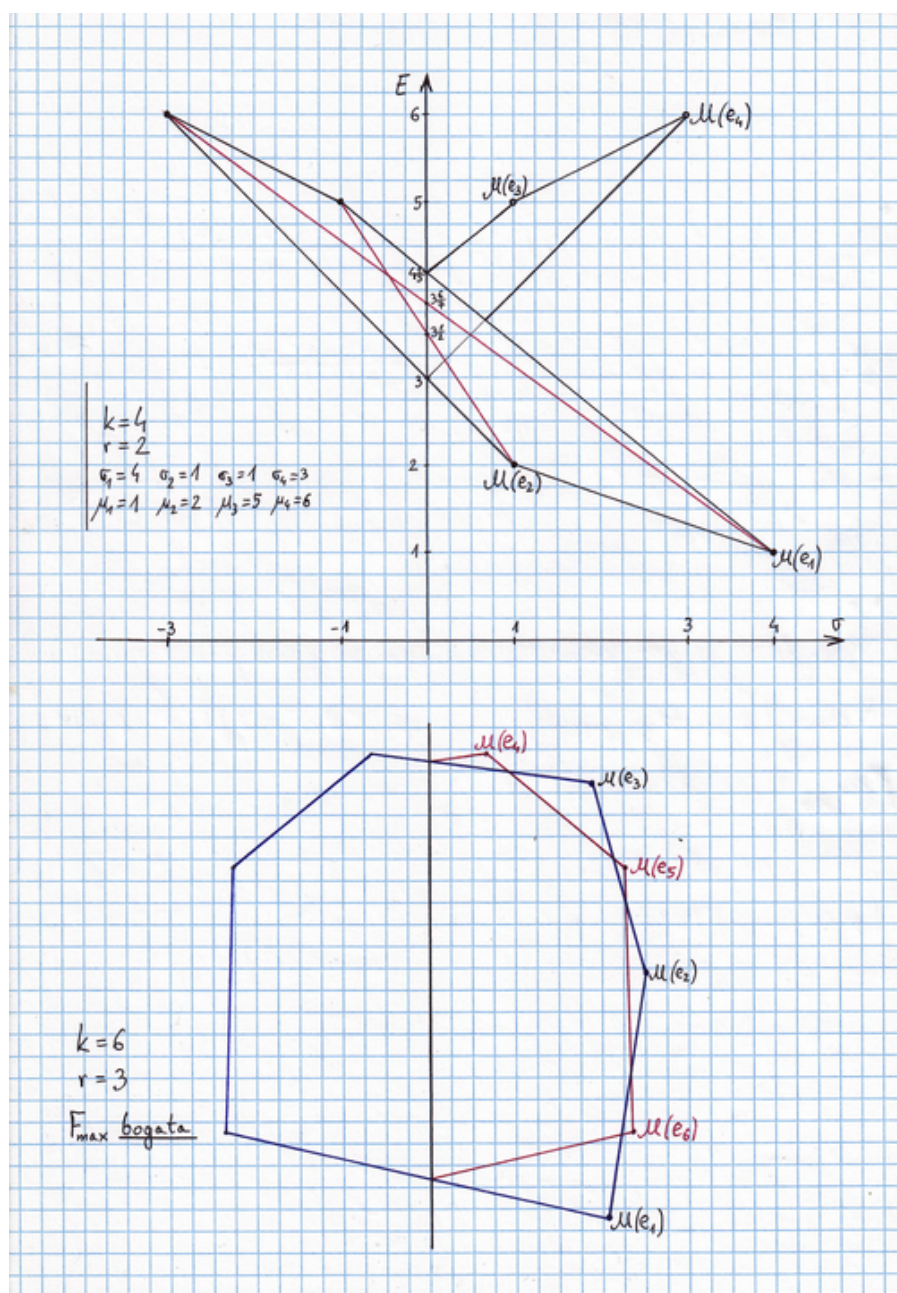
Rysunek 3.2. Zbiór osiągalny w modelu Markowitza przy stopach  $\pm$  doskonale skorelowanych.

**Na temat granic minimalnych i maksymalnych:**

Te pytania w sytuacji **I** są całkiem elementarne, nietrudno scharakteryzować (i należy to zrobić samemu!) rodziny *łamanych*, którymi są takie granice.

Jednak już w sytuacji **II**, nawet przy ustalonym dyskretnym parametrze  $r \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , opisy granic stają się dosyć skomplikowane. Zatrzymajmy się na chwilę przy tych opisach.

$F_{\min}$  jest wtedy łamaną o nie więcej niż  $k+1$  bokach, przy czym ta ilość jest osiągnięta przy każdym  $k$  i każdym  $r$  (dlaczego?).  $k+1$  jest więc najmniejszym ograniczeniem górnym ilości boków łamanej  $F_{\min}$ . Np na Rysunku 3.2, przy  $k=4$  i  $r=2$ , łamana  $F_{\min}$  składa się z 5 boków. Tak samo jest w sytuacji przedstawionej w górnej części Rysunku 3.3 tuż poniżej, choć ten przykład jest subtelniejszy od poprzedniego i będzie w przyszłości wykorzystany w innym celu.



Rysunek 3.3. Trochę ciekawsze przykłady sytuacji  $\pm$  doskonale skorelowanych.

**Ćwiczenie 3.1.** W sytuacji  $\pm$  doskonale skorelowanej przy ustalonych wielkościach  $k$  i  $r$ , znaleźć najmniejsze ograniczenie górne (dlaczego takie istnieje?) ilości boków łamanej  $F_{\max}$ .

*Wskazówka.* Zanalizować przykład pokazany w dolnej części Rysunku 3.3 powyżej, gdzie przy  $k = 6$  i  $r = 3$  granica (tu łamana) maksymalna składa się z 10 boków. *Rozwiązanie.* Pokazać, że poszukiwanym ograniczeniem jest funkcja od  $k$  i  $r$  zdefiniowana następująco

$$\begin{cases} k - 2 + 2r = 2k - 2 & \text{gdy } r = k - r, \\ k - 1 + 2 \min(r, k - r) & \text{gdy } r \neq k - r. \end{cases}$$

(To zadanie rozwiązują, z różnymi efektami, kolejne roczniki słuchaczy wykładów z APRK1 na Wydziale MIM. Stanowi ono dobry wstęp do poznania i rozumienia „parasolkowatej” natury granicy maksymalnej  $F_{\max}$  dla ogólnych odwzorowań Markowitza – gdy odrzuci się sztuczne założenie  $\pm$  doskonałej korelacji zmiennych stóp zwrotu.)

**Dygresja nt podprzestrzeni zerowych form kwadratowych nieujemnie określonych.**

Chodzi tu o zbiory wektorów, na których zerują się formy kwadratowe nieujemnie określone. Często, ustalając bazę w przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  (np bazę standardową  $e_1, \dots, e_k$ ), utożsamia się formy z macierzami nieujemnie określonymi  $k \times k$ . Zaczynamy od prostego pytania

**Ćwiczenie 3.2.** Czy macierze  $\Sigma$  w sytuacjach doskonale skorelowanych **I** i **II** są dodatnio określone?

*Rozwiązanie.* Nie, gdyż mają one duże zbiory wektorów  $y \in \mathbb{R}^k$  zerujących odpowiadającą im formę kwadratową  $y^T \Sigma y$ . Z wcześniejszych obliczeń wiemy, że te zbiory są hiperpłaszczyznami liniowymi:  $\sum_{i=1}^k \sigma_i y_i = 0$  w sytuacji **I**, względnie  $\sum_{i=1}^r \sigma_i y_i - \sum_{i=r+1}^k \sigma_i y_i = 0$  w sytuacji **II**. Trochę trudniej jest pokazać, że

**Ćwiczenie 3.3.**  $\Sigma \geq 0 \Rightarrow \{y \in \mathbb{R}^k \mid y^T \Sigma y = 0\}$  jest podprzestrzenią liniową  $\mathbb{R}^k$ . Jest to właśnie tzw. *podprzestrzeń zerowa* formy mającej macierz  $\Sigma$ .

*Rozwiązanie.*  $y^T \Sigma y = \tilde{y}^T \Sigma \tilde{y} = 0 \Rightarrow (y + \tilde{y})^T \Sigma (y + \tilde{y}) = 2y^T \Sigma \tilde{y} \geq 0$  oraz też  $(y - \tilde{y})^T \Sigma (y - \tilde{y}) = -2y^T \Sigma \tilde{y} \geq 0$ . Te dwie nierówności dają łącznie  $y^T \Sigma \tilde{y} = 0$ , i dalej  $(y + \tilde{y})^T \Sigma (y + \tilde{y}) = 0$ . Dokładniejszą informację może dać

**Ćwiczenie 3.4.** Ustalić (jeśli istnieje) związek między rzędem macierzy  $\Sigma \geq 0$  i wymiarem jej podprzestrzeni zerowej.

Zauważmy jeszcze, tylko informacyjnie, że ogólnie zbiór wektorów zerujących daną formę kwadratową nie musi mieć struktury przestrzeni liniowej.

**Przykład 3.2.** Już forma kwadratowa na  $\mathbb{R}^2$  mająca w bazie standardowej macierz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , tj przyjmująca na wektorze  $(y_1, y_2)^T$  wartość  $y_1^2 - y_2^2$ , jest taka.

Gdy macierz kowariancji  $\Sigma$  jest dodatnio określona, wtedy (oczywiście) żaden portfel Markowitza nie ma zerowego ryzyka. Natomiast czasami, i to już przy  $k = 2$ , można zmniejszać ryzyko portfela Markowitza poniżej wielkości  $\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Tak jest w obu przykładach w Wykładzie I; porównaj w szczególności Rysunek 1.2 dotyczący jednego z nich. Czasami zaś nie można zejść poniżej  $\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ , jak w przykładzie „5 stanów giełdy” w Wykładzie II, porównaj z kolei Rysunek 2.1. Od czego to zatem zależy? Przynajmniej przy  $k = 2$  chcielibyśmy mieć tu jasność.

**Pełny opis zbioru  $\mathcal{M}(\Delta^2)$ .**

Język naszego opisu to  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho (= \rho_{12})$ . Liczby  $\mu_i$  są rzeczywiste nie mniejsze niż  $-1$  i różne, by portfele mogły mieć różne wartości oczekiwane. Liczby  $\sigma_i$  są dodatnie, natomiast  $\rho \in [-1, 1]$ . Podczas rachunku przyjmujemy domyślnie, że jeśli  $\sigma_1 = \sigma_2$ , to wtedy  $\rho \neq 1$ . Celem jest, czego domyślamy się już z dotychczasowych doświadczeń i na wykładzie i na ćwiczeniach, uzyskanie hiperboli na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ , względnie paraboli na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$  (parabola będzie nawet wtedy, kiedy hiperbola przy  $|\rho| = 1$  zdegeneruje się do pary prostych).

Obliczamy wariancję portfela, parametryzując najpierw parametrem  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} \\ &= (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)x_1^2 + (2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2)x_1 + \sigma_2^2, \quad (*) \end{aligned}$$

podczas gdy

$$E = E \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = (\mu_1 - \mu_2)x_1 + \mu_2,$$

albo

$$x_1 = \frac{E - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (**)$$

i to wyrażenie będzie można podstawić do (\*).

*Uwaga 3.2.* Jest jeden jedyny przypadek, gdy (\*) *nie* wyraża kwadratowej zależności  $\sigma^2$  od  $x_1$ :  $\sigma_1 = \sigma_2$  i  $\rho = 1$ . Wtedy znikają tam współczynniki przy  $x_1^2$  oraz  $x_1$ , i przez to  $\sigma^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_2^2$ . Ten przypadek wykluczaliśmy na początku rachunku.

Trójmian wyrażający wariancję ma minimum w

$$x_{1,0} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2},$$

z czego wyliczamy, dzięki (\*\*), wartość oczekiwaną  $E_0$  odpowiadającą tej wartości  $x_1 = x_{1,0}$ ,

$$E_0 = E_0(\rho) = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (3.1)$$

Patrząc teraz równocześnie na (\*) i (\*\*), widzimy, że szukana hiperbola musi mieć równanie postaci

$$(\mu_1 - \mu_2)^2\sigma^2 - (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)(E - E_0)^2 = \text{const},$$

przy czym w analizie portfelowej ciekawa jest tylko gałąź  $\sigma > 0$ .

Trochę dodatkowych rachunków pozwala wyznaczyć wartość stałej po prawej stronie,

$$(\mu_1 - \mu_2)^2\sigma^2 - (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)(E - E_0)^2 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}(1 - \rho^2). \quad (3.2)$$

Gdy  $|\rho| = 1$  (więc  $\rho = -1$  gdy  $\sigma_1 = \sigma_2$ ), w (3.2) mamy dwie proste krzyżujące się w  $\begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \end{pmatrix}$ .

Gdy  $|\rho| < 1$ , w (3.2) mamy hiperbolę w płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ , z półosiami długości

$$a = \sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{1 - \rho^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}, \quad b = \frac{|\mu_1 - \mu_2|\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\sqrt{1 - \rho^2}. \quad (3.3)$$

1

W każdym z tych przypadków obrazy portfeli Markowitza (które nas chwilowo jedynie interesują) to części wymienionych krzywych leżące w półpłaszczyźnie  $\{\sigma \geq 0\}$  i w poziomym pasie położonym między  $E = \mu_1$  oraz  $E = \mu_2$ .

**Skrajne wartości  $E_0$ , gdy uzmienniamy parametr  $\rho$ .**

Podstawiamy w (3.1)  $\rho = -1$ :

$$E_0^- = E_0(-1) = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 + (\mu_1 + \mu_2)\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{(\sigma_2\mu_1 + \sigma_1\mu_2)(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{\sigma_2\mu_1 + \sigma_1\mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

$E_0^-$  jest więc punktem podziału *wewnętrznego* odcinka o końcach  $\mu_1, \mu_2$  w stosunku  $\sigma_1 : \sigma_2$ .

Podstawiamy teraz w (3.1)  $\rho = +1$ :

$$E_0^+ = E_0(+1) = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{(\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2} = \frac{\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1},$$

$E_0^+$  jest więc punktem podziału *zewnątrznego* odcinka o końcach  $\mu_1, \mu_2$  w stosunku  $\sigma_1 : \sigma_2$  (i nie istnieje, gdy  $\sigma_1 = \sigma_2$ , lecz ten przypadek od początku wykluczaliśmy).

**Obserwacja. 3.1.** Gdy  $\rho$  rośnie od  $-1$  do  $1$ , wtedy  $E_0(\rho)$  dane wzorem (3.1) zmienia się ściśle monotonicznie.

*Dowód.* Prawa strona w (3.1) to funkcja homograficzna od  $\rho$ . Zapisujemy ją inaczej, jak (być może) robiliśmy to już kiedyś na zajęciach z Funkcji Analitycznych:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{(\mu_1 + \mu_2)(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \\ &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{2(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ścisła monotoniczność  $E_0(\rho)$  jest już teraz widoczna.  $\square$

Np w sytuacji na rysunku poniżej, mimo braku numeracji obrazów wierzchołków, musi być albo  $\mu_1 < \mu_2$  i  $\sigma_1 < \sigma_2$ , albo też  $\mu_1 > \mu_2$  i  $\sigma_1 > \sigma_2$ , więc licznik ułamka w (3.4) przy każdej z tych możliwych numeracji jest *ujemny* i  $E_0(\rho)$  ściśle maleje od  $E_0^-$  do  $E_0^+$  [w wersji pdf Rysunek 3.4 przeskoczył na następną stronę].

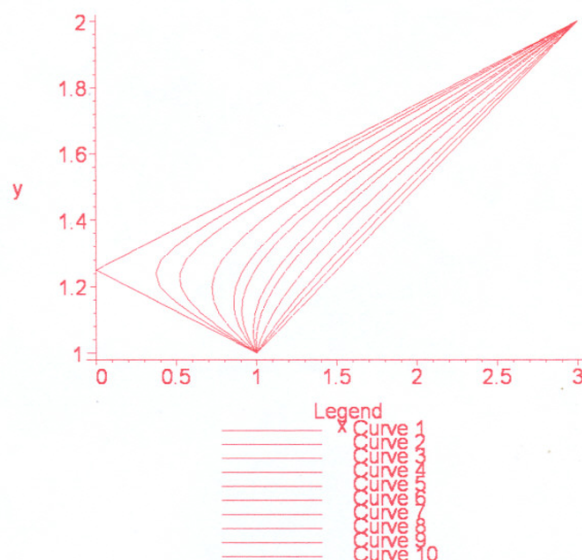
**Obserwacja. 3.2.** Gdy  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$  i  $\rho$  rośnie od  $-1$  do  $+1$ , wtedy rozwartość kąta między asymptotami hiperboli (3.2) ściśle rośnie od  $2 \arctg \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{\sigma_1 + \sigma_2}$  do  $2 \arctg \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{\sigma_2 - \sigma_1}$ .

*Dowód.* Według (3.3),  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\text{ką}\text{t rozwarcia asymptot}) = \frac{b}{a} = \frac{|\mu_2 - \mu_1|}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}$ .  $\square$

<sup>1</sup> Równanie położonej kanonicznie na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(x, y)$  hiperboli o półosiach długości  $a$  i  $b$  to

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Tutaj  $x = \sigma$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y = E$ ,  $y_0 = E_0$ .



Rysunek 3.4. Pęk hiperbol parametryzowany zmieniającą się wartością  $\rho$ .

### Krytyczna wartość współczynnika korelacji.

Postawmy sobie pozornie uboczne pytanie, kiedy (tj dla jakiej wartości  $\rho$ )  $E_0 = \mu_1$ , tzn. kiedy  $\mathcal{M}(e_1) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$  jest czubkiem gałęzi hiperboli (3.2). Według (3.1),

$$\mu_2 \sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2) \rho \sigma_1 \sigma_2 = \mu_1 \sigma_1^2 - 2\mu_1 \rho \sigma_1 \sigma_2,$$

tzn.

$$(\mu_2 - \mu_1) \sigma_1^2 = (\mu_2 - \mu_1) \rho \sigma_1 \sigma_2,$$

tzn.  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \rho$ , przy czym równość  $\sigma_1 = \sigma_2$  jest tutaj wykluczona, bo oznaczałaby (dodatkowo)  $\rho = 1$ .

Rozumując symetrycznie,  $E_0 = \mu_2$  pociąga za sobą, że  $\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1$ .

**Wniosek 3.1.** Czubek gałęzi hiperboli (3.2) pokrywa się z jednym z obrazów wierzchołków  $\Delta^2$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho (= \rho_{\text{kryt}}) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right\} < 1.$$

Krytyczna wartość współczynnika korelacji, zdefiniowana powyższym wzorem, to bardzo ważne narzędzie w analizie portfelowej. Bywa ono pomocne w zupełnie niespodziewanych sytuacjach, także w przykładach i zadaniach z ilością spółek większą niż dwa (o czym studenci często nie pamiętają).

**Ćwiczenie 3.5.** Policzyc wartość  $\rho_{\text{kryt}}$  w przykładzie na Rysunku 3.4 powyżej.

**Przykład 3.3.** W przykładzie „5 stanów giełdy” z Wykładu II wartość współczynnika korelacji  $\rho_{AB}$  jest właśnie krytyczna:

$$\rho_{AB} = \frac{\text{cov}(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = \rho_{\text{kryt}}.$$

Ten efekt krytyczności  $\rho_{AB}$  widać wyraźnie na Rysunku 2.1 w Wykładzie II: czubek gałęzi hiperboli jest tam na wysokości 0.05.

---

**Definicja 3.1.** Wartości  $-1 \leq \rho < \rho_{\text{kryt}}$  nazywamy *podkrytycznymi*, natomiast wartości  $\rho_{\text{kryt}} < \rho \leq 1$  nazywamy *nadkrytycznymi*.

W obu przykładach w Wykładzie I wartości współczynników korelacji są podkrytyczne: w pierwszym można to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, zaś w drugim kowariancja między stopami zwrotu jest ujemna.

Nasuwa się pytanie, które łuki hiperbol na Rysunku 3.4 powyżej odpowiadają nadkrytycznym wartościom  $\rho$ ?

## 4. Wykład IV, 23.X.2009

Pod koniec poprzedniego wykładu poznaliśmy pojęcie krytycznej wartości współczynnika korelacji, oczywiście w *danym* modelu Markowitza w wymiarze dwa, a także wartości podkrytycznych i nadkrytycznych tego współczynnika.

**Ćwiczenie 4.1.** Prześledzić na Rysunku 3.4 (Wykład III), które narysowane tam gałęzie hiperbol odpowiadają wartościom współczynnika korelacji jakiego typu. (Widać tam wyraźnie hiperbolę z krytycznym współczynnikiem korelacji. Które z pozostałych hiperbol mają korelacje podkrytyczne, które zaś nadkrytyczne?)

Aby jeszcze utrwalić pojęcie krytycznej wartości współczynnika korelacji,

**Ćwiczenie 4.2.** Wyprowadzić wzór na  $\rho_{\text{kryt}}$  bezpośrednio z formuły (\*) w Wykładzie III.

*Wskazówka.* Czubek hiperboli (3.2) będzie znajdował się na wysokości  $\mu_1$  (tzn. będzie obrazem portfela  $e_1$ ) **lub** na wysokości  $\mu_2$  (tzn. będzie obrazem portfela  $e_2$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja dana wzorem (\*) w Wykładzie III będzie miała minimum w  $x_1 = 1$  **lub** w  $x_1 = 0$ . *Rozwiązanie.* Rozwijając wskazówkę i używając wzoru na  $x_{1,0}$  z Wykładu III, musi być **albo**

$$\frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = 1,$$

co po prostych przekształceniach daje

$$\sigma_1^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2 = 0,$$

czyli

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

**albo też**

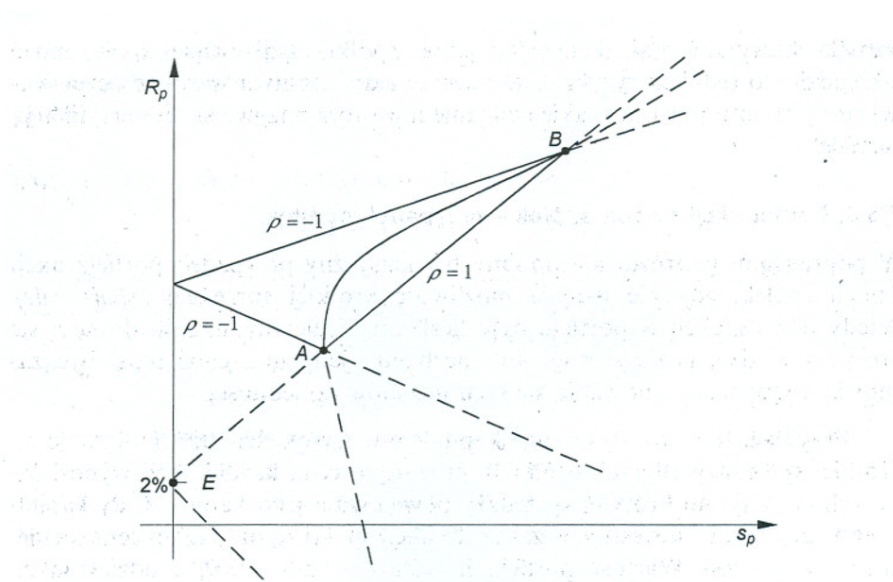
$$\frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = 0,$$

co od razu prowadzi do

$$\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

- Komentarz do pierwszego ćwiczenia: widać wyraźnie, że tylko dla  $\rho$  podkrytycznych ryzyko w modelu Markowitza można zmniejszać poniżej wartości  $\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Ta własność mogłaby też być definicją podkrytyczności: wartość  $\rho$  jest podkrytyczna w danym modelu Markowitza, gdy kres dolny ryzyk portfeli w tym modelu jest mniejszy od  $\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ .
- Uwaga nt kanonicznych hiperbol (3.2) w Wykładzie III. Należy mocno podkreślać, że te hiperbole należą do pęku hiperbol zaczepionych w dwóch punktach i przy tym są wszystkie położone kanonicznie. Ze zmianą parametru  $\rho$  zmienia się, jak to już badaliśmy, punkt przecięcia ich asymptot oraz kąt rozwarcia asymptot. Jednak kanoniczne położenie pozostaje! Poniżej przytoczone są kopie rysunków z podręcznika [10], które nie respektują kanoniczności położenia hiperbol w takim pęku.

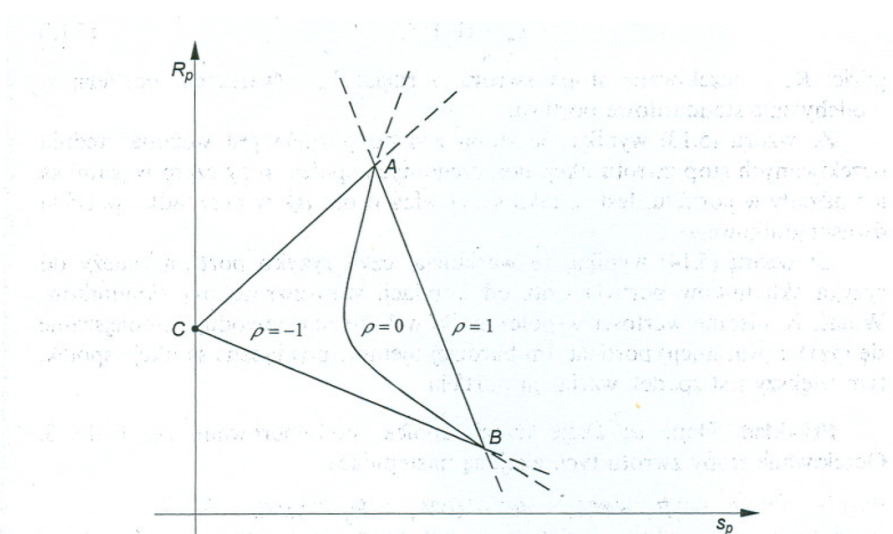
Pod pierwszym z rysunków zmieniony jest oryginalny podpis, bo jeszcze nie wiemy, co to jest krótka sprzedaż. Na rysunku powinna być jedna z kanonicznie położonych hiperbol (3.2) z Wykładu III.



Rys. 5.5. Portfel akcji dwóch spółek z krótką sprzedażą

Rysunek 4.1. Rzędna punktu przecięcia asymptot hiperboli wypadłaby poza przedział  $[E_0^+, E_0^-]$ , co niemożliwe.

Pod drugim z rysunków też zmieniony jest podpis. (Na nim także rzędna punktu przecięcia asymptot hiperboli wypadłaby poza przedział  $[E_0^-, E_0^+]$ .)



Rys. 5.9. Portfel akcji dwóch spółek – dominacja jednej akcji

Rysunek 4.2. Para półprostych  $CA$  i  $CB$  nie jest położona kanonicznie.

Na koniec tej części proponujemy czytelnikowi zastanowić się nad zdegenerowanym przypadkiem  $\mu_1 = \mu_2$ , który dotąd (od samego początku) wykluczaliśmy.

**Ćwiczenie 4.3.** Zanalizować zależność obrazu  $\mathcal{M}(\Delta^2)$  odwzorowania Markowitza od  $\rho \in [-1, 1]$  w sytuacji  $\mu_1 = \mu_2$  ( $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  mogą być równe lub różne – bez znaczenia; przyjąć na przykład, że są różne).

*Wskazówka.* Równanie (3.2) z Wykładu III jest teraz bezużyteczne, jednak cały czas można używać formuły (\*) z Wykładu III na wariancję portfela  $\sigma^2$ . Można np. badać, jak zmienia się minimum wartości  $\sigma^2$  gdy zmienia się  $\rho$ , pamiętając, że  $\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  pociąga  $x_{1,0} = 1$  itd.

**Dwa techniczne aspekty w analizie portfelowej:** hiperbole i parabole.

Pamiętamy, że równanie (3.2) w Wykładzie III to równanie hiperboli, czasami zdegenerowanej, i że w takiej hiperboli w analizie portfelowej interesująca jest tylko prawa gałąź położona w półpłaszczyźnie  $\sigma > 0$  (i wręcz, w podejściu Markowitza, tylko niewielka część tej gałęzi). To samo równanie staje się równaniem paraboli, gdy spojrzymy na nie jako wiążące zmienne z płaszczyzny  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ . Pamiętamy też, że w tę płaszczyznę idzie zmodyfikowane odwzorowanie Markowitza  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . Jak ogólnie wiążą się ze sobą hiperbole i parabole?

To temat niemal bez dna. Z wielu dostępnych wątków wybieramy hasło „stożkowa” w encyklopedii WSiP-u [w wersji pdf odpowiedni rysunek jest dopiero na następnej stronie]:

**Ćwiczenie 4.4.** Czy każde dwie hiperbole na płaszczyźnie są podobne?

*Rozwiązanie.* Nie, oczywiście nie; kąt między asymptotami hiperboli jest niezmiennikiem przy podobieństwach płaszczyzny. (Czy to jest jedyny niezmiennik, czy też jest jeszcze coś?) To nie było trudne ćwiczenie. Jednak ma ono swoje drugie dno. Mianowicie asymptoty hiperboli zakodowane są niejako w niej samej oglądanej z daleka (im dalej, tym lepiej). Czy pamiętamy jeszcze gałąź hiperboli ilustrującej pierwszy przykład w Wykładzie I (Rysunek 1.2)? Ta sama gałąź oglądana z większej odległości wygląda tak [w wersji pdf Rysunek 4.4 jest dopiero dwie strony dalej]:

(fragment aktywny w podejściu Markowitza jest jasny i wyróżniony w całym „pocisku”). W ten sposób przykład rozpoczynający Wykład I został obejrzany i z bliska i z daleka. Zaczynamy już odczuwać w samej hiperboli obecność jej asymptot, prawda? Zróbmy jeszcze analogiczną rzecz z przykładem „5 stanów giełdy” z Wykładu II, który, przypomnijmy, z bliska już był ilustrowany na Rysunku 2.1 (tylko fragment ważny w podejściu Markowitza). Ten sam przykład oglądany z bardzo daleka wygląda następująco (cała gałąź, nie tylko fragment Markowitza; w wersji pdf Rysunek 4.5 jest dopiero dwie strony dalej):

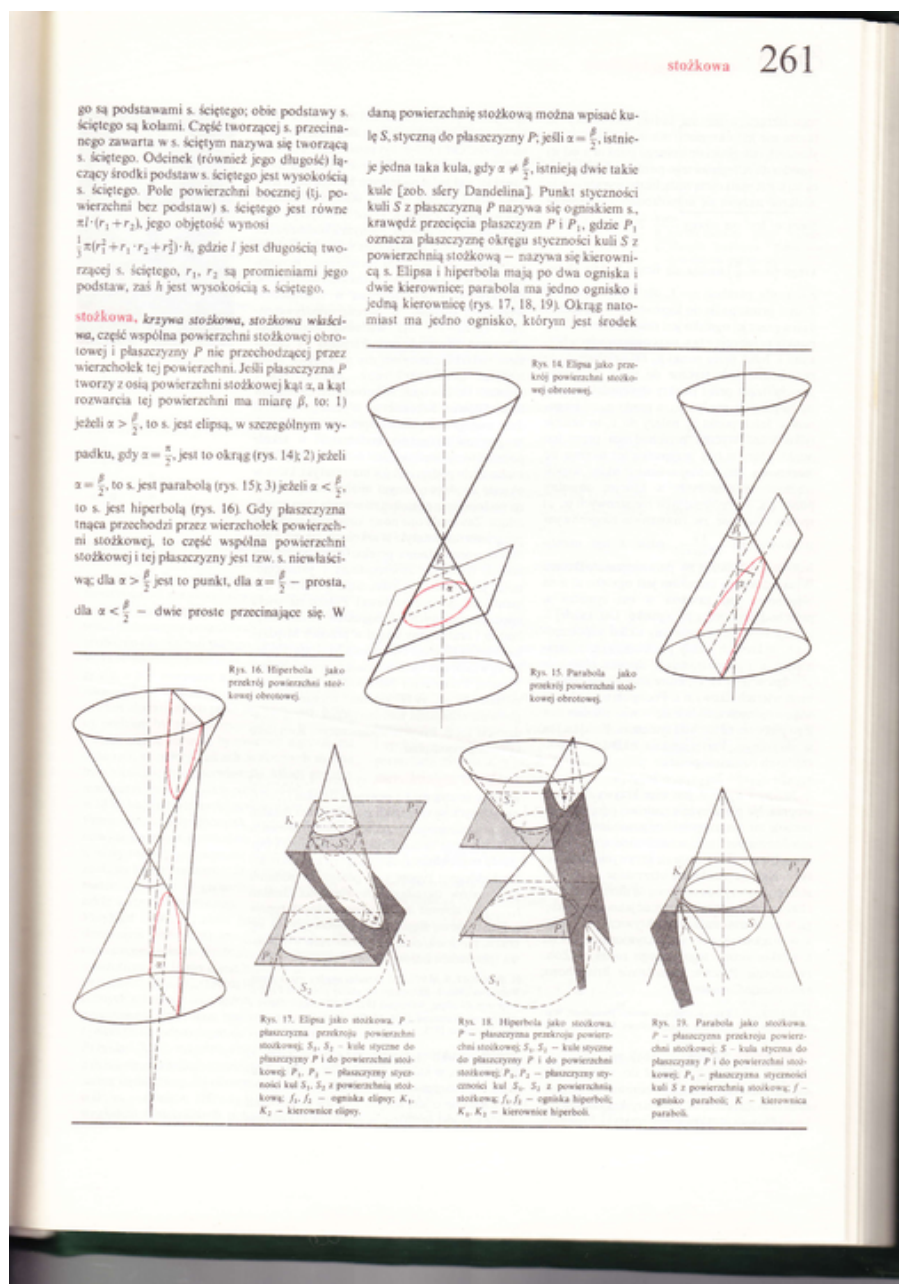
Jest to wycinek oryginalnej pracy studenckiej; sam student dopisał na swoim wykresie, że ‘nie są to półproste’ (tylko oglądane z daleka wąsy hiperboli! Omyłkowo też nazwał poziomą oś  $\sigma^2$  zamiast  $\sigma$ .) Z daleka sama hiperbola zanika i widzimy (niemal) tylko jej asymptoty. W dużej skali asymptoty całkowicie dominują hiperbole.

Jak to wygląda dla parabol?

**Ćwiczenie 4.5.** Czy każde dwie parabole na płaszczyźnie są podobne?

*Wskazówka.* Podać np. podobieństwo przenoszące parabolę  $\{(\frac{x}{a^2}) : x \in \mathbb{R}\}$  na parabolę  $\{(\frac{x}{x^2}) : x \in \mathbb{R}\}$ , gdzie  $a \neq 0$  jest ustalone.

**Wniosek 4.1.** Parabole są bardziej zakręcone i przez to lepiej niż hiperbole będą w tych wykładach nadawały się do rysunków eksponujących styczności różnych krzywych. W wielu sytuacjach praktycznych będziemy więc raczej postępowali się parabolami (i zmodyfikowanym przekształceniem Markowitza  $\widetilde{\mathcal{M}}$ ) niż hiperbolami (i odwzorowaniem Markowitza  $\mathcal{M}$ ).



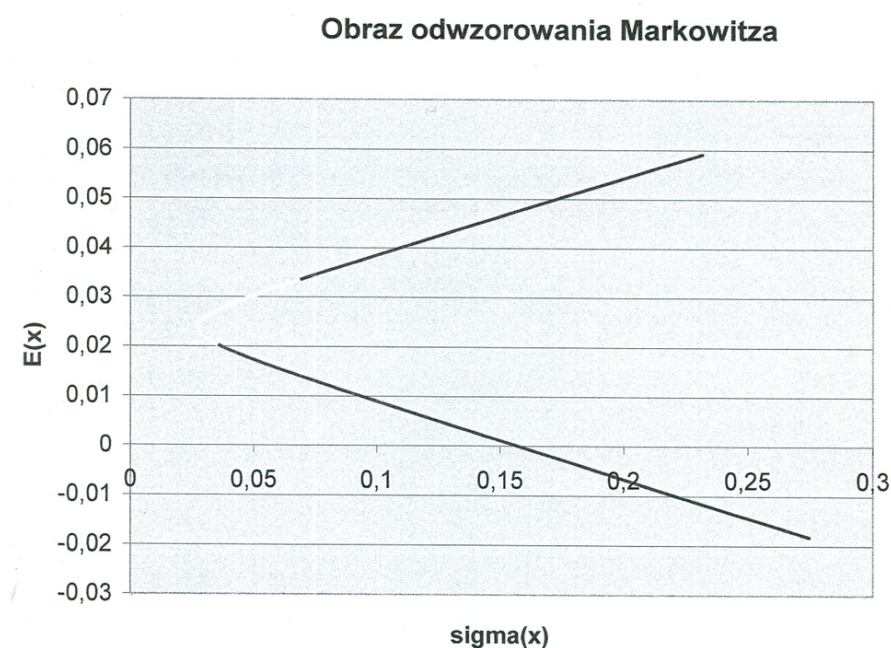
Rysunek 4.3. Strona z Encyklopedii Szkolnej „Matematyka” wydanej przez WSiP.

Seria doświadczeń – zastosowań wzoru (3.2) z Wykładu III.

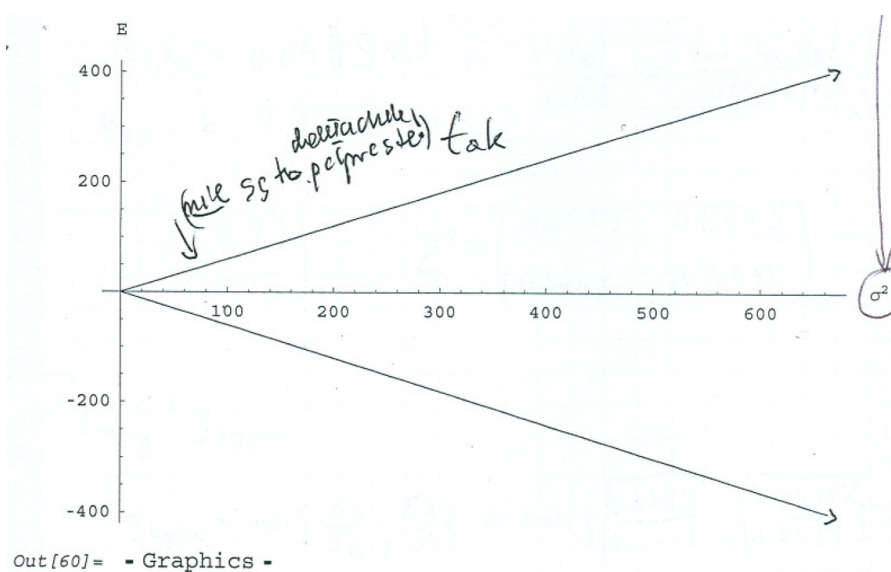
#### Przykład 4.1.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podstawiamy do wzoru (3.2)  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\rho = \rho_{12} = 0$  i uzyskujemy obraz boku  $\overline{e_1 e_2}$ :  $\sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(E - 2)^2$  (oglądany, powtórzmy, na  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ ).



Rysunek 4.4. Zależność między ryzykiem i oczekiwaną stopą zwrotu dla mieszanych portfeli akcji spółek X i Y z Wykładu I jako część szerszej analogicznej zależności dyskutowanej w Wykładzie VI.

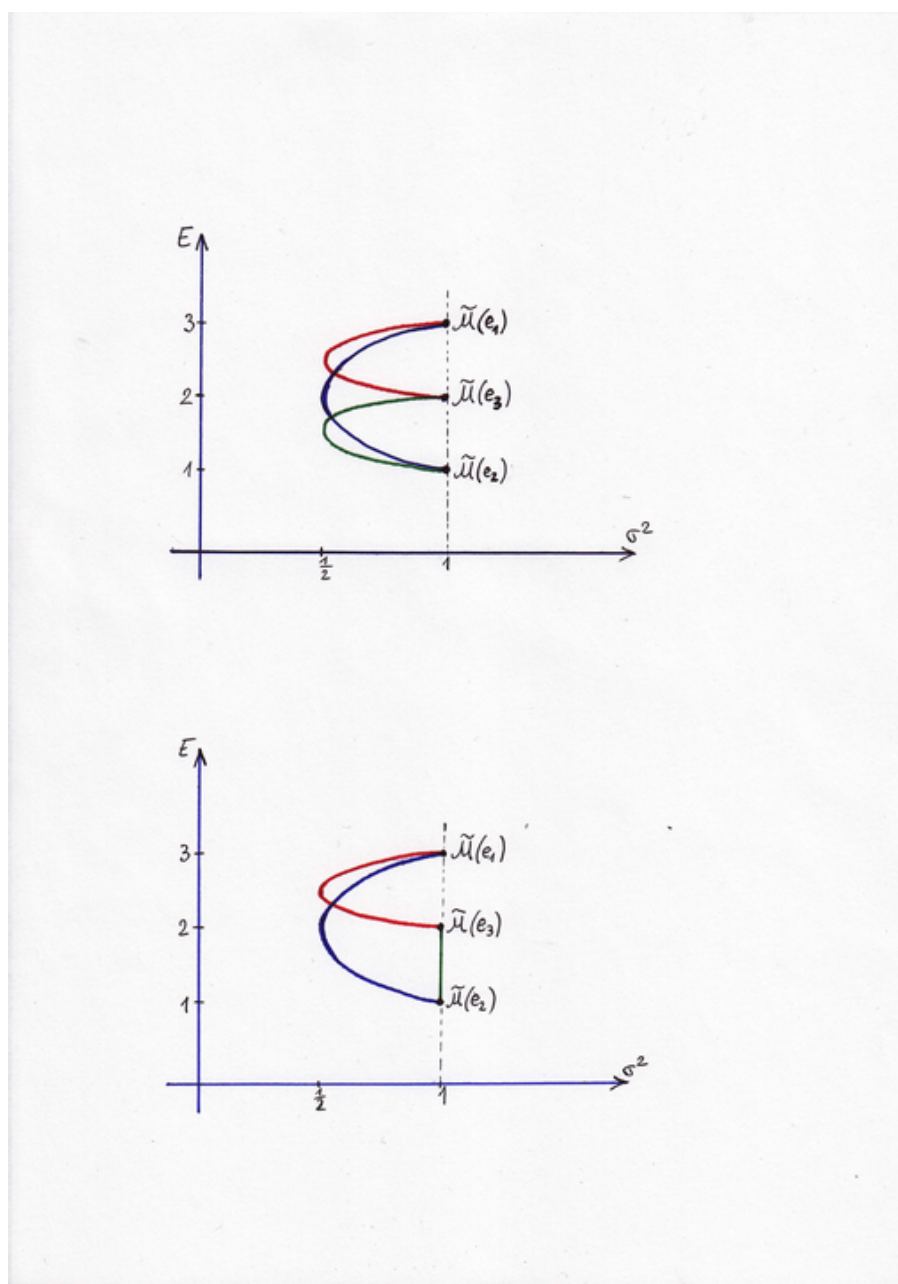


Rysunek 4.5. Gałąź hiperboli nie do odróżnienia od swoich asymptot.

Analogicznie, podstawiając do (3.2) odpowiednie wielkości,  
 obraz boku  $\overline{e_2 e_3}$ :  $\sigma^2 = \frac{1}{2} + 2 \left( E - \frac{3}{2} \right)^2$ ,  
 obraz boku  $\overline{e_3 e_1}$ :  $\sigma^2 = \frac{1}{2} + 2 \left( E - \frac{5}{2} \right)^2$ .

Narysujmy uzyskane parabole na jednym rysunku: pierwszą z nich niebieską, drugą zieloną,

trzecią czerwoną (górna część rysunku poniżej). Czujemy, że czegoś tu brakuje do pełnego obrazu; nie bardzo jednak wiemy, czego.



Rysunek 4.6. Obrazy boków sympleksu  $\Delta^3$  w Przykładach 4.1 i 4.2.

#### Przykład 4.2.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z obliczeń już wykonanych w Przykładzie 4.1,

obraz boku  $\overline{e_1 e_2}$ :  $\sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(E - 2)^2$ ,

obraz boku  $\overline{e_3 e_1}$ :  $\sigma^2 = \frac{1}{2} + 2\left(E - \frac{5}{2}\right)^2$ .

Obraz boku  $\overline{e_2 e_3}$  jest inny. Zgodnie z wiedzą z Wykładu III, ten obraz ma bardzo proste równanie  $\sigma^2 = 1$  (bo  $\sigma_2 = \sigma_3$  oraz  $\rho_{23} = 1$ ).

Teraz już możemy narysować wszystkie trzy obrazy na jednym rysunku, analogicznie jak w Przykładzie 4.1 i używając tych samych co tam kolorów (patrz dolna część Rysunku 4.6 powyżej). I tu czegoś brakuje do pełnego obrazu!

Ten brakujący element układanki to *punkty krytyczne* odwzorowania

$$\widetilde{\mathcal{M}}: H \longrightarrow \mathbb{R}^2(\sigma^2, E),$$

które w taki sposób pierwszy scharakteryzował K. Krzyżewski w wykładach [13], gdzie – uwaga – dziedziną jest teraz cała płaszczyzna  $H$ , a nie tylko sympleks  $\Delta^3$ . To znaczy punkty, w których rząd pochodnej  $d\widetilde{\mathcal{M}}(\cdot): T.H \rightarrow \mathbb{R}^2$  nie jest maksymalny (czyli, tu, jest mniejszy od 2).

Należy podkreślić, że o portfelach krytycznych twórcy analizy portfelowej mówili od samego początku – patrz np strona z pracy [19] reprodukowana jako Rysunek 14.2 w Wykładzie XIV, albo strona 85 w tej samej [19] – tylko krytyczność portfela rozumieli (będąc ekonomistami, nie matematykami) w sensie warunkowej minimalizacji ryzyka, a nie w sensie AMII. Wybrana tutaj ahistoryczna (i bardziej matematyczna niż ekonomiczna) kolejność objaśnień ma, jak się wydaje, zdecydowaną przewagę dydaktyczną.

Pewien kłopot skrywa się w tym, że  $H$  nie jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^3$ , tylko jest rozmaitością kowymiaru 1, zresztą parametryzowaną jedną jedyną parametryzacją, np  $p: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1-x_1-x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  (mówimy, że  $H$  jest jednym płatem).

Trzeba wtedy zapisać  $\widetilde{\mathcal{M}}$  w tej parametryzacji, policzyć punkty krytyczne takiego odwzorowania, a potem zobaczyć, jakie punkty odpowiadają im na  $H$ .

Dla Przykładu 4.1 dostajemy w ten sposób

$$\widetilde{\mathcal{M}} \circ p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 + 2 \end{pmatrix}, \quad \det d(\widetilde{\mathcal{M}} \circ p) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(6x_1 + 6x_2 - 4).$$

Warunek  $\text{rk } d(\widetilde{\mathcal{M}} \circ p) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} < 2$  oznacza  $\det d(\widetilde{\mathcal{M}} \circ p) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ , tzn.  $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ .

To w parametrach, zaś na płaszczyźnie  $H$  odpowiadają im punkty  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}: x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ .

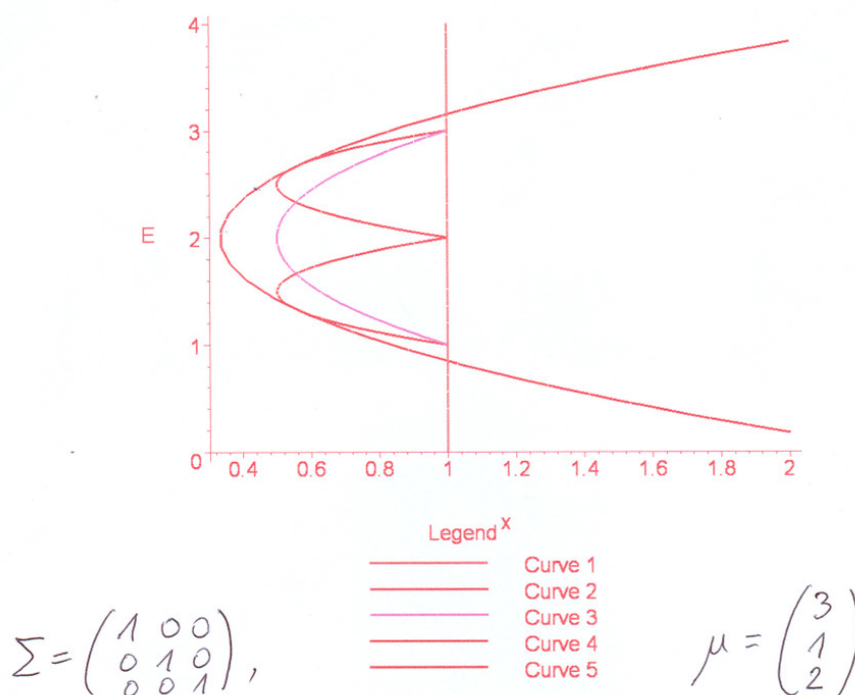
Widzimy, że punkty krytyczne w Przykładzie 4.1 tworzą **prostą**, zwaną *prostą krytyczną*. Na tej prostej  $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ ,  $x_1 - x_2 = E - 2$ , stąd  $x_1 = \frac{1}{2}E - \frac{2}{3}$ ,  $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}E$ , co pozwala zapisać obraz tej prostej przy odwzorowaniu  $\widetilde{\mathcal{M}}$ .

Istotnie,  $\sigma^2 = x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}E - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}E\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(E - 2)^2$ . Jest to zatem obraz prostej boku  $\overline{e_1 e_2}$  przesunięty w poziomie o  $-\frac{1}{6}$ !

Teraz dopiero można „domknąć” górną część Rysunku 4.6 i – jako wartość dodaną! – zrozumieć zachowanie odwzorowania  $\mathcal{M}$  na  $\Delta^3$  [w wersji pdf Rysunek 4.7 jest dopiero na następnej stronie].

Obraz prostej krytycznej (będziemy mówili: pocisk Markowitza, tu: zmodyfikowany pocisk Markowitza) okazuje się styczny: do obrazu boku  $\overline{e_2 e_3}$  na wysokości  $E = \frac{4}{3}$  i do obrazu boku  $\overline{e_3 e_1}$  na wysokości  $E = \frac{8}{3}$ . Dlaczego akurat na takich wysokościach? Bo są to wartości  $E$  w punktach przecięcia prostej krytycznej z odpowiednimi bokami:  $E((0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T) = \frac{4}{3}$ ,  $E((\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})^T) = \frac{8}{3}$ .

*Uwaga 4.1.* Ktoś może się zapytać, skąd biorą się takie styczności jak na rysunku powyżej? Dlaczego pocisk Markowitza jest styczny do obrazów boków ciętych prostą krytyczną? (Te styczności mają, oczywiście, też miejsce na płaszczyźnie  $(\mathbb{R}^2(\sigma, E))$ .) Dotykamy tu samej istoty krytyczności. Punkty cięcia prostych są krytyczne i *dlatego* w ich obrazach mamy styczności obrazów prostych. Będziemy do tego wracać w dalszych wykładach i tego wielokrotnie używać.



Rysunek 4.7. Pierwsze spotkanie ze (zmodyfikowanym) pociskiem Markowitza „domykającym” wykresy w górnej części Rysunku 4.6.

**Ćwiczenie 4.6.** Co przekształcenie  $\widetilde{\mathcal{M}}$  w Przykładzie 4.1 robi z trójkątem  $\Delta^3$ ? (Wiemy już, który bok przeprowadza na który łuk. Jeszcze nie wiemy, który kawałek wnętrza  $\Delta^3$  przeprowadza na który kawałek płaszczyzny.)

Analogiczne obliczenia dla Przykładu 4.2, w którym z kolei bardziej naturalnie jest użyć parametryzacji  $p: \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , wyglądają następująco.

$$\widetilde{\mathcal{M}} \circ p \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_2 - 2x_3 + 1 \\ -2x_2 - x_3 + 3 \end{pmatrix}, \quad \det d(\widetilde{\mathcal{M}} \circ p) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_2 + 4x_3 - 2,$$

a więc  $\text{rk } d(\widetilde{\mathcal{M}} \circ p) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} < 2 \iff x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$ .

Punkty krytyczne odwzorowania  $\widetilde{\mathcal{M}}$  znowu tworzą więc pewną prostą (!)  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \right\}$ , której  $\widetilde{\mathcal{M}}$ -obrazem jest tym razem pionowa prosta  $\sigma^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (x_2 + x_3)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

W świetle powyższych obliczeń, do czego „domykają” się wykresy w **dolnej** części Rysunku 4.6?

## 5. Wykład V, 30.X.2009

W Przykładach 4.1 i 4.2 w Wykładzie IV (w których ilość spółek była jednakowa i równa 3) zbiory punktów [albo portfeli w pewnym ogólniejszym sensie niż u Markowitza, który poznamy już w tym wykładzie] krytycznych okazują się być prostymi. Czy tak jest tylko w wymiarze  $k = 3$ ? Od czego to zależy? Przyjmijmy już bez zwłoki ogólną

**Definicja 5.1.** Dla dowolnego ustalonego  $k \geq 2$ , **punkty krytyczne w analizie portfelowej** to punkty krytyczne, w sensie analizy matematycznej II, zmodyfikowanego odwzorowania Markowitza  $\mathcal{M}: H \rightarrow \mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ , tj takie punkty  $x \in H$ , w których  $\text{rk } d\mathcal{M}(x) < 2$ .

(Patrz też uwagi przy pierwszym pojawieniu się tego pojęcia w Wykładzie IV. Markowitz do scharakteryzowania krytyczności portfela używał trochę innych słów, lecz miał na myśli to, co w tej definicji. Trochę nie zachowując proporcji, przypomnijmy dla porównania, że Leibniz przez dłuższy czas swój **drugi** rachunek nazywał *calculus summatorius*. Później Jakob I Bernoulli wprowadził słowo *integral* – i Leibniz to przyjął. Dalej używał już nazwy *calculus integralis*.)

*Uwaga 5.1.* (i) Przy  $k = 2$  każdy punkt z  $H$  jest krytyczny w sensie podanej tu definicji (bo wtedy  $H$  jest 1-wymiarowa – jest prostą).

(ii) W tej definicji, w zakresie punktów (portfeli uogólnionych)  $x$  takich, że  $x^T \Sigma x > 0$ , zamiast  $\widetilde{\mathcal{M}}$  równoważnie można używać odwzorowania Markowitza  $\mathcal{M}: H \rightarrow \mathbb{R}^2(\sigma, E)$ . Istotnie, pomocnicze odwzorowanie  $(\sigma^2, E) \mapsto (\sigma, E)$ , gdzie zawsze  $\sigma > 0$ , jest dyfeomorfizmem prawej półpłaszczyzny ( $\sigma^2 > 0$ ) w  $\mathbb{R}(\sigma^2, E)$  na prawą półpłaszczyznę ( $\sigma > 0$ ) w  $\mathbb{R}(\sigma, E)$ .

Będziemy niedługo szczegółowo badać, powtarzając zresztą rozumowanie kilku noblistów z dziedziny ekonomii, czym ogólnie w analizie portfelowej może być zbiór punktów krytycznych. Wcześniej chcemy jednak zebrać więcej materiału doświadczalnego nt krytyczności punktów. W pierwszej kolejności idzie

**Przykład 5.1** (klasyczny, z wykładów [13]).

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 19 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Chwilowo liczymy tu tylko obrazy boków, mając już zresztą do wyboru dwie metody. Albo podstawienie do wzoru (3.2) z Wykładu III, albo też jak w Przykładzie 4.2, np dla boku  $\overline{e_1 e_2}$ :

$$\left. \begin{matrix} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 0 = E \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = E \\ x_2 = 1 - E \end{matrix} \right.,$$

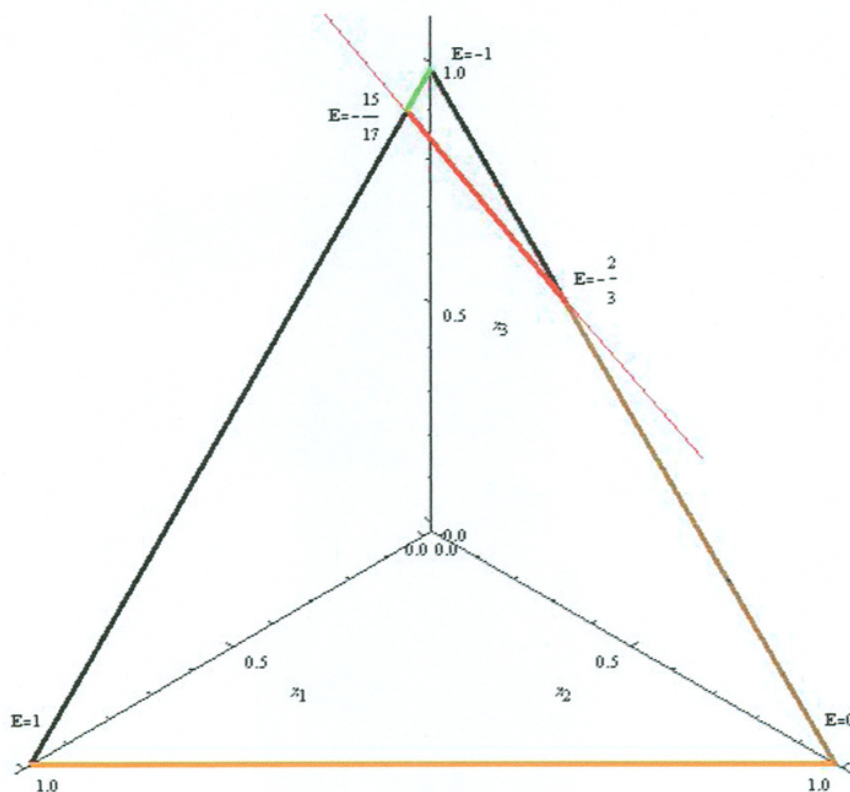
co wstawiamy do formy kwadratowej wariancji:

$$\sigma^2(E) = 19E^2 + 12E(1 - E) + 3(1 - E)^2 = 10E^2 + 6E + 3.$$

Tak dostajemy  $\widetilde{\mathcal{M}}$ -obraz prostej zawierającej bok  $\overline{e_1 e_2}$ : jest to parabola  $\sigma^2 = 10E^2 + 6E + 3$ . Analogicznie licząc, dostajemy

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\overline{e_2 e_3}) = \left\{ \sigma^2 = \frac{3}{2}E^2 + 4E + 3 \right\}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}(\overline{e_1 e_3}) = \left\{ \sigma^2 = \frac{35}{8}E^2 + \frac{37}{4}E + \frac{43}{8} \right\}.$$

Co z punktami krytycznymi w tym modelu? Czy także tutaj ich zbiór tworzy prostą? I jaki jest obraz tego zbioru? W przyszłości odpowiedzi na takie pytania będą automatyczne; tu podajemy je wprost. Odpowiedź na pytanie pierwsze jest twierdząca. Oto ta prosta, tylko lekko zahaczająca sympleks standardowy  $\Delta^3$ :



Rysunek 5.1. Położenie prostej krytycznej w przykładzie Krzyżewskiego.

Przykład ten, bardzo ważny, będzie jeszcze rozbudowywany (łącznie z dyskusją obrazów boków sympleksu i prostej krytycznej) w dalszych wykładach. Tymczasem bogactwo geometrycznych możliwości pokazuje

**Przykład 5.2.** Oto 1-parametrowa rodzina przykładów wychodzących od oryginalnego pomysłu studenta (Ł. Mordon) zgłoszonego jeszcze w roku akademickim 2007/08

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Tę właśnie macierz  $\Sigma$  zanurzamy w 1-parametrową rodzinę macierzy

$$\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2\sqrt{2}\rho \\ 1 & 2\sqrt{2}\rho & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{nie zmieniając przy tym wektora } \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Przy  $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$  mamy tu wyjściowy model (5.1), zaś następnie nasz parametr  $\rho$  maleje od  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  do 0. (Wszystkie tak uzyskiwane  $\Sigma_\rho$  są dodatnio określone.<sup>1</sup>)

<sup>1</sup> Jest dobrym ćwiczeniem znaleźć wszystkie w ogóle  $\rho \in [-1, 1]$ , dla których  $\Sigma_\rho > 0$ .

Okazuje się, że zbiory punktów krytycznych znowu zawsze są tu prostymi! Przy tym ewoluują one w dość ciekawy sposób. Oto ta ewolucja; autor: A. Zalewska (przypominamy, że zbiory punktów krytycznych w analizie portfelowej są podzbiorami płaszczyzny  $H$ ).

Ewolucja prostych krytycznych w Przykładzie 5.2 (w programie Mathematica; należy oglądać i analizować na komputerach z dostępnym tym programem)

Jak ta ewolucja prostych w płaszczyźnie  $H$  odwzorowuje się na płaszczyznę obrazu? To jest, jak to wygląda po obłożeniu [bardziej graficznie poglądowym niż  $\mathcal{M}$ ] odwzorowaniem  $\widetilde{\mathcal{M}}$ ? Autorem także jest A. Zalewska.

Ewolucja obrazów prostych krytycznych w Przykładzie 5.2, przy zmodyfikowanym przekształceniu Markowitza

*Uwaga 5.2.* Sam koniec (czy też początek) tego swoistego tańca parabol przedstawionego na drugim „filmie” powyżej, można też zobaczyć na rysunku wykonanym przez studenta WNE UW [w wersji pdf ten rysunek przeskoczył na następną stronę]:

Jeśli chodzi o drugi (przeciwny) koniec tej ewolucji parabol, to jest on pokazany na Rysunku 15.3 aż w Wykładzie XV (służy tam ilustracji zupełnie innych zjawisk, niż poruszane tutaj) i jest również widoczny na drugim filmiku powyżej.

Ktoś może powiedzieć, że Rysunek 5.2 jest mało kanoniczny – nie jest przecież na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ . Oto, jak wygląda on całkiem kanonicznie, tj po obłożeniu znanym i wspomnianym już w tych wykładach dyfeomorfizmem<sup>2</sup> przenoszącym parabole na hiperbole (prawa autorskie należą tu do tego samego co poprzednio studenta WNE UW) [w wersji pdf Rysunek 5.3 jest dopiero dwie strony dalej]:

Należy wspomnieć, że sytuacja pokazana na Rysunkach 5.2 i 5.3 – przyklejanie się obrazu sympleksu standardowego do pocisku Markowitza tylko w jednym punkcie położonym w *górnej* połowie pocisku (dla  $E > E_0$ ) – była postulowana i poszukiwana przez szereg lat trwania wykładów z APRK1 na Wydziale MIM UW. Przełom przyniosło dopiero w roku akademickim 2007/08 uzmiennienie współczynnika  $\rho_{23}$  w przykładzie Mordona (Przykład 5.2 powyżej), które nie byłoby możliwe bez samego tego przykładu!

**Ćwiczenie 5.1** (trudniejsze). Znaleźć wartość(ci)  $0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , przy której(ych) prosta krytyczna jest tu równoległa do boku  $\overline{e_2 e_3}$ . Jaką współrzędną  $x_1$  mają wtedy punkty (portfele uogólnione) krytyczne w analizie portfelowej? Czy wtedy obraz boku  $\overline{e_2 e_3}$  jest przesunięciem obrazu prostej krytycznej, a jeśli tak, to o jaki wektor? (Cały czas rozważamy tu zmodyfikowane odwzorowanie Markowitza.)

**Ćwiczenie 5.2** (łatwiejsze, lecz wcale nie natychmiastowe). Znaleźć wszystkie punkty krytyczne w analizie portfelowej nad modelem Markowitza doskonale dodatnio skorelowanym.

Znaleźć wszystkie punkty krytyczne w analizie portfelowej nad modelem Markowitza doskonale  $\pm$  skorelowanym.

*Wskazówka.* Przy  $k > 2$  odpowiedzi silnie zależą od wzajemnego położenia punktów  $(\sigma_i, \mu_i)^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ .

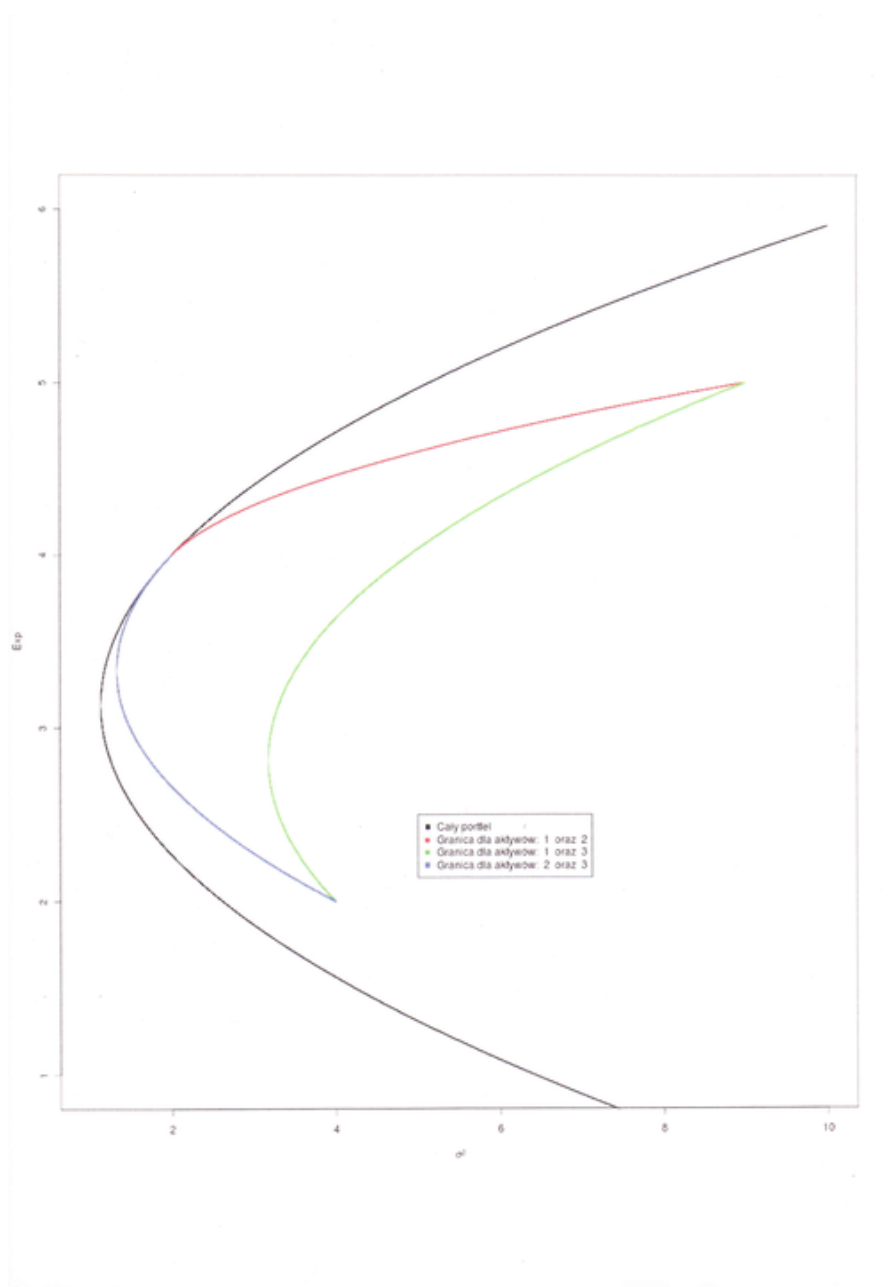
W dojściu do odpowiedzi pomocny może też być jeden z obrazów sympleksów standardowych (który?) na Rysunku 3.1 w Wykładzie III.

W dalszym ciągu<sup>3</sup> zakładamy, że

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \mu \nparallel e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

<sup>2</sup> jakim?

<sup>3</sup> i już do końca w tych wykładach; czasem będziemy nawet zakładać więcej

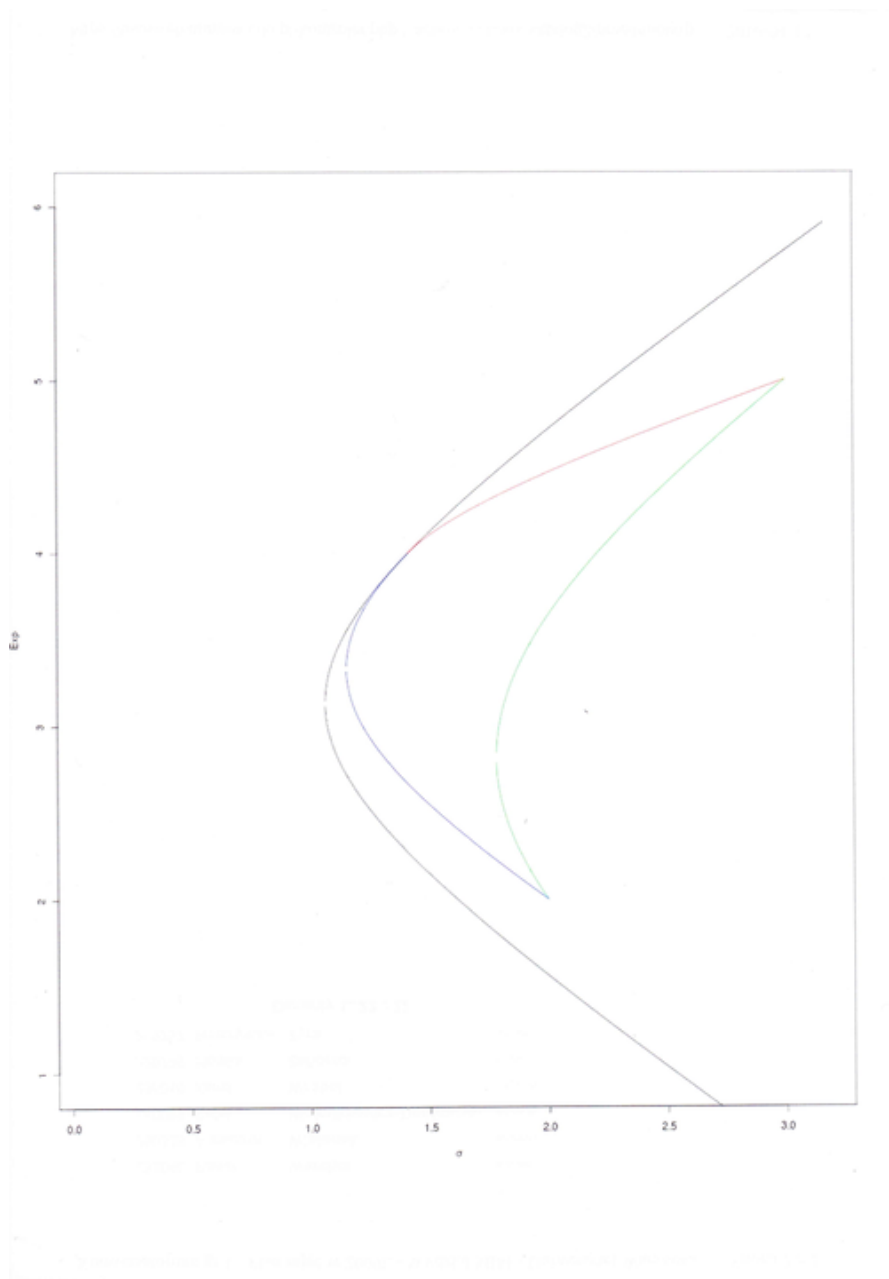


Rysunek 5.2. Reprodukacja rysunku Siejdy z roku 2010.

tzn., że nie wszystkie wartości oczekiwane  $\mu_i$  stóp zwrotu  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) są równe. Będziemy to krótko notować jak już tu wyżej:

$$\mu \not\parallel e. \quad (5.2)$$

Skoro proste krytyczne (czy ogólniej: zbiory punktów krytycznych w analizie portfelowej) są tak ważne, to jak bardziej operatywnie sprawdzać, czy punkt  $x \in H$  (czy też  $x \in \Delta^k$ ) jest krytyczny w analizie portfelowej? Innymi słowy, jak sprawdzać, czy odwzorowanie  $\widetilde{\mathcal{M}}: H \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest krytyczne w  $x$ .



Rysunek 5.3. Reprodukacja rysunku Siejdy z roku 2010.

**Twierdzenie 5.1.** Przy bardzo ogólnych założeniach  $\Sigma \geq 0$  i  $\mu \nparallel e$ , punkt  $x$  jest krytyczny w sensie analizy portfelowej  $\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \Sigma x = \lambda_1 \mu + \lambda_2 e$ .

To twierdzenie pojawiało się w pierwszych wersjach wykładów [13], zaś później – w szczególności w wersji z roku 2000 – już tylko jako zadanie z gwiazdką.<sup>4</sup> Przy tym zadanie z gwiazdką dotyczyło równoważności spojrzenia Markowitza (relatywna minimalizacja ryzyka, ale w aspekcie **B**) i

<sup>4</sup> Cóż to były za czasy! Obecnie jego zwarty dowód dany tu niżej jest za długi do wyłożenia w realnym czasie wykładu.

Definicji 5.1; Twierdzenie 5.1 w takiej operatywnej postaci jw w ogóle tam nie występowało. To pokazuje przy okazji całkiem odmienne filozofie wykładów Krzyżewskiego i tu prezentowanych: w bieżących to twierdzenie jest zupełnie podstawowym narzędziem. Jeśli zaś chodzi o gwiazdkę przy zadaniu w [13], to mniej więcej obejmuje ona dowód Twierdzenia 5.1.

**Przykład 5.3** (Przykład działania tego twierdzenia (jeszcze przed jego dowodem)). Zwracamy uwagę, że wymiar w przykładzie jest 3 i założenie (5.2) jest spełnione, więc sprawdzenie założenia ‘rząd 2’ w twierdzeniu to sprawdzenie zachodzenia jednego równania.

Mianowicie punkt (portfel Markowitza)  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  jest krytyczny w  $(\Sigma_0, \mu)$  wziętym z Przykładu 5.2:

$$\det \left( \Sigma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu, e \right) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Portfel Markowitza  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  jest krytyczny w modelu  $\left( \Sigma_{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \mu \right)$  też wziętym z Przykładu 5.2:

$$\det \left( \Sigma_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu, e \right) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Dowód twierdzenia..* Na potrzeby tego dowodu piszemy  $\text{Var}$  zamiast  $\sigma^2$ , przy czym  $\text{Var}(y) = y^T \Sigma y$  dla wszystkich  $y \in \mathbb{R}^k$ , nie tylko  $y \in H$ .

.  $\Leftarrow$  . Przechodząc od gradientów do pochodnych (czyli pewnych 1-form różniczkowych), założenie, które mamy przy dowodzeniu implikacji w tę stronę zapisujemy w postaci

$$d\left(\frac{1}{2}\text{Var}\right)(x) = \lambda_1 d(\mu^T y)|_{y=x} + \lambda_2 d(e^T y)|_{y=x},$$

po czym przeciągamy wszystkie występujące tu 1-formy wstecz (pull-back) przy pomocy  $p^*$ , gdzie

$$p: \mathbb{R}^{k-1}(y_1, \dots, y_{k-1}) \ni \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ 1 - y_1 - \dots - y_{k-1} \end{pmatrix}$$

to parametryzacja hiperpłaszczyzny  $H$  przy pomocy  $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k-1}$ , w szczególności

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}, \quad p(\bar{x}) = x:$$

$$\frac{1}{2}(p^* d \text{Var})(\bar{x}) = \lambda_1 p^* d(\mu^T y)|_{\bar{x}} + \lambda_2 p^* d(e^T y)|_{\bar{x}}.$$

Ponieważ  $p^* d = d p^*$  (patrz np Tw. 4.10 (4) w [28]), zaś pull-back *funkcji* (tj 0-form) to po prostu składanie funkcji z przeciągającym przekształceniem (tu  $p$ ), więc

$$\frac{1}{2}d(\text{Var} \circ p)(\bar{x}) = \lambda_1 d(\mu^T p(\bar{y}))|_{\bar{y}=\bar{x}} + \lambda_2 d(e^T p(\bar{y}))|_{\bar{y}=\bar{x}}.$$

Lecz  $e^T p(\bar{y}) \equiv 1$ , więc  $d(e^T p(\bar{y})) \equiv 0$ . Zatem

$$d(\text{Var} \circ p)(\bar{x}) = 2\lambda_1 d(\mu^T p(\bar{y}))|_{\bar{y}=\bar{x}},$$

tzn. pochodne w  $\bar{x}$  pierwszej i drugiej składowej odwzorowania  $\widetilde{\mathcal{M}} \circ p$  są proporcjonalne (pierwsza jest wielokrotnością drugiej). Pokazaliśmy, że  $\text{rk } d(\widetilde{\mathcal{M}} \circ p)(\bar{x}) < 2$ .

$\implies$ . Ponieważ

$$\text{Var}(p(\bar{y})) = \text{Var} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ 1 - y_1 - \dots - y_{k-1} \end{pmatrix}$$

oraz

$$E(p(\bar{y})) = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_{k-1} y_{k-1} + \mu_k (1 - y_1 - \dots - y_{k-1}) = \mu_k + (\mu_1 - \mu_k) y_1 + \dots + (\mu_{k-1} - \mu_k) y_{k-1},$$

więc krytyczność punktu  $x = p(\bar{x})$  oznacza, że

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \text{Var}_{y_1} - \text{Var}_{y_k} & \text{Var}_{y_2} - \text{Var}_{y_k} & \dots & \text{Var}_{y_{k-1}} - \text{Var}_{y_k} \\ \mu_1 - \mu_k & \mu_2 - \mu_k & \dots & \mu_{k-1} - \mu_k \end{pmatrix} (x) < 2,$$

przy czym drugi wiersz tej macierzy jest niezerowy, bo  $\mu \nparallel e$ .

Zatem pierwszy wiersz jest pewną wielokrotnością drugiego wiersza. W (czytelniejszym) zapisie kolumnowym

$$\begin{pmatrix} \text{Var}_{y_1} - \text{Var}_{y_k} \\ \text{Var}_{y_2} - \text{Var}_{y_k} \\ \vdots \\ \text{Var}_{y_{k-1}} - \text{Var}_{y_k} \end{pmatrix} (x) = \lambda \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_k \\ \mu_2 - \mu_k \\ \vdots \\ \mu_{k-1} - \mu_k \end{pmatrix}$$

przy pewnym  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zapiszmy tę równość tylko pozornie inaczej, sztucznie wydłużając o jedno zero wektory występujące po obu stronach:

$$\begin{pmatrix} \text{Var}_{y_1} - \text{Var}_{y_k} \\ \vdots \\ \text{Var}_{y_{k-1}} - \text{Var}_{y_k} \\ \text{Var}_{y_k} - \text{Var}_{y_k} \end{pmatrix} (x) = \lambda \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_k \\ \vdots \\ \mu_{k-1} - \mu_k \\ \mu_k - \mu_k \end{pmatrix}.$$

Dostaliśmy w ten sposób

$$2\Sigma x = \lambda \mu + (\text{Var}_{y_k}(x) - \lambda \mu_k) e,$$

co daje potrzebne wyrażenie dla  $\Sigma x$  ze współczynnikami  $\lambda_1 = \frac{\lambda}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\text{Var}_{y_k}(x) - \lambda \mu_k}{2}$ .  $\square$

**Ćwiczenie 5.3** (pytanie kontrolne po dowodzie twierdzenia). Jakie ograniczenie(a) na zbiór punktów krytycznych w [danym modelu w] analizie portfelowej nakłada to twierdzenie (czym, ogólnie rzecz biorąc, jest/może być taki zbiór)?

W tej chwili mamy już dwa opisy krytyczności punktów z  $H$  (nie tylko klasycznych portfeli Markowitza z  $\Delta^k \subset H$ !): definicyjny i dany poprzez to dopiero co udowodnione twierdzenie. Jest najwyższa pora wyjaśnić, co dla nas znaczą *wszystkie* punkty  $x \in H$ , tj takie  $x \in \mathbb{R}^k$ , że  $e^T x = x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$ , spośród których tylko nieliczne są, przy ustalonych parametrach modelu, krytyczne.

Odpowiedź będzie modelowaniem tzw. *nieograniczonej krótkiej sprzedaży* (ang. *unrestricted short selling*) wg podejścia Blacka i współautorów z wczesnych lat 1970ch – porównaj szczególnie strony 11 oraz 39 w [22].

**Portfel inwestora w modelu Blacka**, a więc – powtarzamy – z dopuszczalną nieograniczoną krótką sprzedażą

- Inwestor wkracza do Domu Maklerskiego (dalej DM) z kwotą  $L > 0$  (np złotych czy funtów).
- Po okazaniu kwoty  $L$ , pożyczka w DM według swojego uznania akcje spółek o numerach  $j \in J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ . Konkretnie, tyle akcji spółki  $j$ -tej, że (albo: by) ich obecna wartość jest (była)  $A_j$ , dla  $j \in J$ .
- Pożyczone akcje spółek o numerach  $j \in J$  natychmiast, tego samego dnia, sprzedaje na giełdzie. W wyniku tego ma teraz  $L + \sum_{j \in J} A_j$  złotych (czy funtów, ...).
- Za wszystkie te środki od razu kupuje akcje spółek o numerach  $i \in I \subset \{1, 2, \dots, k\} \setminus J$ . Konkretnie, tyle akcji spółki  $i$ -tej, że (albo: by) ich obecna wartość jest (była)  $A_i$ ,  $i \in I$ , przy czym, oczywiście,

$$L + \sum_{j \in J} A_j = \sum_{i \in I} A_i. \quad (5.3)$$

Można się już domyślać, jaka będzie dalsza strategia inwestora – od tego zaczniemy następny wykład. W tej chwili chcemy ‘tylko’ matematycznie zakodować opisaną działalność inwestora. W tym celu zapisujemy równość bilansową (5.3) trochę inaczej

$$1 = \sum_{i \in I} \frac{A_i}{L} + \sum_{j \in J} \left( \frac{-A_j}{L} \right) \quad (5.4)$$

i oznaczamy  $x_i = \frac{A_i}{L}$  dla  $i \in I$ , oraz  $x_j = \frac{-A_j}{L}$  dla  $j \in J$ . Dla indeksów  $l \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus (I \cup J)$  kładziemy  $x_l = 0$ . Portfel inwestora jest teraz zakodowany jako wektor  $x = (x_\nu)_{\nu=1}^k$ . Mamy, dzięki (5.4),  $x \in H$ . Mówimy, że w spółkach o numerach  $i \in I$  inwestor zajął długie pozycje (jest to zakodowane poprzez dodatni znak  $x_i$ :  $x_i > 0$ ), zaś w spółkach o numerach  $j \in J$  zajął krótkie pozycje (zakodowane poprzez ujemny znak  $x_j$ :  $x_j < 0$ ).

**Ćwiczenie 5.4** (pytanie kontrolne). Inwestor miał 4 tysiące zł kapitału własnego. Z krótkiej sprzedaży akcji spółek C i D uzyskał odpowiednio 7 i 13 tysięcy zł. Następnie kupił (czyli zajął długie pozycje w) akcje(ach) spółek A i B w proporcji wartościowej 2 : 1. Wyznaczyć portfel tego inwestora zapisany w modelu Blacka.

*Wskazówka.*  $4 + 7 + 13 = 16 + 8$ .

*Rozwiązanie.* Dzięki informacji zawartej we wskazówce widzimy, że portfelem inwestora jest  $x = (x_A, x_B, x_C, x_D)^T = \left( \frac{16}{4}, \frac{8}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{13}{4} \right)^T = \left( 4, 2, -\frac{7}{4}, -\frac{13}{4} \right)^T$ .

## 6. Wykład VI, 6.XI.2009.

W Wykładzie V przerwaliśmy dyskusję strategii inwestora, który na początku okresu inwestycyjnego zajął zarówno długie jak i krótkie pozycje (te ostatnie – korzystając z „nieograniczonej uprzejmości Domu Maklerskiego” – modelowanie Blacka jest bardzo poręczną, lecz tylko idealizacją). Wiemy, co zrobił on na **początku** okresu inwestycyjnego. Co teraz zrobi na **końcu** tego okresu?

Otóż akcje, w których zajął długie pozycje (o numerach, jak pamiętamy,  $i \in I$ ) inwestor będzie trzymał do końca okresu inwestycyjnego, kiedy to sprzeda je na giełdzie po cenie  $C_{i, \text{kon}}$ . Natomiast akcje, w których zajął krótkie pozycje (o numerach  $j \in J$ ) miał tylko pożyczone od DM i od razu je sprzedał. Na końcu okresu będzie je odkupował po cenie  $C_{j, \text{kon}}$  by zwrócić je do DM. Zwroty inwestora w jednym i drugim przypadku będą liczone inaczej! Za chwilę uwzględnimy to przy obliczaniu łącznej stopy zwrotu inwestora; ujemne składniki portfela  $x_j < 0$  okażą się dobrze pasować do całości rachunku.

Wcześniej przyjrzyjmy się jeszcze jednemu, bardziej rozbudowanemu niż w prostym Ćwiczeniu 5.4 w Wykładzie V, przykładowi portfela inwestora przy nieograniczonej krótkiej sprzedaży à la Black (zaczepniętemu z [4]).

**Przykład 6.1.** Przykład portfela akcji 10 spółek silnie używającego krótkiej sprzedaży:

| Walor nr | Udział w portfelu w procentach |
|----------|--------------------------------|
| 1        | 647.1                          |
| 2        | 770.6                          |
| 3        | 729.4                          |
| 4        | 1741.2                         |
| 5        | 211.6                          |
| 6        | −152.9                         |
| 7        | −447.1                         |
| 8        | −594.1                         |
| 9        | −741.2                         |
| 10       | −2070.6                        |

Udziały sumują się do 100% (do 100% kapitału własnego inwestora, w stosunku do którego wszystko jest tu podawane, czy kodowane).

*Uwaga 6.1.* Zwracamy uwagę, że na tej samej stronie w [4] wspomniana jest też zupełnie inna krótka sprzedaż, zdefiniowana czy modelowana przez Lintnera w pracy [16]. Jest ona przeciwieństwem podejścia Blacka i współautorów – jest bardzo mocno ograniczona. Poznamy ją dokładnie na Wykładzie IX.

Jeszcze dwa zdania na temat tych trochę tajemniczych ‘współautorów’ wybitnego ekonomisty Blacka<sup>1</sup>, cytując z [22], strona 39: „I refer to the model whose only constraint is  $\sum_i X_i = 1$  as **Black’s model**, for ease of reference and because the results of [3] are frequently cited in connection with this model. It would probably be more accurate to name it Roy-Sharpe-Merton-Black, but that is a lot of name for a simple, frequently cited model.”

<sup>1</sup> lecz, niestety, z losowych powodów nie laureata nagrody Nobla z ekonomii

Zadajmy sobie teraz pytanie, czy podstawowy paradygmat Markowitza,

$$\Delta^k \ni x \longleftrightarrow x^T R = x_1 R_1 + \dots + x_k R_k$$

dający klasyczny wzór na stopę zwrotu (zmienną losową!) z portfela Markowitza (Wykład II) rozszerza się na wszystkie portfele Blacka  $\{x \in H\}$ ?

By odpowiedzieć na to pytanie, trzymamy się oznaczeń z Wykładu V, gdzie ujemne składniki portfela  $x$  miały indeksy  $j \in J$ , dodatnie miały indeksy  $i \in I$ ,  $I, J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ , przy czym oczywiście  $I \cap J = \emptyset$ , zaś  $L$  był kapitałem własnym inwestora. Stopę zwrotu (cały czas zmienną losową) liczymy teraz dużo staranniej niż w Wykładzie II.

$$\begin{aligned} \text{stopa zwrotu inwestora mającego portfel } x &= \frac{\text{przychody} - \text{rozchody przy takim portfelu } x}{L} \\ &= \frac{1}{L} \left( \sum_{i \in I} C_{i, \text{kon}} \frac{x_i L}{C_{i, \text{pocz}}} + \sum_{j \in J} C_{j, \text{pocz}} \left( \frac{-x_j L}{C_{j, \text{pocz}}} \right) - \left( \sum_{i \in I} C_{i, \text{pocz}} \frac{x_i L}{C_{i, \text{pocz}}} + \sum_{j \in J} C_{j, \text{kon}} \left( \frac{-x_j L}{C_{j, \text{pocz}}} \right) \right) \right) \\ &= \sum_{i \in I} x_i \frac{C_{i, \text{kon}} - C_{i, \text{pocz}}}{C_{i, \text{pocz}}} + \sum_{j \in J} x_j \frac{C_{j, \text{kon}} - C_{j, \text{pocz}}}{C_{j, \text{pocz}}} = \sum_{i \in I} x_i R_i + \sum_{j \in J} x_j R_j = x^T R. \end{aligned}$$

(Czytelnik zwróci w tym rachunku uwagę na specyficzny sposób obliczania zysku z akcji krótko sprzedanych: od ceny *początkowej*  $C_{j, \text{pocz}}$  odejmuje się cenę *końcową*  $C_{j, \text{kon}}$ . Istotnie, powtarzając się nawet, bo to kluczowe przy modelowaniu Blacka: ta pierwsza jest ceną sprzedaży akcji o numerze  $j$ , zaś ta druga jest ich ceną zakupu, tzn. ceną, po której inwestor odkupuje akcje o numerze  $j$ , by zwrócić je Domowi Maklerskiemu. Porównaj też strony 11 i 39 w książce [22]; fragmentem z tej drugiej wymienionej strony rozpoczęliśmy bieżący Wykład VI.)

Podsumujmy zatem: tak, **paradygmat Markowitza**, czyli klasyczny wzór na stopę zwrotu z portfela, **obowiązuje także w modelu Blacka!**

**Wniosek 6.1.** *Wzory na wariancję portfela  $\sigma^2(x)$  ( $= \sigma^2(x^T R)$ ) oraz na wartość oczekiwaną  $E(x)$  ( $= \mathbb{E}(x^T R)$ ) pozostają w mocy dla wszystkich  $x \in H$  i dlatego właśnie ważne są odwzorowania Markowitza  $\mathcal{M}$  i  $\tilde{\mathcal{M}}$  idące z całej hiperpłaszczyzny  $H$ . Badając te odwzorowania już od pewnego czasu, antycypowaliśmy zgodność, o której tu mowa.*

**Uwaga 6.2.** Dopuszczenie nieograniczonej krótkiej sprzedaży wywołuje jedną fundamentalną zmianę w porównaniu z podejściem Markowitza. Od pierwszych wykładów było jasne, że wszystkie wartości oczekiwane  $\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$  są niemniejsze niż  $-1$ , gdyż zmienne losowe  $R_i$  przyjmują tylko takie wartości. To prowadziło do naturalnych ograniczeń na wartości oczekiwane zmiennych Markowitza  $x^T R$ ,  $x \in \Delta^k$ , gdyż były one, oczywiście,  $x$ -kombinacjami **wypukłymi** liczb  $\mu_1, \dots, \mu_k$ .

Tymczasem zmienne Blacka  $x^T R$ ,  $x \in H$ , mają wartości oczekiwane będące  $x$ -kombinacjami **afinicznymi** liczb  $\mu_1, \dots, \mu_k$ , które (o ile tylko nie wszystkie  $\mu_i$  są sobie równe) nie są poddane żadnym ograniczeniom i „biegają” po całej osi liczbowej. Koniec wtedy z ograniczeniem  $-1$  z dołu; nieograniczona krótka sprzedaż znosi to ograniczenie! Przychody minus rozchody inwestora mogą być w podejściu Blacka dowolnie wielkie ujemne w stosunku do jego kapitału własnego  $L$ . (Mogą też oczywiście być dowolnie wielkie dodatnie – co często podkreśla się w literaturze, lecz i ujemne też! W modelu Blacka inwestor może np stracić na giełdzie w okresie inwestycyjnym, średnio biorąc, tysiąckrotnie kapitału własnego.) To jest prawdziwa pojęciowa rewolucja, z której słabo zdajemy sobie sprawę, gdy pierwszy raz oglądamy definicję nieograniczonej krótkiej sprzedaży.

By nie być tu gołosłownym, w Przykładzie 5.1 (w Wykładzie V; jest on kontynuowany jako Przykład 6.3 tu niżej) mieliśmy sytuację, gdzie wszystkie wartości oczekiwane  $\mu_i$  były

niemniejsze niż  $-1$ . Mimo to, gdy traktujemy go rozszerzająco jako model Blacka (tak właśnie jest w Przykładzie 6.3), wtedy pewna istotna wielkość  $E_0$  uogólniająca  $E_0(\rho)$  ze wzoru (3.1) z Wykładu III okazuje się dużo mniejsza niż  $-1$ :  $E_0 = -\frac{19}{12}$ . Już to pokazuje, że modelowanie Blacka łatwo zaczyna żyć własnym życiem i łatwo wymyka się spod kontroli...

Pamiętajmy zatem, że Black to cała hiperpłaszczyzna  $H$  wraz z całym tego dobrodziejstwem inwentarza – m.in. nieograniczonymi z obu stron wartościami oczekiwanymi portfeli Blacka.

Jednakże, dopuszczając nieograniczoną krótką sprzedaż akcji, bardzo znacznie zyskujemy na łatwości operowania modelem, jak też na ogólności i elegancji opisu. Trochę doświadczenia dało nam już domykanie Rysunku 4.6 w Wykładzie IV (w szczególności piękny Rysunek 4.7 tamże). Ważne były tam obrazy prostych krytycznych; bez nich rysunki były mocno niekompletne i trudne do interpretacji.

Jednak tamte proste krytyczne cięły sympleks standardowy, a tak przecież być nie musi.

Dla przeciwwagi chcemy teraz pokazać obraz przy odwzorowaniu  $\mathcal{M}$  (a więc tym razem na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ ) zbiorów osiągalnych w obu aspektach, Markowitza i Blacka,  $\mathcal{M}(\Delta^3) \subset \mathcal{M}(H)$ , gdy prosta krytyczna omija sympleks. (Parametry tego przykładu pochodzą z pewnego kolokwium z APRK1 na Wydziale MIM UW.)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

[W wersji pdf rysunek trafił na następną stronę.]

Jest to co prawda tylko jeden kamyk z ogromnej mozaiki. Proponujemy tu jednak czytelnikowi całą serię **pytań sprawdzających**.

**Ćwiczenie 6.1.** 1. Patrząc na sam Rysunek 6.1, jaką dokładnie wartość ma współczynnik korelacji  $\rho_{12}$ ? Co można powiedzieć o wartości  $\rho_{13}$ ?

2. Dla danych (6.1) znaleźć zbiór portfeli krytycznych Blacka (np używając w tym celu Twierdzenia 5.1 z Wykładu V). Czym jest ten zbiór i jak jest on położony względem sympleksu standardowego  $\Delta^3$ ?

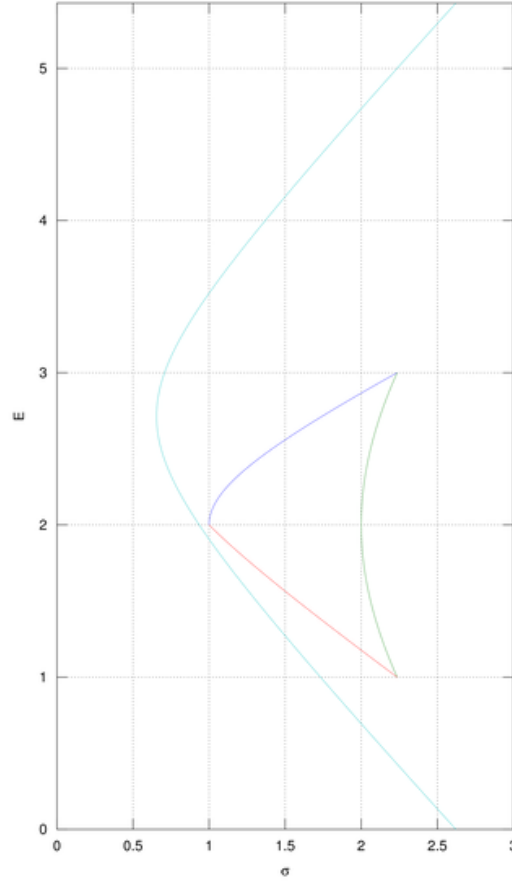
3. Czy poprzednie pytanie pomaga w „rozszyfrowaniu” całego Rysunku 6.1? Czy zbiór krytyczny okazuje się do tego pomocny? Czy jego nazwa współgra z rolą, jaką on odgrywa?

4. Granica minimalna w aspekcie Markowitza (patrz definicja  $F_{\min}$  w Wykładzie III) ma bardzo wyraźny punkt załamania (kink) na wysokości  $E = 2$ . Ten punkt załamania to obraz wierzchołka  $e_1$ , który tutaj leży – porównaj punkt 2 – poza zbiorem krytycznym. Dokładniej, przekształcenie Markowitza  $\mathcal{M}$  jest tutaj w otoczeniu  $e_1$  dyfeomorfizmem. Czy czytelnik widzi związek tego faktu z pojawieniem się kinka?

5. Czy są w płaszczyźnie  $H$  portfele Blacka **nie** będące Markowitza, które w mapie ryzyko – wartość oczekiwana też trafiają w zbiór  $\mathcal{M}(\Delta^3)$ ? Gdzie leżą (albo: gdzie powinny leżeć) te „fałszywe portfele Markowitza”?

Po serii doświadczeń i ćwiczeń (w poprzednim Wykładzie V i bieżącym VI) upewniliśmy się już, że kluczową rolę w badaniu własności odwzorowań  $\mathcal{M}$  i  $\widetilde{\mathcal{M}}$  odgrywają portfele krytyczne Blacka. Zbiór wszystkich portfeli krytycznych *nie* zawsze jest prostą (o czym już słyszeliśmy w tych wykładach). Utrwalmy to jeszcze.

**Przykład 6.2** (kontynuacja Rysunku 3.2). Znajdźmy wszystkie portfele krytyczne w tamtym modelu Blacka.



Rysunek 6.1. Markowitz całkowicie zdominowany przez Blacka: obraz sympleksu we wnętrzu obrazu płaszczyzny.

Według Twierdzenia 5.1 (Wykład V) szukamy portfeli  $x \in H$  takich, że  $\text{rk}(\Sigma x, \mu, e) = 2$ , tzn.

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 16x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16x_4 & 1 & 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 & 2 & 1 \\ -4x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 & 5 & 1 \\ -16x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16x_4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ tzn.}$$

$$\begin{vmatrix} 16x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16x_4 & 1 & 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 & 2 & 1 \\ -4x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 16x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16x_4 & 1 & 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 & 2 & 1 \\ -16x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 16x_4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

(opuszczone zostały, odpowiednio, czwarty i trzeci wiersz w macierzy  $4 \times 3$ ). Po rozwinięciu tych wyznaczników dostajemy

$$-28x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 28x_4 = 0 = -28x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 28x_4,$$

a więc (dwa razy) jedno i to samo równanie, nie zaś dwa różne równania! Zresztą równanie tożsame z opisem portfeli zerowego ryzyka.<sup>2</sup> Tak więc zbiór portfeli krytycznych pokrywa się tutaj ze zbiorem portfeli zerowego ryzyka i jest 2-wymiarową płaszczyzną.

**Ćwiczenie 6.2.** Jak płaszczyzna krytyczna w tym przypadku położona jest względem sympleksu  $\Delta^4$ ? (Tzn. które portfele **Markowitza** są krytyczne?)

*Wskazówka.* Przeglądając się równaniu tej płaszczyzny (po skróceniu poprzednio otrzymanego równania stronami przez  $-7$ )  $4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$ , na pewnych czterech z sześciu krawędzi (na których?) sympleksu  $\Delta^4$  bez trudu znajdujemy cztery specjalne punkty przecięcia płaszczyzny z sympleksem. Ich powłoka wypukła (czworokąt wypukły z wnętrzem) jest całym przecięciem płaszczyzny krytycznej z  $\Delta^4$ . Jeśli chodzi o przedział wartości oczekiwanych  $E$  portfeli krytycznych Markowitza, to można go w przybliżeniu **doświadczalnie** odczytać (bądź domyślić się) z Rysunku 3.2 w Wykładzie III, **dokładnie** zaś obliczyć – po przyjrzeniu się wspomnianemu wyżej czworokątowi.

Do tej analizy położenia wrócimy w przyszłości, poszukując przykładów niejednoznacznych tzw. *łamanych wierzchołkowych* w aspekcie Markowitza (patrz Wykłady X i XI).

Zauważmy też, że w Przykładzie 6.2 macierz  $\Sigma$  była silnie zdegenerowana,  $\text{rk } \Sigma = 1$  (wobec maksymalnej możliwej wartości 4). Zatrzymajmy się na chwilę nad tym zjawiskiem.

**Ćwiczenie 6.3** (sprawdzające). Obliczyć  $\text{rk } \Sigma$  w każdej sytuacji doskonale skorelowanej i w każdej sytuacji  $\pm$  doskonale skorelowanej.

*Rozwiązanie.* W sytuacji doskonałej dodatniej korelacji macierz  $\Sigma$  jest postaci

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \cdots & \sigma_1\sigma_k \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_k\sigma_1 & \sigma_k\sigma_2 & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}$$

i łatwo widać, iż jej  $i$ -ty wiersz jest postaci  $\sigma_i \cdot (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ . Wszystkie jej wiersze są liniowo zależne i nie jest ona zerowa, zatem jej rząd wynosi 1.

W sytuacji  $\pm$  doskonałej korelacji macierz  $\Sigma$  jest postaci

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \cdots & \sigma_1\sigma_r & -\sigma_1\sigma_{r+1} & \cdots & -\sigma_1\sigma_k \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_r & -\sigma_2\sigma_{r+1} & \cdots & -\sigma_2\sigma_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_r\sigma_1 & \sigma_r\sigma_2 & \cdots & \sigma_r^2 & -\sigma_r\sigma_{r+1} & \cdots & -\sigma_r\sigma_k \\ -\sigma_{r+1}\sigma_1 & -\sigma_{r+1}\sigma_2 & \cdots & -\sigma_{r+1}\sigma_r & \sigma_{r+1}^2 & \cdots & \sigma_{r+1}\sigma_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma_k\sigma_1 & -\sigma_k\sigma_2 & \cdots & -\sigma_k\sigma_r & \sigma_k\sigma_{r+1} & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}$$

i łatwo widać, iż jej  $i$ -ty wiersz jest postaci  $\sigma_i \cdot (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, -\sigma_{r+1}, \dots, -\sigma_k)$ , gdy  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , zaś jej  $j$ -ty wiersz jest postaci  $-\sigma_j \cdot (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, -\sigma_{r+1}, \dots, -\sigma_k)$ , gdy  $j \in \{r+1, \dots, k\}$ . Również i w tym przypadku więc wszystkie jej wiersze są liniowo zależne, zatem jej rząd wynosi 1.

Podstawowa część teorii Blacka dotyczy modeli, w których  $\Sigma > 0$ . Wtedy, oczywiście,  $\text{rk } \Sigma = k$ . Podamy teraz klasyczny rezultat Blacka i współautorów, dotyczący modeli  $(\Sigma, \mu)$ :  $\Sigma > 0$  z

<sup>2</sup> Ćwiczenie 5.2 w Wykładzie V było na bardzo podobny temat. **Tutaj** w Przykładzie 6.2 nie występuje specjalna konfiguracja geometryczna, która **tam** stanowiła swoisty haczyk.

nieograniczoną krótką sprzedażą, przy ważnym i naturalnym założeniu (5.2) z Wykładu V. Rezultat jest sformułowany w języku, który używa oznaczeń

$$\begin{aligned}\alpha &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \\ \beta &= \mu^T \Sigma^{-1} e (= e^T \Sigma^{-1} \mu), \\ \gamma &= e^T \Sigma^{-1} e.\end{aligned}$$

**Lemat 6.1.**  $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ .

*Dowód.* Jest to wyznacznik Grama liniowo niezależnego układu wektorów  $(\mu, e)$  przy iloczynie skalarnym zadanym (w bazie standardowej w  $\mathbb{R}^k$ ) przez macierz symetryczną i dodatnio określoną  $\Sigma^{-1}$ .  $\square$

*Uwaga 6.3.* Inny możliwy dowód lematu, zaczerpnięty z [23], przypis nr 5 na stronie 1853:  $\beta\mu - \alpha e \neq 0$  jako niezerowa ( $\beta$  może się zerować, lecz  $\alpha$  nie) kombinacja pary wektorów liniowo niezależnych. Zatem

$$0 < (\beta\mu - \alpha e)^T \Sigma^{-1} (\beta\mu - \alpha e) = \alpha(\alpha\gamma - \beta^2) \text{ i również } \alpha > 0.$$

$\square$

Dwa zdania zapowiedzi. To, co zaraz nastąpi, będzie uogólniało rachunki z Wykładu III. Casy czas należy jednak pamiętać, że tam odcinek  $\Delta^2$  był *automatycznie* częścią prostej krytycznej. Teraz zaś prosta, która wyłoni się z twierdzenia poniżej, okaże się nowym bytem wymagającym odrębnego traktowania (szczególnie, gdy używać będziemy mapy Markowitza, która jest *la raison d'être* dla tej prostej).

**Twierdzenie 6.1** (Merton [23], Black i współautorzy). *Przy założeniach  $\Sigma > 0$ ,  $\mu \nparallel e$ , zbiór portfeli krytycznych tworzy prostą  $\{x(E) : E \in \mathbb{R}\}$ , gdzie*

$$x(E) = (\alpha\gamma - \beta^2)^{-1} \Sigma^{-1} \left( \begin{bmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{bmatrix} e \right) \quad (6.2)$$

*i parametr  $E$  jest tak dobrany, że  $E(x(E)) = E$ .*

To twierdzenie jest klasyczne i w niniejszych wykładach będzie używane wielokrotnie. Dokładniej, prosta krytyczna sparametryzowana jak we wzorze (6.2) będzie najczęściej przez nas używanym obiektem. Podkreślamy, że o prostych krytycznych Markowitz pisał już w [19], patrz np strona 85<sup>1-4</sup> tamże.

(Można w tym miejscu zauważyć, że z kolei w wersji z roku 2000 wykładów [13] prosta krytyczna była tylko pobieżnie wspomniana w kilku miejscach bliżej końca tamtych wykładów. Wzoru (6.2) nie było tam w ogóle, bo w jawnej postaci nie był wtedy wykładowcy potrzebny. To pokazuje kolejny raz, jak różna jest koncepcja obecnych wykładów od wcześniejszej koncepcji przyjętej w [13].)

*Dowód twierdzenia..* Ten dowód tylko optycznie różni się od oryginalnego dowodu Mertona (głównie tym, że używa wzorów Cramera). Na mocy Twierdzenia 5.1 z Wykładu V, dla każdego punktu krytycznego  $x$  w analizie portfelowej istnieją  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  takie, że  $\Sigma x = \lambda_1 \mu + \lambda_2 e$ . Zapisując to inaczej,  $x = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} e$ . Oznaczmy  $E(x) = E$  i pomnóżmy tę wektorową

równość stronami (z lewej) przez  $\mu^T$ , następnie zaś stronami, także z lewej, przez  $e^T$ . Dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = E \\ \beta\lambda_1 + \gamma\lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Dzięki Lematowi 6.1 wiemy, że ten układ ma jedyne rozwiązanie

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad (6.3)$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{vmatrix}}{\alpha\gamma - \beta^2}.$$

Dowód twierdzenia jest zakończony.  $\square$

Pierwszy ze współczynników Lagrange'a pojawiających się w powyższym dowodzie ma ważną interpretację geometryczną; co prawda na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ , nie zaś na (bardziej kanonicznej!)  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ .

**Obserwacja. 6.1 (interpretacja geometryczna współczynnika  $\lambda_1$ )**

$$\lambda_1(E) = \frac{1}{2} \frac{d}{dE} \left( \sigma^2(x(E)) \right).$$

*Dowód.* Istotnie, liczymy tę pochodną funkcji złożonej jak byśmy z powrotem znaleźli się (na chwilę) na ćwiczeniach z AM II.1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} \left( \sigma^2(x(E)) \right) &= 2x(E)^T \Sigma \frac{d}{dE} (x(E)) = 2x(E)^T \Sigma \frac{\Sigma^{-1}(\gamma\mu - \beta e)}{\alpha\gamma - \beta^2} \\ &= \frac{2}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} \left( \begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} \mu^T + \begin{vmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{vmatrix} e^T \right) \Sigma^{-1}(\gamma\mu - \beta e) \\ &= \frac{2}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} \left( \begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} \gamma\alpha + \begin{vmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{vmatrix} \gamma\beta - \begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} \beta^2 - \begin{vmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{vmatrix} \beta\gamma \right) \\ &= \frac{2 \begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha\gamma - \beta^2} = 2\lambda_1(E) \end{aligned}$$

$\square$

(porównaj (6.3)). Ta własność współczynnika  $\lambda_1$  będzie przez nas wykorzystywana wielokrotnie. W przyszłości, ze względu na utrwaloną w analizie portfelowej tradycję (i ... wbrew zasadzie brzytwy Ockhama), współczynnik ten będzie często oznaczany dosyć dziwnym symbolem  $\lambda_E$ .

Na co przechodzi prosta krytyczna przy odwzorowaniu Markowitza  $\mathcal{M}$ ?

Kłopotu nie ma z drugą składową tego odwzorowania. Na mocy oznaczeń przyjętych w dowodzie Twierdzenia 6.1,  $E(x(E)) = E$ . Sporo trudniej jest policzyć wariancję danego portfela krytycznego  $x(E)$ ,

$$\begin{aligned}\sigma^2(x(E)) &= \frac{1}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} \left( \begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} \mu^T + \begin{vmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{vmatrix} e^T \right) \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} \left( \begin{vmatrix} E & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} \alpha & E \\ \beta & 1 \end{vmatrix} e \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} (\gamma(\alpha\gamma - \beta^2)E^2 - 2\beta(\alpha\gamma - \beta^2)) = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} (\gamma E^2 - 2\beta E + \alpha).\end{aligned}$$

Pisząc krótko  $\sigma^2 = \sigma^2(x(E))$ , związek ten przybiera postać

$$\sigma^2(\alpha\gamma - \beta^2) = \gamma \left( E^2 - 2\frac{\beta}{\gamma}E + \frac{\alpha}{\gamma} \right) = \gamma \left( E - \frac{\beta}{\gamma} \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma},$$

albo

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{(E - E_0)^2}{b^2} = 1, \quad (6.4)$$

gdzie

$$a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \quad b = \frac{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\gamma}, \quad E_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (6.5)$$

Wzory (6.4)–(6.5) pochodzą także z pracy [23], która dla analizy portfelowej okazuje się być zupełnie fundamentalna. Porównaj też rachunek prowadzony w Wykładzie III w wymiarze  $k = 2$ , w szczególności przypis nr 1 tamże (w wersji html: przypis nr 3).

**Wniosek 6.2.**  $\mathcal{M}$ -obrazem prostej krytycznej jest prawa ( $\sigma > 0$ ) gałąź hiperboli (6.4). Jest ona potocznie nazywana **pociskiem Markowitza**. To jeden z najczęściej używanych terminów w analizie portfelowej.

Prostą krytyczną (6.2) tradycyjnie nazywa się prostą krytyczną Blacka, mimo, że pierwszy raz pojawiła się ona eksplicite w pracy [23]. My też będziemy ją nazywać ‘Blacka’.

Ściśle biorąc, w pracy [23] portfele leżące na prostej krytycznej – nasze, od Wykładu V, punkty krytyczne w analizie portfelowej – są nazywane *frontier portfolios*.

Zauważmy w tym momencie, że tangens połowy kąta między asymptotami pocisku Markowitza wynosi

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma}}. \quad (6.6)$$

Jest to ważna informacja, po którą nie raz będziemy sięgać w dalszych wykładach.

Czy do tej pory widzieliśmy już jakiś pocisk Markowitza, przy tym na kanonicznej płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ ? Tak jest, „pociski” tego typu widzieliśmy już, m. in., na Rysunkach 4.4, 4.5 (Wykład IV), czy 6.1 tu wyżej (błękitna gałąź hiperboli).

*Uwaga 6.4.* Należy mocno podkreślić odmienną naturę pocisków Markowitza przy  $k = 2$  (np na Rysunkach 4.4 i 4.5) i  $k > 2$  (np na Rysunkach 4.7 i 6.1). W tym pierwszym przypadku cały zbiór  $H$  jest prostą krytyczną, zaś pocisk jest obrazem całej  $H$ . Ten pocisk opisywaliśmy już szczegółowo w Wykładzie III.

Natomiast w drugim, przy spełnionych warunkach Twierdzenia 6.1, prosta krytyczna jest bardzo szczupłym podzbiorem  $H$  i tylko jej obrazem jest pocisk! Obrazem całej  $H$  jest wtedy pocisk **oraz** cała część płaszczyzny  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$  na prawo od niego.

Przy  $k = 2$  i  $-1 < \rho < 1$ , tłumaczenie języka z Wykładu III na obecny język Mertona i Blacka jest następujące. Gdy

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

wtedy

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \frac{\sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}, \quad \text{jako suma wyrazów macierzy } \Sigma^{-1},$$

$$\beta = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2) \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \quad (\text{por. też wzór (3.3) na } E_0 = E_0(\rho) = \frac{\beta}{\gamma}).$$

W takiej sytuacji długości pól  $a$  i  $b$  hiperboli znamy już z Wykładu III, wzory (3.3). Zatem, dzięki (6.6),

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \gamma = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}. \quad (6.7)$$

Uwaga. Opuszczamy tu odpowiedni wzór dla samego parametru  $\alpha$ .

Gdy mamy już prostą krytyczną Blacka i jej obraz – pocisk Markowitza, wtedy dość natychmiastowo stwierdzamy, że portfele  $x(E)$  są też rozwiązaniami następującego problemu na ekstremum warunkowe

— minimalizować funkcję  $\sqrt{x^T \Sigma x}$  (czy też  $\frac{1}{2} x^T \Sigma x$ ),  $x \in \mathbb{R}^k$ , przy ograniczeniach  $\begin{cases} \mu^T x = E, \\ e^T x = 1. \end{cases}$

Istotnie, na mocy Twierdzenia 5.1 z Wykładu V, na każdym poziomie  $E = \text{const}$  znaleźliśmy już jednego kandydata  $x(E)$  na ekstremum warunkowe lokalne. To właśnie jest niezwykle:  $\lambda_1 \mu + \lambda_2 e$  w Twierdzeniu 5.1 to kombinacja gradientów funkcji warunku i funkcji jedyne ograniczenia budżetowego Blacka. (Jeden ze słuchaczy kilka lat temu zakrzyknął podczas wykładu w tym momencie: ‘Przecież tu  $1 + 1 = 3!$ ’)

Ponieważ przy tym funkcja  $x \mapsto x^T \Sigma x$  jest ściśle wypukła (AM II, GAL 2 oraz – powtórzenie – Ćwiczenie 6.4 tu poniżej), więc w istocie ten kandydat  $x(E)$  jest minimum warunkowym globalnym – porównaj Optymalizacja 1. Przy każdej ustalonej oczekiwanej stopie zwrotu  $E$  znaleźliśmy więc już portfel minimalnego ryzyka  $x(E)$ . Przy tym portfele te układają się na prostej, gdy stopa zwrotu przebiega wszystkie a priori możliwe wartości rzeczywiste.

Umiemy zatem minimalizować ryzyko portfela Blacka przy jego ustalonej wartości oczekiwanej! To prawdziwa „wartość dodana” wzoru (6.2).<sup>3</sup>

**Ćwiczenie 6.4** (w ramach powtórzenia). Pokazać, że dla macierzy  $\Sigma > 0$  funkcja  $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto x^T \Sigma x \in \mathbb{R}$  jest ściśle wypukła, tzn.

$$(sx + ty)^T \Sigma (sx + ty) \leq sx^T \Sigma x + ty^T \Sigma y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k \quad \forall s, t \geq 0, \quad s + t = 1,$$

zaś „=” tylko gdy  $x = y \vee s = 0 \vee t = 0$ .

**Dygresja** – inne spojrzenie na długość poziomej półosi pocisku Markowitza  $a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ .

Chodzi o znalezienie wartości (wartości, nie punktu!) globalnego minimum warunkowego funkcji  $\sqrt{x^T \Sigma x}$  przy jednym jedynym warunku budżetowym Blacka  $e^T x = 1$ .

Każdy kandydat na takie ekstremum warunkowe spełnia  $\Sigma x = \lambda e$  przy pewnym  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ekstremalizujemy  $\frac{1}{2} x^T \Sigma x$  zamiast  $\sqrt{x^T \Sigma x}$ ). Wtedy  $x = \lambda \Sigma^{-1} e$ , więc też  $1 = \lambda e^T \Sigma^{-1} e = \lambda \gamma$ ,  $\lambda = \frac{1}{\gamma}$ . Dostajemy więc jedyne kandydata  $x = \frac{\Sigma^{-1} e}{\gamma}$ . Z racji ściśle wypukłości funkcji, którą ekstremalizujemy warunkowo, jest to punkt minimum warunkowego globalnego,

$$x_{\min} = \frac{\Sigma^{-1} e}{\gamma}. \quad (6.8)$$

<sup>3</sup> za który kilku ekonomistów – lecz niestety nie Black, który już wtedy nie żył – dostało w roku 1997 nagrodę Nobla z dziedziny ekonomii

Zgodnie z oczekiwaniami  $E(x_{\min}) = \mu^T \frac{\Sigma^{-1}e}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$  oraz  $\sigma^2(x_{\min}) = \frac{1}{\gamma^2} e^T \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} e = \frac{\gamma}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma}$ , tzn.  $\sigma(x_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ . To zaś jest znany już wzór (6.5) na długość półosi  $a$ .

*Uwaga 6.5.* Załóżmy jeszcze raz przez chwilę, że spółki są tylko dwie i w związku z tym używamy oznaczeń z Wykładu III. Wykluczona jest wtedy tylko, jak pamiętamy, sytuacja  $\sigma_1 = \sigma_2$  i  $\rho = 1$ .

Wzór (6.8) zapisujemy na początek w postaci rozwiniętej

$$x_{\min} = \frac{\Sigma^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{e^T \Sigma^{-1} e},$$

po czym, po prawej stronie, mnożymy macierze  $\Sigma^{-1}$  stojące w liczniku i mianowniku przez  $\det \Sigma$ . Po tej czynności mamy już w liczniku i mianowniku macierz dopełnień algebraicznych macierzy  $\Sigma$  **zamiast** samej macierzy  $\Sigma^{-1}$ .<sup>4</sup> To szybko prowadzi do wzoru

$$x_{\min} = \left( \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \right)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix},$$

w którego pierwszej składowej rozpoznajemy<sup>5</sup> wielkość  $x_{1,0}$  z wzoru z Wykładu III (zaraz za Uwagą 3.2).

Po wprowadzeniu i (wstępnym) przedyskutowaniu nieograniczonej krótkiej sprzedaży, w naszym ujęciu analizy portfelowej wyodrębnione są teraz dwa oddzielne aspekty: aspekt Markowitza, oznaczany **M**, z portfelami dopuszczalnymi leżącymi w (gdy ilość spółek w modelu jest  $k$ ) sympleksie  $\Delta^k$ , oraz aspekt Blacka, oznaczany **B**, z portfelami dopuszczalnymi leżącymi na hiperpłaszczyźnie  $H$  zdefiniowanej (jeszcze w Wykładzie II) wzorem (2.2).

Dla rozróżnienia aspektów będziemy już do końca tych wykładów używać skrótów **M** oraz **B**.

W aspekcie **M** wprowadziliśmy, nie etykietując tego wtedy (Wykład III) jawnie literą **M**, pojęcia granic: minimalnej  $F_{\min}$  oraz maksymalnej  $F_{\max}$ . Pierwsze nasuwające się pytanie to, czy te granice mają swoje analogi w aspekcie **B**.

Otóż jeśli chodzi o  $F_{\max}$ , to nie, bo zbiory liniowe  $\mathcal{M}(H) \cap \{E = \text{const}\}$  typowo są poziomymi półprostymi skierowanymi „w prawo”. (Inaczej jest, gdy  $k = 2$  lub gdy czasem model jest choćby częściowo zdegenerowany.) Jeśli natomiast chodzi o  $F_{\min}$ , to tak, bo definicja

$$F_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{zbiór lewych krańców zbiorów liniowych } \mathcal{M}(H) \cap \{E = \text{const}\} \right\}$$

ma także sens w aspekcie **B** i oznacza po prostu, że **ta** nowa granica minimalna jest pociskiem Markowitza!

Ważną rzeczą w analizie portfelowej jest porównywanie granic minimalnych w aspektach **M** i **B**, zaś szczególnie: porównywanie ich tzw. części *efektywnych* (ang. ‘efficient’), o czym dużo będziemy mówić w dalszych wykładach. Teraz, dla przykładu, porównajmy te obiekty na Rysunku 6.1 powyżej.  $F_{\min}$  w aspekcie **M** to suma dwóch łuków hiperbol  $\mathcal{M}(\overline{e_1 e_2}) \cup \mathcal{M}(\overline{e_1 e_3})$  (niebieskiego i czerwonego). Natomiast  $F_{\min}$  w aspekcie **B** to, jak już było wspomniane, błękitny pocisk – obraz prostej krytycznej w rozważanym przykładzie.

**Ćwiczenie 6.5.** Znaleźć granice minimalne w aspektach **M** i **B** w przykładzie zilustrowanym na Rysunku 4.7 w Wykładzie IV.

(Uwaga. Tamten rysunek wykonany jest na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ , chodzi tu więc o *warianty* granic minimalnych pojawiające się w wyniku użycia odwzorowania  $\widetilde{\mathcal{M}}$  zamiast odwzorowania  $\mathcal{M}$ .)

<sup>4</sup> Wzór na  $\Sigma^{-1}$  przy  $k = 2$  pojawił się już w Uwadze 6.4 powyżej.

<sup>5</sup> nie może być inaczej, bo cały czas mówimy o jednej i tej samej minimalizacji ryzyka portfeli Blacka

**Przykład 6.3** (obliczenia prostej krytycznej przy pomocy Twierdzenia 6.1 – kontynuacja Przykładu 5.1 z Wykładu V).

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 17 & -26 \\ 6 & -26 & 42 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 31, \beta = -19, \gamma = 12, \alpha\gamma - \beta^2 = 11,$$

Zgodnie ze wzorem (6.2),

$$x(E) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 17 & -26 \\ 6 & -26 & 42 \end{pmatrix} \left( \begin{vmatrix} E & -19 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 31 & E \\ -19 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11}E - \frac{2}{11} \\ \frac{17}{11}E + \frac{15}{11} \\ -\frac{14}{11}E - \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

W szczególności

$$x\left(-\frac{15}{17}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} \\ 0 \\ \frac{16}{17} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad x\left(-\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

co widać na Rysunku 5.1 w Wykładzie V (miejsca przecięcia prostej krytycznej z bokami trójkąta). Pocisk Markowitza (albo też: parabola w płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ ) ma tu równanie  $\sigma^2 = \frac{12}{11}E^2 + \frac{38}{11}E + \frac{31}{11}$ .

To uzupełnia Przykład 5.1 w Wykładzie V. Mamy (wreszcie) już całościowy opis *obiektów* składających się na przykład Krzyżewskiego – i wkrótce to wykorzystamy.

Dla utrwalenia wzorów poznanych na tym wykładzie proponujemy wrócić jeszcze do Rysunku 6.1 i danych (6.1), które go generują. Naśladując rachunki z Przykładu 6.3, policzmy tu prostą krytyczną, która w mapie ryzyko – wartość oczekiwana daje błękitny pocisk Markowitza na Rysunku 6.1.

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{55}{3}, \beta = \frac{19}{3}, \gamma = \frac{7}{3}, \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{24}{9}.$$

Stosując znowu wzór (6.2),

$$x(E) = \frac{9}{24} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \left( \begin{vmatrix} E & \frac{19}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{55}{3} & E \\ \frac{19}{3} & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}E + \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8}E - \frac{7}{8} \\ -\frac{5}{8}E + \frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

**Ćwiczenie 6.6.** 1. Upewnić się, że ta prosta krytyczna nie przecina sympleksu standardowego  $\Delta^3$ , czyli, że tutaj żaden portfel krytyczny Blacka nie jest Markowitza.

2. Upewnić się też, że wartość oczekiwana  $E$  nie jest stała na tej prostej krytycznej.

*Wskazówka.* Nietrudno policzyć wektor prędkości  $x'(E)$ .

**Ćwiczenie 6.7.** Czy zawsze na prostej (6.2) parametr  $E$  zmienia się (nie jest stały)?

*Wskazówka.* Nietrudno zróźniczkować po  $E$  wzór (6.2) na  $x(E)$ . Dlaczego wynik jest zawsze wektorem niezerowym?

Zajmijmy się teraz dokładniej ostatnim pytaniem nr 4 w Ćwiczeniu 6.1 na początku tego wykładu. Po wykonaniu Ćwiczenia 6.6, jak teraz operatywnie zapisać proste–poziomice wartości  $E$  na płaszczyźnie  $H$ , i to w powiązaniu z parametrycznym opisem tej prostej krytycznej?

Po prostu policzyć iloczyn wektorowy

$$\mu \times e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

po czym zapisać (wszystkie!) punkty płaszczyzny  $H$  jako

$$x(E) + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ustalając tu  $E$  i zmieniając  $t$ , właśnie dostaje się poziomice trafiającą prostą krytyczną w punkcie (portfelu Blacka)  $x(E)$ .

*Uwaga 6.6.* Nie należy sądzić, że te poziomice wartości oczekiwanej  $E$  są prostopadłe do prostej krytycznej! Tną one prostą krytyczną ukośnie pod ustalonym kątem. Np w rozważanym przykładzie wektor wyznaczający kierunek prostej krytycznej  $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$  właśnie nie jest prostopadły

de wektora  $\mu \times e$ , tylko tworzy z nim kąt około  $68\frac{1}{3}$  stopni.

(Jak wylicza się taką rozwartość kąta? Pożądane byłoby tu zaznaczyć na kartce papieru trzy wierzchołki pewnego trójkąta równobocznego o boku długości  $\sqrt{2}$ , nazwać je  $e'_1, e'_2, e'_3$ , jako obrazy wierzchołków  $\Delta^3$  przy pewnej jednoznacznie już wyznaczonej izometrii, po czym narysować na kartce obraz prostej krytycznej w tej izometrii oraz obrazy poziomicy parametru  $E$ . Nie symbolicznie, lecz realnie. Tak, jak one naprawdę leżą na  $H$  względem wierzchołków trójkąta  $\Delta^3$ . Tutaj rysowanie jako wierna izometria.)

**Ćwiczenie 6.8.** Rozwiązać ostatnią część (nr 4) Ćwiczenia 6.1.

*Wskazówka.*  $\sigma^2 \left( x(E) + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{7}{8}E^2 - \frac{19}{4}E + \frac{55}{8} + 8t^2$ . Gdzie zatem szukać portfela dublującego dany portfel Markowitza co do ryzyka i wartości oczekiwanej? Czy można go narysować?

**Ćwiczenie 6.9.** Pokazać, że, przynajmniej w wymiarze  $k = 3$ , z powyższych ćwiczeń wyłania się już ogólny sposób znajdowania „fałszywych portfeli Markowitza” dublujących te ostatnie co do ryzyka i wartości oczekiwanej. Tak więc, dla danego portfela Markowitza – jego „fałszywy” odpowiednik.

Oczywiście najciekawiej jest, gdy – jak tutaj – prosta krytyczna nie tnie trójkąta  $\Delta^3$ . Co się dzieje z „fałszywymi” portfelami Markowitza, gdy prosta krytyczna jednak tnie sympleks (mieliśmy już takie przykłady; czy wszystkie „fałszywe” są wtedy naprawdę fałszywe)?

*Wskazówka.* Pokazać, wykorzystując wzór (6.2), że, przy parametrze  $E$  traktowanym jako stała, w trójkątnie kwadratowym od  $t$ ,  $\sigma^2(x(E) + t\mu \times e)$ , nie ma wyrazu z  $t^1$ .

## 7. Wykład VII, 13.XI.2009

*Uwaga 7.1.* Osoby, które zajęły się wskazówką do [ostatniego w poprzednim wykładzie] Ćwiczenia 6.9, wiedzą już, dlaczego zeruje się tam współczynnik przy  $t^1$  we wzorze na wariancję portfeli na poziomie parametru  $E$ :

$$\begin{aligned}(\mu \times e)^T \Sigma x(E) &= (\mu \times e)^T \Sigma (\text{pewna kombinacja liniowa wektorów } \Sigma^{-1} \mu \text{ oraz } \Sigma^{-1} e) \\&= \text{pewna kombinacja liniowa liczb } (\mu \times e)^T \mu = 0 \text{ oraz } (\mu \times e)^T e = 0,\end{aligned}$$

por. wzór (6.2) w Wykładzie VI. Powód bardziej prozaiczny (choć związany z poprzednim, te powody wzajemnie się przenikają) jest taki: dyskutowany trójmian kwadratowy od  $t$  musi przyjmować swoje minimum przy  $t = 0$ , bo właśnie wtedy trafiamy w portfel  $x(E)$ , który minimalizuje ryzyko (a więc i wariancję) na poziomie wartości  $E$ , jak to było wyjaśniane i komentowane w Wykładzie VI.

Wspomniane osoby wiedzą też, że ta czysto kwadratowa (bez przesunięcia powodowanego wyrazem z  $t^1$ ) zależność wariancji od  $t$  jest taka sama (jeśli chodzi o zmienność) na każdej z poziomów parametru  $E$  tnących prostą krytyczną, tzn., że współczynnik przy  $t^2$  **nie** zależy od  $E$ . Istotnie,

$$\sigma^2(x(E) + t \mu \times e) = \sigma^2(x(E)) + [(\mu \times e)^T \Sigma (\mu \times e)] t^2.$$

Powtarzamy, jeszcze raz po Wykładzie VI: równanie pocisku Markowitza w każdym niezdegenerowanym przypadku powstaje przez podstawienie szczególnych wartości  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  do ogólnego równania (6.4).

(Jeśli ktoś ogólne wzory lubi mniej niż konkretne obliczenia, ten liczy bezpośrednio wariancję portfeli krytycznych  $x(E)$ . Np w przykładzie Krzyżewskiego (rozpoczętym w Wykładzie V, kontynuowanym w Wykładzie VI)

$$\sigma^2(x(E)) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}E - \frac{2}{11} & \frac{17}{11}E + \frac{15}{11} & -\frac{14}{11}E - \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}E - \frac{2}{11} \\ \frac{17}{11}E + \frac{15}{11} \\ -\frac{14}{11}E - \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \frac{12}{11}E^2 + \frac{38}{11}E + \frac{31}{11},$$

jak w Przykładzie 6.3. W przyszłości nie będziemy już precyzować sposobu, w jaki policzony został pocisk Markowitza w niezdegenerowanym modelu Blacka.)

*Uwaga 7.2* (i zarazem ćwiczenie). Wiemy już doskonale, że niezdegenerowane macierze  $\Sigma$  wraz z niestałymi wektorami  $\mu$  zawsze generują pociski Markowitza jako granice minimalne w modelach Blacka. Jednakże nie zawsze na odwrót! Oto przykład modelu Blacka, w którym macierz kowariancji jest tylko nieujemnie określona (więc teoria Blacka jako taka się nie stosuje), a mimo to granica minimalna jest w nim gałęzią najprawdziwszej niezdegenerowanej hiperboli.

W modelu występują trzy spółki ( $k = 3$ ). Macierz kowariancji zmiennych stóp zwrotu ze spółek oraz wektor wartości oczekiwanych stóp zwrotu ze spółek to

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Ta macierz jest tylko nieujemnie określona (stosuje się wiedza z Wykładu II, wszystkie minory centralne w  $\Sigma$  są nieujemne). Nie jest dodatnio określona – jej wyznacznik znika.

Jest pouczającym (i niezbyt łatwym) ćwiczeniem policzyć w tym modelu obraz  $\mathcal{M}(H)$  odwzorowania Markowitza. Odpowiedzią okazuje się być prawa ( $\sigma > 0$ ) gałąź pewnej niezdegenerowanej hiperboli – zbiór bez wnętrza na płaszczyźnie (mimo, że wymiar modelu jest trzy; to jeszcze inna osobliwość tego przykładu).

*Wskazówka.* Obliczenie pokaże, że tym obrazem jest prawa gałąź hiperboli  $\sigma^2 - (E - 2)^2 = 1$ . Jednak równocześnie ... inne obliczenie pokazuje, że wszystkie portfele Blacka  $x \in H$  są w tym przykładzie krytyczne:

$$\det(\Sigma x, \mu, e) = \begin{vmatrix} 2x_1 + x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x_2 + 2x_3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

*Czyli – porównaj Wykład VI – wszystkie w ogóle portfele relatywnie (tj przy  $E = \text{const}$ ) minimalizują ryzyko! Ich obrazy leżą zatem na granicy minimalnej w tym modelu Blacka. Dziwne to wszystko, nieprawdaż?*

*Rozwiązanie.* Trzeba zajmować się obiema składowymi odwzorowania Markowitza w punkcie – portfela Blacka. Zajmijmy się najpierw wartością oczekiwaną portfela:

$$E = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 + 2(1 - x_1 - x_3) + 3x_3 = 2 - x_1 + x_3,$$

więc  $E - 2 = -x_1 + x_3$  (za chwilę ten związek okaże się pomocny). Teraz pierwsza składowa odwzorowania, a dokładniej mówiąc – wariancja portfela:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2(x_1 + x_3) \\ &= 2x_1^2 + (1 - x_1 - x_3)^2 + 2x_3^2 + 2(1 - x_1 - x_3)(x_1 + x_3) \\ &= 2x_1^2 + 1 - 2(x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_3) - 2(x_1 + x_3)^2 \\ &= 1 + (-x_1 + x_3)^2 = 1 + (E - 2)^2. \end{aligned}$$

Związek podany we wskazówce zachodzi więc dla każdego portfela Blacka; wariancja portfela w tym przykładzie zależy tylko od wartości oczekiwanej portfela(!)

Wyjaśnienie tego zjawiska jest następujące: forma kwadratowa związana z macierzą  $\Sigma$  jest dodatnio określona na wektorach reprezentowanych przez punkty z płaszczyzny afinicznej  $H$ , i również kres dolny jej wartości na tych wektorach jest dodatni (równy 1, jak wynika z powyższego rachunku). Kłopot sprawiałoby tylko pewne wektory o sumie składowych zero, gdyż takie są w tym przykładzie wektory własne macierzy  $\Sigma$  odpowiadające wartości własnej 0. Jednakże takie wektory w analizie portfelowej nie są używane. W rozwiązaniu łamigłówek podanej w Uwadze 7.2 wspomnieliśmy, że suma składowych portfela nigdy nie jest zero. Otóż *jest* pewien wyjątek, dopuszczany w tzw. podejściu Lintnera, o czym wspominamy w Wykładzie IX. Takie inwestowanie à la Lintner, z zerową czy nawet ujemną sumą składowych portfela, w teorii Blacka nie jest dopuszczane.

### Portfele efektywne (w źródle) i granica efektywna (w obrazie)

Wprowadzimy za chwilę dwa kluczowe w analizie portfelowej pojęcia: efektywności danego portfela i granicy efektywnej w danym modelu. Przewijają się one przez teksty poświęcone analizie portfelowej od samego jej historycznego początku – porównaj np. obszerny cytat z [19] w Wykładzie II („the set of efficient  $E, V$  combinations”), czy też reprodukcję strony 82 z tej samej pracy na Rysunku 7.2 poniżej. Już na tej reprodukcji można oglądać pewną (uproszczoną, wyidealizowaną) granicę efektywną!

By zobaczyć te pojęcia w odpowiedniej perspektywie, chcemy przez chwilę włączyć zmienne losowe pojawiające się w analizie portfelowej w pewien szerszy schemat. Zbiory portfeli Markowitza  $\Delta^k$  i portfeli Blacka  $H$  to przykłady **wachlarzy** możliwych scenariuszy inwestycyjnych, oznaczanych ogólnie  $\mathfrak{X}$ . Elementy wachlarza, np portfele akcji (choć mogą to być też inwestycje w obligacje, nieruchomości, instrumenty pochodne ...) mają przypisane do siebie zmienne losowe wyrażające możliwe stopy zysku z danego scenariusza w ustalonym okresie inwestycyjnym:

$$\mathfrak{X} \ni A \longleftrightarrow R_A,$$

gdzie

$A$  – scenariusz, albo plan,

$R_A$  – zmienna losowa wyrażająca stopę zysku w ustalonym okresie inwestycyjnym z tego scenariusza, planu ...

Zupełnie analogicznie do tego, jak ustalonemu portfelowi akcji  $x$  Markowitz czy Black przypisuje zmienną losową  $x^T R$  – stopę zwrotu z tego portfela.

Dla zmiennych losowych generalnie istnieją różne miary ryzyka, z których jedną jest odchylenie standardowe  $\sigma$ . Ustalmy na pewien czas jedną z takich miar  $f$ .

**Definicja 7.1** (relacja porównująca scenariusze inwestycyjne).

$$A \preceq_{\mathbb{E}, f} B \quad \text{dla} \quad A, B \in \mathfrak{X} \quad \text{gdy}$$

$$\mathbb{E}(R_A) \leq \mathbb{E}(R_B) \quad \text{i} \quad f(R_A) \geq f(R_B).$$

Jest to *częściowy* porządek w wachlarzu  $\mathfrak{X}$ . (Oczywiście, ogólnie nie każde dwa scenariusze można porównywać taką relacją  $\preceq_{\mathbb{E}, f}$ .)

Mówimy, że scenariusz  $A$  jest nie lepszy niż  $B$ , albo, że  $B$  dominuje  $A$  (względnie:  $A$  jest dominowany przez  $B$ ).

**Definicja 7.2** (scenariusz efektywny). Mówimy, że scenariusz  $A \in \mathfrak{X}$  jest **efektywny** w sensie danej relacji  $\preceq_{\mathbb{E}, f}$ , gdy  $A$  **nie** jest dominowany przez żaden scenariusz  $B \in \mathfrak{X}$  taki, że przynajmniej jedna z nierówności w Definicji 7.1 jest ostra.

Interpretacja geometryczna Definicji 7.2.

Używając analogu odwzorowania Markowitza, tzn. rysując „mapy” na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(f, \mathbb{E})$ , scenariusz  $A$  jest efektywny w sensie  $\preceq_{\mathbb{E}, f}$  gdy **nie** istnieje scenariusz  $B$  taki, że punkt  $(f(R_A), \mathbb{E}(R_A))^T$

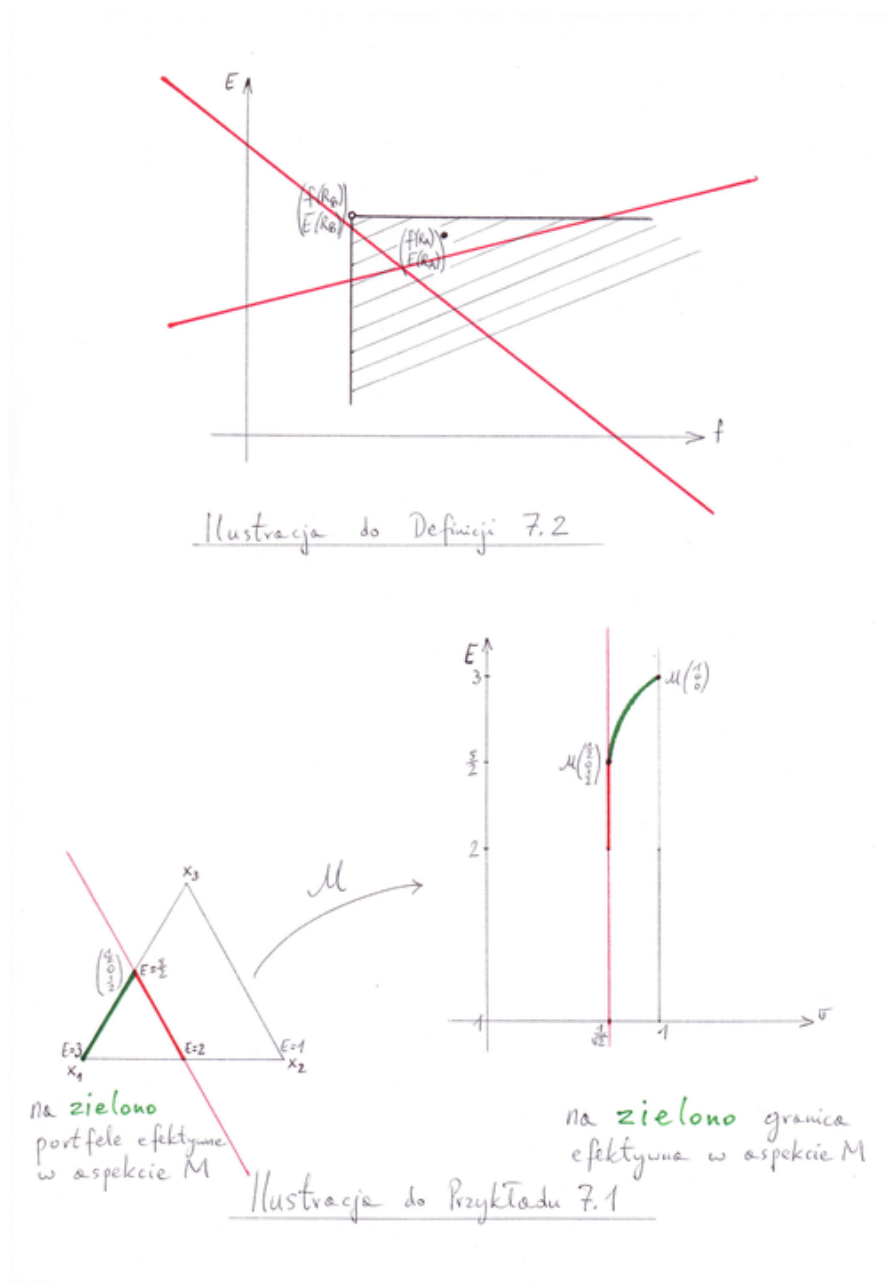
leży w domkniętym kątowniku ‘południowo-wschodnim’ o wierzchołku  $(f(R_B), \mathbb{E}(R_B))^T$  bez samego tego wierzchołka – patrz górna część Rysunku 7.1 (nieistnienie wyrażone jest czerwonym przekreśleniem jak przy znaku zakazu).

To samo można też wyrazić dualnie: ma **nie** istnieć  $B$ , którego obraz leżałby w domkniętym kątowniku [uwaga!] północno-zachodnim o wierzchołku w obrazie  $A$  i był różny od obrazu  $A$  (czyli: leżałby w domkniętym kątowniku j.w. bez wierzchołka). [W wersji pdf ilustrujący tę interpretację Rysunek 7.1 dopiero otwiera następną stronę.]

Należy zauważyć, że spójna i dostatecznie szeroko akceptowana teoria rozwinęła się jedynie na bazie miary ryzyka  $f(\cdot) = \sigma(\cdot)$  (odchylenie standardowe zmiennej losowej).

Ponadto w analizie portfelowej najczęściej używamy wachlarzy – zbiorów portfeli akcji: Markowitza (wtedy  $\mathfrak{X} = \Delta^k$ , aspekt **M** z Wykładu VI), względnie Blacka (wtedy  $\mathfrak{X} = H$ , aspekt **B** z Wykładu VI).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Najczęściej, to nie znaczy, że jedynie. Już przy analizie modelu Tobina, co nastąpi w Wykładzie XI, mielibyśmy inny typ wachlarza. Również przy **ogólnym** modelu Markowitza, o którym w tych wykładach nie mówimy, dodatkowe ograniczenia na udziały akcji spółek w portfelach dopuszczalnych przekładałyby się na inne, nowe wachlarze.



Rysunek 7.1. Efektywność abstrakcyjna oraz efektywność konkretna i do tego w aspekcie  $\mathbf{M}$ .

Powiemy, specyfikując Definicję 7.2, że portfel  $x$ , w aspekcie  $\mathbf{M}$  lub też  $\mathbf{B}$ , jest **efektywny** jeśli jest on efektywny jako scenariusz inwestycyjny przy wachlarzu  $\mathfrak{X} = \Delta^k$  (w aspekcie  $\mathbf{M}$ ) lub przy wachlarzu  $\mathfrak{X} = H$  (w aspekcie  $\mathbf{B}$ ) i mierze ryzyka zawsze  $f = \sigma$ .

Portfele efektywne są najważniejsze w analizie portfelowej. Nie jest je trudno znaleźć w aspekcie  $\mathbf{B}$  (patrz np Rysunek 7.6 poniżej), natomiast w aspekcie  $\mathbf{M}$  – ogólnie bardzo trudno (patrz np Rysunek 7.5 poniżej). Większa część pozostałych wykładów jest poświęcona szukaniu bądź wszystkich, bądź specjalnych (optymalnych w różnych sensach), portfeli efektywnych. By, tytułem przykładu, już tutaj zilustrować wagę portfeli efektywnych – można rekomendować fragment z pracy [23] podany za Przykładem 13.1 w Wykładzie XIII.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> portfele i ich obrazy są tam co prawda mylone, lecz to mało znaczący szczegół

**Definicja 7.3.** Granica efektywna  $F_{\text{efek}}$ , w każdym z aspektów, to obraz przy odwzorowaniu Markowitza  $\mathcal{M}$  wszystkich portfeli efektywnych w rozważanym aspekcie.

*Uwaga 7.3.* Podkreślamy bardzo mocno, że  $F_{\text{efek}}$  jest określona w **danym** aspekcie: **M** albo **B**. Przy zmianie aspektu może ona zmieniać się dramatycznie, jak pokazane w Przykładzie 7.1 poniżej.

**Obserwacja. 7.1** W każdym z aspektów, **B** czy też **M**,

$$F_{\text{efek}} \subset F_{\min}.$$

Istotnie, warunkiem koniecznym, by portfel  $x$  był efektywny, jest minimalizowanie przez  $x$  odchylenia standardowego  $\sigma(y)$  wśród wszystkich portfeli  $y$  (lecz tylko dopuszczanych w danym aspekcie!) takich, że  $E(y) = E(x)$  – porównaj interpretacja geometryczna Definicji 7.2. W przeciwnym przypadku obraz portfela  $x$  leżałby na górnej (‘północnej’) granicy południowo-wschodniego kątownika wyznaczonego przez pewien  $\mathcal{M}(y)$  i byłby przy tym różny od wierzchołka  $\mathcal{M}(y)$  tego kątownika.

**Przykład 7.1.** Granicą efektywną  $F_{\text{efek}}$  w modelu

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rozważanym w aspekcie **M** jest domknięty łuk hiperboli – obraz (też zielony) zielonej połowy boku  $\overline{e_1 e_3}$  na Rysunku 7.1 w jego dolnej części. Uzasadnienie mieści się w samym tym rysunku części granicy  $F_{\min}$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ . Zielone punkty granicy minimalnej nie są przez nic zdominowane – nie są w cieniu żadnego innego punktu tej granicy. Natomiast czerwone punkty już są zdominowane – przez czerwone położone nad nimi! Nienarysowane punkty granicy minimalnej (mające wartości  $E$  między 1 i 2) są zdominowane przez czerwone punkty.

(Porównaj też wcześniejszą analizę tego samego modelu, robioną pod innym kątem, w Wykładzie IV).

Natomiast  $F_{\text{efek}} = \emptyset$  w tym samym modelu rozważanym w aspekcie **B**! Istotnie,  $F_{\min}$  jest wtedy całą prostą  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  – obrazem prostej  $\{x_1 = \frac{1}{2}\} \subset H$  (obie te proste są obecne na Rysunku 7.1). Tymczasem każdy portfel z tej ostatniej prostej jest zdominowany przez jakikolwiek portfel na niej mający większą wartość oczekiwaną. Brak zatem portfeli efektywnych w sensie Definicji 7.2.

*Uwaga 7.4* (ostrzeżenie). W książce [10] na stronie 138, za portfel efektywny uznawany jest portfel, dla którego NIE istnieje portfel, mający niższe ryzyko przy danej oczekiwanej stopie zwrotu,

lub

mający wyższą oczekiwaną stopę zwrotu przy danym ryzyku.

By uniknąć patologii i być w zgodności z Definicją 7.2, podkreślone słowo danej należałoby zastąpić przez „nie mniejszej”, zaś podkreślone słowo danym przez „nie większym”.

To samo należałoby też uczynić w definicji efektywności portfela podanej w pracy [26] (linie 2-4 na stronie 278), gdzie stoi wyraźnie: "... a portfolio is efficient if none other gives either (a) a higher expected return and the same variance of return or (b) a lower variance of return and the same expected return."

Natomiast dokładnie tak jak w Definicji 7.2 (i to od samego początku!) proponował rozumieć efektywność Markowitza w [19]. Pisał on tam na stronie 82: "The  $E-V$  rule states that the investor would (or should) want to select one of those portfolios which give rise to the  $(E, V)$

combinations indicated as efficient in the figure; i. e., those with minimum  $V$  for **given**  $E$  or **more** and maximum  $E$  for **given**  $V$  or **less**.”

Czytelnik zechce zauważyć, że to ‘and’ w cytacie z HMM jest koniunkcją logiczną!! (Dokona-  
ne tu wytluszczenia **nie** pochodzą od autora pracy [19].) Istotnie, pierwsza część tej koniunkcji  
wyklucza hipotetyczne portfele, których obrazy leżałyby względem punktu  $(V, E)$  [nasz porzą-  
dek zmiennych, nie ten egzotyczny ulubiony przez HMM!!] w: { kątowniku północno-zachodnim  
z wąsem poziomo w lewo od  $(V, E)$ , lecz **bez** wąsa pionowo w górę od  $(V, E)$  }. Natomiast druga  
część koniunkcji wyklucza portfele, których obrazy leżałyby w: { tymże kątowniku północno-zachodnim  
z wąsem pionowo w górę, lecz **bez** wąsa poziomo w lewo }. Łącznie koniunkcja wyklucza więc  
portfele, których obrazy leżałyby w całym domkniętym kątowniku północno-zachodnim bez  
samego wierzchołka kątownika  $(V, E)$ , czyli te, które dominowałyby w naszym sensie [Definicja  
7.1] dany portfel i przy tym miały różny od niego obraz na płaszczyźnie wariancja – wartość  
oczekiwana — patrz (też) interpretacja geometryczna zaraz po Definicji 7.2 powyżej.

Dla wygody czytelnika (prawie) całą przywoływaną tu stronę z [19] reproduujemy na Ry-  
sunku 7.2 poniżej. [W wersji pdf rysunek przeskoczył na następną stronę.]

W książce [22] – wydanie późniejsze od [19] o 48 lat – autor, na pewno dydaktycznie prze-  
rzyściej (lecz cały czas dokładnie o tym samym!) mówi w Definicji na stronie 6, które punkty  
w jego mapie  $\tilde{\mathcal{M}}$  są **nie**efektywne:

”An obtainable  $EV$  combination is *inefficient* if another obtainable combination has either  
higher mean and no higher variance, or less variance and no less mean. [And] *efficient* are those  
which are not inefficient.”

**Przykład 7.2.** Granicą efektywną  $F_{\text{efek}}$  w przykładzie Krzyżewskiego (aspekt oczywiście **M**)  
jest cała granica minimalna:  $F_{\text{efek}} = F_{\text{min}}$ .

Istotnie, policzmy wysokości na osi  $\overrightarrow{OE}$  czubków gałęzi hiperbol – obrazów, korzystając z ob-  
liczeń w Wykładach: V (dla boków) i VI (dla prostej krytycznej; jej obraz to – jak wiemy –

|                     |                                       |                    |                                                              |
|---------------------|---------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------|
|                     | Dla boku $\overline{e_1 e_2}$ jest to | $-\frac{3}{10}$ ,  | poniżej aktywnego obszaru $[0, 1]$ ;                         |
| pocisk Markowitza). | dla boku $\overline{e_2 e_3}$ :       | $-\frac{4}{3}$ ,   | poniżej aktywnego obszaru $[-1, 0]$ ;                        |
|                     | dla boku $\overline{e_3 e_1}$ :       | $-\frac{37}{35}$ , | poniżej aktywnego obszaru $[-1, 1]$ ;                        |
|                     | dla prostej krytycznej:               | $-\frac{19}{12}$ , | poniżej aktywnego obszaru $[-\frac{15}{17}, -\frac{2}{3}]$ . |

Widzimy, że wszystkie łuki hiperbol, odpowiadające aktywnym w aspekcie **M** obszarom warto-  
ści  $E$  dla tych hiperbol, leżą w górnych połowach odpowiednich gałęzi hiperbol. Jest to dobrze  
widoczne na Rysunku 7.3 poniżej; najciekawsze tam miejsce jest jeszcze pokazane w znacznym  
powiększeniu na następnym Rysunku 7.4. [W wersji pdf oba te rysunki przeskakują niestety aż  
dwie strony dalej.]

Istotnie więc, wszystkie cztery łuki hiperbol tworzących  $F_{\text{min}}$  leżą w górnych połowach od-  
powiednich gałęzi hiperbol. Te łuki są zatem zbudowane z  $\mathcal{M}$ -obrazów portfeli efektywnych.

Zauważmy przy okazji, że wysokość czubka samego pocisku Markowitza, owe  $-\frac{19}{12}$ , pojawiła  
się już w Uwadze 6.2 w Wykładzie VI; wtedy jako zwiastun niebezpieczeństw związanych z  
modelowaniem Blacka.

Na Rysunku 7.3 jest widoczna jeszcze jedna rzecz godna uwagi: granica minimalna ma punkt  
załamania na wysokości  $E = 0$ .

**Ćwiczenie 7.1.** Używając wzorów obrazów boków w tym przykładzie (podanych na początku  
Wykładu V), policzyć kąt załamania granicy minimalnej w aspekcie **M**, na Rysunku 7.3 na  
wysokości  $E = 0$ .

*Rozwiązanie.* Należy obliczyć kąt, pod jakim przecinają się przy  $E = 0$  łuki dwu parabol (tak,  
parabol!) o znanych wzorach. Ten kąt ma miarę  $\arctg \frac{6-4}{1+6 \cdot 4} = \arctg \frac{2}{25}$ , czyli około  $4^\circ 34' 26''$ .

(Oba rysunki reproduowane tu powyżej pochodzą z pracy magisterskiej [8], która jest jesz-  
cze raz cytowana niżej w bieżącym Wykładzie VII.)

For fixed probability beliefs  $(\mu_i, \sigma_{ij})$  the investor has a choice of various combinations of  $E$  and  $V$  depending on his choice of portfolio  $X_1, \dots, X_N$ . Suppose that the set of all obtainable  $(E, V)$  combinations were as in Figure 1. The  $E$ - $V$  rule states that the investor would (or should) want to select one of those portfolios which give rise to the  $(E, V)$  combinations indicated as efficient in the figure; i.e., those with minimum  $V$  for given  $E$  or more and maximum  $E$  for given  $V$  or less.

There are techniques by which we can compute the set of efficient portfolios and efficient  $(E, V)$  combinations associated with given  $\mu_i$

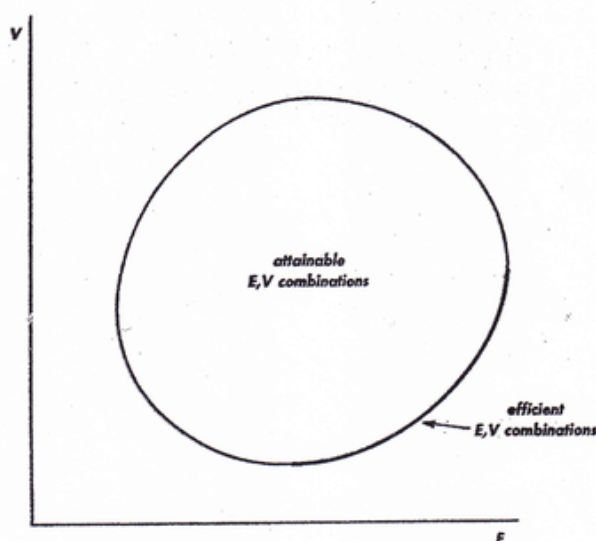


FIG. 1

and  $\sigma_{ij}$ . We will not present these techniques here. We will, however, illustrate geometrically the nature of the efficient surfaces for cases in which  $N$  (the number of available securities) is small.

The calculation of efficient surfaces might possibly be of practical use. Perhaps there are ways, by combining statistical techniques and the judgment of experts, to form reasonable probability beliefs  $(\mu_i,$

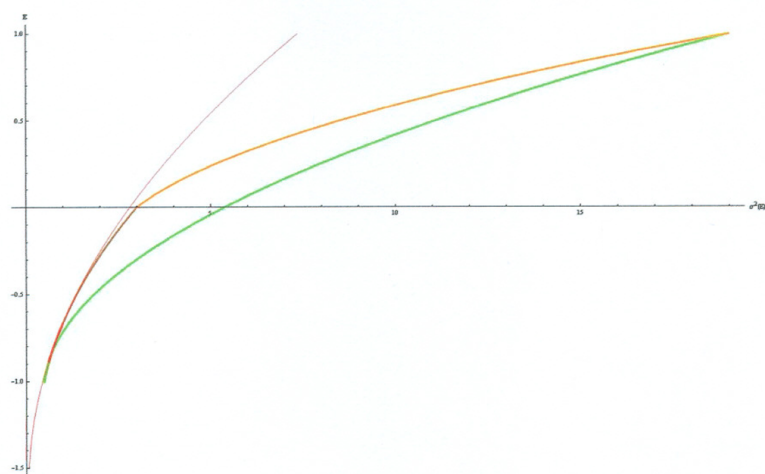
Rysunek 7.2. Najważniejsza być może strona z pracy [19].

**Ćwiczenie 7.2.** Co na Rysunku 7.4 narysowane jest jednak nie w 100% idealnie?

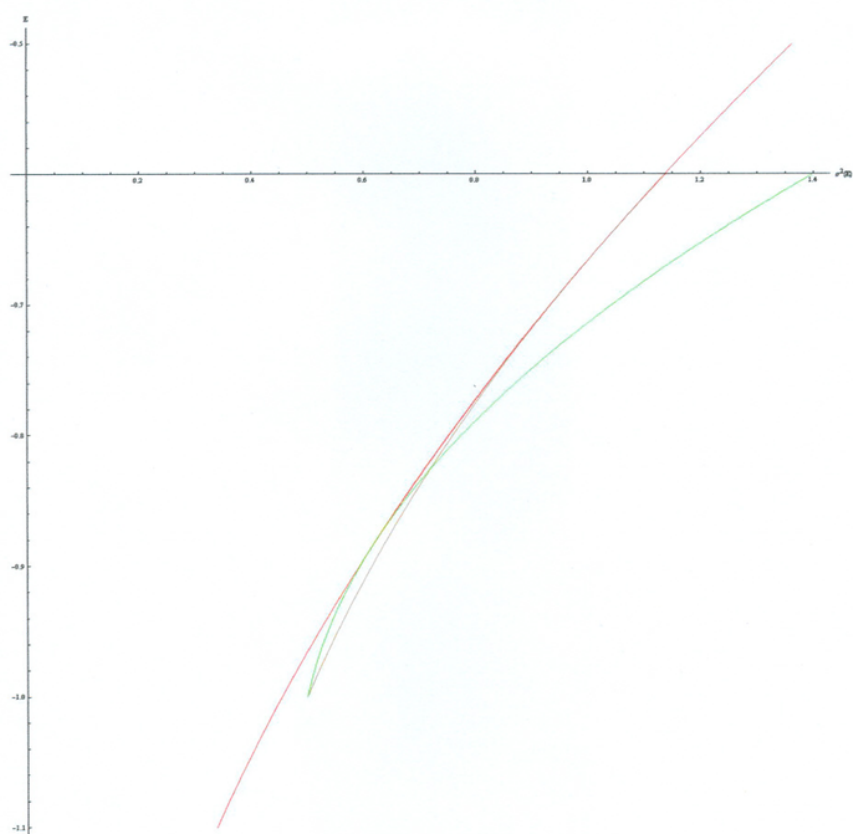
Skoro wiemy już, że w przykładzie Krzyżewskiego w aspekcie **M** cała granica minimalna (a więc: w obrazie) jest efektywna, zobaczmy, jak w nim wygląda cały zbiór portfeli efektywnych (a więc: w źródle). [W wersji pdf Rysunek 7.5 idzie dopiero dwie strony dalej.]

Zbiór ten jest więc już dosyć skomplikowany. Byłoby dobrze go zapamiętać; hasło na przyszłość – **łamana efektywna**, jak w podpisie pod tym rysunkiem.<sup>3</sup> Ta przyszłość to konkretnie Wykłady: X (z Twierdzeniem 10.1 o łamanej wierzchołkowej) oraz XI (z dowodem tegoż i z dyskusją łamanych efektywnych).

<sup>3</sup> ścisłe jej określenie to dopiero Definicja 11.1 w Wykładzie XI



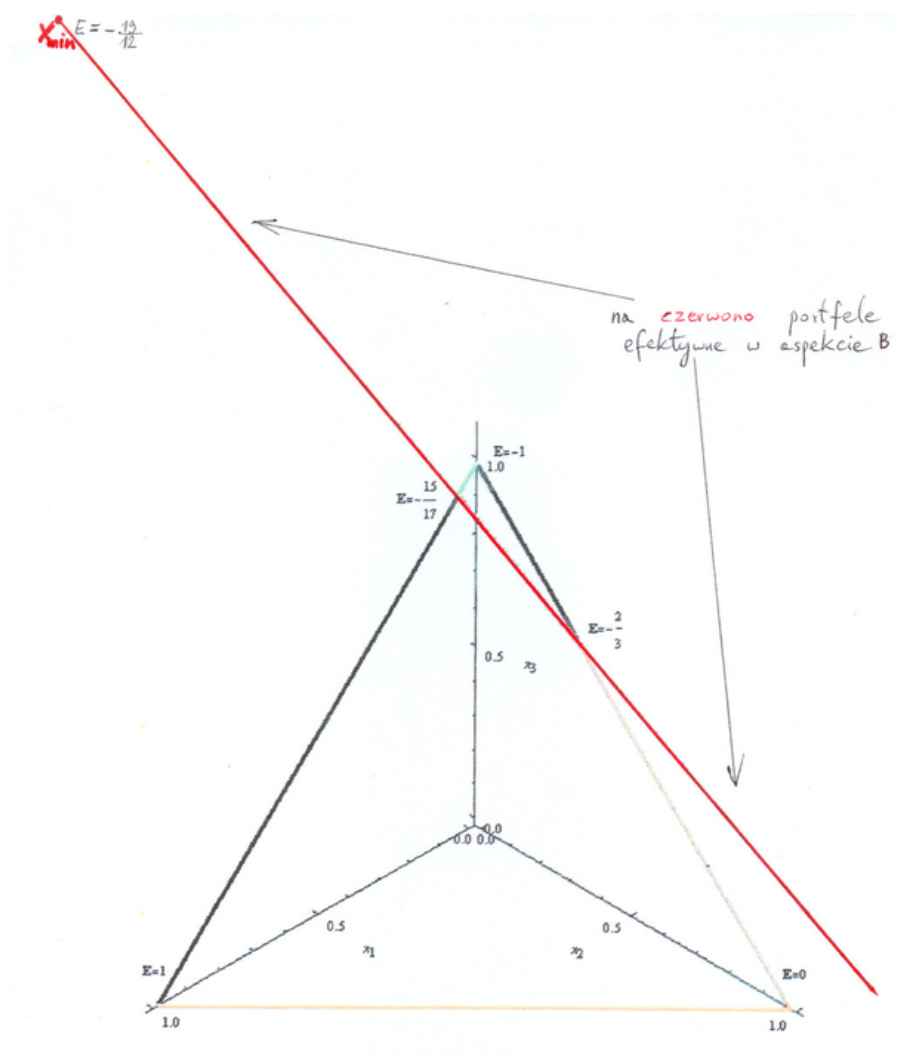
Rysunek 7.3. Zbiór osiągalny w modelu Markowitza z Przykładu 5.1 (na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ ).



Rysunek 7.4. Powiększenie fragmentu Rysunku 7.3.

Z kolei, nauczeni Przykładem 7.1, zadajemy sobie pytanie, jaki – w tym samym przykła-





Rysunek 7.6. Efektywna połowa prostej krytycznej w przykładzie Krzyżewskiego.

brakująca część łamanej efektywnej to odcinek domknięty od napisanego tu portfela do portfela  $e_2$ . (Łamana efektywna składa się tu z dwóch boków.)

**Ćwiczenie 7.4** (kontynuacja ćwiczenia z Uwagi 7.2 powyżej). a) Znaleźć wszystkie portfele efektywne w aspekcie **M** w przykładzie (7.1). Następnie narysować je na wybranym rzucie 2-wymiarowym sympleksu  $\Delta^3$ .

b) Znaleźć wszystkie portfele efektywne w aspekcie **B** w przykładzie (7.1). Następnie narysować je na wybranym rzucie 2-wymiarowym płaszczyzny  $H$ .

*Wskazówka.* Praktycznie wszystko, co niezbędne, zostało już powiedziane w Uwadze 7.2.

**Garść informacji historycznych** dotyczących granic  $F_{\min}$  i  $F_{\text{efek}}$  w aspekcie **M**.

W przyszłości poznamy naturalne ograniczenie górne  $2^k - k - 1$  na ilość kawałków  $\#(F_{\min})$ , z jakich składa się granica  $F_{\min}$  w niezdegenerowanym modelu Markowitza w wymiarze  $k$ . Z Obserwacji 7.1 wynika, że takie samo jest/będzie ograniczenie na ilość kawałków  $\#(F_{\text{efek}})$ , z jakich składa się granica  $F_{\text{efek}}$ :

$$\#(F_{\min}) \leq 2^k - k - 1, \quad \#(F_{\text{efek}}) \leq 2^k - k - 1.$$

$k = 3$ : przykład Krzyżewskiego pokazuje, że możliwa jest "=" w obu tych oszacowaniach, i to realizowana na tym samym przykładzie!

$k = 4$ : były student Wydziału MIM UW, K. Więch podał w roku 2001 w [29] przykład (10.7), w którym osiągnięta jest równość w pierwszym oszacowaniu, zaś w drugim po lewej stronie stoi  $\#(F_{\text{efek}}) = 5$ . (Jeszcze w wersji z roku 2000 wykładów [13] było to pytaniem otwartym, czy przy  $k = 4$  w pierwszym oszacowaniu możliwa jest równość.)

Ten wynik poprawił w roku 2007 inny student MIM UW A. Iwanicki, uzyskując w [9] przykład, w którym  $\#(F_{\text{efek}}) = 6$ . Jego z kolei prześcignęli jeszcze inni studenci MIM-u P. Grodzki i J. Gruszczyński, którzy w 2008 w [8] podali dwa niezmiernie interesujące przykłady. W pierwszym z nich  $\#(F_{\min}) = 11$ ,  $\#(F_{\text{efek}}) = 9$ . W drugim natomiast  $\#(F_{\min}) = \#(F_{\text{efek}}) = 10$ . Ten drugi jest przy tym tak estetyczny, że nie można go nie przytoczyć w tych wykładach:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -5 & 3 \\ 5 & 16 & 19 & 3 \\ -5 & 19 & 34 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$k = 5$ : A. Iwanicki podał, także w [9], przykład, w którym osiągnięta jest "=" w pierwszym oszacowaniu,  $\#(F_{\min}) = 26 (= 2^5 - 5 - 1)$ . Ten przykład jest przytoczony i dyskutowany w ostatnim Wykładzie XV.

$k = 6$ : Ten sam Iwanicki znalazł pod koniec roku 2007 (już po obronieniu licencjatu) przykład, w którym także osiągnięta jest "=" w pierwszym oszacowaniu  $\#(F_{\min}) = 57 (= 2^6 - 6 - 1)$ . Te rezultaty w naturalny sposób prowadzą do postawienia ważnego pytania.

**Ćwiczenie 7.5** (otwarte). Czy w wymiarze 4 możliwe jest, by  $\#(F_{\text{efek}}) = 11$ ?

## 8. Wykład VIII, 20.XI.2009

Na tym wykładzie zaczniemy poznawać teorię Jamesa Tobina – również, jak i Markowitz, laureata nagrody Nobla z ekonomii (nawet wcześniejszego, bo już z roku 1981), który wzbogacił modelowanie inwestowania – i osiągania zysków na giełdzie! – o możliwość zaciągania pożyczek i/lub lokowania części środków w banku oferującym, bez żadnego ryzyka, stałą stopę zwrotu  $\mu_0$  w zadanym okresie inwestycyjnym.<sup>1</sup>

Oryginalnie Tobin wzbogacił w ten sposób teorię Markowitza (dla przypomnienia – dopuszczalne są w niej tylko długie pozycje w inwestycjach giełdowych). Modelem Tobina *sensu stricto* zajmiemy się w przyszłości. Pojęciowo i też matematycznie prostsze jest wzbogacenie, o pożyczki i/lub lokaty w banku, modelu Blacka (dla przypomnienia – dopuszczalne są w nim także krótkie pozycje, i to w nieograniczonej wysokości).

Jest to zmodyfikowany model Tobina, w żargonie matematyki finansowej nazywany też czasami krótko „Black z dodanym walorem bezryzykownym  $\mu_0$ ”. Należy podkreślić wyidealizowany charakter również tego modelowania: pożyczki i lokaty w banku są oprocentowane dokładnie tak samo, przy czym – one także! – możliwe są w nieograniczonej wysokości.

Pamiętamy wzór bilansowy (5.3) (Wykład V) leżący u podstaw krótkiej i długiej sprzedaży w teorii Blacka. Obecnie inwestor może dodatkowo pożyczyć dowolną ilość  $A_0$  środków w banku, oprocentowanych  $\mu_0$  w okresie inwestycyjnym. Jeśli tak postąpi, to jego poprzedni bilans (5.3) przybierze postać

$$L + \sum_{j \in J} A_j + A_0 = \sum_{i \in I} A_i. \quad (8.1)$$

Środki własne inwestora  $L$  i uzyskane z krótkich sprzedaży  $\sum_{j \in J} A_j$  zostają tu jeszcze powiększone o pożyczone w banku  $A_0$ , po czym sumę tych wszystkich środków inwestor przeznacza na zwyczajny zakup akcji o numerach  $i \in I$ .

Gdy natomiast inwestor deponuje część już posiadanych środków, np wielkość  $A_0$  (zależną wprawdzie od jego kapitału wyjściowego oraz od już poczynionych krótkich sprzedaży akcji, jednak wobec dowolności tych drugich – w praktyce nieograniczoną), we wspomnianym banku, wtedy bilans (5.3) zamienia się na

$$L + \sum_{j \in J} A_j = A_0 + \sum_{i \in I} A_i. \quad (8.2)$$

Zwyczajne zakupy inwestora składają się teraz z „zakupu” bezryzykownego i bezpiecznego zysku o stopie  $\mu_0$  za kwotę  $A_0$  oraz z zakupów akcji spółek o numerach  $i \in I$  za kwoty  $A_i$ .

W przypadku pożyczki w banku, bilans (8.1) zapisujemy w postaci

$$1 = \sum_{i \in I} \frac{A_i}{L} + \sum_{j \in J} \left( \frac{-A_j}{L} \right) + \frac{-A_0}{L}. \quad (8.3)$$

---

<sup>1</sup> Tobin jest również znany, może nawet bardziej, z idei wprowadzenia czegoś w rodzaju firewallu chroniącego przed kryzysami spekulacyjnymi – tzw. *podatku Tobina* od wszelkich operacji finansowych, którą to ideę głosił od bardzo dawna, jednak zawsze z miernymi efektami praktycznymi. Niejeden raz okrzykiwano go, właśnie w związku z tym pomysłem, „lewakiem”. Jego idea odżyła na nowo w trakcie kryzysu lat 2008-9.

Natomiast w przypadku depozytu w banku, bilans (8.2) zapisujemy w postaci

$$1 = \sum_{i \in I} \frac{A_i}{L} + \sum_{j \in J} \left( \frac{-A_j}{L} \right) + \frac{A_0}{L}. \quad (8.4)$$

W zmodyfikowanym modelu Tobina portfel inwestora zostaje zatem zakodowany w postaci dodatnich liczb  $x_i = \frac{A_i}{L}$  ( $i \in I$ , długie pozycje), ujemnych liczb  $x_j = \frac{-A_j}{L}$  ( $j \in J$ , krótkie pozycje), ewentualnych zer na miejscach spółek, którymi inwestor w ogóle się nie zainteresował, oraz dodatkowej współrzędnej

$$x_0 = \begin{cases} \frac{-A_0}{L} & \text{gdy zaciąga pożyczkę } A_0 \text{ w banku} \\ \frac{A_0}{L} & \text{gdy deponuje kwotę } A_0 \text{ w banku} \end{cases}$$

opisującej jego postępowanie względem banku. Wszystkie te współrzędne, niezależnie od znaku współrzędnej  $x_0$ , zawsze sumują się do 1, jak to widzimy w (8.3) i (8.4).

Wartości oczekiwane portfeli w tym modelu, o ile tylko nie wszystkie parametry  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$  są sobie równe (co oczywiście zakładamy, patrz Twierdzenie 8.1 poniżej), są – analogicznie jak w Blacku, Uwaga 6.2 w Wykładzie VI – nieograniczone z obu stron. A więc również z dołu; nie ma jakiegś „naturalnej” granicy  $-1$  od dołu dla stopy straty. Można tu, średnio biorąc, dowolnie dużo relatywnie zyskać, lecz można też dowolnie dużo relatywnie stracić!

**Ćwiczenie 8.1** (pytanie kontrolne). Inwestor wkracza do Domu Maklerskiego ze swoimi 3000. Krótka sprzedaje akcje pewnej spółki za 18 tysięcy, po czym pożycza jeszcze w banku 11 tysięcy. Następnie kupuje akcje dwu innych spółek w proporcji wartościowej 3:1. Jaki jest jego portfel  $\tilde{x}$ ?

*Rozwiązanie.*

$$\tilde{x} = \left( -\frac{11000}{3000}, -\frac{18000}{3000}, \frac{24000}{3000}, \frac{8000}{3000} \right)^T = \left( -\frac{11}{3}, -6, 8, \frac{8}{3} \right)^T.$$

Po tym wprowadzeniu, teraz już formalnie:

zmodyfikowany model Tobina, budowany nad modelem Blacka  $k \times k$  z parametrami  $\Sigma > 0$  i  $\mu \not\parallel e$ , jest to pewien inny model Blacka  $(k+1) \times (k+1)$  z macierzą kowariancji wymiaru  $k+1$

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Sigma & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

(inwestowanie w bankowy walor bezryzykowny ma zerową wariancję stopy zwrotu i jest nieskorelowane ze zwrotami z akcji spółek giełdowych – ryzykownych) oraz wektorem stóp zwrotu

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}.$$

Portfele w tym modelu to wszystkie punkty z hiperpłaszczyzny  $\tilde{H} \subset \mathbb{R}^{k+1}$  opisanej równaniem  $x_0 + x_1 + \dots + x_k = 1$ , będącym tylko inną postacią równań (8.3) i (8.4).

W celu uniknięcia kolizji oznaczeń z teorią Blacka, będziemy zapisywać te portfele jako

$$\tilde{H} \ni \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z \end{pmatrix},$$

gdzie  $z \in \mathbb{R}^k$ .

Wartość oczekiwaną  $E(\tilde{x})$  portfela  $\tilde{x}$  w tej nowej teorii liczymy zupełnie analogicznie do tego, jak robiliśmy to w Wykładzie VI dla portfeli Blacka, zważając tylko na to, że dla waloru bezryzykownego nie mamy jego cen: początkowej i końcowej  $C_{0,\text{pocz}}$  i  $C_{0,\text{kon}}$ , z których powstałaby stopa zwrotu  $R_0$ , tylko po prostu zmienna losowa  $R_0$  jest stałą:  $R_0 = \mu_0$ .

Jeśli inwestor składa w banku na początku depozyt  $A_0$ , wtedy na końcu odbiera  $(1 + \mu_0)A_0$ , co w stosunku do jego kapitału własnego  $L$  daje stopę zysku  $\mu_0 \frac{A_0}{L} = \mu_0 x_0$ .

Jeśli natomiast na początku bierze on w banku pożyczkę  $A_0$ , to na końcu musi oddać  $(1 + \mu_0)A_0$ , co daje ujemną stopę zysku  $-\mu_0 \frac{A_0}{L} = \mu_0 x_0$ .

Klasyczny wzór na stopę zwrotu z portfela rozszerza się zatem z „Blacka” do „zmodyfikowanego Tobina” i mamy tutaj  $E(\tilde{x}) = \tilde{\mu}^T \tilde{x}$ , jak również, oczywiście,  $\sigma^2(\tilde{x}) = \sigma^2(z) = z^T \Sigma z$  (por. (8.5)).

W tym momencie znamy już odwzorowanie Markowitza w zmodyfikowanym modelu Tobina! Teraz podstawowe pytanie teorii to – jak już było w Blacku i jak będzie w przyszłości z powrotem w Markowitzu – pytanie o postać (kształt) granicy minimalnej.

**Twierdzenie 8.1.** Zakładamy, że w wyjściowym modelu Blacka macierz kowariancji  $\Sigma$  jest dodatnio określona oraz spełnione jest fundamentalne założenie (5.2) z Wykładu V. O stopie zwrotu w banku  $\mu_0$  zakładamy tylko, że  $\mu_0 > -1$  (tj, że w banku nie stracimy wszystkiego). Wtedy

(i) granica minimalna w zmodyfikowanym modelu Tobina to kątownik złożony z dwu półprostych na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ ,

$$|E - \mu_0| = \sigma \sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma},$$

gdzie wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie, będąc (również) liczbą  $(\mu - \mu_0 e)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0 e)$ , czyli wartością dodatnio określoną formy kwadratowej na niezerowym wektorze. W kątowniku tym automatycznie  $\sigma \geq 0$ . Ten kątownik jest czasem nazywany krótko **kątownikiem Tobina** (lecz patrz też Figure IV w pracy [23]).

(ii) Jeśli  $\mu_0 \neq \frac{\beta}{\gamma} (= E_0)$ , to kąt rozwarcia kątownika opisanego w (i) jest większy od kąta rozwarcia kątownika asymptot w wyjściowym modelu Blacka:

$$\sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} > \sqrt{\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma}} \left( = \frac{b}{a}, \text{ patrz wzór (6.6) w Wykładzie VI} \right).$$

(iii) Jeśli  $\mu_0 = E_0$ , to kątownik Tobina pokrywa się z kątownikiem asymptot pocisku Markowitza w wyjściowym modelu Blacka.

*Dowód, z dokładnością do innych oznaczeń, bazuje na pracy [23]. Dowód (i).* Zgodnie z definicją granicy minimalnej, przy dowolnej ustalonej wartości  $\tilde{E} \in \mathbb{R}$  minimalizujemy funkcję  $\frac{1}{2}\sigma^2(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\sigma^2(z)$  na hiperpłaszczyźnie  $\tilde{H}$ . Zatem – minimalizujemy funkcję  $\frac{1}{2}z^T \Sigma z$ , gdzie  $z \in \mathbb{R}^k$  (!), przy ograniczeniach

$$\begin{cases} \mu^T z + \mu_0 x_0 &= \tilde{E}, \\ e^T z + x_0 &= 1. \end{cases}$$

Jeszcze przed napisaniem warunku Lagrange’a ograniczenia te upraszczamy, eliminując zmienną  $x_0$ . Dostajemy wtedy już tylko jeden warunek  $\mu^T z + \mu_0(1 - e^T z) = \tilde{E}$ , albo

$$(\mu - \mu_0 e)^T z = \tilde{E} - \mu_0. \quad (8.6)$$

Rozwiązaniem będzie  $\tilde{x} = (1 - e^T z)$  taki, że  $\Sigma z = \lambda(\mu - \mu_0 e)$  dla jakiegoś  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Okaże się bowiem, że taki  $\lambda$  będzie jedyny, więc  $z$  będzie jedynym kandydatem na lokalne ekstremum warunkowe. W rozważanej sytuacji, przy ścisłej wypukłości wariancji w zakresie zmiennych od  $x_1$  do  $x_k$ ,  $z$  będzie globalnym minimum warunkowym (porównaj analogiczną sytuację i Ćwiczenie 6.4 w Wykładzie VI).

Istotnie, wyrażenie na  $z$ ,

$$z = \lambda \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e), \quad (8.7)$$

można wstawić do (8.6), dostając

$$(\mu - \mu_0 e)^T \lambda \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e) = \tilde{E} - \mu_0,$$

albo

$$\lambda = \frac{\tilde{E} - \mu_0}{(\mu - \mu_0 e)^T \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)} = \frac{\tilde{E} - \mu_0}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma},$$

gdzie wielkość w mianowniku jest dodatnia, bo jest to wartość formy kwadratowej o macierzy  $\Sigma^{-1}$  na niezerowym wektorze  $\mu - \mu_0 e$  (litery greckie  $\alpha, \beta, \gamma$  zostały zdefiniowane w Wykładzie VI). Właśnie to wyrażenie na  $\lambda$  podstawione do (8.7) daje jednoznaczny wzór na  $z = z(\tilde{E})$ ,

$$z(\tilde{E}) = \frac{(\tilde{E} - \mu_0)\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma},$$

czyli – należy zauważyć – wzór (36) w [23]. To poprzez warunek budżetowy daje

$$x_0 = 1 - e^T z = 1 - \frac{(\tilde{E} - \mu_0)(\beta - \mu_0\gamma)}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} = \frac{\alpha - \mu_0\beta - (\beta - \mu_0\gamma)\tilde{E}}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}.$$

Mamy już w tej chwili cały portfel Tobina  $\tilde{x}(\tilde{E})$  minimalizujący ryzyko na każdym ustalonym poziomie wartości oczekiwanej  $\tilde{E}$ :

$$\tilde{x}(\tilde{E}) = \frac{1}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} \begin{pmatrix} \alpha - \mu_0\beta - (\beta - \mu_0\gamma)\tilde{E} \\ (\tilde{E} - \mu_0)\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e) \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Portfele te, gdy  $\tilde{E}$  przebiega  $\mathbb{R}$ , tworzą prostą w hiperpłaszczyźnie  $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{k+1}$ . Jest to prosta krytyczna w tym zagadnieniu, zwana **prostą krytyczną Tobina**.<sup>2</sup>

Liczmy teraz wartość znalezionej relatywnego minimum wariancji portfela na poziomie  $\tilde{E}$ , tzn. wielkość  $\sigma^2(\tilde{x}(\tilde{E})) =: \sigma^2(\tilde{E})$ , opuszczając już dalej falkę nad  $E$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2(E) &= \frac{(E - \mu_0)^2}{(\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma)^2} (\mu^T - \mu_0 e^T) \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0 e) \\ &= \frac{(E - \mu_0)^2}{(\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma)^2} (\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma) = \frac{(E - \mu_0)^2}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}, \end{aligned}$$

albo, pisząc tylko  $\sigma$  zamiast  $\sigma(E)$ ,

$$|E - \mu_0| = \sigma \sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}.$$

Dowód części (i) jest zakończony.

<sup>2</sup> zwracamy uwagę na ten kapitalny fakt: nic więcej, tylko prosta, mimo, że model jest częściowo zdegenerowany; ciekawe

Dowód (ii). Pokażemy, że kwadraty porównywanych tangensów połówek kątów rozwarcia kątowników spełniają nierówność

$$\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma > \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma}. \quad (8.9)$$

Rozpatrujemy w tym celu trójmian kwadratowy

$$\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto (\mu^T - \lambda e^T)\Sigma^{-1}(\mu - \lambda e) \in \mathbb{R},$$

który jest wszędzie dodatni, więc ma ujemny wyróżnik.<sup>3</sup> Przyjmuje on minimum w  $\lambda = \frac{\beta}{\gamma}$ . To znaczy, że jego wartość w  $\lambda = \frac{\beta}{\gamma} \neq \mu_0$ , tzn. liczba

$$\alpha - 2\beta\frac{\beta}{\gamma} + \gamma\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma},$$

jest **mniejsza** niż wartość w  $\lambda = \mu_0$ , tzn. mniejsza niż liczba  $\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma$ . Nierówność (8.9) została udowodniona, a wraz z nią część (ii) twierdzenia.

Równocześnie udowodniliśmy też część (iii): przy  $\mu_0 = E_0$  równe są i tangensy kątów, i punkty na pionowej osi, w których kątownik Tobina oraz kątownik asymptot pocisku dotykają tej osi.  $\square$

Twierdzenie 8.1 jest udowodnione. Analizując kątownik Tobina wyłaniający się z części (i) w tym twierdzeniu, nasuwa się jednak następująca

*Uwaga 8.1.* Czytelnik może poczuć się lekko zdezorientowany. Tutaj częściowo zdegenerowana macierz  $\tilde{\Sigma}$  powoduje, że granica minimalna nie jest już regularnym pociskiem [Markowitza], tylko degeneruje się do kątownika z wierzchołkiem na osi  $\overrightarrow{OE}$ . Mówiąc po prostu, w zmodyfikowanym Tobinie ryzyko można zredukować do zera.

Tymczasem tamten dziwny przykład analizowany szczegółowo w Uwadze 7.2 w Wykładzie VII pokazywał coś przeciwnego! Częściowo zdegenerowana macierz kowariancji  $\Sigma$  i jednak regularny pocisk Markowitza w granicy minimalnej.

Wyjaśnienie jest takie. Tam forma dawana macierzą  $\Sigma$  nie degenerowała się na wektorach z [hiper]płaszczyzny  $H$ , kres dolny jej wartości na nich był 1. Natomiast teraz forma dawana macierzą  $\tilde{\Sigma}$  zeruje się na wektorze  $(1, 0, \dots, 0)^T \in \tilde{H}$  (i, zresztą, w ramach  $\tilde{H}$  tylko na nim).

*Uwaga 8.2.* W teorii zmodyfikowanego modelu Tobina zakłada się, że  $\mu_0 < \frac{\beta}{\gamma}$  ( $= E_0$ ), co będzie później obszernie komentowane w Wykładzie IX. To pociąga  $\beta - \mu_0\gamma > 0$ , więc – w szczególności – składowa  $x_0$  portfela (8.8) na prostej Tobina może być sprowadzona do zera.

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej prostej Tobina w sytuacji ogólniejszej niż w Uwadze 8.2, gdy  $\mu_0 \neq E_0$ , tzn.  $\beta - \mu_0\gamma \neq 0$ . Wtedy też można wyzerować składową  $x_0$  w portfelu Tobina (8.8). I łatwo jest wskazać dwa charakterystyczne punkty, przez które przechodzi prosta Tobina. Są to na przykład

$$\tilde{x}(\mu_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \tilde{x}\left(\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}\right).$$

Ten drugi to właśnie ten punkt na prostej Tobina, który ma **zerową** składową numer 0 — zaraz okaże się on *portfelem* tkwiącym jakby jeszcze w teorii Blacka i nierobiącym użytku z banku

<sup>3</sup> Jest to trójmian  $\alpha - 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$ ; dla niego  $\frac{1}{4}\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma$ . To, przy okazji, już trzeci dowód podstawowego w teorii Blacka Lematu 6.1 z Wykładu VI:  $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ .

oferującego walor bezryzykowny. (Te dwa charakterystyczne punkty są zaznaczone na czerwono na Rysunku 9.1 w Wykładzie IX. Z pewnego względu rysunek nie pojawia się tu i teraz, lecz dopiero tam.<sup>4</sup>)

Przyjrzyjmy się dokładniej temu punktowi, zapominając o jego współrzędnej  $x_0 = 0$ , tzn. biorąc tylko jego część  $z$  w terminologii z dowodu Twierdzenia 8.1 powyżej.

**Ćwiczenie 8.2** (Pytanie kontrolne). Czy **punkt**  $z\left(\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}\right)$  leży w hiperpłaszczyźnie  $H \subset \mathbb{R}^k$ , tzn. czy jest on **portfelem** Blacka?

*Rozwiązanie.* Tak, oczywiście, z warunku budżetowego spełnionego tożsamościowo na prostej Tobina, bo wtedy  $x_0 = 0$ . Policzmy ten punkt-portfel dokładnie,

$$z\left(\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}\right) = \frac{1}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} \left(\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma} - \mu_0\right) \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e) = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{\beta - \mu_0\gamma}, \quad (8.10)$$

bo to jedna z najważniejszych formuł w analizie portfelowej, warta zapamiętania na dłużej. Mówiąc nawiasowo, przy jej pomocy sprawdzenie warunku budżetowego jest wdzięczne, choć – po Ćwiczeniu 8.2 – nadmiarowe:

$$e^T z\left(\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}\right) = \frac{1}{\beta - \mu_0\gamma} e^T \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e) = \frac{\beta - \mu_0\gamma}{\beta - \mu_0\gamma} = 1.$$

Na koniec tego wykładu jeszcze kilka zdań na temat specjalnej sytuacji, osobno wybitej jako (iii) w Twierdzeniu 8.1. Gdy  $\mu_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ , wtedy składowej  $x_0$  w portfelu Tobina **nie** można sprowadzić do zera i jest ona stale równa

$$\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma(\alpha - 2\frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma})} = 1.$$

Prosta Tobina jest więc wtedy **równoległa** do „blaszki”  $\{0\} \times \mathbb{R}^k$  i oddalona od niej o 1 – nie ma z nią żadnego punktu wspólnego. W szczególności jest rozłączna z prostą krytyczną Blacka, która w blaszce leży.

Po obłożeniu odwzorowaniem Markowitza  $\mathcal{M}$ , prosta Tobina przechodzi na asymptoty pocisku Markowitza (Twierdzenie 8.1 (iii)), rozłączne z samym pociskiem = obrazem prostej Blacka; patrz Figure VI w [23].

Należy wspomnieć, że inaczej [jako podwójna styczność poniżej i powyżej wartości  $E_0$ ] było to ilustrowane w Rozdziale 4 książki [27], o czym pisze też Merton w przypisie 11 na stronie 1868 w [23].

<sup>4</sup> jednak odległość „portalowa” jest niewielka

## 9. Wykład IX, 27.XI.2009

W poprzednim wykładzie, oprócz drugiej wartości charakterystycznej [stopy zwrotu  $\mu_0$  bezryzykownej, gwarantowanej...], pojawiła się też trzecia (po  $E_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  i  $\mu_0$ ) charakterystyczna wartość oczekiwana  $\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}$ . (Oczywiście wartość ta pojawia się tylko wtedy, gdy napisany ułamek ma sens, np. gdy, jak w Uwadze 8.2,  $\mu_0 < E_0$ .) Na pionowej osi  $\overrightarrow{OE}$  mamy wtedy trzy wyróżnione wartości.

Punktem wyjścia było – przypominamy – wzbogacenie modelowania Blacka o wyidealizowany bank oferujący w obie strony jedną i tę samą (!) stopę zwrotu  $\mu_0$ . Albo równoważnie – dodanie do modelu Blacka „waloru bezryzykownego o stopie zwrotu  $\mu_0$ ”.

Właśnie w Uwadze 8.2 (Wykład VIII) wspomnieliśmy, że w zmodyfikowanym modelu Tobina zawsze zakłada się dodatkowo, że  $\mu_0 < \frac{\beta}{\gamma}$ . Za chwilę wyjaśnimy, dlaczego.

Na początek postawmy pytanie, co można wtedy powiedzieć o tej trzeciej wyróżnionej wielkości  $\frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}$ ? Zauważamy bez trudu, że

$$\mu_0 < \frac{\beta}{\gamma} \iff \frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}. \quad (9.1)$$

Istotnie, podstawową nierówność z Lematu 6.1 (Wykład VI,  $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ ) zapisujemy inaczej jako  $\alpha - \mu_0\beta > \frac{\beta}{\gamma}(\beta - \mu_0\gamma)$ . Teraz w procesie dzielenia tej nierówności stronami przez  $\beta - \mu_0\gamma$  **nie** zmieniamy kierunku nierówności wtedy i tylko wtedy gdy  $\beta - \mu_0\gamma > 0$ , i właśnie to jest powiedziane w (9.1).

Zanim użyjemy równoważności (9.1), podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat zmodyfikowanego modelu Tobina.

Kluczową rolę zdaje się odgrywać w nim prosta krytyczna Tobina, utworzona z portfeli relatywnie minimalnego ryzyka (relatywnie = przy ustalonej wartości oczekiwanej). W sytuacji ogólnej przechodzi ona przez dwa charakterystyczne punkty-portfele mające wartości oczekiwane  $E = \mu_0$  (punkt położony na osi zmiennej  $x_0$ ) i  $E = \frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma}$  (punkt leżący na „błazce”  $x_0 = 0$ , istniejący tylko wtedy, gdy ułamek ma sens, tj. gdy  $\mu_0 \neq E_0$ ). Wygląda ona wtedy tak [w wersji pdf rysunek trafia na następną stronę],

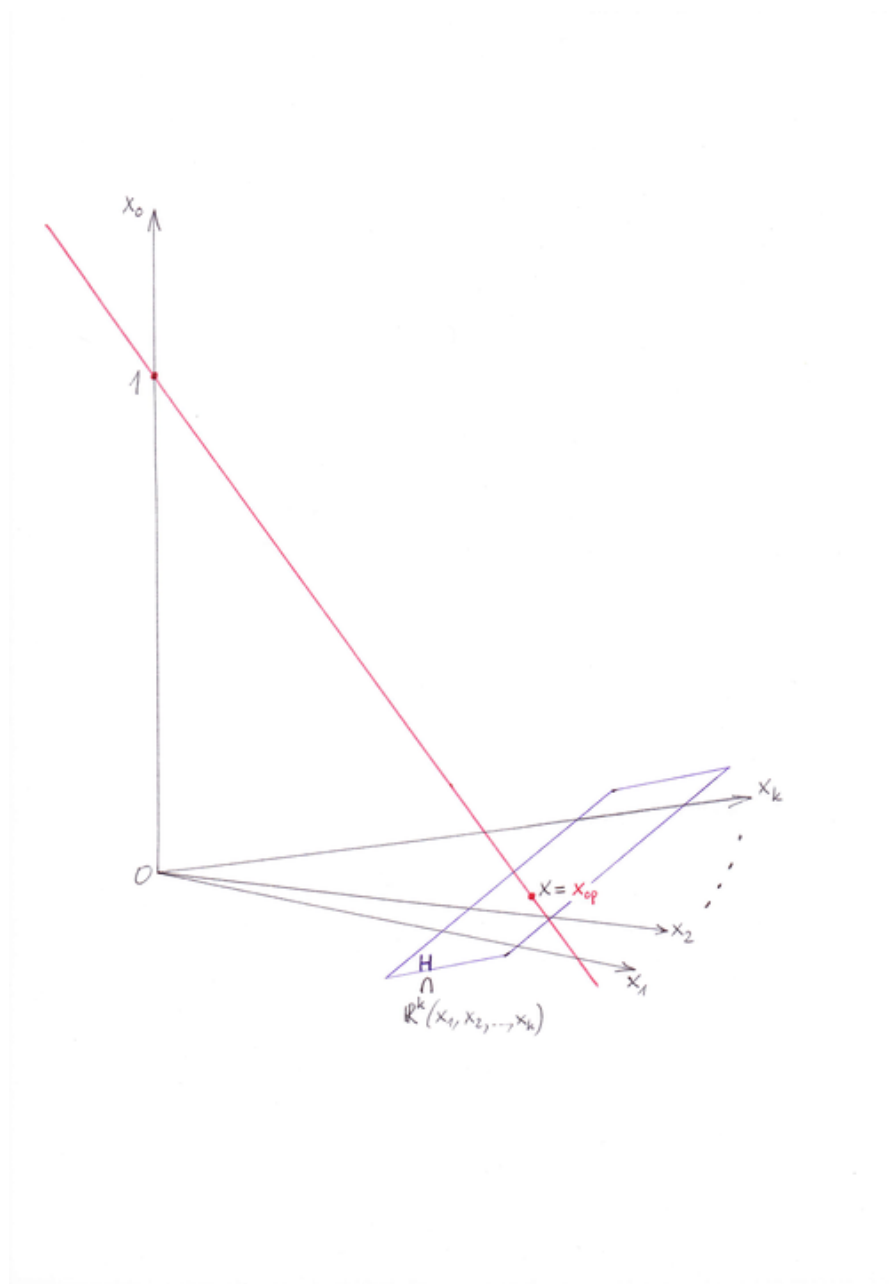
przy czym podprzestrzeń  $\{0\} \times \mathbb{R}^k(x_1, \dots, x_k)$  jest przez nią trafiała w punkcie leżącym w hiperpłaszczyźnie  $H$  (dokładniej: w  $\{0\} \times H$ ), jak zostało ustalone w [bardzo łatwym] Ćwiczeniu 8.2 w Wykładzie VIII.

Czy da się jeszcze powiedzieć coś więcej o tym punkcie spotkania prostej Tobina z  $\{0\} \times H \subset \{0\} \times \mathbb{R}^k$ ? Otóż tak,

**Obserwacja. 9.1** Prosta krytyczna Tobina trafia podprzestrzeń  $\{0\} \times \mathbb{R}^k$  w punkcie leżącym na prostej krytycznej Blacka:

$$\frac{\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{\beta - \mu_0\gamma} = x \left( \frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma} \right)$$

w terminach wzoru (8.10) i oznaczeniach z Wykładu VI.



Rysunek 9.1. Prosta krytyczna Tobina leżąca w przestrzeni  $(k + 1)$ -wymiarowej.

Dla dowodu wystarczy policzyć dwa minory  $2 \times 2$  wchodzące do wzoru (6.2) na portfele krytyczne Blacka  $x(E)$  w Twierdzeniu 6.1 (Wykład VI):

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha - \mu_0 \beta}{\beta - \mu_0 \gamma} & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \frac{\alpha \gamma - \mu_0 \beta \gamma - \beta^2 + \mu_0 \beta \gamma}{\beta - \mu_0 \gamma} = \frac{\alpha \gamma - \beta^2}{\beta - \mu_0 \gamma},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\alpha - \mu_0 \beta}{\beta - \mu_0 \gamma} \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = \frac{\alpha \beta - \mu_0 \alpha \gamma - \beta \alpha + \mu_0 \beta^2}{\beta - \mu_0 \gamma} = -\mu_0 \frac{\alpha \gamma - \beta^2}{\beta - \mu_0 \gamma}. \quad \square$$

Ta obserwacja ma ważne konsekwencje geometryczne, gdyż  $\mathcal{M}$ -obrazy prostych leżących w  $\tilde{H}$  i przecinających prostą krytyczną Tobina są **zawsze**, z powodu samej tylko krytyczności

ich punktu przecięcia!, styczny do  $\mathcal{M}$ -obrazu tej prostej Tobina, czyli do kątownika Tobina policzonego w Wykładzie VIII.

W szczególności stosuje się to do prostej krytycznej Blacka,<sup>1</sup> o ile tylko punkt przecięcia tych prostych istnieje. To znaczy – patrz końcówka Wykładu VIII – gdy  $\mu_0 \neq E_0$ . Albo też, co jest dokładnie tym samym na mocy równoważności (9.1), gdy  $\frac{\alpha - \mu_0 \beta}{\beta - \mu_0 \gamma} \neq E_0$ .

Wtedy jej  $\mathcal{M}$ -obraz, czyli pocisk Markowitza, jest styczny w punkcie  $\mathcal{M}\left(\frac{\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{\beta - \mu_0 \gamma}\right)$  do kątownika Tobina. Przy tym pocisk leży oczywiście **wewnątrz** tego kątownika – bo brzeg kątownika Tobina jest, jak już wiemy z Wykładu VIII, granicą minimalną w zmodyfikowanym modelu Tobina.

W tym miejscu bardzo zalecane jest obejrzeć dwie ilustracje, Figure V i Figure VII, w fundamentalnej (choć trudno dostępnej) pracy [23].

Dla dalszej dyskusji kluczowe jest, czy  $\mu_0 < E_0$ , czy też  $\mu_0 > E_0$ .

- W pierwszym przypadku rzędna punktu styczności

$$\frac{\alpha - \mu_0 \beta}{\beta - \mu_0 \gamma} > E_0 > \mu_0, \quad (9.2)$$

co pokazuje, że punkt styczności leży i na górnym ramieniu kątownika Tobina, i na górnym „wąsie” pocisku Markowitza. Czytelnik domyśla się już, że tylko ta sytuacja będzie dla nas ciekawa (maksymalizowany będzie współczynnik Sharpe’a, o którym wstępnie dowiedzieliśmy się już w Wykładzie I).

I czytelnik domyśla się także, co dzieje się w drugim przypadku.

- Tak jest, wtedy, znowu używając (9.1),

$$\mu_0 > E_0 > \frac{\alpha - \mu_0 \beta}{\beta - \mu_0 \gamma}, \quad (9.3)$$

więc punkt styczności leży zarówno na dolnym ramieniu kątownika Tobina, jak też na dolnym wąsie pocisku Markowitza – co z punktu widzenia analizy portfelowej jest zupełnie nieciekawe (punkt przecięcia prostych byłby portfelem nieefektywnym w aspekcie **B**, współczynnik Sharpe’a byłby wtedy minimalizowany). Ilustracją tej sytuacji jest Figure VII w [23]; patrz też ciekawe uwagi w przypisie 11 tamże, korygujące jeszcze wcześniejsze próby ilustrowania podejmowane przez innych autorów.

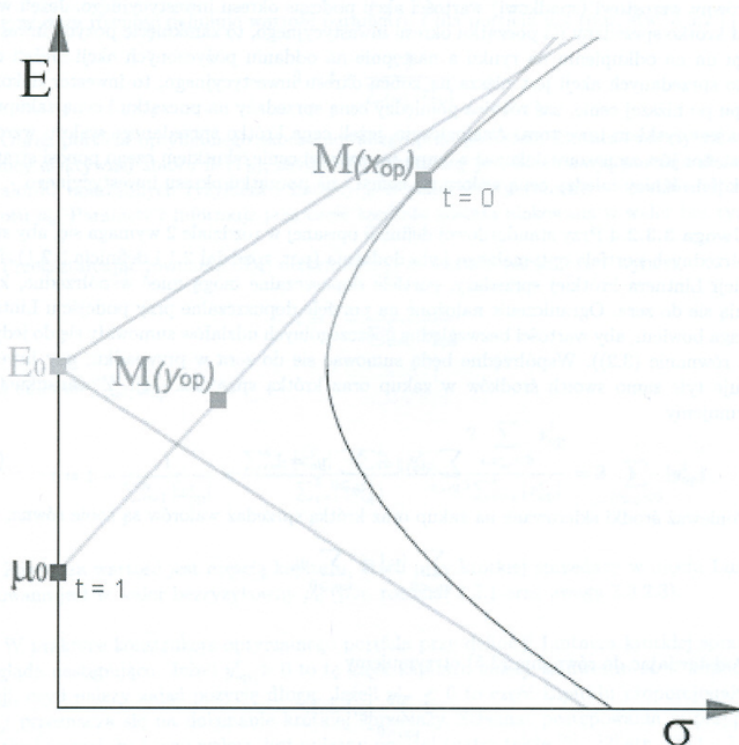
Jak tę wewnętrzną styczność pocisku Markowitza do kątownika Tobina można zobrazować geometrycznie, ograniczając się do portfelowo ciekawszej sytuacji (9.2)? Pierwsza historycznie ilustracja tego to właśnie Figure V w publikacji [23].

W tych wykładach za pierwszą próbę wizualizacji możnaby od biedy i *ex post* uznać ... Rysunek 1.3 w Wykładzie I. A oto jeszcze cztery próby takiej wizualizacji, na czterech rysunkach idących jeden po drugim tu poniżej, pochodzących z prac licencjackich czterech różnych studentów naszego wydziału. (Nikt na Wydziale MIM UW, jak dotąd, nie zobrazował lepiej wewnętrznej styczności pocisku Markowitza do kątownika Tobina.)

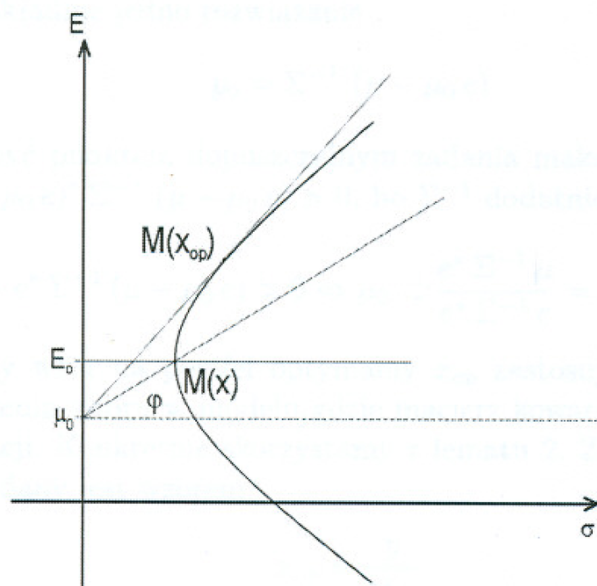
Oznaczenia na każdym z rysunków są różne; nie ma zresztą jakiejś jednej kanonicznej terminologii przyjętej w ośrodkach badawczych, gdzie uprawiana jest analiza portfelowa. [W wersji pdf dwie z tych wizualizacji zajmują następną stronę, kolejna jest na jeszcze następnej stronie, zaś czwarta i ostatnia wizualizacja znajduje się na jeszcze jeszcze następnej.]

**Ćwiczenie 9.1.** Uzasadnić tę styczność [pocisku Markowitza do kątownika Tobina] bezpośrednim rachunkiem.

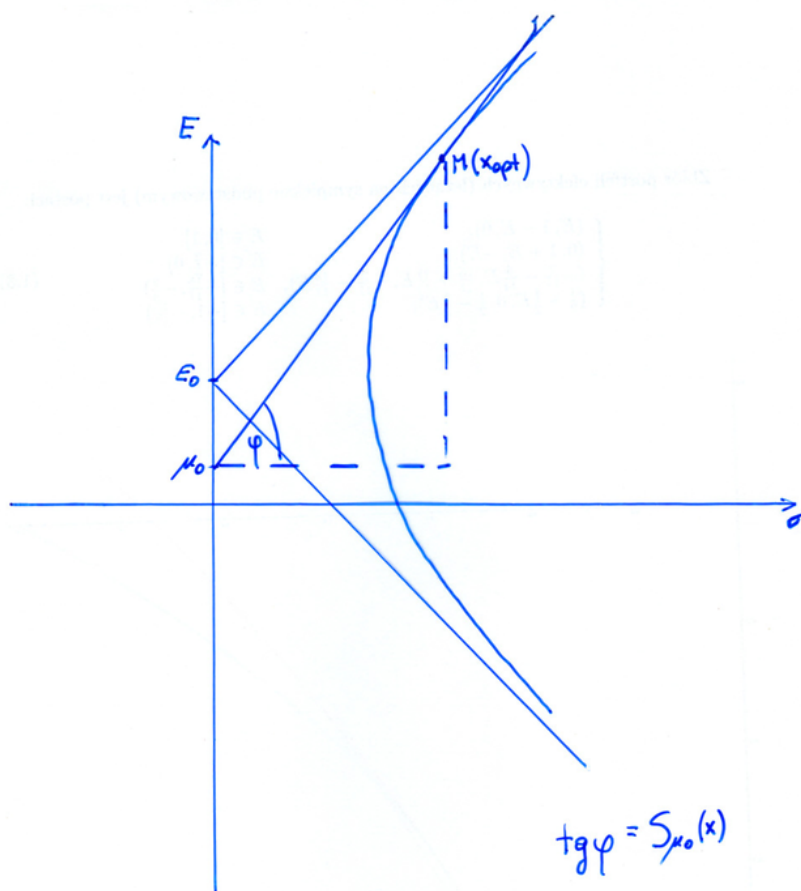
<sup>1</sup> Jest to tzw. *the punch line* tego i być może wszystkich wykładów z APRK1. Anglosasi mawiają w takich sytuacjach „And now there comes the punch line...”



Rysunek 9.2. Prawdopodobnie najlepsza wizualizacja; symbole  $x_{op}$  i  $y_{op}$  są objaśnione w dalszej części tego wykładu.



Rysunek 9.3. Wizualizacja w skądinąd bardzo dobrej pracy licencjackiej; oznaczenia zbliżone do naszych z wykładu.



Rysunek 9.4. Odręczna ilustracja dodana do ... pracy licencjackiej.

*Wskazówka.* Styczna do hiperboli  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  w punkcie  $(x_0, y_0)^T$  ma równanie  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$  [to cytaty z przedwojennego licealnego podręcznika geometrii].

*Rozwiązanie.* Równanie stycznej do hiperboli

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{(E - E_0)^2}{b^2} = 1$$

w punkcie

$$(\sigma_1, E_1)^T = \left( \frac{\sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}}{\beta - \mu_0\gamma}, \frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma} \right)^T$$

jest więc postaci

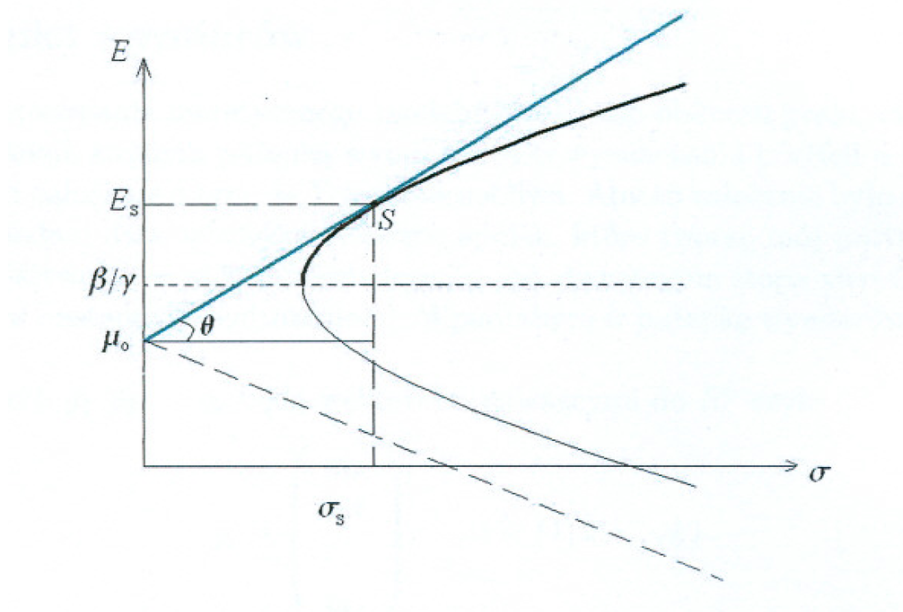
$$\frac{\sigma\sigma_1}{a^2} - \frac{(E - E_0)(E_1 - E_0)}{b^2} = 1.$$

Mamy:

$$E_1 - E_0 = \frac{\alpha - \mu_0\beta}{\beta - \mu_0\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma(\beta - \mu_0\gamma)},$$

zatem, po podstawieniu wszystkich parametrów, styczna ma postać

$$\sigma \cdot \frac{\sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}}{\beta - \mu_0\gamma} \cdot \gamma - \left( E - \frac{\beta}{\gamma} \right) \cdot \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma(\beta - \mu_0\gamma)} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha\gamma - \beta^2} = 1,$$



Rysunek 9.5. Na tej ilustracji asymptoty pocisku Markowitza trzeba by dopiero dorysować.

co po skróceniu i obustronnym pomnożeniu przez  $\frac{\beta - \mu_0 \gamma}{\gamma}$  daje równanie

$$\sigma \cdot \sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} - \left(E - \frac{\beta}{\gamma}\right) = \frac{\beta - \mu_0\gamma}{\gamma}.$$

Upraszczając, dostajemy równanie stycznej w ostatecznej postaci

$$\sigma \cdot \sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} + \mu_0 = E$$

(porównaj też jeszcze raz Figure IV oraz Figure V w [23]). Jest to równanie górnego ramienia kątownika Tobina.

Dokładniejsze przyjrzenie się Rysunkowi 9.2 pokazuje, że portfel krytyczny Blacka

$$x_{\text{op}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{\beta - \mu_0 \gamma}, \quad (9.4)$$

podany tu w postaci uzyskanej w (8.10) w Wykładzie VIII, w sytuacji (9.2) **maksymalizuje** wśród wszystkich portfeli Blacka  $x \in H$  **współczynnik Sharpe'a**

$$S_{\mu_0}(x) = \frac{E(x) - \mu_0}{\sigma(x)}$$

(powtórzenie wzoru (1.1) z Wykładu I). Jest to bezpośredni wniosek z Rysunku 9.2; porównaj też Rysunek 1.3 (i jego okolice) w Wykładzie I.

Natomiast w dualnej sytuacji (9.3), portfel (8.10), leżący niezmiennie na przecięciu prostych Blacka i Tobina, **minimalizuje** ten sam współczynnik wśród wszystkich portfeli Blacka, czego uzasadnienie jest zupełnie analogiczne i też geometryczne.

Wreszcie w sytuacji specjalnej  $\mu_0 = E_0$ , zagadnienie maksymalizacji (czy też analogicznie minimalizacji) współczynnika Sharpe'a **nie ma rozwiązania** wśród wszystkich portfeli Blacka.

Istotnie, dla każdego portfela Blacka nietrudno wtedy wskazać inny portfel, którego współczynnik Sharpe’a jest większy (względnie mniejszy). Nie wchodzimy tu w szczegóły, jest to całkiem elementarne.

Będziemy odtąd mówić, nie wymieniając, czy nie nawiązując już wprost do wyidealizowanego banku, że w sytuacji (9.2) portfel  $x_{\text{op}}$  jest **optymalny w modelu Blacka ze względu na** [panującą na rynku] **stopę bezryzykową**  $\mu_0$ . Jest to pewien żargon matematyki finansowej, lecz dość szeroko rozpowszechniony. Pierwszy taką terminologię wprowadził Krzyżewski w [13]; mówił on o *portfelu optymalnym w modelu Blacka względem  $\mu_0$* .

Dyskusja rozpoczęta w Wykładzie VIII i kontynuowana do tego miejsca w bieżącym, pozwala na sformułowanie

**Twierdzenie 9.1.** *W niezdegenerowanym modelu Blacka istnieje portfel optymalny ze względu na stopę bezryzykową  $\mu_0 > -1 \iff -1 < \mu_0 < E_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ .*

*Gdy  $\mu_0$  jest właśnie taka, wtedy portfel optymalny ze względu na stopę  $\mu_0$  jest jedyny i dany wzorem (9.4).*

To twierdzenie jest już udowodnione; również, jeśli chodzi o jedność portfela optymalnego. (W grę wchodzi bowiem tylko portfele Blacka mające  $\mathcal{M}$ -obrazy na górnym wąsie pocisku Markowitza, więc leżące tylko na jednej półprostej  $\{E \geq E_0\}$  w prostej Blacka, o początku w  $x_{\min}$ . Zaś na tej półprostej maksymalny współczynnik Sharpe’a ma tylko portfel  $x_{\text{op}}$ .)

*Uwaga 9.1.* (i) Współczynnik Sharpe’a to jedna z najważniejszych miar efektywności portfela w całej analizie portfelowej. Współczynnik ten mierzy premię za ryzyko, czyli nadwyżkę stopy zwrotu ponad  $\mu_0$ , w stosunku do samego ryzyka portfela – wyraża więc premię za ryzyko portfela na jednostkę tego ryzyka. Zwracamy uwagę, że współczynnik Sharpe’a już był wzmiankowany, w tym dokładnie kontekście, w Wykładzie I.

(ii) Podkreślamy, że portfel  $x_{\text{op}}$  ma podaną wyżej interpretację (maksymalizacja współczynnika Sharpe’a) na płaszczyźnie  $(\sigma, E)$ , nie zaś  $(\sigma^2, E)$ ! Interpretacja dotyczy prostych i hiperbol, nie parabol. Przykład portfela, który mógłby być traktowany jako  $x_{\text{op}}$  (zaczepnięty z [4]), pojawił się już na początku Wykładu VI. Dalsze przykłady są podane tu poniżej (Przykłady 9.1 i 9.2).

**Przykład 9.1.** W modelu Blacka z danymi z Przykładu 5.2 przy  $\rho = 0$ ,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

próbujemy wyliczyć specjalną wartość stopy bezryzykowej  $\mu_0$ , przy której portfelem optymalnym jest  $e_2$ .

Bardzo pomocny jest Rysunek 5.3. Z jego pomocą wnioskujemy, że **taka sama** będzie odpowiedź dla podmodelu Blacka używającego tylko spółek numer 1 i 2:<sup>2</sup>

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup> Względnie 2 i 3, my wybieramy 1 i 2. To będzie w przyszłości nasz częsty „stały element gry” – ograniczanie się do podmodelu i stosowanie do niego, czy w nim, tej samej teorii, co dla pełnego modelu. Zresztą pierwszy krok w tym kierunku był już zrobiony w Ćwiczeniu 7.3 w Wykładzie VII, gdy, w aspekcie  $\mathbf{M}$ , szukaliśmy początku łamanej efektywnej na pewnym boku trójkąta.

Istotnie, portfel  $e_2$  jest tu portfelem krytycznym, więc styczna do pocisku Markowitza w jego obrazie pokrywa się ze styczną do obrazu boku  $\overline{e_1 e_2}$  i możemy pracować z tą „drugą” styczną, to znaczy ograniczyć się do wspomnianego podmodelu. Trochę to niepokojące, ale ... trudne do podważenia.

By – odpowiednio teraz rozumiany, w wymiarze 2! – wzór (9.4) dawał  $e_2$ , zerować się musi pierwsza składowa w jego liczniku. Tymczasem ten licznik (wielkość wektorowa), z dokładnością do czynnika liczbowego  $\frac{1}{9}$ , to

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - \mu_0 \\ 4 - \mu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 - 2 \\ 21 - 6\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Stąd odpowiedzią jest  $\mu_0 = 2$ . Środkowy z trzech walorów okazuje się być optymalny w modelu Blacka przy stopie bezryzykowej równej wartości oczekiwanej najsłabszego (czyli trzeciego) z walorów.

**Przykład 9.2.** W modelu Blacka z danymi studenta Mordona

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(znowu sięgamy do Przykładu 5.2 w Wykładzie V, a nawet do prażródła tamtego przykładu),  $\beta = \frac{13}{5}$ ,  $\gamma = \frac{3}{5}$ , zatem pocisk Markowitza ma dzióbek na wysokości  $E_0 = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{13}{3} = 4.33(3)$ . Bierzymy  $\mu_0$  dosyć duże w stosunku do  $E_0$ , by wydobyć dynamikę tkwiącą we wzorze (9.4) na portfel optymalny:

$$\text{gdy } \mu_0 = 4, \text{ wtedy } x_{\text{op}} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)}{\beta - \mu_0 \gamma} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Gdy zaś } \mu_0 = \frac{25}{6}, \text{ wtedy } x_{\text{op}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \\ -41 \end{pmatrix}.$$

Dynamika ilustrowana w Przykładzie 9.2 jest całkowicie zrozumiała, gdy rysunki takie jak [np] Rysunek 9.2 analizujemy pod kątem dążności  $\mu_0 \rightarrow E_0$ –: punkt styczności, czyli  $\mathcal{M}(x_{\text{op}})$ , ucieka wtedy w górę (w kierunku ‘północno-wschodnim’) po wąsie pocisku Markowitza do  $\infty$ .

**Ćwiczenie 9.2** (kontynuacja ćwiczenia z Uwagi 7.2 (Wykład VII)). Znaleźć wartość stopy bezryzykowej  $\mu_0$ , względem której portfel  $(0, 0, 1)^T$  jest optymalny w modelu Blacka z parametrami (7.1), który pojawił się jeszcze w Wykładzie VII. Czy w tym modelu Blacka są jeszcze inne portfele optymalne względem tej wartości  $\mu_0$ ? Jeśli tak, to znaleźć wszystkie takie portfele [optymalne w tym modelu Blacka względem tej wartości  $\mu_0$ ].

W tym samym modelu Blacka znaleźć wszystkie portfele optymalne względem stopy bezryzykowej  $\mu_0 = 0$ .

Dyskusja portfeli optymalnych w teorii Blacka byłaby niepełna bez dyskusji portfeli efektywnych w zmodyfikowanym modelu Tobina, leżących na półprostej krytycznej Tobina zaczynającej się w portfelu  $(1, 0, \dots, 0)^T$  i przechodzącej przez  $(0, x_{\text{op}}^T)^T$ . Ta półprosta jest zaznaczona na czerwono na Rysunku 9.6 poniżej. One, i tylko one, są efektywne, gdyż tylko one przechodzą na górne ramię kątownika Tobina, tzn.  $\{(\sigma, E)^T : E - \mu_0 = \sigma \sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}\}$ . W szczególności **odcinek** portfeli między punktami charakterystycznymi na prostej Tobina  $(1, 0, \dots, 0)^T$  i  $(0, x_{\text{op}}^T)^T$  przechodzi **afinicznie** na odcinek o końcach  $(0, \mu_0)^T$  i  $\mathcal{M}(x_{\text{op}})$ .<sup>3</sup> Te odcinki są **pogrubione** na Rysunku 9.6 poniżej.

<sup>3</sup> Formalnie rzecz biorąc, nie powinniśmy w argumentie pod  $\mathcal{M}$  opuszczać zerowej składowej  $x_{\text{op},0} = 0$ .

Na **rzucie** wymienionego odcinka [czerwonego pogrubionego na Rysunku 9.6] na  $\mathbb{R}^k(x_1, \dots, x_k)$  leży ważny z punktu widzenia interpretacji finansowych „portfel”

$$y_{\text{op}} = \frac{x_{\text{op}}}{\sum_{i=1}^k |x_{\text{op},i}|}. \quad (9.5)$$

Uwaga. Jest częstym błędem w pracach licencjackich czy nawet podręcznikach lokować punkt  $y_{\text{op}}$  na czerwonym pogrubionym odcinku na Rysunku 9.6. Punkty tam leżące są pewnymi portfelami krytycznymi Tobina i oczywiście spełniają warunek budżetowy. Ślad tego błędu jest też na, skądinąd bardzo starannym i czytelnym, Rysunku 9.2 powyżej.

**Ćwiczenie 9.3.** Gdzie dokładnie jest błąd na Rysunku 9.2?

*Wskazówka.* Przeprowadzić analizę porównawczą Rysunków 9.2 i 9.6.

Cudzysłów przed definicją (9.5) został więc użyty celowo; obiekt opisany wzorem (9.5) najczęściej nie jest portfelem. Dokładniej, oznaczając  $t \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{i=1}^k |x_{\text{op},i}| \right)^{-1}$ , na czerwonym pogrubionym odcinku poniżej leży portfel krytyczny Tobina

$$(1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ x_{\text{op}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_{\text{op}} \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

[W wersji pdf odpowiedni rysunek przeskoczył aż na następną stronę.]

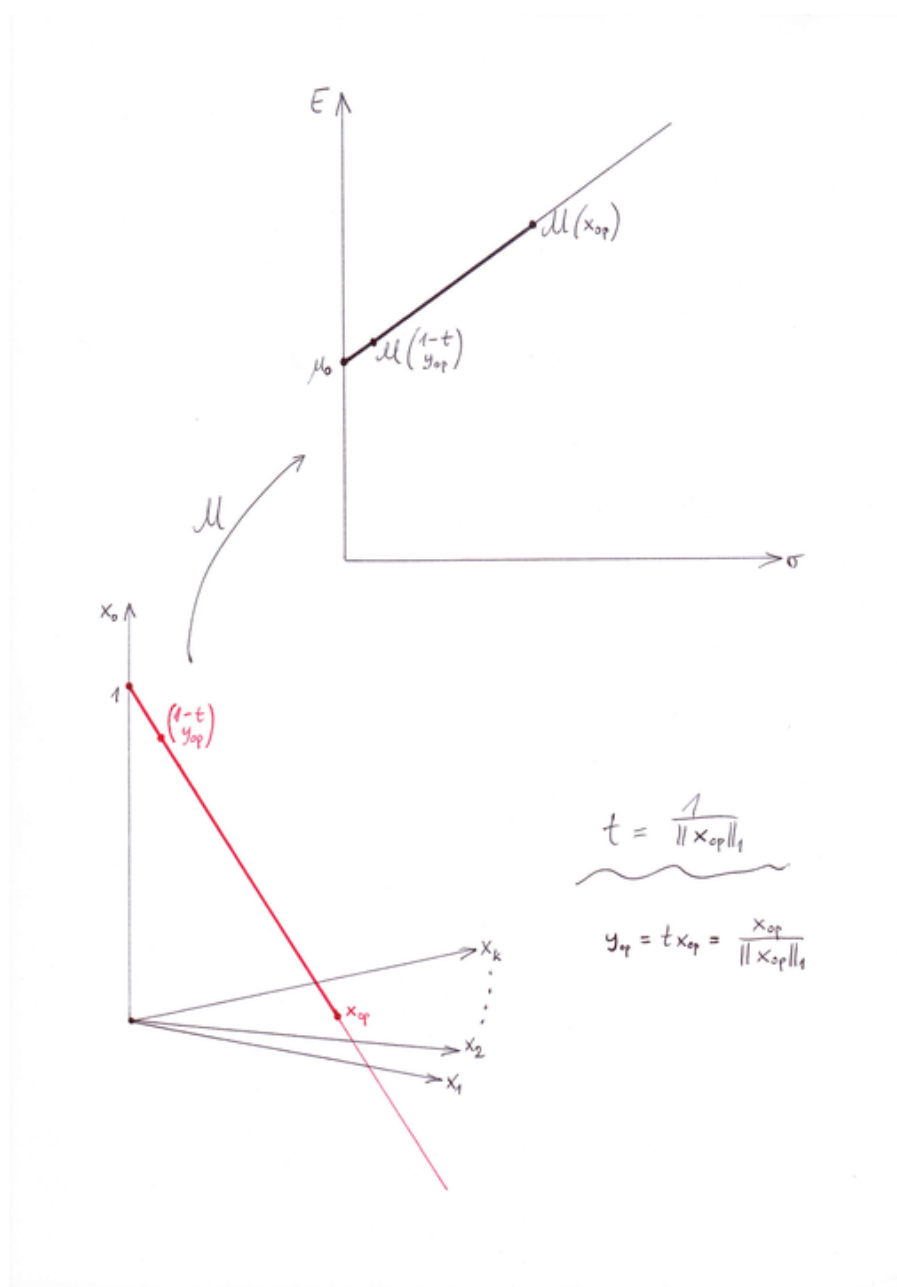
Chcemy te ogólne uwagi wstępne wesprzeć konkretnym przykładem. Jeśli portfel wypisany explicite w Wykładzie VI oznaczyć właśnie  $x_{\text{op}}$ , wtedy (rezygnując z % na rzecz zwykłych ułamków)  $t = (81.118)^{-1} = 0.01233$ , zaś  $y_{\text{op}}$  zdefiniowany wzorem (9.5) wynosi

| Wartość nr | Udział w „portfelu” $y_{\text{op}}$ |
|------------|-------------------------------------|
| 1          | 0.0798                              |
| 2          | 0.095                               |
| 3          | 0.0899                              |
| 4          | 0.2147                              |
| 5          | 0.268                               |
| 6          | -0.0188                             |
| 7          | -0.0551                             |
| 8          | -0.0732                             |
| 9          | -0.0914                             |
| 10         | -0.2553                             |

Zgodnie we wzorem (9.6), do tak określonego wektora  $y_{\text{op}}$  dochodzi ogromna część kapitału (tylko kapitału własnego inwestora, o czym niżej!), dokładnie  $(1-t = 0.98767)$  – część zdeponowana w banku na bezryzykownym koncie procentującym  $\mu_0$  w rozważanym okresie inwestycyjnym, patrz wzór (9.8) poniżej.

„Portfel”  $y_{\text{op}}$  jest nazywany w literaturze portfelem optymalnym Lintnera, por. [16] i [5]. Wyraża on, czy modeluje (koduje?) inwestowanie na giełdzie z **ograniczoną w sensie Lintnera krótką sprzedażą**; w danym przypadku – inwestowanie optymalne w sensie współczynnika Sharpe’a  $S_{\mu_0}$ .

Przed dalszymi wyjaśnieniami chcemy podkreślić występującą tu pozorną sprzeczność. Oto z jednej strony „portfel”  $y_{\text{op}}$  niesie w sobie kompletną informację dotyczącą inwestowania w akcje: suma modułów jego składowych wynosi z definicji 1, czyli przedstawia on podział kapitału własnego inwestora na części inwestowane w poszczególne spółki giełdowe. Ponadto znaki



Rysunek 9.6. Pogrubiony czerwony odcinek przechodzi pod działaniem  $M$  **afinicznie** na pogrubiony czarny odcinek.

wskazują na rodzaj tego inwestowania: + oznacza zajmowanie długiej pozycji w danym walorze, zaś – oznacza zajmowanie krótkiej pozycji.

Wszystko wydaje się pasować, dopóki nie uzmysłowimy sobie, że jednak  $y_{op}$  nie jest portfelem, zaś staje się takim dopiero po dołożeniu czy też dostrzeżeniu lwiej części środków pieniężnych umieszczonych na bezryzykownym koncie w banku. Czy można w jakiś finansowo spójny sposób połączyć wymienione tu fakty i informacje?

Otóż tak, przy czym wyjaśnienie przychodzi z dwu stron.

Pierwsza jest algebraiczna i polega na uważnym przyjrzeniu się wielkości środków, które trafiają do banku:

$$1 - t = \frac{\sum_{i=1}^k |x_{op,i}| - 1}{\sum_{i=1}^k |x_{op,i}|} = \frac{2 \sum_{j: x_{op,j} < 0} |x_{op,j}|}{\sum_{i=1}^k |x_{op,i}|}. \quad (9.7)$$

Druga polega na przyjrzeniu się inwestowaniu w akcje z dopuszczeniem krótkiej sprzedaży w sensie Lintnera. Podkreślmy – jakimukolwiek takiemu inwestowaniu, niekoniecznie inwestowaniu w portfel  $y_{op}$  pochodzący od portfela optymalnego w modelu Blacka.

Otóż Lintner modeluje inwestowanie w portfel  $y$  z krótką sprzedażą następująco:

inwestor wkracza do Domu Maklerskiego ze swoim kapitałem  $L$ , który dzieli na części  $|y_i|L$  przeznaczone do zainwestowania w akcje spółek o numerach  $i$ ,  $\sum_{i=1}^k |y_i| = 1$ . Jeśli zajmuje on długą pozycję w walorze  $i$ , wtedy  $y_i > 0$ . Jeśli krótką, wtedy  $y_i < 0$ . W tym drugim, ciekawszym przypadku inwestor:

- deponuje w DM  $(-y_i)L$  swego kapitału, czyli równowartość akcji  $i$ -tej spółki pożyczonych przez DM;
- następnie sprzedaje te dopiero co pożyczone akcje i uzyskane za nie  $(-y_i)L$  zamraża na cały okres inwestycyjny w DM, po angielsku: *put in escrow*;
- na końcu okresu inwestycyjnego odbiera pieniądze *put in escrow* i odkupuje za nie pożyczone na początku akcje nr  $i$  (za mniejszą kwotę, niż zamroził – wtedy ma zysk, lub za większą – wtedy różnicę musi dołożyć z własnych środków i wówczas odnotowuje stratę), które następnie zwraca do DM;
- wychodząc z DM odbiera swoje zdeponowane na okres inwestycyjny  $(-y_i)L$ .

Unifikacja spojrzeń na krótką sprzedaż Lintnera następuje przez zapisanie (9.7) w postaci

$$1 - t = \sum_{i: y_{op,i} < 0} 2(-y_{op,i}) \quad (9.8)$$

i następnie ekstrapolację tego wzoru do ogólniejszego

$$1 - t = \sum_{i: y_i < 0} 2(-y_i), \quad (9.9)$$

gdzie  $t = 1 + 2 \sum_{i: y_i < 0} y_i = \sum_{i=1}^k |y_i| + 2 \sum_{i: y_i < 0} y_i = \sum_{i=1}^k y_i$ .

Podkreślamy jeszcze raz – portfel  $(y_1, y_2, \dots, y_k)^T$  modelujący krótką sprzedaż Lintnera nie pochodzi teraz od żadnego portfela optymalnego. Jedyne ograniczenie, jakiemu podlega, to  $\sum_{i=1}^k y_i > 0$ , tzn. inwestor inwestuje więcej w długie pozycje niż w krótkie.<sup>4</sup>

Kluczowe dla zrozumienia sytuacji jest zauważenie, że zarówno początkowe pieniądze inwestora  $(-y_i)L$  zdeponowane w DM, jak i te „nowe”  $(-y_i)L$  zamrożone, czy też *put in escrow* na okres inwestycyjny, procentują ze stopą zysku  $\mu_0$ ! DM nie trzyma przecież takich depozytów u siebie, tylko w banku, który zawsze stosuje stopę  $\mu_0$ . Innymi słowy, dla każdej spółki nr  $i$ , w której inwestor zajmuje krótką pozycję ( $y_i < 0$ ), przez okres inwestycyjny procentuje dla niego kwota  $2(-y_i)L$ . Łącznie procentuje tak zatem kwota  $L \cdot [\text{wielkość po prawej stronie wzoru (9.9)}]$ . Czy inwestor Lintnera tego chce, czy nie, efekt jest taki, jakby  $(1 - t)$ -ta część jego kapitału procentowała bezryzykownie ze stopą  $\mu_0$ .

Natomiast pozostała  $t$ -ta część jego kapitału zachowuje się proporcjonalnie ze współczynnikiem  $t$  do zachowania na giełdzie portfela – już teraz prawdziwego portfela Blacka  $\frac{y}{e^T y}$ :

$$t \frac{y}{e^T y} = \left( \sum_{i=1}^k y_i \right) \frac{y}{e^T y} = y.$$

<sup>4</sup> Nawet to ograniczenie à priori nie jest konieczne w podejściu Lintnera. Jednakże nasze interpretacje dotyczą tylko portfeli Lintnera, w których więcej niż połowa kapitału idzie w długie pozycje, a mniej niż połowa w pozycje krótkie.

Im mniejszy jest „portfel” Lintnera  $y$ ,  $t$  małe dodatnie, tym większa jest ilość środków,  $1 - t$  w stosunku do kapitału inwestora, realnie lokowana w banku. Im większa skłonność do krótkiej sprzedaży, tym większa część środków bezryzykownie „pracuje” w banku. Taka jest istota ograniczonej krótkiej sprzedaży Lintnera.

Dla wygody słuchacza, któremu przypadła do gustu krótka sprzedaż w sensie Lintnera, proponujemy następujący krótki słownik:

|                                                                                                  |                  |                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| portfel Blacka $x$ (w szczególności<br>portfel optymalny $x_{\text{op}}$ ze względu na $\mu_0$ ) | $\longmapsto$    | „portfel” Lintnera $\frac{x}{\sum_{i=1}^k  x_i }$ , przy czym<br>bezryzykownie procentuje, ze stopą $\mu_0$ ,<br>$\frac{2 \sum_{j: x_j < 0}  x_j }{\sum_{i=1}^k  x_i }$ – część kapitału inwestora,<br>por. (9.7) |
| portfel Blacka $\frac{y}{e^T y}$                                                                 | $\longleftarrow$ | „portfel” Lintnera $y$ taki, że $e^T y > 0$ , przy<br>którym bezryzykownie procentuje, ze stopą $\mu_0$ , $2 \sum_{j: y_j < 0} (-y_j)$ – część kapitału inwestora, por. (9.9)                                     |

*Uwaga 9.2.* Należy cały czas pamiętać, że krótka sprzedaż Lintnera może też wykraczać poza opisany tu schemat. Można w niej dokładnie połowę kapitału inwestować w krótkie pozycje, można  $\frac{3}{4}$ , można  $\frac{7}{8}$ , ... Patrz też uwagi na ten temat w [5], przypis 4 oraz [4], przypis 4 na str. 230.

*Uwaga 9.3.* Dużo bardziej realistycznie, niż Black czy Lintner, modelował krótką sprzedaż akcji na giełdzie G.J. Alexander w pracy [1]. Jego podejście jest szczegółowo dyskutowane na wykładzie APRK2.

Dla zamknięcia tematu „zmodyfikowany model Tobina” warto spojrzeć na oba typy kątowników: stary w teorii Blacka (mówimy krótko „kątownik Blacka”) i nowy w teorii Tobina („kątownik Tobina”) z jednego wspólnego punktu widzenia.

Mianowicie, zmodyfikowany model Tobina okazuje się leżeć „na granicy” pewnych niezdegenerowanych modeli Blacka  $(k+1) \times (k+1)$  z parametrami

$$\tilde{\Sigma}_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Sigma & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \tilde{\mu}_\epsilon = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0.$$

Dokładniej, dla tych modeli można policzyć klasyczne parametry z teorii Blacka  $\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon, \gamma_\epsilon$ , uzyskując:

$$\alpha_\epsilon = \frac{\mu_0^2}{\epsilon} + \alpha, \quad \beta_\epsilon = \frac{\mu_0}{\epsilon} + \beta, \quad \gamma_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} + \gamma.$$

Wówczas wysokości dzióbek ich pocisków Markowitza zachowują się zgodnie z oczekiwaniami

$$\frac{\beta_\epsilon}{\gamma_\epsilon} = \frac{\frac{\mu_0}{\epsilon} + \beta}{\frac{1}{\epsilon} + \gamma} \longrightarrow \mu_0 \quad \text{gdy} \quad \epsilon \rightarrow 0+. \quad (9.10)$$

Co z kątami między asymptotami tych pocisków, albo najkrócej: co z kątami w ich kątownikach Blacka? Liczmy tangensy połowy kątów w kątownikach Blacka dla tych modeli, wzór (6.6):

$$\frac{b_\epsilon}{a_\epsilon} = \sqrt{\frac{\alpha_\epsilon \gamma_\epsilon - \beta_\epsilon^2}{\gamma_\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0^2}{\epsilon} + \alpha - \frac{(\frac{\mu_0}{\epsilon} + \beta)^2}{\frac{1}{\epsilon} + \gamma}}.$$

**Ćwiczenie 9.4.** Jest pouczającym ćwiczeniem<sup>5</sup> policzyć granicę tego wyrażenia przy  $\epsilon \rightarrow 0+$ .

<sup>5</sup> choć to niby jest tylko AMI...

*Rozwiązanie.* Ta granica wynosi  $\sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma}$ , co wydaje się dość naturalne.

Do kompletu informacji brak jeszcze wiedzy na temat samych pólóś  $a_\epsilon$  oraz  $b_\epsilon$  pocisków Markowitza, które mają do czegoś dążyć. Z poziomymi pólóśiami nie ma najmniejszego kłopotu,

$$a_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\gamma_\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon} + \gamma}} \rightarrow 0$$

gdy  $\epsilon \rightarrow 0+$ . (Podobnie z pionowymi pólóśiami, gdy już – właśnie z Ćwiczenia 9.4! – znamy granicę tangensów kątów:

$$b_\epsilon = a_\epsilon \frac{b_\epsilon}{a_\epsilon} \rightarrow 0 \cdot \sqrt{\alpha - 2\mu_0\beta + \mu_0^2\gamma} = 0,$$

lecz nam wystarcza informacja o pólóśiach poziomych.)

Tak więc dany zmodyfikowany model Tobina istotnie jest granicą  **pewnych**  niezdegenerowanych modeli Blacka w wymiarze  $k+1$ , z naciskiem na ”pewnych”, specjalnie dobranych. Ich kątownicy Blacka dążą do kątownika Tobina, ok, lecz nawet więcej: same te pociski Markowitza dążą do kątownika Tobina.<sup>6</sup>

Konkludując, [ktoś powie:] nic nowego pod słońcem; zmodyfikowany model Tobina może być w bardzo precyzyjnym sensie traktowany jako przypadek graniczny w teorii Blacka i współpracowników.

Chcemy teraz przenieść spojrzenie Tobina na model Blacka na – też Tobina – spojrzenie na model Markowitza! Pamiętamy, że w teorii Blacka portfel optymalny ze względu na stopę bezryzykowną podaną przez teorię Tobina wyłonił się całkiem naturalnie. Maksymalizowanie przez niego współczynnika Sharpe’a jest widoczne bezpośrednio i jest bardzo intuicyjne.

Inaczej będzie z portfelami optymalnymi w teorii Markowitza. Metody Analizy II bezpośrednio tam nie wystarczą, potrzebna będzie Optymalizacja II. Więcej nawet: do samego szukania granicy minimalnej  $F_{\min}$  w ogólnym przypadku też użyteczna będzie Optymalizacja II.

### **Kluczowe narzędzie dla całej pozostałej części kursu APRK1**

Przypomnimy teraz ważne narzędzie z Optymalizacji II, tzw. twierdzenie **Karusha-Kuhna-Tuckera**, które oryginalnie opublikowane zostało w [14], tzn. w trudno dostępnej publikacji zbiorowej „Proceedings 2<sup>nd</sup> Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability” (1951) **oraz** było już zawarte w **nie**opublikowanej pracy magisterskiej [11] z [grudnia] roku 1939. Twierdzenie to prawie zawsze przypisywane jest tylko Kuhnowi i Tuckerowi; niżej (i w dalszych wykładach) czytelnik znajdzie niemało prób wyjaśnienia takiego stanu rzeczy.

Należy zaznaczyć, że oryginalne sformułowania twierdzenia, bardzo do siebie zbliżone, choć podane całkowicie niezależnie przez (a) Karusha oraz (b) Kuhna i Tuckera, były *inne* niż przytoczone tu poniżej. Nie miały one charakteru ‘iff’ (czyli, po nowo-polsku, ‘wtedy’) i nie było w nich żadnych słów dotyczących wklęsłości bądź wypukłości. Były to tylko warunki konieczne ekstremów lokalnych warunkowych konkretnego typu; w istocie jeden warunek wspólny w obu pracach. Jest to znakomicie opisane w – dużo późniejszej – przeglądowej i historycznej pracy [12], gdzie szczególnie należy zwrócić uwagę na początek sekcji 2.3 na stronie 337, jako, że na pierwszy rzut oka warunek Karusha jednak różni się od warunku(ów) Kuhna i Tuckera.

Piszący kilkanaście lat później [w dużym przeglądowym artykule w Wiadomościach Matematycznych XII.1 (1969)] A. Turowicz i H. Górecki tak oceniali to twierdzenie: ”... Metody Dubowickiego-Milutina oraz Kuhna-Tuckera są tak doniosłe, że powinny być udostępnione inżynierom pracującym naukowo w specjalnym opracowaniu.” (O pracy magisterskiej Karusha nic wtedy, a może i później, nie wiedzieli.)

<sup>6</sup> W tym momencie przypomina się nam Rysunek 4.5 w Wykładzie IV: pocisk Markowitza oglądany z tak daleka, że już nieodróżnialny od własnych asymptot.

Dopiero po jakimś czasie dyskutowane twierdzenie zaczęło być używane w kategorii wypukłej, i wówczas już jako ‘wteddy’. Nie sposób obecnie odtworzyć łańcuszka tego swoistego głuchego telefonu, który w danym przypadku ulepszał, a nie pogarszał rezultat! Oto wersja, jaka nam będzie potrzebna i (chwilowo) wystarczająca.

**Twierdzenie 9.2** (Karush; Kuhn, Tucker; wersja w kategorii wypukłej). *Niech  $G \subset \mathbb{R}^k$  będzie otwarty i wypukły, zaś  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  będzie wklęsła (wypukła) i różniczkowalna w punkcie  $x = x_0 \in G$ , który spełnia warunki*

$$\begin{cases} a_i^T x = b_i, & i = 1, 2, \dots, r; \\ a_i^T x \leq b_i, & i = r+1, \dots, l, \end{cases} \quad (\text{T})$$

gdzie  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^k$ . Wtedy punkt  $x_0$  jest punktem globalnego warunkowego maksimum (minimum) funkcji  $f$  przy warunkach (ograniczeniach) (T)  $\iff$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \quad \exists \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_l \leq 0 \quad (\geq 0) \quad \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_i = 0$$

$$\text{oraz} \quad \sum_{i=r+1}^l \lambda_i (b_i - a_i^T x_0) = 0 \quad (\text{warunek komplementarności}).$$

*Uwaga 9.4.* Podane tu sformułowanie twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera nie jest najogólniejszym możliwym jego sformułowaniem w kategorii wypukłej. (I poza tym to twierdzenie istnieje też w innych kategoriach – patrz Wykłady XIII i XIV.)

We Francji np przyszłych inżynierów uczy się takiej jego wersji, w której zamiast ograniczeń liniowych (T) występują dużo bardziej ogólne ograniczenia dawane funkcjami wypukłymi (wklęsłymi), gdy ekstremalizowana funkcja  $f$  jest wklęsła (wypukła), porównaj np [25], s. 276. W związku z tym twierdzenie to jest we Francji również nazywane *twierdzeniem o punkcie siodłowym*.<sup>7</sup> Jednakże dla naszych potrzeb ograniczenia liniowe (typu równościowego i nierównościowego) są zupełnie wystarczające.

*Uwaga 9.5.* Jeszcze z innej strony problematykę ‘K-KT’ naświetla klasyczny podręcznik [17]. W rozdziale ‘First-Order Necessary Conditions’ formułuje on, na stronach 314–315, warunki konieczne warunkowego minimum/maksimum (zależnie, czy funkcję celu chcemy minimalizować, czy maksymalizować), i nazywa je ‘Kuhn-Tucker Conditions’. Nazwisko Karush i tam się nie pojawia. Jest to kwintesencja rezultatów Karusha i Kuhna&Tuckera, tak, jak je znamy z wersji upublicznionej w [12]. (Żadnego innego dojścia do tekstów źródłowych [11] i [14] nie mamy.) Po warunkach koniecznych pierwszego rzędu pojawiają się w [17] jeszcze warunki dostateczne drugiego rzędu (!). Książka bardzo godna polecenia, napisana w solidnym anglosaskim stylu.

Jak już powiedziano, Twierdzenie 9.2 będziemy stosować w analizie portfelowej. Jednak dobrą rozgrzewką jest następujące zagadnienie, które też (m.in.) może być atakowane przy pomocy twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera.

**Ćwiczenie 9.5.** Znaleźć wielomian(y)  $ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) najlepiej przybliżający(e) w normie sup funkcję  $|x|$  na przedziale  $[-1, 1]$ .

<sup>7</sup> Ściśle biorąc, najbliższe oryginalnym pracom Karusha i Kuhna&Tuckera jest w książce [25] Twierdzenie 3 na stronie 266, które jednak **nie** jest tam nazwane KT, ani tym bardziej K-KT. Twierdzenie o punkcie siodłowym na stronie 276 jest z niego wnioskiem, czy też jednym z wniosków. W [25] w ogóle nie występuje nazwisko Karush.

*Wskazówka.* Chwytny nieznany wielomian (na przykład) w pięciu węzłach:  $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$  i postulujemy, by w tych węzłach był on odległy od funkcji  $|x|$  o nie więcej niż  $\frac{1}{8}$ . To znaczy postulujemy, by

$$|c| \leq \frac{1}{8}, \left| \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{8}, \left| \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{8}, |a - b + c - 1| \leq \frac{1}{8}, |a + b + c - 1| \leq \frac{1}{8}.$$

Każdą z funkcji  $a, b, c$  na  $G = \mathbb{R}^3(a, b, c)$  raz traktujemy jako wklęsłą, raz jako wypukłą. Szukamy ich maksimów i minimów na zbiorze opisanym pięcioma nierównościami modułowymi, albo dziesięcioma nierównościami bezmodułowymi jak w Twierdzeniu 9.2. Komputer powinien pomóc w przeczesaniu ogromu możliwości tutaj. Spodziewamy się następującej odpowiedzi...

Pod następnym kliknięciem wyświetli się wszystkich 10 nierówności bezmodułowych, czyli przecięcie 10 półprzestrzeni domkniętych w  $\mathbb{R}^3(a, b, c)$ :

$$\begin{aligned} c \leq \frac{1}{8}, \quad -c \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - c + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}, \\ -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - c + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}, \quad a - b + c - 1 \leq \frac{1}{8}, \quad -a + b - c + 1 \leq \frac{1}{8}, \quad a + b + c - 1 \leq \frac{1}{8}, \quad -a - b - c + 1 \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Podjęcie zasadza się w tym, że to przecięcie jest jednym punktem  $\left(1, 0, \frac{1}{8}\right)^T$ .

## 10. Wykład X, 4.XII.2009

Pod koniec Wykładu IX poznaliśmy już pewne zastosowanie fundamentalnego Twierdzenia 9.2 (pochodzącego od Karusha i Kuhna-Tuckera, podanego w Wykładzie IX w w formacie ‘wteddy’ w wersji z obiektami wklęsłymi/wypukłymi), co prawda zastosowanie dość odległe od analizy portfelowej.

Nasuwa się przy tej okazji pytanie, czy może czytelnik umie rozwiązać Ćwiczenie 9.5 (Wykład IX) **bez** Twierdzenia 9.2? Jeśli nie, to skromniejsze pytanie mogłoby brzmieć tak: czy w rozwiązaniu Ćwiczenia 9.5 podanym w Wykładzie IX koniecznych jest dziesięć warunków nierównościowych? Np zmniejszenie ilości węzłów z pięciu do trzech dałoby tylko sześć warunków nierównościowych, lecz (chyba) byłoby to wylanie dziecka razem z kąpielą.

Pora teraz na zastosowanie bliższe nurtowi (i nazwie) wykładu. Przez chwilę będzie znowu o modelach  $\pm$  doskonale skorelowanych.

Czytelnik nabierze wprawy w posługiwaniu się Twierdzeniem 9.2, rozwiązując samodzielnie (względnie śledząc rozwiązanie ukryte pod dodatkowym kliknięciem) następujące proste

**Ćwiczenie 10.1.** W modelu  $\pm$  doskonale skorelowanym z Przykładu 3.1 w Wykładzie III, w aspekcie **M** [z którym związany jest Rysunek 3.2; w Wykładzie III jeszcze nie znaleźliśmy aspektu **B**] znaleźć wszystkie portfele minimalnego ryzyka, przy czym **specjalnie** stosując w tym celu Twierdzenie 9.2.

*Wskazówka.* Chodzi o minimalizację wariancji portfela  $x \in \Delta^4$ , która w tym modelu  $\pm$  doskonale skorelowanym wyraża się, jeśli pamiętamy to jeszcze z Wykładu III, wzorem  $(4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4)^2$ . To minimum jest bardzo łatwo znaleźć tak po prostu, przy czym osiągnęte jest ono w punktach przecięcia płaszczyzny krytycznej z sympleksem  $\Delta^4$  (porównaj Przykład 6.2). Teraz chodzi nam o uzyskanie tego samego jeszcze raz, wprost z twierdzenia K-KT. *Rozwiązanie.* Po odpowiednim wyspecyfikowaniu Twierdzenia 9.2, zresztą bardzo podobnym do tego, które rozwijane jest niżej w tym wykładzie w kontekście *relatywnego* minimum ryzyka, szukamy portfeli  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \Delta^4$ , dla których istnieje  $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{R}$  takie, że: **po pierwsze** (używając nie całej, tylko połowy wariancji)

$$(4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (10.1)$$

jako wektor w  $\mathbb{R}^4$  (= nieujemność każdej składowej wektora po lewej stronie), oraz, **po drugie**, iloczyn skalarny wektora stojącego po lewej stronie (10.1) z wektorem  $x$  jest zero:

$$(4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4)^2 + \lambda = 0 \quad (10.2)$$

(warunek komplementarności przy przyjętej specyfikacji twierdzenia). Dodajmy teraz stronami na przykład dwie środkowe nierówności w (10.1).<sup>1</sup> Dostajemy nieujemność współczynnika  $\lambda$ . Lecz (10.2) daje niedodatniość  $\lambda$ . Zatem  $\lambda = 0$ , więc też, znowu z (10.2),  $4x_1 + x_2 - x_3 -$

<sup>1</sup> albo dwie skrajne, albo wszystkie cztery

$4x_4 = 0$ . Ryzyko w aspekcie **M** minimalizują więc te portfele Markowitza, które ... mają zerowe ryzyko. (Porównaj też jeszcze raz Przykład 6.2.) Niby nic, lecz „wycisnęliśmy tę” informację z Twierdzenia 9.2!

Już w tym rozwiązaniu wychodzą cechy charakterystyczne twierdzenia K-KT. Po bliższym przyjrzeniu się okazuje się, że jedna część jego tezy, tu zapisana jako (10.1), ciągnie niejako szukany współczynnik Lagrange’a (w ćwiczeniu jest on tylko jeden) w jedną stronę. Natomiast druga część tezy, tu (10.2), ciągnie ten współczynnik w drugą stronę. W efekcie wyłania się jakaś równowagowa wartość takiego współczynnika, która de facto jest zakodowanym opisem ekstremów. Nie przypadkiem w literaturze francuskojęzycznej, np w [25], twierdzenie K-KT jest nazywane twierdzeniem o punkcie siodłowym.

**Ćwiczenie 10.2.** Znaleźć przy pomocy Twierdzenia 9.2 wszystkie portfele minimalnego ryzyka w aspekcie **M** w dowolnym modelu  $\pm$  doskonale skorelowanym.

Naszym głównym celem w Wykładzie X jest zastosowanie Twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera 9.2 (w przyszłości będziemy już pisać tylko krótko ‘K-KT’) do zautomatyzowanego poszukiwania portfeli *relatywnie* minimalnego ryzyka w modelach Markowitza, które bliższe są warunkom giełdowym niż modele  $\pm$  doskonale skorelowane.

Dla (niezdegenerowanych) modeli Blacka w Wykładzie VI polegało to na dość standardowym zastosowaniu wiedzy z AMII, bo dwa warunki ograniczające były tylko równościowe. W efekcie gładko dostaliśmy (w Twierdzeniu 6.1) wszystkie portfele krytyczne Blacka układające się na prostej krytycznej Blacka.

Teraz jednak dochodzi  $k$  ograniczeń nierównościowych związanych z leżeniem portfeli w sympleksie  $\Delta^k$  (nieujemność składowych portfeli, brak krótkiej sprzedaży), co komplikuje sytuację. Jest to jakościowo nowy problem. Czym teraz zastąpiona zostanie prosta krytyczna Blacka?

Zgodnie z tradycją przyjętą w analizie portfelowej, współczynniki Lagrange’a związane z warunkami równościowymi  $e^T x = 1$ ,  $\mu^T x = E$  (wartości  $E$  nie będą teraz dowolne, tylko ograniczone do powłoki wypukłej wartości oczekiwanych stóp zwrotu ze spółek numer  $1, 2, \dots, k$ ) piszemy jako, odpowiednio,  $\lambda$  i  $-\lambda_E$ , zaś nierówności  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) kodujemy jako  $a_{i+2}^T x \leq b_{i+2}$ , gdzie  $a_{i+2} = [0, \dots, \underset{\uparrow}{-1}, \dots, 0]^T$ ,  $b_{i+2} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Jako funkcję  $f$  bierzemy

$$f(y) = \frac{1}{2} y^T \Sigma y, \quad y \in G = \mathbb{R}^k,$$

która dla  $\Sigma \geq 0$  jest wypukła i różniczkowalna w **każdym** punkcie  $y$ , zaś jej gradient to  $\nabla f(y) = \Sigma y$ . Twierdzenie K-KT zastosowane w tej sytuacji mówi, że  $x$  spełniający wymienione warunki jest globalnym minimum  $f$  przy podanych warunkach (ograniczeniach)  $\iff$  istnieją  $\lambda, \lambda_E \in \mathbb{R}$  takie, że

$$\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu \geq 0 \text{ jako wektor w } \mathbb{R}^k \text{ oraz } x^T (\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu) = 0 \text{ (warunek komplementarności).}$$

Podamy teraz warunek dostateczny, przy którym takie portfele relatywnie minimalnego ryzyka istnieją i są jednoznacznie wyznaczone dla każdej wartości  $E \in [\min_{1 \leq i \leq k} \mu_i, \max_{1 \leq i \leq k} \mu_i]$ . Jest on trochę za silny (mógłby być trochę osłabiony), co w praktyce jednak nie przeszkadza, bo przy estymacji wartości oczekiwanych z historycznych danych giełdowych praktycznie nigdy nie dostaniemy pary równych wartości. W zamian zaś pozwala zrecznie opisać procedurę poszukiwania.

Mianowicie, w dalszym ciągu zakładamy, że  $\Sigma > 0$  oraz

$$\neq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \tag{10.3}$$

tn. wszystkie wartości oczekiwane  $\mu_i$  są **różne**. Te założenia będą obowiązywać do odwołania. (Zauważamy, że są to silniejsze założenia niż dawna informacja (5.2), która wystarczała w teorii Blacka. Przy różnych pod-zestawach zmiennych będziemy w obecnym algorytmie wracać do (5.2).)

Algorytm prowadzący do rozwiązania nie mówi od razu, dla jakich konkretnie wartości  $E$  rozwiązanie znajdziemy na konkretnej ścianie sympleksu. Całość poszukiwań dzielimy (niestety lub stety) na etapy, których jest

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k-2} = 2^k - k - 1. \quad (10.4)$$

Etap  $\emptyset$ . Szukanie wśród portfeli  $x \in \Delta^k: x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_k > 0$ .  
Warunek komplementarności pociąga wtedy wektorową *równość*

$$\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu = 0,$$

co łącznie z dwoma ograniczeniami równościowymi w problemie zapisujemy przy pomocy tzw. macierzy Lagrange'a, tu wymiaru  $k + 2$ :

$$\begin{pmatrix} \Sigma & e & \mu \\ e^T & 0 & 0 \\ \mu^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ -\lambda_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ E \end{pmatrix}.$$

Dawne założenie (5.2) oczywiście wynika z (10.3), więc dostajemy tu jedyne rozwiązanie  $(x, \lambda, \lambda_E)(E)$ , na temat którego rozwiązujemy następnie układ nierówności  $x_1(E) > 0, x_2(E) > 0, \dots, x_k(E) > 0$ . Wynikiem jest jakiś przedział otwarty wartości  $E$  (być może pusty) i odpowiadające portfele  $x(E)$ . Macierz Lagrange'a, która tu została przywołana i użyta, to tylko przeformułowanie i pewne uzwarcie metody Blacka i noblistów z Wykładu VI. Portfele  $x(E)$  ewentualnie wyłaniające się w tym etapie są tożsame z portfelami Blacka (6.2) z Wykładu VI leżącymi wewnątrz sympleksu  $\Delta^k$ . Na dalszych etapach tak już być nie musi (i najczęściej nie będzie); jednak patrz też Ćwiczenia 11.1 i 11.2 oraz Uwaga 11.2 w Wykładzie XI. Uzwarzenie metody dawane przez macierz Lagrange'a będzie nam pomocne w dalszych etapach.

Wreszcie nazwa tego etapu,  $\emptyset$ , oznacza, że pusty jest w nim zbiór indeksów zmiennych, które przyjmujemy za zero.

Ogólniej, etap OUT, gdzie  $\text{OUT} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $0 \leq \#(\text{OUT}) \leq k - 2$ , polega na szukaniu  $x \in \Delta^k: x_j = 0$  dla  $j \in \text{OUT}$ , natomiast  $x_i > 0$  dla  $i \in \text{IN} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, k\} \setminus \text{OUT}$ , spełniających warunki w omawianej tu wersji twierdzenia K-KT, tzn.

$$(\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu)_i = 0 \quad \text{dla } i \in \text{IN}, \quad (\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu)_i \geq 0 \quad \text{dla } i \in \text{OUT} \quad (10.5)$$

dla jakichś  $\lambda, \lambda_E \in \mathbb{R}$ . Równości w (10.5) wynikają z warunku komplementarności, zaś nierówności w (10.5) wynikają z warunku na gradient minimalizowanej funkcji. Oznacza to konkretnie, że w takim etapie OUT najpierw rozwiązujemy układ  $2 + \#(\text{IN}) \geq 2 + 2 = 4$  równań liniowych

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{\text{IN}} & e^{\text{IN}} & \mu^{\text{IN}} \\ (e^{\text{IN}})^T & 0 & 0 \\ (\mu^{\text{IN}})^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\text{IN}} \\ \lambda \\ -\lambda_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ E \end{pmatrix}, \quad (10.6)$$

gdzie  $\Sigma^{\text{IN}}$  to macierz  $\Sigma$  po wyrzuceniu wierszy i kolumn o numerach z OUT oraz  $e^{\text{IN}}, \mu^{\text{IN}}$  to wektory  $e, \mu$  po odrzuceniu składowych o numerach z OUT.

Ważne jest, że  $\Sigma^{\text{IN}} > 0$  oraz  $\mu^{\text{IN}} \nparallel e^{\text{IN}}$ , a więc stosuje się teoria Blacka i współautorów, tyle, że w wymiarze  $\#(\text{IN})$ , nie zaś  $k$ . Tu właśnie pracuje zestaw założeń (10.3),  $\Sigma > 0$  i  $\#(\text{IN}) \geq 2$ .

**Ćwiczenie 10.3.** Uzasadnić, że istotnie, założenia  $\Sigma > 0$  i  $\#(\text{IN}) \geq 2$  pociągają  $\Sigma^{\text{IN}} > 0$ .

Uzasadnić też, że założenia (10.3) i  $\#(\text{IN}) \geq 2$  pociągają  $\mu^{\text{IN}} \nparallel e^{\text{IN}}$ .

Tym sposobem wiemy, że rozwiązania  $(x^{\text{IN}}, \lambda, \lambda_E)(E)$  układu (10.6) istnieją i są jedyne. Z pomocą przyszedł nam, dosyć niespodziewanie, Wykład VI.

Mając już te rozwiązania, rozwiązujemy następnie ze względu na  $E$  układ nierówności

$$\begin{cases} x_i(E) > 0, & i \in \text{IN}, \\ (\Sigma x(E) + \lambda(E)e - \lambda_E(E)\mu)_j \geq 0, & j \in \text{OUT}. \end{cases}$$

W wyniku otrzymujemy przecięcie  $k$  półprostych domkniętych i/lub otwartych, czyli, ogólnie rzecz biorąc, *przedział* postaci  $(\quad)$ , lub  $(\quad]$ , lub  $[\quad)$ , lub  $[\quad]$ , albo też  $\emptyset$ .

**Definicja 10.1.** Przedział ten będziemy w dalszym ciągu nazywać  $E(\text{IN})$ ; uprości nam to w przyszłości przedstawienie kluczowego dla tych wykładów Algorytmu Prostej Krytycznej (skrót nazwy angielskiej, nieomalże powszechnie przyjętej, to: CLA).

Tak przebiegamy wszystkie  $2^k - k - 1$  etapów, w których  $\#(\text{IN}) \geq 2$ . (Przypominamy, że takie ograniczenie z dołu na liczebność zbiorów IN było ważne i gwarantowało, oczywiście przy założeniu (10.3), nierównoległość zredukowanych wektorów  $\mu^{\text{IN}}$  oraz  $e^{\text{IN}}$ , a w efekcie możliwość stosowania na każdym etapie OUT klasycznej teorii Blacka i współautorów.)

**Przykład 10.1** (ważny; wracamy do niego już po raz czwarty, za każdym razem w innym kontekście, po Wykładach: V (Przykład 5.2), VII (Ćwiczenie 7.3) i IX (Przykład 9.1)).

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Etap OUT =  $\emptyset$ . Nieostre nierówności stają się (warunek komplementarności!) równościami – w tym etapie szukamy ewentualnych punktów prostej krytycznej leżących *wewnątrz* sympleksu standardowego. Rozwiązujemy zatem równanie (patrz Twierdzenie 5.1)

$$0 = \begin{vmatrix} 9x_1 + 3x_2 + x_3 & 5 & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 & 4 & 1 \\ x_1 + 4x_3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10x_1 + 6x_3,$$

oczywiście z zerowym skutkiem. Ten etap nic nie daje, bo prosta krytyczna nie przechodzi tu przez wnętrze sympleksu:  $E(\{1, 2, 3\}) = \emptyset$ .<sup>2</sup>

Etap OUT =  $\{1\}$ , w którym  $x_1 = 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Piszemy odpowiedni układ równań (10.6)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \lambda \\ -\lambda_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ E \end{pmatrix},$$

którego rozwiązaniem to

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \lambda \\ \lambda_E \end{pmatrix} (E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E - 1 \\ -\frac{1}{2}E + 2 \\ 5E - 18 \\ -5 + \frac{3}{2}E \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup> Zamiast liczyć wyznacznik, można sobie przypomnieć, że prosta krytyczna muska tylko trójkąt w wierzchołku  $e_2$  – patrz pierwszy z filmików w Wykładzie V.

Dodatniość  $x_2$  i  $x_3$  oznacza, że  $E \in (2, 4)$ . Co teraz z pierwszą nierównością  $3x_2 + x_3 + \lambda - 5\lambda_E \geq 0$ , która też musi być spełniona przez portfele relatywnie minimalnego ryzyka? Po podstawieniu rozwiązań jest to nierówność  $4 \geq E$ , spełniona przez  $E$  ze wskazanego przedziału otwartego. Wniosek:  $E(\{2, 3\}) = (2, 4)$ .

Etap OUT =  $\{2\}$ , w którym  $x_1 > 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 > 0$ . Odpowiedni układ równań (10.6) to teraz

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \lambda \\ -\lambda_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ E \end{pmatrix},$$

którego rozwiązanie to z kolei

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \lambda \\ \lambda_E \end{pmatrix} (E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}E - \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}E + \frac{5}{3} \\ \frac{13}{3}x_1 - 6x_3 \\ \frac{8}{3}x_1 - x_3 \end{pmatrix},$$

gdzie celowo  $\lambda$  i  $\lambda_E$  zostały uzależnione ‘tylko’ od  $x_1$ ,  $x_3$ . Dodatniość  $x_1$  i  $x_3$  oznacza, że  $E \in (2, 5)$ . Co tym razem z drugą nierównością  $3x_1 + \lambda - 4\lambda_E \geq 0$ ? Po podstawieniu rozwiązań jej lewa strona to  $-\frac{10}{3}x_1 - 2x_3$ , a więc wielkość ujemna. Wniosek:  $E(\{1, 3\}) = \emptyset$ .

Jeśli chodzi o etap OUT =  $\{3\}$ , to analogiczne rachunki dają w efekcie  $E(\{1, 2\}) = (4, 5)$ . Zatem, podsumowując, z całego przedziału  $[E_{\min}, E_{\max}] = [2, 5]$  dostajemy tutaj  $(2, 4) \cup (4, 5)$ . Jest to cały  $[E_{\min}, E_{\max}]$  bez trzech węzłów wyróżnionych, w terminologii wprowadzanej w Twierdzeniu 10.1 na końcu tego wykładu.

**Ćwiczenie 10.4.** Skoro, w tym jednym modelu, dla wszystkich, lub prawie wszystkich wartości  $E$  znaleźliśmy portfele relatywnie minimalnego ryzyka w aspekcie  $\mathbf{M}$ , bez trudu możemy już wskazać portfele, które przechodzą na granicę minimalną  $F_{\min}$  w tym modelu i aspekcie. **Należy to zrobić teraz**, po czym porównać odpowiedź z łamaną efektywną w tym samym modelu, będącą przedmiotem Ćwiczenia 7.3 w Wykładzie VII. Zbiór portfeli wyłaniający się z bieżącego ćwiczenia to przykład *łamanej portfeli relatywnie minimalnego ryzyka* ilustrujący Twierdzenie 10.1 poniżej.

Zanim sformułujemy zapowiadane twierdzenie ogólne, przyjrzymy się jeszcze autentycznie przełomowemu przykładowi modelu Markowitza w wymiarze 4, pochodzącemu od K. Więcha [29], w którym *każdy* etap OUT przynosi niepusty zbiór rozwiązań  $E$ . Przykład ten był (tylko) anonsovany w Wykładzie VII. Mianowicie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9\frac{7}{16} & -16\frac{1}{8} & -28\frac{7}{8} & 3\frac{15}{16} \\ -16\frac{1}{8} & 29 & 49\frac{7}{8} & -7\frac{1}{2} \\ -28\frac{7}{8} & 49\frac{7}{8} & 88\frac{5}{8} & -12\frac{5}{16} \\ 3\frac{15}{16} & -7\frac{1}{2} & -12\frac{5}{16} & 2\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Wówczas po wykonaniu wszystkich  $11 = 2^4 - 4 - 1$  etapów OUT uzyskuje się następujące rozwiązania:

| Przedział wartości $E$                                | Skrajne wartości parametru $\lambda_E$                                                        | Etap OUT    |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| $(3, 5)$                                              | $\lambda_E(3+) = -\frac{11}{4}$<br>$\lambda_E(5-) = -\frac{25}{32}$                           | $\{2, 3\}$  |
| $\left(5, \frac{38}{7}\right]$                        | $\lambda_E(5+) = -\frac{47}{80}$<br>$\lambda_E\left(\frac{38}{7}\right) = -\frac{1423}{2800}$ | $\{1, 2\}$  |
| $\left(\frac{38}{7}, \frac{6020}{1051}\right)$        | $\lambda_E\left(\frac{6020}{1051}\right) = -\frac{1951}{4204}$                                | $\{1\}$     |
| $\left[\frac{6020}{1051}, \frac{8288}{1287}\right]$   | $\lambda_E\left(\frac{8288}{1287}\right) = -\frac{1801}{5148}$                                | $\{1, 3\}$  |
| $\left(\frac{8288}{1287}, \frac{73178}{9335}\right]$  | $\lambda_E\left(\frac{73178}{9335}\right) = -\frac{13067}{74680}$                             | $\{3\}$     |
| $\left(\frac{73178}{9335}, \frac{10177}{1129}\right)$ | $\lambda_E\left(\frac{10177}{1129}\right) = -\frac{941}{18064}$                               | $\emptyset$ |
| $\left[\frac{10177}{1129}, \frac{993}{101}\right)$    | $\lambda_E\left(\frac{993}{101}\right) = \frac{599}{14544}$                                   | $\{2\}$     |
| $\left[\frac{993}{101}, \frac{645}{64}\right]$        | $\lambda_E\left(\frac{645}{64}\right) = \frac{865}{9216}$                                     | $\{2, 4\}$  |
| $\left(\frac{645}{64}, \frac{7499}{587}\right)$       | $\lambda_E\left(\frac{7499}{587}\right) = \frac{5341}{9392}$                                  | $\{4\}$     |
| $\left[\frac{7499}{587}, 22\right)$                   | $\lambda_E(22-) = \frac{19}{8}$                                                               | $\{3, 4\}$  |
| $(22, 30)$                                            | $\lambda_E(22+) = \frac{167}{64}$<br>$\lambda_E(30-) = \frac{155}{32}$                        | $\{1, 4\}$  |

Nawet w tej chwili (w roku akademickim 2009/10) przykład ten wygląda wspaniale, a co dopiero w roku 2001, gdy się pojawił. Proszę np zwrócić uwagę, jaką formalną symetrię środkową ma ciąg typów przedziałów wartości  $E$  w lewej kolumnie:

$$( ) \leftarrow ( ] \leftarrow ( ) \leftarrow [ ] \leftarrow ( ] \leftarrow ( ) \rightarrow [ ] \rightarrow ( ) \rightarrow [ ] \rightarrow ( ) .$$

**Ćwiczenie 10.5** (sprawdzające). Narysować wykres funkcji

$$(3, 30) \ni E \mapsto \lambda_E(E),$$

której węzły wykresu są zakodowane w powyższej tabeli. (Pomiędzy węzłami, jak wynika z opisu etapów algorytmu, funkcja  $\lambda_E$  jest *liniowa*. Ogólnie jest więc ona kawałkami liniowa.)

*Rozwiązanie.* Zadanie to jest rozwiązane w ostatnim Wykładzie XV (Rysunek 15.2). Wszystkie dane do rysunku są jednak dostępne już teraz i każdy czytelnik może wykonać własną wersję wykresu.

Ogólne twierdzenie na temat zbiorów portfeli relatywnie minimalnego ryzyka w modelach Markowitza musi ... poczekać jeszcze chwilę, bo właśnie teraz nadarza się najlepsza okazja, by ugruntować jednocześnie i model Więcha i twierdzenie K-KT.

Portfeli minimalnego ryzyka szukaliśmy dotąd przy pomocy tego twierdzenia w modelach  $\pm$

doskonale skorelowanych (Ćwiczenia 10.1 i 10.2 powyżej). Natomiast w modelach niezdegenerowanych – jak ten koronny przykład Więcha – jeszcze nie.

**Ćwiczenie 10.6.** W modelu Więcha znaleźć, oczywiście w aspekcie  $\mathbf{M}$ , portfel  $\tilde{x}_{\min}$  o najmniejszej wariancji. (Jest to równocześnie, warto wiedzieć, portfel efektywny w aspekcie  $\mathbf{M}$  o najmniejszej wartości oczekiwanej; więcej o tych sprawach będzie w Wykładzie XI.)

*Wskazówka.* Zastosować algorytm bazujący na twierdzeniu  $K-KT$ , tym razem z jednym ograniczeniem równościowym  $e^T x = 1$  zamiast dwóch i z czterema ograniczeniami nierównościami  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . *Rozwiązanie.* Inne niż sugerowane we wskazówce rozwiązanie, mniej eleganckie (zo to wykorzystujące Tabelę powyżej), jest podane w Przykładzie 11.2.

**Twierdzenie 10.1** (nt zbioru portfeli relatywnie minimalnego ryzyka w modelach Markowitza). • Przy założeniach  $\Sigma > 0$  oraz (10.3), portfele relatywnie minimalnego ryzyka w modelu Markowitza tworzą łamaną  $L$  o nie więcej niż  $2^k - k - 1$  rozłącznych bokach. Każdy bok jest odcinkiem  $(\ )$  lub  $(\ ]$  lub  $[\ )$  lub  $[\ ]$ , i każdy leży w innej ścianie sympleksu  $\Delta^k$  (będącej krawędzią, bądź trójkątem, bądź czworościanem, bądź..., bądź wnętrzem  $\Delta^k$ ). Portfele na różnych bokach  $L$  mają więc różne składy jakościowe, a na danym boku niezmienny skład jakościowy.

•• Nie wszystkie końce boków łamanej  $L$  należą do  $L$ . Takich wyróżnionych przez nienależenie wierzchołków  $L$  zawsze jest nie mniej niż dwa i nie więcej niż  $k$  – są to **niektóre** z wierzchołków sympleksu  $\Delta^k$ , przy czym zawsze – wierzchołki o najmniejszej i największej wartości oczekiwanej. Te **wyróżnione wierzchołki** łamanej  $L$  odpowiadają wartościom parametru  $E \in \left[ \min_{1 \leq i \leq k} (\mu_i), \max_{1 \leq i \leq k} (\mu_i) \right]$ , które pozostają nieobsłużone po wykonaniu wszystkich  $2^k - k - 1$  etapów  $OUT$  dla  $OUT \subset \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\#OUT \leq k - 2$ . Takie wartości  $E$  nazywamy **węzłami wyróżnionymi**.

••• Po domknięciu w wierzchołkach wyróżnionych łamana  $\bar{L}$  jest łamaną spójną.  $\bar{L}$ , czy też części  $\bar{L}$ , jest nazywana **łamaną wierzchołkową** w danym modelu Markowitza (dużo rzadziej nazywa się ją "łamaną portfeli relatywnie minimalnego ryzyka").

## 11. Wykład XI, 11.XII.2009

*Dowód.* Dowodzimy teraz Twierdzenia 10.1, jednego z kilku najważniejszych w wykładach z APRK1.

Zgodnie z algorytmem opisanym w Wykładzie X, wykonujemy wszystkie  $2^k - k - 1$  etapów szukania rozwiązań problemu portfeli relatywnie minimalnego ryzyka, indeksowanych podzbiorami  $IN \subset \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\#(IN) \geq 2$ .<sup>1</sup> W danym etapie  $IN$ , dla  $E \in E(IN)$  [przedział – patrz Definicja 10.1 w Wykładzie X – który może też być pusty; wtedy nic w takim etapie  $IN$  nie dostajemy] otrzymujemy jednoznacznie wyznaczony portfel  $x_E$  leżący na ścianie  $IN$ , przy czym przyporządkowanie  $E(IN) \ni E \mapsto x_E$  jest liniowe.

W tym momencie portfel  $x_E$  nie jest jeszcze zdefiniowany dla jakiegokolwiek wartości  $E$ , która nie wyłania się z algorytmu w Wykładzie X, a są takie – będziemy mieli tego przykłady, patrz część •• w twierdzeniu. Remedium na to jest proste:

a) funkcja  $\sigma(\cdot)$  osiąga minimum na zbiorze  $\Delta^k \cap \{E = \text{const}\}$ ,  $E \in [E_{\min}, E_{\max}]$ ,  $E_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq i \leq k} \mu_i$ ,  $E_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq k} \mu_i$  (jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym) oraz

b) punkt realizujący to minimum jest jedyny, gdyż  $\Delta^k \ni x \mapsto \sqrt{x^T \Sigma x}$  jest ściśle wypukła (patrz Ćwiczenie 6.4 w Wykładzie VI; argumenty nie muszą być zawężane do sympleksu  $\Delta^k$ , mogłyby też być z całej przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ ), więc zawsze, na przykład,  $\sigma(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) < \frac{1}{2}\sigma(x) + \frac{1}{2}\sigma(y)$  dla  $x, y \in \Delta^k$ ,  $x \neq y$ . (Dwa różne portfele minimalizujące ryzyko przy tej samej wartości oczekiwanej produkowałyby trzeci portfel o tej samej wartości oczekiwanej i mniejszym ryzyku.)

Ten jedyny punkt wymieniony w b) i dotyczący danej wartości  $E \in [E_{\min}, E_{\max}]$  nazywamy  $x_E$ . Nie wywołuje to kolizji z poprzednio nadanymi nazwami: dla wartości  $E$  wyłaniających się z algorytmu w Wykładzie X, odrobinę starszy  $x_E$  i teraz nowy  $x_E$  to jeden i ten sam portfel leżący w  $\Delta^k$ .<sup>2</sup>

Uwaga terminologiczna jest taka, że portfel Markowitza  $x_E$  „prawie zawsze” jest czymś innym niż portfel Blacka  $x(E)$ , (6.2), z Twierdzenia 6.1 w Wykładzie VI, i nowe oznaczenie ma o tym przypominać. Czasem jednak  $x_E$  może być portfelem  $x(E)$ ; na przykład wtedy, gdy początkowy etap  $\emptyset$  w algorytmie wnosi niepusty wkład do zbioru portfeli relatywnie minimalnego ryzyka. Można to łatwo doprecyzować:

**Ćwiczenie 11.1.** Uzasadnić, że  $x_E = x(E) \iff x(E) \in \Delta^k$ .

W sytuacji jak w tym ćwiczeniu, dany portfel relatywnie minimalnego ryzyka ma po prostu dwie nazwy: starą  $x(E)$  z Wykładu VI i nową  $x_E$  z bieżącego wykładu.

Wracając do meritum dowodu Twierdzenia 10.1, podstawowym pytaniem jest, czy przedziały  $E(IN)$  są, dla różnych zbiorów  $IN$ , parami rozłączne.

<sup>1</sup> Czasem, szczególnie gdy wymiar  $k$  jest 3 lub 4, wygodniej jest indeksować uzupełniającymi zbiorami  $OUT$ ; najwyklesze przejście do uzupełnień w zbiorze wszystkich indeksów.

<sup>2</sup> W istocie do jednego portfela  $x_E$  wygenerowanego w punkcie b) powyżej dochodzi się przy **słabszych** założeniach, niż w Twierdzeniu 10.1. Wystarczałoby tylko  $\Sigma > 0$ , dające ścisłą wypukłość funkcji ryzyka. Nawet w zupełnie skrajnym wypadku  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ , gdy dziedzina rozważanej funkcji ryzyka kurczy się do punktu. Tylko wtedy .... jest bardzo mało interesujących wartości  $E$  – tylko jedna, więc też w ogóle tylko jeden portfel  $x_E$ .

Odpowiedź brzmi: **tak**, właśnie z powodu jednoznaczności rozwiązań problemu portfeli relatywnie minimalnego ryzyka.  $E(\text{IN}) \cap E(\text{IN}') = \emptyset$  dla  $\text{IN} \neq \text{IN}'$ , bo rozwiązanie, będąc jedynym, nie może leżeć na dwu różnych ścianach.

Wobec tego  $\bigcup_{\#(\text{IN}) \geq 2} E(\text{IN})$  to cały przedział  $[E_{\min}, E_{\max}]$  z wyjątkiem co najwyżej  $k$  wartości odpowiadających zbiorom  $\text{IN}$  jednoelementowym, dla których opisana metoda znajdowania portfela  $x_E$  nie działa (lecz gdzie rozwiązania wcale nie muszą trafiać).

Istotnie, na jakimkolwiek poziomie  $E \in [E_{\min}, E_{\max}]$  odpowiadające mu jedyne rozwiązanie  $x_E$  musi leżeć na jakiejś ścianie sympleksu, i nie można wykluczyć, że jest to ściana 0-wymiarowa. Jeśli rzeczywiście jakiś wierzchołek  $e_i = x_E$  ( $E = \mu_i$ ), to takiej wartości  $E$  nie uzyskuje się z algorytmu.

Liczy ze zbioru  $[E_{\min}, E_{\max}] \setminus \bigcup_{\#(\text{IN}) \geq 2} E(\text{IN})$  to właśnie **węzły wyróżnione** z treści twierdzenia.<sup>3</sup>

Widać też, że  $E_{\min}$  oraz  $E_{\max}$  zawsze są węzłami wyróżnionymi: dla jakiejkolwiek co najmniej 1-wymiarowej ściany  $\text{IN}$  (tj.  $\#(\text{IN}) \geq 2$ ) przedział  $E(\text{IN})$  jest – przy założeniu (10.3) – rozłączny z kresami dolnym i górnym wartości parametru  $E$  na tej ścianie, więc na pewno rozłączny z liczbami  $E_{\min}$  oraz  $E_{\max}$ .

Natomiast **węzły niewyróżnione** to, z definicji, wszystkie te wartości  $E \in (E_{\min}, E_{\max})$ , które są końcami jakichś przedziałów  $E(\text{IN})$ ,  $\#(\text{IN}) \geq 2$ , uwaga: leżącymi w  $E(\text{IN})$ .

Definiujemy teraz łamaną  $\mathbb{L}$  jako

$$\bigcup_{\#(\text{IN}) \geq 2} \{x_E \mid E \in E(\text{IN})\}.$$

Jest to suma nie więcej niż  $2^k - k - 1$  rozłącznych odcinków różnych typów na końcach:  $(\quad)$ ,  $(\quad]$ ,  $[\quad)$  lub  $[\quad]$ . Jak są one położone względem siebie w  $\Delta^k$ ? Dlaczego  $\mathbb{L}$ , po domknięciu, jest spójną łamaną?

Niech, dla ustalenia uwagi,  $E_{\min} < \tilde{E} \leq E_{\max}$  i **albo**  $\tilde{E}$  – węzeł wyróżniony z podchodzącym do niego z lewej przedziałem  $E(\text{IN}')$ , przy czym oczywiście  $\tilde{E} \notin E(\text{IN}')$ ; np.  $\tilde{E} = 22$  w przykładzie Więcha, kiedy to  $E(\{1, 2\}) = (\frac{7499}{587}, 22)$  oraz  $E(\{2, 3\}) = (22, 30]$ .

**Albo też**  $\tilde{E}$  – węzeł niewyróżniony z podchodzącym do niego z lewej przedziałem  $E(\text{IN}') \not\rightarrow \tilde{E}$ . (W tym drugim przypadku oczywiście  $\tilde{E} < E_{\max}$  i  $\tilde{E}$  już z konieczności należy do odpowiedniego przedziału  $E(\text{IN})$  podchodzącego do  $\tilde{E}$  z prawej.) Np.  $\tilde{E} = \frac{6020}{1051}$  w przykładzie Więcha, kiedy to  $E(\{2, 3, 4\}) = (\frac{38}{7}, \frac{6020}{1051})$  oraz  $E(\{2, 4\}) = [\frac{6020}{1051}, \frac{8288}{1287}]$ .

Pokażemy, że w każdym przypadku portfele  $x_E$  dążą do  $x_{\tilde{E}}$  gdy  $E \rightarrow \tilde{E}-$ , co już da potrzebną ciągłość łamanej wierzchołkowej  $\mathbb{L}$ .

Dla  $E$  trochę mniejszych niż  $\tilde{E}$  portfele  $x_E$  leżą na ścianie  $\text{IN}'$  i mamy konkretne, afiniczne wzgledem  $E$ , wzory na  $x_E$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_E$ . Niech

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} x_E, \\ \tilde{\lambda} &= \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} \lambda, \\ \tilde{\lambda}_E &= \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} \lambda_E.\end{aligned}$$

<sup>3</sup> Że nie muszą to być wszystkie  $k$  wartości  $\mu_i$ , pokazuje przykład:  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , w którym  $E(\{2, 3\}) = (1, \frac{4}{3})$ ,  $E(\{1, 2, 3\}) = (\frac{4}{3}, \frac{28}{9})$ ,  $E(\{1, 2\}) = [\frac{28}{9}, 4)$ ,  $E(\{3, 1\}) = \emptyset$ , a zatem węzły wyróżnione to tylko  $\mu_3 = 1$  oraz  $\mu_2 = 4$ .

Oczywiście  $\tilde{x} \in \Delta^k$ ,  $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_E \in \mathbb{R}$ , przy czym

$$E(\tilde{x}) = E \left( \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} x_E \right) = \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} E(x_E) = \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} E = \tilde{E}.$$

Portfele relatywnie minimalnego ryzyka  $x_E$  dla  $E < \tilde{E}$  spełniały warunki dawane przez twierdzenie K-T:

$$\begin{cases} \Sigma x_E + \lambda e - \lambda_E \mu \geq 0, \\ x_E^T (\Sigma x_E + \lambda e - \lambda_E \mu) = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Przechodząc w (11.1) z  $E$  do  $\lim_{E \rightarrow \tilde{E}-}$ , mamy oczywiście

$$\begin{cases} \Sigma \tilde{x} + \tilde{\lambda} e - \tilde{\lambda}_E \mu \geq 0, \\ \tilde{x}^T (\Sigma \tilde{x} + \tilde{\lambda} e - \tilde{\lambda}_E \mu) = 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

Z twierdzenia K-KT,  $\tilde{x}$  jest zatem portfelem relatywnie minimalnego ryzyka w  $\Delta^k$  mającym wartość oczekiwaną  $\tilde{E}$ , czyli  $\tilde{x} = x_{\tilde{E}}$ . Dowód twierdzenia jest zakończony.  $\square$

*Uwaga 11.1* (po dowodzie). Uzyskane w tym dowodzie wartości współczynników Lagrange'a  $\tilde{\lambda}$  i  $\tilde{\lambda}_E$  nie muszą być określone jednoznacznie. Są jednoznaczne dla wartości  $\tilde{E}$  – węzłów niewyróżnionych (bo wtedy mamy jednoznaczność dla  $E \in E(\text{IN})$  na ścianie IN takiej, że  $\tilde{E} \in E(\text{IN})$ , i w szczególności dla  $E = \tilde{E}$ ; patrz też Wniosek 15.1 w Wykładzie XV).

Nie muszą natomiast być jednoznaczne dla wartości  $\tilde{E}$  – węzłów wyróżnionych, porównaj np różne granice jednostronne współczynników  $\lambda_E$  w  $\tilde{E} = 5$  lub 22 w przykładzie Więcha. (Patrz też Wniosek 15.2 w Wykładzie XV.)

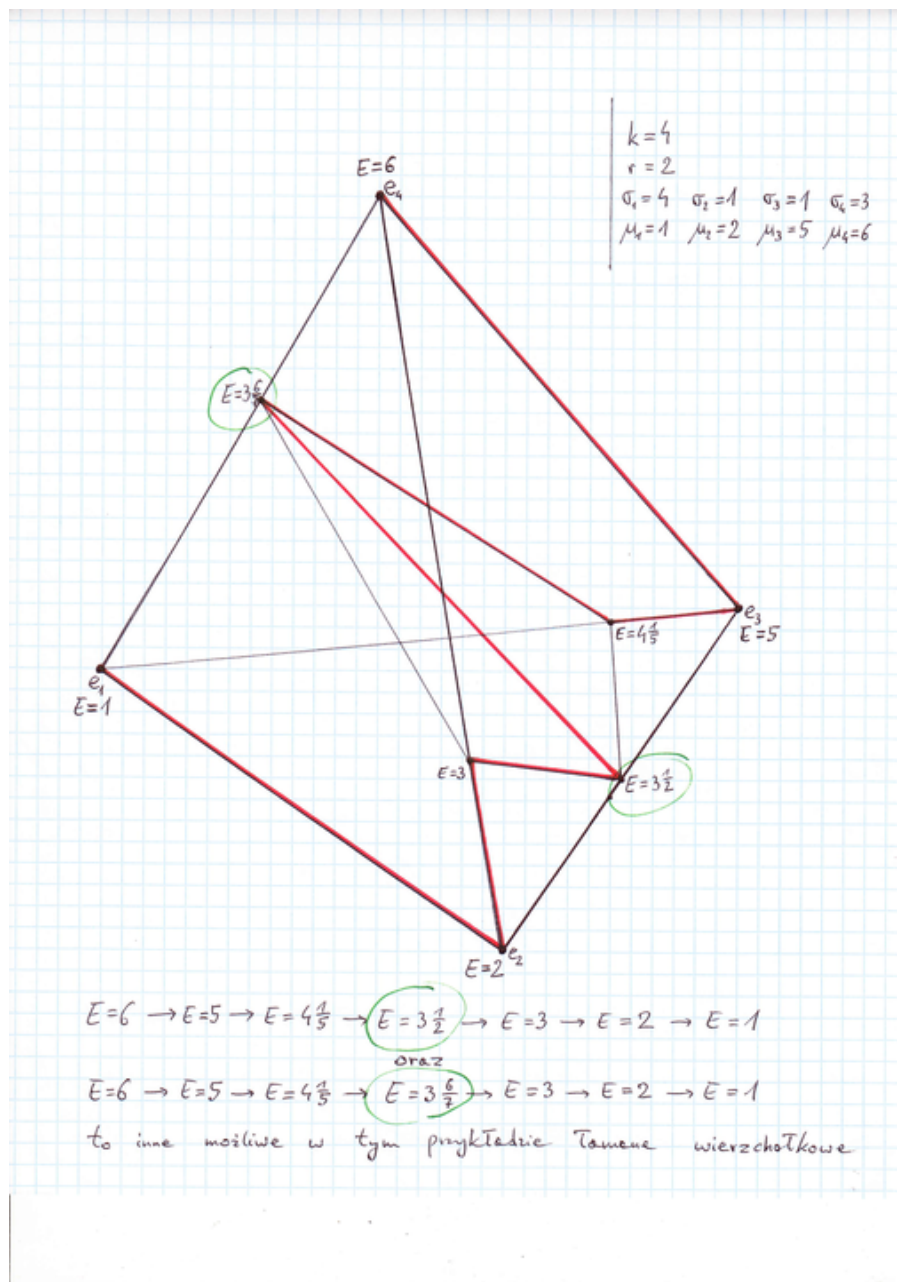
*Uwaga 11.2.* W warunkach Twierdzenia 10.1 mamy jednoznaczność łamanej wierzchołkowej Ł. Możemy oglądać dosyć imponujące przykłady łamanych: na Rysunku 7.5 w Wykładzie VII (złożona tylko z portfeli efektywnych, więc tożsama z łamaną efektywną), czy na Rysunku 15.1 w Wykładzie XV (ilustrującym przykład Więcha). Trzeba jednak pamiętać, że tę jednoznaczność mamy przy założeniach Twierdzenia 10.1. Gdy macierz kowariancji jest tylko nieujemnie określona, wtedy może zatrać się jednoznaczność spójnej łamanej obsługującej – po obłożeniu odwzorowaniem  $\mathcal{M}$  – całą granicę  $F_{\min}$  w aspekcie  $\mathbf{M}$ .

Dla przykładu, oto rysunek sympleksu  $\Delta^4$ , który należy oglądać razem z Rysunkiem 3.3 w Wykładzie III. Jedną z takich możliwych łamanych jest łamana narysowana tu na czerwono (ma ona 7 boków). Niżej na rysunku wskazane są dwie inne (każda z nich ma 6 boków). Możliwa jest jeszcze inna łamana, najprostsza z nich wszystkich, mająca 5 boków:  $E = 6 \rightarrow E = 5 \rightarrow E = 4\frac{1}{5} \rightarrow E = 3 \rightarrow E = 2 \rightarrow E = 1$ .

[W wersji pdf rysunek nie mieści się tutaj, za to otwiera następną stronę.]

Tym samym mamy już przykład, gdy po osłabieniu założeń Twierdzenia 10.1 ztraca się jednoznaczność łamanej Ł. Trzeba jednak też wspomnieć, że jednoznaczna łamana Ł obsługująca  $F_{\min}$  może istnieć i przy osłabionych założeniach. Już Przykład 4.2 w Wykładzie IV był/jest taki! Jednoznaczna łamana w nim to  $e_1 \rightarrow \frac{1}{2}(e_1 + e_3) \rightarrow \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \rightarrow e_2$ ; patrz też dolna część Rysunku 4.6 w Wykładzie IV.

**Ćwiczenie 11.2.** Dla portfeli relatywnie minimalnego ryzyka położonych na boku  $\frac{1}{2}(e_1 + e_3) \rightarrow \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$  łamanej *implicite* obecnej w Przykładach 4.2 i 7.1, a więc portfeli spełniających w



Rysunek 11.1. Mocno niejednoznaczna łamana wierzchołkowa w modelu  $\pm$  doskonale skorelowanym.

szczegółności odpowiednie warunki K-KT przy relatywnej minimalizacji ryzyka portfeli Markowitza, znaleźć wszystkie możliwe wartości współczynnika Lagrange'a  $\lambda_E$  we wspomnianych warunkach K-KT.

*Rozwiązanie.* Z opisu łamanej widzimy, że w ćwiczeniu chodzi o etap  $OUT = \emptyset$ . Wspomniany bok łamanej jest rozwiązaniem – wkładem tego właśnie etapu do całej konstrukcji łamanej.

Bierzemy **dowolny** punkt  $(x_1, x_2, x_3)^T$  z tego boku. Układ równań

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_E \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

ma więc, przy jakichś współczynnikach  $\lambda$  i  $\lambda_E$ , rozwiązanie (i to w liczbach dodatnich, co bez znaczenia). Zatem rząd macierzy tego układu równań liniowych i rząd macierzy rozszerzonej o kolumnę wyrazów wolnych – są równe (twierdzenie Kroneckera-Capellego):

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3\lambda_E - \lambda \\ 0 & 1 & 1 & \lambda_E - \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 2\lambda_E - \lambda \end{pmatrix}.$$

Stąd  $2\lambda_E - \lambda - (\lambda_E - \lambda) = 0$ , czyli  $\lambda_E = 0$ . We wszystkich portfelach na tym boku warunki K-T wymuszają jedną jedyną wartość  $\lambda_E = 0$  (mimo, że portfele te, jak wiemy, nie są efektywne w aspekcie **M**).

*Uwaga 11.3.* Łamana wierzchołkowa jest zbudowana z portfeli  $x_E$ . W zasadzie wiemy już, z Ćwiczenia 11.2 powyżej, kiedy  $x_E = x(E)$ . Jednak tamta wiedza jest mało operatywna: co to znaczy, że  $x(E) \in \Delta^k$ ? Nie należy sądzić, że jest tak tylko wtedy, gdy prosta krytyczna Blacka idzie przez wnętrze sympleksu  $\Delta^k$ , względnie gdy muska jeden z wierzchołków  $\Delta^k$ . Prosta krytyczna może przecież nie spotykać wnętrza całego sympleksu, tylko wnętrze jakiejś mniej-wymiarowej jego ściany! Przykład takiej sytuacji jest w ćwiczeniu tu poniżej.

**Ćwiczenie 11.3.** W jednym z klasycznych przykładów używanych do ilustrowania wykładów z APRK1,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

prosta krytyczna Blacka trafia w portfel  $e_1$ , przez który wchodzi do wnętrza trójkąta  $\Delta^3$ , po czym wychodzi zeń przez wnętrze ściany  $\overline{e_2 e_3}$ . Zmienić wartość współczynnika  $\rho_{23} = -\frac{3}{2\sqrt{5}} \approx -0.6708$  na taką, by prosta krytyczna w zmienionym modelu zawierała bok  $\overline{e_1 e_3}$ .<sup>4</sup>

*Rozwiązanie.* Szukamy – Twierdzenie 5.1 w Wykładzie V – wartości  $\rho$  takiej, by portfel  $e_3$  był krytyczny, tzn. by trzeci wiersz macierzy kowariancji był liniowo zależny od wektorów  $\mu$  oraz  $e$ :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2\sqrt{5}\rho & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4\sqrt{5}\rho.$$

<sup>4</sup> ma to związek z zadaniem na egzaminie z APRK1 na Wydziale MIM UW w III.2009

Stąd  $\rho = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \approx -0.2236$ . (Nie zapominamy też sprawdzić, czy w ogóle dostajemy wtedy macierz przydatną w analizie portfelowej – tu owszem, tak. Tą odpowiedzią w ćwiczeniu jest  $\Sigma' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .)

**Przykłady węzłów wyróżnionych i niewyróżnionych** w łamanych wierzchołkowych w Twierdzeniu 10.1.

- Dla przykładu pojawiającego się w Ćwiczeniu 11.3 powyżej jeszcze **przed** zmianą współczynnika korelacji  $\rho_{23}$ ,  $E(\{2, 3\}) = (1, 2]$ ,  $E(\{1, 2, 3\}) = (2, 3)$ ,  $E(\{1, 2\}) = (3, 4)$ ,  $E(\{3, 1\}) = \emptyset$ . Zatem wszystkie trzy wartości oczekiwane  $\mu_i$  są węzłami wyróżnionymi, natomiast wartość 2 jest węzłem niewyróżnionym.
- Dla Przykładu 4.1 w Wykładzie IV, bardzo dobrze wtedy rozpracowanego (patrz też Rysunek 4.7),  $E(\{2, 3\}) = (1, \frac{4}{3}]$ ,  $E(\{1, 2, 3\}) = [\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ ,  $E(\{3, 1\}) = [\frac{8}{3}, 3)$ ,  $E(\{1, 2\}) = \emptyset$ . Zatem węzły wyróżnione to tylko  $\mu_2 = E_{\min}$  oraz  $\mu_1 = E_{\max}$ . Dochodzą do nich jeszcze dwa węzły niewyróżnione  $\frac{4}{3}$  i  $\frac{8}{3}$ .

**Stwierdzenie 11.1.** W modelu Markowitza  $(\Sigma, \mu)$ ,  $\Sigma > 0$ , spełniającym założenie (10.3), funkcja  $[E_{\min}, E_{\max}] \ni E \mapsto \sigma(x_E)$  jest ściśle wypukła.

*Dowód.* Niech  $E \neq E'$ , obie wartości wzięte ze wskazanego przedziału, oraz  $s, t > 0$ ,  $s + t = 1$ . Wtedy wystarczy porównać ryzyka portfeli  $x_{sE+tE'}$  oraz  $sx_E + tx_{E'}$ , z których drugi też leży w  $\Delta^k$  i ma taką samą wartość oczekiwaną  $sE + tE'$  jak pierwszy. Z definicji pierwszego portfela mamy pierwszą (nieostrą) nierówność w

$$\sigma(x_{sE+tE'}) \leq \sigma(sx_E + tx_{E'}) < s\sigma(x_E) + t\sigma(x_{E'}),$$

zaś druga (ostra) nierówność spowodowana jest ścisłą wypukłością funkcji  $x \mapsto \sqrt{x^T \Sigma x}$ , już dobrze znaną z Ćwiczenia 6.4 (Wykład VI).  $\square$

Założenie (10.3) w Stwierdzeniu 11.1 jest nadmiarowe – porównaj wcześniej w tym wykładzie przypis nr 2; w wersji html – przypis nr 30. Jest ono jednak eksponowane celowo dla utrzymania przejrzystości całej sytuacji, ponieważ pojawiło się już w Twierdzeniu 10.1, pomagając uprościć jego [niedawno przeprowadzony] dowód.

**Wniosek 11.1.** Przy tych samych założeniach co w Stwierdzeniu 11.1, również funkcja  $[E_{\min}, E_{\max}] \ni E \mapsto \sigma^2(x_E)$  jest ściśle wypukła.

Istotnie, jest to złożenie funkcji ściśle wypukłej ze Stwierdzenia 11.1 z funkcją  $(\ )^2$ , która jest rosnąca i ściśle wypukła na dodatniej półosi prostej rzeczywistej.

**Stwierdzenie 11.2.** Przy założeniu  $\Sigma > 0$ , w aspekcie  $\mathbf{M}$  istnieje jeden jedyny portfel  $x \in \Delta^k$  minimalizujący ryzyko wśród wszystkich portfeli Markowitza. Oznaczamy go  $\tilde{x}_{\min}$ .

Istotnie. Jego istnienie wynika z twierdzenia Weierstrassa. Jego jedyność wynika ze ścisłej wypukłości ryzyka portfeli przy dodatniej macierzy kowariancji.

**Przykład 11.1.** W przykładzie Więcha w Wykładzie X już znaleźliśmy (my = ci, którzy wykonali Ćwiczenie 10.6) taki portfel  $\tilde{x}_{\min}$ , drogą „przeczesań” wielu etapów przy sprawdzaniu warunków K-KT.

Teraz, w sytuacji ogólnej, będziemy używać tego samego symbolu na portfel o najmniejszym ryzyku w aspekcie  $\mathbf{M}$ :  $\tilde{x}_{\min}$ .

**Obserwacja. 11.1** Funkcja  $[E(\tilde{x}_{\min}), E_{\max}] \ni E \mapsto \sigma(x_E)$  jest ściśle rosnąca.

Przedział  $[E(\tilde{x}_{\min}), E_{\max}]$  jest maksymalnym przedziałem rosnącości funkcji  $[E_{\min}, E_{\max}] \ni E \mapsto \sigma(x_E)$ .

Istotnie, punkt  $E = E(\tilde{x}_{\min})$  jest punktem globalnego minimum funkcji ze Stwierdzenia 11.1. Funkcja ściśle wypukła, poczynając od miejsca swojego globalnego minimum, jest ściśle rosnąca. Przy tym maksymalność podanego przedziału jest od razu widoczna.

**Stwierdzenie 11.3.** (a) Przy założeniu  $\Sigma > 0$  portfel  $\tilde{x}_{\min}$  jest zawsze efektywny w aspekcie  $\mathbf{M}$ .

(b) Przy założeniach  $\Sigma > 0$  i (10.3), portfele efektywne w aspekcie  $\mathbf{M}$  to spójna część łamanej  $\bar{L}$  zaczynająca się w  $x_{E_{\max}}$  i kończąca się w  $\tilde{x}_{\min}$ .

Dowód. Dowód (a). Gdyby punkt  $\mathcal{M}(\tilde{x}_{\min})$  leżał w cieniu jakiegoś punktu  $\mathcal{M}(x)$ ,  $x \in \Delta^k$ , to byłoby

$$\sigma(x) \leq \sigma(\tilde{x}_{\min}) \quad \text{oraz} \quad E(x) \geq E(\tilde{x}_{\min}),$$

przy czym co najmniej jedna z tych nierówności byłaby ostra. Jednak pierwsza nierówność jest tu z konieczności równością  $\sigma(x) = \sigma(\tilde{x}_{\min})$ , i to równością ryzyk dwóch różnych portfeli. W takiej sytuacji średnia arytmetyczna tych portfeli, również leżąca w  $\Delta^k$ , miałaby ryzyko mniejsze od minimalnego możliwego, sprzeczność. (Drugiej nieostrej nierówności w ogóle tu nie użyliśmy.)

Dowód (b). Portfele  $x_E$  dla  $E_{\min} \leq E < E(\tilde{x}_{\min})$  są oczywiście zdominowane przez  $\tilde{x}_{\min}$ , bo  $\sigma(\tilde{x}_{\min}) < \sigma(x_E)$ . Nie są więc efektywne (patrz specyfikacja po ogólnej Definicji 7.2 w Wykładzie VII).

Co dla  $E(\tilde{x}_{\min}) < E \leq E_{\max}$ ? Gdyby jakiś portfel  $x \in \Delta^k$  dominował wtedy portfel  $x_E$ , tzn. byłoby

$$\sigma(x) \leq \sigma(x_E) \quad \text{oraz} \quad E \leq E(x) \quad (11.3)$$

i co najmniej jedna z tych nierówności była ostra, to:

- gdyby to pierwsza nierówność w (11.3) była ostra, wtedy, używając drugiej nierówności w (11.3) oraz Obserwacji 11.1, mielibyśmy  $\sigma(x_E) \leq \sigma(x_{E(x)}) \leq \sigma(x)$ ,<sup>5</sup> a więc dokładnie przeciwnie, niż mówi pierwsza (teraz, pamiętamy, ostra) nierówność w (11.3).
- Gdyby zaś druga nierówność w (11.3) była ostra, to, znowu dzięki niej i Obserwacji 11.1, byłoby  $\sigma(x_E) < \sigma(x_{E(x)}) \leq \sigma(x)$ , czyli znowu dokładnie przeciwnie niż w pierwszej, teraz nieostrej, nierówności w (11.3)!

Stąd wniosek, że hipotetyczny portfel  $x$  dominujący portfel  $x_E$  nie istnieje, więc ten ostatni jest efektywny (jeszcze raz Definicja 7.2 i jej specyfikacja).  $\square$

**Definicja 11.1.** Część łamanej wierzchołkowej  $\bar{L}$ , złożoną z portfeli efektywnych w aspekcie  $\mathbf{M}$  i dokładnie opisaną w Stwierdzeniu 11.3, nazywamy **łamaną efektywną**. Jest to domknięta i spójna część łamanej  $\bar{L}$  – jej [chciałoby się powiedzieć] podłamana.

Teraz już innymi oczami odczytujemy hasło pod Rysunkiem 7.5 w Wykładzie VII. Inaczej też zapewne odbieramy garść informacji historycznych podaną na końcu tamtego Wykładu VII.

Jak szukać łamanych efektywnych? W praktyce konkretnie i skutecznie szuka się łamanej efektywnej [w danym modelu spełniającym założenia Twierdzenia 10.1] analizując **wszystkie** funkcje  $\lambda_E(\cdot)$  uzyskiwane na kolejnych etapach algorytmu szukania łamanej wierzchołkowej podanego na Wykładzie X. Trzeba tylko wyrazić rosnącość ściśle wypukłej funkcji  $\sigma^2(x_E)$  na maksymalnym możliwym przedziale, uchwyconą w Obserwacji 11.1, przez znak jej pochodnej – w punktach (prawie wszystkich), gdzie jest różniczkowalna. Pomocna w tym będzie, oczywiście, Obserwacja 6.1 z Wykładu VI.

Na jej podstawie, w punktach wewnętrznych wszystkich niepustych przedziałów  $E(\text{IN})$ , czyli we wszystkich punktach  $E$  przedziału  $[E_{\min}, E_{\max}]$  bez co najwyżej  $2^k - k$  punktów, funkcja  $\sigma^2(x_E)$  jest różniczkowalna i jej pochodna wynosi  $2\lambda_E(E)$ , gdzie  $\lambda_E(\cdot)$  wzięta jest z teorii Blacka

<sup>5</sup> druga w tym ciągu nierówności dlatego, że portfele  $x$  oraz  $x_{E(x)}$  mają tę samą wartość oczekiwaną  $E(x)$ , zaś portfel  $x_{E(x)}$  minimalizuje ryzyko przy ustalonej wartości oczekiwanej  $E(x)$

na odpowiednim przedziale  $E(\text{IN}) \ni E$ .

(\*) Jeśli w jakimś *takim* punkcie odpowiednia funkcja  $\lambda_E$  ma miejsce zerowe, wtedy portfel  $\tilde{x}_{\min}$  rozpoczynający łamaną efektywną, a więc i cała ta łamana, są już znalezione.

(\*\*) Jeśli nie, to jeden z węzłów (nie wiemy w tej chwili: wyróżniony czy niewyróżniony, w tym momencie nie ma to znaczenia) rozgranicza znaki funkcji  $\lambda_E(\cdot)$ : na lewo od niego odpowiednie funkcje obcięte do wnętrza przedziałów  $E(\text{IN})$  są ujemne, zaś na prawo od niego są dodatnie. Od tego więc węzła aż do  $E_{\max}$  rozciąga się maksymalny przedział rosnącości funkcji  $\sigma^2(x_E)$ , czyli łamana efektywna zaczyna się w punkcie (portfelu)  $x_{\text{ten węzeł}}$ .

Poniżej (Przykład 11.2) prześledzimy te stwierdzenia na koronnym dla nas przykładzie Więcha podanym w Wykładzie X. Na jego temat jest tam dokładna Tabela z wszystkimi funkcjami  $\lambda_E(\cdot)$  wraz z ich dziedzinami.

*Uwaga 11.4.* Czytelnik ma prawo zapytać, co dzieje się z różniczkowalnością funkcji  $\sigma^2(x_E)$  w węzłach, wyróżnionych i niewyróżnionych, których – jak wiemy – łącznie jest zawsze nie więcej niż  $2^k - k$ ? Wyczerpujące odpowiedzi będą podane w Wykładzie XV w sekcji ‘Uzasadnienie poprawności algorytmu CLA’. **Różniczkowalność** okaże się mieć miejsce **zawsze w węzłach niewyróżnionych** (Wniosek 15.1). Zaś **węzły wyróżnione** w Wykładzie XV okażą się być rzędnymi punktów, w których granica minimalna w aspekcie **M** – przy warunkach niezdegenerowania przyjmowanych w algorytmie CLA – ma **punkty załamania** (kinki, Wniosek 15.2).

Natomiast przy ogólnych założeniach Twierdzenia 10.1 mogą też pojawiać się węzły wyróżnione **niedające** załamań granicy minimalnej: węzły wyróżnione – punkty gładkości. W Ćwiczeniu 11.3 wcześniej w bieżącym wykładzie podany już był przykład takiej patologii: przed zmianą współczynnika  $\rho_{23}$ , wartość  $E = \mu_1 = 3$  jest tam węzłem wyróżnionym i też rzędną punktu gładkości na  $F_{\min}$ . I także po zmianie wartości  $\rho_{23}$  węzeł  $\mu_1$  pozostaje wyróżniony i gładki!<sup>6</sup>

**Przykład 11.2.** Możliwe jest inne (przynajmniej formalnie; tak, czy inaczej posługujemy się funkcjami  $\lambda_E(\cdot)$  pochodzącymi z zastosowań twierdzenia K-KT) rozwiązanie Ćwiczenia 10.6 z Wykładu X. Operujemy już teraz bogatszą terminologią pochodzącą z Twierdzenia 10.1 i z bieżącego wykładu:

Łamana efektywna w łamanej  $\mathbb{L}$  zaczyna się na ścianie  $\{1, 3, 4\}$ , gdyż podczas etapu  $\text{OUT} = \{2\}$  odpowiednia funkcja  $\lambda_E(\cdot)$  zmienia znak w punkcie wewnętrznym przedziału  $E(\{1, 3, 4\})$  – patrz właśnie Tabela w Wykładzie X. (Innymi słowy, z dwu możliwości (\*) i (\*\*) wydzielonych powyżej, zachodzi ta pierwsza.) Z podanych w Tabeli skrajnych argumentów i wartości  $\lambda_E$  w tym etapie znajdujemy miejsce zerowe  $\lambda_E\left(\frac{12293}{1298}\right) = 0$ . Tę wartość  $E$  podstawiamy do prostej krytycznej ściany  $\{1, 3, 4\}$ :

$$\tilde{x}_{\min} = \begin{pmatrix} -\frac{865}{711} + \frac{142}{711}E \\ 0 \\ -\frac{1057}{3555} + \frac{199}{3555}E \\ \frac{993}{395} - \frac{101}{395}E \end{pmatrix} \bigg|_{E=\frac{12293}{1298}} = \begin{pmatrix} \frac{438}{649} \\ 0 \\ \frac{1511}{6490} \\ \frac{599}{6490} \end{pmatrix}.$$

**Ćwiczenie 11.4.** Narysować łamaną efektywną w przykładzie Więcha.

*Wskazówka.* Spojrzeć na Rysunek 15.1, trzymając w ręku Przykład 11.2.

<sup>6</sup> Nasuwa się pytanie, co dzieje się z tym węzłem w tak zwanym międzyczasie – ?

Łamana wierzchołkowa to – w pierwotnej teorii Markowitza – odpowiednik prostej krytycznej Blacka. Może ona być naprawdę skomplikowana; wskazywaliśmy już odpowiednie rysunki uzasadniające tę tezę. W wykładach, dosyć paradoksalnie, najpierw poznaje się prostą Blacka, zaś łamaną wierzchołkową – będącą powrotem do źródeł teorii portfelowej! – dopiero później.

Natomiast łamana efektywna to, oczywiście, odpowiednik półprostej efektywnej Blacka, takiej jak np. pokazana na Rysunku 7.6 w Wykładzie VII. Jest ona obiektem dość finezyjnym, budowanym w oparciu o dość subtelne pojęcie efektywności portfela. Czasem potrafi być nawet całą łamaną wierzchołkową (jak na Rysunku 7.5 w przykładzie Krzyżewskiego), czasem tylko jednym portfelem  $x_{E_{\max}}$ , np. gdy  $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & 7 & \frac{7}{2} \\ 7 & 4 & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .<sup>7</sup> No i otwarte pozostaje „Ćwiczenie” 7.5...

Poznaliśmy już **zmodyfikowany** model Tobina (Black + „ $\mu_0$ ”), zaś teraz poznamy **oryginalny** model Tobina: dołączenie banku oferującego bezryzykowną stopę zwrotu  $\mu_0$  (obowiązującą w obie strony, pracownicy banku żywią się powietrzem) do podstawowego modelu Markowitza.

Jeśli inwestor mający  $L$  środków własnych dopożycza jeszcze  $A_0$  środków z banku, wtedy przeznacza na zakup akcji  $L + A_0$  i jego bilans budżetowy to

$$L + A_0 = \sum_{i=1}^k A_i, \quad (11.4)$$

gdzie  $A_i$  to kwota, za którą kupuje akcje spółki nr  $i$ . Jeśli zaś kwotę  $A_0$  wziętą ze swojego kapitału  $L$  lokuje on w banku, natomiast za resztę kupuje akcje spółek, wtedy jego bilans wygląda

$$L = A_0 + \sum_{i=1}^k A_i. \quad (11.5)$$

Równania (11.4), (11.5) zapisujemy przejrzyściej w postaci

$$1 = \left(-\frac{A_0}{L}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{L}, \quad (11.6)$$

względnie

$$1 = \frac{A_0}{L} + \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{L}. \quad (11.7)$$

W sytuacji (11.6) oznaczamy  $x_0 = -\frac{A_0}{L} < 0$ , zaś w sytuacji (11.7)  $x_0 = \frac{A_0}{L} > 0$ . Ponadto kładziemy  $x_i = \frac{A_i}{L}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  i w ten sposób portfele w modelu Tobina to  $(k+1)$ -tka  $(x_0, x_1, \dots, x_k)^T$ , w których

$$x_0 + x_1 + \dots + x_k = 1, \quad x_1, \dots, x_k \geq 0, \quad x_0 \text{ dowolne niewiększe niż } 1.$$

Ujemne  $x_0$ , porównaj (11.6), oznaczają dopożyczanie środków w banku, natomiast dodatnie nieprzekraczające jedynki  $x_0$ , porównaj (11.7), oznaczają lokowanie [części] własnych środków w banku.

Jaki zbiór tworzą tutaj portfele dopuszczalne  $(x_0, x_1, \dots, x_k)^T$ ? W zmodyfikowanym modelu Tobina w Wykładzie VIII była to, jak pamiętamy, hiperpłaszczyzna  $\tilde{H}$ , a teraz? Patrząc na opis powyżej, widać od razu, że ten zbiór to

$$\tilde{H} = \bigcup_{r \leq 1} \left( r, (1-r)\Delta^k \right), \quad (11.8)$$

<sup>7</sup> Mniejsza już być nie może: portfel  $x_{E_{\max}}$  zawsze jest efektywny w aspekcie  $\mathbf{M}$ .

a więc pewien **nieograniczony** stożek w  $\mathbb{R}^{k+1}$  zbudowany nad sympleksem  $\Delta^k \subset \{0\} \times \mathbb{R}^k$ , czyli pewien nieograniczony wielowymiarowy (dokładnie:  $k$ -wymiarowy) hiper-ostrosłup.

Teoria opisująca ten model jest częściowo podobna do teorii Tobina w sytuacji Blacka. Tamta prowadziła do pojęcia portfela  $x_{\text{op}}$  optymalnego w modelu Blacka ze względu na panującą stopę bezryzykowną  $\mu_0$ . Ta obecna prowadzi do pojęcia portfela  $\tilde{x}_{\text{op}}$  optymalnego w modelu Markowitza ze względu na panującą stopę bezryzykowną  $\mu_0$ , tzn. maksymalizującego wśród portfeli  $x \in \Delta^k$  współczynnik Sharpe'a  $S_{\mu_0}(x)$  (porównaj Wykład IX i też Wykład I), gdzie teraz zakłada się jedynie, że  $-1 \leq \mu_0 < E_{\max}$ ;  $E_{\max}$  jest zdefiniowane na początku tego wykładu.

$$S_{\mu_0}(\tilde{x}_{\text{op}}) = \max_{x \in \Delta^k} S_{\mu_0}(x).$$

Różnica może być zasadnicza, bo [chciałoby się powiedzieć: tradycyjne] portfele Markowitza stanowią tylko drobną część wszystkich portfeli Blacka, i podobnie jest po przyłożeniu do portfeli mapy Markowitza. Niech za ilustrację posłuży następujący przykład [w wersji pdf rysunek przeskakuje na następną stronę]:

Maksima współczynników Sharpe'a w aspektach **M** i **B** różnią się, w tym przykładzie i przy tej stopie bezryzykowej, bardzo.

**Ćwiczenie 11.5.** Dla danych (6.1) użytych do wygenerowania Rysunku 11.2 powyżej [w wersji pdf: poniżej], narysować zbiór osiągalny w modelu Tobina z tymi właśnie parametrami, tzn. zbiór  $\mathcal{M}(\tilde{H})$ .

*Wskazówka.* Użyć w tym celu informacji (11.8). Część pracy (rysowania zbioru osiągalnego) jest już na Rysunku 11.2 ... wykonana.

Matematyczne instrumentarium prowadzące do opisu  $\tilde{x}_{\text{op}}$ , znacznie finezyjniejsze niż w przypadku portfeli  $x_{\text{op}}$ , będzie przedstawione w końcowej części Wykładu XIII i na początku Wykładu XIV, poprzez Twierdzenie 14.1, aż do Twierdzenia 14.2 włącznie. W tej chwili podamy tylko **motywację** i sam **goły wynik** – algorytm prowadzący do znalezienia  $\tilde{x}_{\text{op}}$ .

Czy można jakoś „zgadnąć” taki algorytm, gdy chwilowo mamy tylko wzór na portfel  $x_{\text{op}}$  z Wykładu IX? Pytanie zaiste karkołomne. Być może wzór zastąpić równaniem, bo przy rozgrywaniu analogii [prosta Blacka *versus* łamana wierzchołkowa], przed wzorem na portfele  $x(E)$  mieliśmy równanie uwikłane na te portfele, i właśnie tamto równanie zostało (dzięki czarodziejskiej różdżce – Twierdzeniu 9.2) w coś przemienione.

Tak więc  $x_{\text{op}}$  zapisujemy jako  $\frac{y}{e^T y}$ , gdzie  $y = \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)$ , albo też

$$\Sigma y - \mu + \mu_0 e = 0. \quad (11.9)$$

To teraz spójrzmy z bliska na tamte równania uwikłane

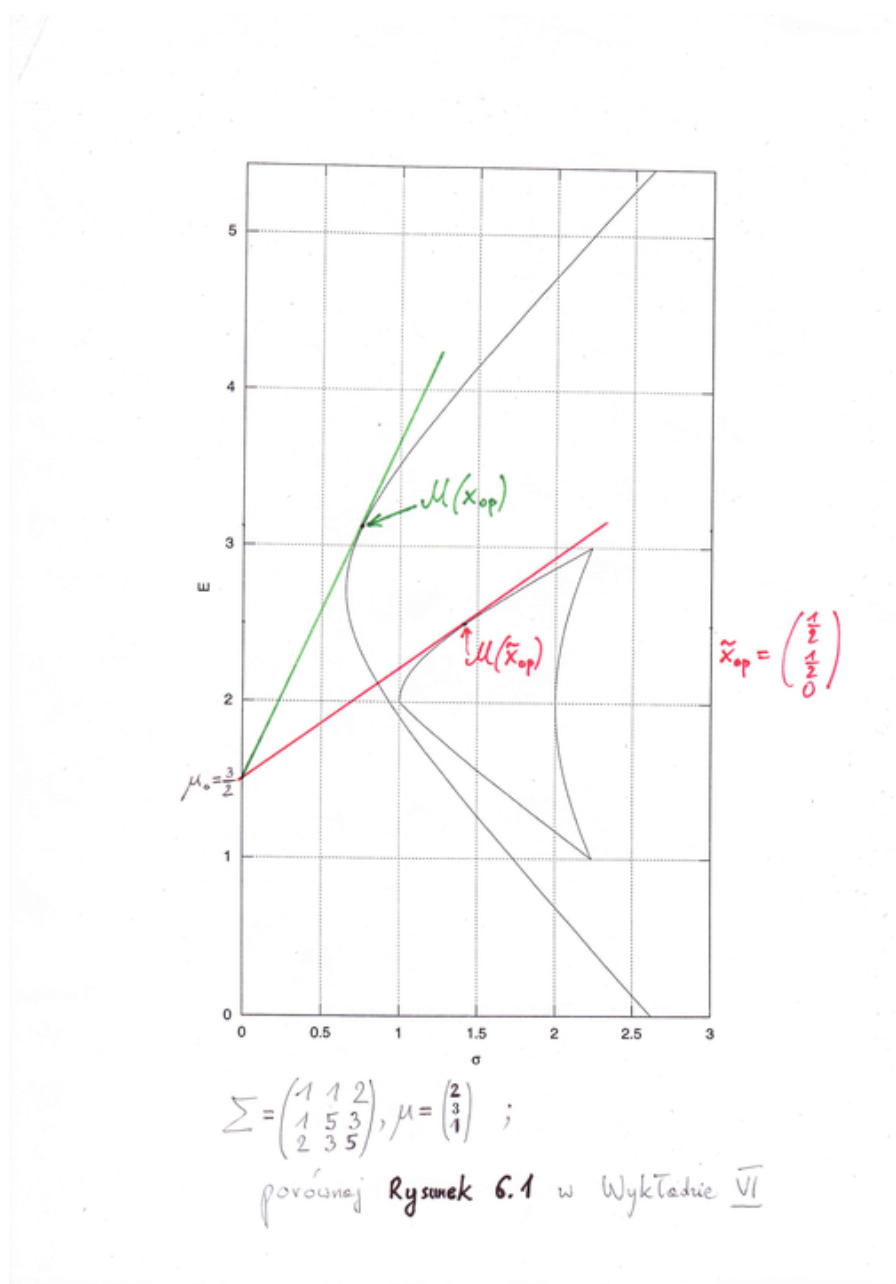
$$\begin{cases} \Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu = 0, \\ \mu^T x = E. \end{cases}$$

na portfel  $x(E)$  leżący w hiperpłaszczyźnie  $H$ .

I spójrzmy, co z nich zrobili czarodzieje K-KT:<sup>8</sup>

$$\begin{cases} \Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu \geq 0, \\ x^T (\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu) = 0, \\ \mu^T x = E, \end{cases}$$

<sup>8</sup> nie dosłownie oni, lecz oni byli „ojcami założycielami”, patrz [12]



Rysunek 11.2. Rysunek 6.1 z dołożoną stopą bezryzykowną  $\mu_0 = \frac{3}{2}$ .

by znaleźć portfel  $x_E \in \Delta^k \subset H$ . Równości zamienili nierównościami i dla równowagi dodali warunek komplementarności.

Przypomnijmy jeszcze, że pierwszy problem rozwiązywał się zupełnie standardowo (słynny układ dwóch równań liniowych o niezerowym wyznaczniku), natomiast drugi – grając umiejętnie nierównościami i komplementarnymi do nich równościami – kawałkami sprowadzał się do pierwszego. Kawałkami ze względu na wartości parametru  $E$ . Takie spojrzenie na drugi problem to właśnie wynik zastosowania twierdzenia K-KT.

Zaryzykujmy więc, chwycimy różdżkę i przemienimy (11.9) w ... coś takiego

$$\Sigma y - \mu + \mu_0 e \geq 0, \quad y \geq 0, \quad e^T y > 0, \quad y^T (\Sigma y - \mu + \mu_0 e) = 0. \quad (11.10)$$

Tak jest, równości znowu zamienione nieostryimi nierównościami i dla równowagi dodany warunek komplementarności ... Okaże się, że portfel  $\tilde{x}_{op}$  istotnie jest normalizacją rozwiązania (lub rozwiązań) problemu (11.10), choć nie zawsze taki portfel będzie jedyny. Macierze  $\Sigma \geq 0$  będą przy tym jak najbardziej dopuszczalne, choć w takich częściowo zdegenerowanych sytuacjach sposób *dochodzenia* do zagadnienia (11.10) będzie inny i delikatniejszy niż gdy  $\Sigma > 0$ . (Sam problem (11.10) czasami bywa nazywany **liniowym zagadnieniem komplementarności**.)

W najciekawszych sytuacjach, gdy  $\Sigma > 0$ , na rozwiązanie będzie się „polować” algorytmicznie i etapami, przez sprowadzanie do (11.9), i następnie sprawdzanie znaków różnych wyrażeń, umiejętnie grając na każdym etapie nierównościami i równoważącymi je komplementarnymi równościami.

Trzeba będzie rozważać szerszą klasę funkcji niż tylko różniczkowalne funkcje wklęsłe i wypukłe, która będzie dobrze pasować do współczynnika Sharpe’a (czy raczej ten współczynnik do niej). Klasę jakby stworzoną dla potrzeb analizy portfelowej,

Wystarczy już tej *meta*-analizy portfelowej. Chcemy wiedzieć, jak konkretnie rozwiązywać problem (11.10).

Zasadniczo – ten problem trzeba atakować w całości i próbować wydobyć, czy wyluskać z niego preportfel(e)  $y$  i później dalej – portfel(e)  $\tilde{x}_{op}$ . Kłopotem jest możliwe częściowe zdegenerowanie macierzy  $\Sigma$ ; Przykład 11.3 poniżej jest na ten temat. Inny przypadek takiego całościowego szukania rozwiązań (11.10), też przy zdegenerowanej macierzy  $\Sigma$ , wystąpi potem w Ćwiczeniu 14.2, z kontynuacją też w Ćwiczeniu 14.3 (w Wykładzie XIV). Będzie to jednak już po zakończeniu dyskusji poprawności (11.10).

W międzyczasie, w sytuacji  $\Sigma \geq 0$ , przyjdzie nam wykonać w Wykładzie XIV solidną pracę przygotowawczą. Chodzi o konstrukcję wypukłej dziedziny dla pre-współczynnika Sharpe’a gdy  $\Sigma \geq 0$  (osobna sekcja w Wykładzie XIV).<sup>9</sup>

Natomiast sytuacja będzie (i jest) dużo bardziej klarowna, gdy macierz kowariancji  $\Sigma$  jest dodatnio określona. Wtedy (pre)portfela  $y$  o nieujemnych składowych (lecz nie wszystkich równych zero!) szukać będziemy etapami. Coś znaleźć musimy, bo portfel optymalny istnieje z ogólnych powodów analityczno-topologicznych. Oto opis etapów algorytmu.

Etap  $\emptyset$ . Szukamy  $y = (y_1, \dots, y_k)^T : y_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$ .

To oznacza (komplementarność!), że  $\Sigma y - \mu + \mu_0 e = 0$ , albo, macierz  $\Sigma$  jest teraz odwracalna,  $y = \Sigma^{-1}(\mu - \mu_0 e)$ , dokładnie jak w zmodyfikowanym Tobinie. Teraz jednak musimy dodatkowo sprawdzić, czy  $y_1 > 0, \dots, y_k > 0$ . Jeśli tak, pre-portfel  $y$  jest znaleziony. Jeśli nie, przechodzimy do

Etap 1. Szukamy  $y : y_1 = 0, y_2 > 0, \dots, y_k > 0$ , a więc  $(\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_i = 0$  dla  $i = 2, 3, \dots, k$  z warunku komplementarności, natomiast  $(\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_1 \geq 0$ . Rozwiązujemy ze względu na  $y_2, y_3, \dots, y_k$  (można, bo wyznacznik odpowiedniego układu  $k - 1$  równań liniowych jest tutaj dodatni, a więc różny od zera; patrz też niżej opis ogólnego etapu OUT), po czym sprawdzamy: tutaj  $k - 1$  ostrych i jedną nieostrą nierówność. Spełnione lub nie; w drugim przypadku przechodzimy do dalszych etapów.

Spróbujmy te potencjalnie możliwe dalsze etapy opisać łącznie, podobnie jak to już zrobiliśmy przy szukaniu portfeli wierzchołkowych  $x_E$  w Wykładzie X.

Etap OUT, gdzie  $OUT \subset \{1, 2, \dots, k\}, 1 \leq \#(OUT) \leq k - 1$ .

Szukamy  $y : y_j = 0$  dla  $j \in OUT, y_i > 0$  dla  $i \in IN = \{1, 2, \dots, k\} \setminus OUT$  (musi być co najmniej jedna składowa  $y_i$ , tj podzbiory  $IN$  mają tutaj co najmniej 1 element – różnica w stosunku do podobnego szukania obiektów  $x_E$ ). Tzn., zawsze z warunku komplementarności,

<sup>9</sup> najwytrwalsi czytelnicy będą mieli satysfakcję estetyczną, jak harmonijne jest tamto zastosowanie do analizy portfelowej funkcji ogólniejszych niż wklęsłe różniczkowalne

szukamy wektora dodatnich rozwiązań układu  $(\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_i = 0$ ,  $i \in \text{IN}$  takich, że  $(\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_j \geq 0$  dla  $j \notin \text{IN}$ .

Rozwiązać taki układ da się zawsze, gdyż można go zapisać w zwarty sposób przy pomocy oznaczeń wprowadzonych w Wykładzie X:

$$\Sigma^{\text{IN}} y^{\text{IN}} = (\mu - \mu_0 e)^{\text{IN}},$$

przy czym wyznacznik macierzy  $\Sigma^{\text{IN}}$  jest jednym z minorów centralnych macierzy  $\Sigma$ , a więc jest dodatni, bo cały ten algorytm jest, przypominamy, przy założeniu  $\Sigma > 0$  (hasło: twierdzenie Sylwestera z wykładu GALu, patrz też Wykład II). Także – akcentujemy to jeszcze raz – dla jednoelementowych zbiorów aktywnych indeksów IN: na głównej przekątnej macierzy  $\Sigma$  stoją same dodatnie liczby.

Czytelnik może jednak w tym miejscu zapytać: skoro i tam w Wykładzie X, i teraz tu w opisie nowego algorytmu, używa się tych samych, zawsze odwracalnych macierzy  $\Sigma^{\text{IN}}$ , dlaczego zatem tam pojawiało się więcej ograniczeń na zbiory IN ?!

Odpowiedź jest w teorii Blacka i współautorów (Wykład VI), na której, ściana po ścianie, oparty jest poprzedni algorytm. Nie szło w nim tylko o odwracalność macierzy, lecz także o jednoznaczne wyznaczanie współczynników [Lagrange’a]  $\lambda$  i  $\lambda_E$ . Dlatego potrzebne są co najmniej dwuelementowe zbiory IN. I dlatego nie dostaje się tam od razu całej spójnej łamanej wierzchołkowej  $\bar{L}$ , tylko uboższą o kilka(naście) wierzchołków  $L$  – i trzeba osobno pracować z węzłami wyróżnionymi i „ich” portfelami na łamanej.

Wracając do rozwiązania układu  $\#(\text{IN})$  równań w obecnym algorytmie: otwarta jest sprawa spełniania przez takie rozwiązanie układu nierówności: ostrych na miejscach o numerach z IN i nieostrych na miejscach o numerach z OUT. Trzeba to każdorazowo sprawdzać, i w przypadku niespełniania zwyczajnie przechodzić do następnego etapu poszukiwań preportfela.

Po przebiegnięciu wszystkich  $2^k - 1$  (lub mniej) etapów, mamy wreszcie preportfel  $y$ , a wraz z nim portfel optymalny  $\tilde{x}_{\text{op}} = \frac{y}{e^T y}$ .

**Przykład 11.3.** To właśnie portfela  $\tilde{x}_{\text{op}}$  szuka się w Zadaniu 3 z kolokwium w dniu 18.XII.2009 – patrz następny Wykład XII.

Macierz kowariancji w tamtym zadaniu jest tylko nieujemnie określona, więc podany tu wyżej algorytm nie stosuje się. Jednak cała sytuacja jest już na tyle dobrze rozpoznana w trakcie dotychczasowych wykładów (patrz w szczególności Przykład 7.1), że po wstępnej analizie od razu wiadomo, na jakim boku trójkąta  $\Delta^3$  należy szukać portfela optymalnego.<sup>10</sup>

<sup>10</sup> i poza tym, generalnie, na kolokwiach i egzaminach pisemnych z APRK1 można mieć ze sobą jednostronnie zapisaną kartkę formatu A4 z wzorami, rysunkami, przykładami, czymkolwiek

## 12. Wykład XII (kolokwium), 18.XII.2009

1. (15p.) Rozważamy rodzinę modeli Blacka  $(\Sigma_\rho, \mu)$ , gdzie

$$\Sigma_\rho = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2\sqrt{2}\rho \\ 1 & 2\sqrt{2}\rho & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Znaleźć (w podanym przedziale) wszystkie wartości parametru  $\rho$ , przy których prosta krytyczna jest równoległa do prostej boku  $\overline{e_2 e_3}$ .
- Jaka jest wtedy odległość prostej krytycznej od prostej boku  $\overline{e_2 e_3}$ ?

2. (15p.) Wychodzimy od znanego przykładu

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zwiększamy teraz  $\rho_{13}$  do pierwszej napotkanej wartości, przy której prosta krytyczna w takim modelu Blacka przechodzi przez wierzchołek  $(1, 0, 0)^T$ . Znaleźć łamaną wierzchołkową i łamaną efektywną w uzyskanym modelu Markowitza. Wykonać odpowiednie rysunki.

3. (10p.) Rozważamy inny znany przykład modelu Markowitza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć w tym modelu portfel optymalny  $\tilde{x}_{\text{op}}$  ze względu na stopę bezryzykowną  $\mu_0 = \frac{1}{2}$  (optymalny, tzn. maksymalizujący współczynnik Sharpe'a).

---

**Pytanie dodatkowe** , będące przedłużeniem zadania nr 1 (NIEOBOWIĄZKOWE):

- Czy  $\tilde{\mathcal{M}}$ -obraz prostej boku  $\overline{e_2 e_3}$  jest wtedy przesunięciem równoległym pocisku Markowitza oglądanego na płaszczyźnie  $(\sigma^2, E)$ ?

Jeśli tak, to o jaki wektor?

Za odpowiedź na to pytanie można uzyskać do 8p., przy czym łączny wynik z kolokwium nie może przekroczyć 40p.

**Przykładowe rozwiązanie Zadania 1 z kolokwium** (patrz też Ćwiczenie 5.1 w Wykładzie V, które mieści też w sobie Pytanie dodatkowe z kolokwium).

Prosta krytyczna ma [więc] równanie

$$x_1 = c, \quad (*)$$

gdzie  $c$  pozostaje do wyznaczenia. Piszemy to równanie w postaci wynikającej z Twierdzenia 5.1 w Wykładzie V:

$$\begin{vmatrix} 9c + 3x_2 + x_3 & 5 & 1 \\ 3c + 2x_2 + 2\sqrt{2}\rho x_3 & 4 & 1 \\ c + 2\sqrt{2}\rho x_2 + 4x_3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ albo}$$

$$10c + 2\sqrt{2}\rho x_2 + (6 - 6\sqrt{2}\rho)x_3 = 0. \quad (**)$$

Warunkiem koniecznym, by równania  $(*)$  i  $(**)$  były tym samym, jest równość współczynników przy  $x_2$  i  $x_3$  w  $(**)$ ,  $2\sqrt{2}\rho = 6 - 6\sqrt{2}\rho$ , stąd  $\rho = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}$ , jedyne rozwiązanie, i przy tym leżące w przedziale  $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ .

Wtedy wnioskiem z  $(*)$  i  $(**)$  jest  $10c + 2\sqrt{2}\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - c) = 0$ , albo  $c = -\frac{3}{17}$ . By znaleźć odległość prostej krytycznej  $x_1 = -\frac{3}{17}$  od prostej boku  $\overline{e_2 e_3}$ , tzn. prostej  $x_1 = 0$ , zauważamy, że przy zmianie wartości  $\text{const}$  (w  $x_1 = \text{const}$ ) od 1 do 0, twierdzenie Pitagorasa mówi, że odpowiednie proste są odległe o  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Zatem, z proporcjonalności, przy zmianie  $\text{const}$  od 0 do  $-\frac{3}{17}$ , odległość odpowiednich prostych wynosi  $\left|-\frac{3}{17}\right| \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{17}\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

*Uwaga 12.1.* – ostrzeżenie do rozwiązania zadania 1 z kolokwium.

Studenci często szukają tej odległości prostych równoległych [leżących w położonej ukośnie płaszczyźnie  $H$ ] używając rzutów tych prostych na płaszczyznę  $(x_2, x_3)$  [uwaga – w wersji pdf rysunek jest na następnej stronie]:

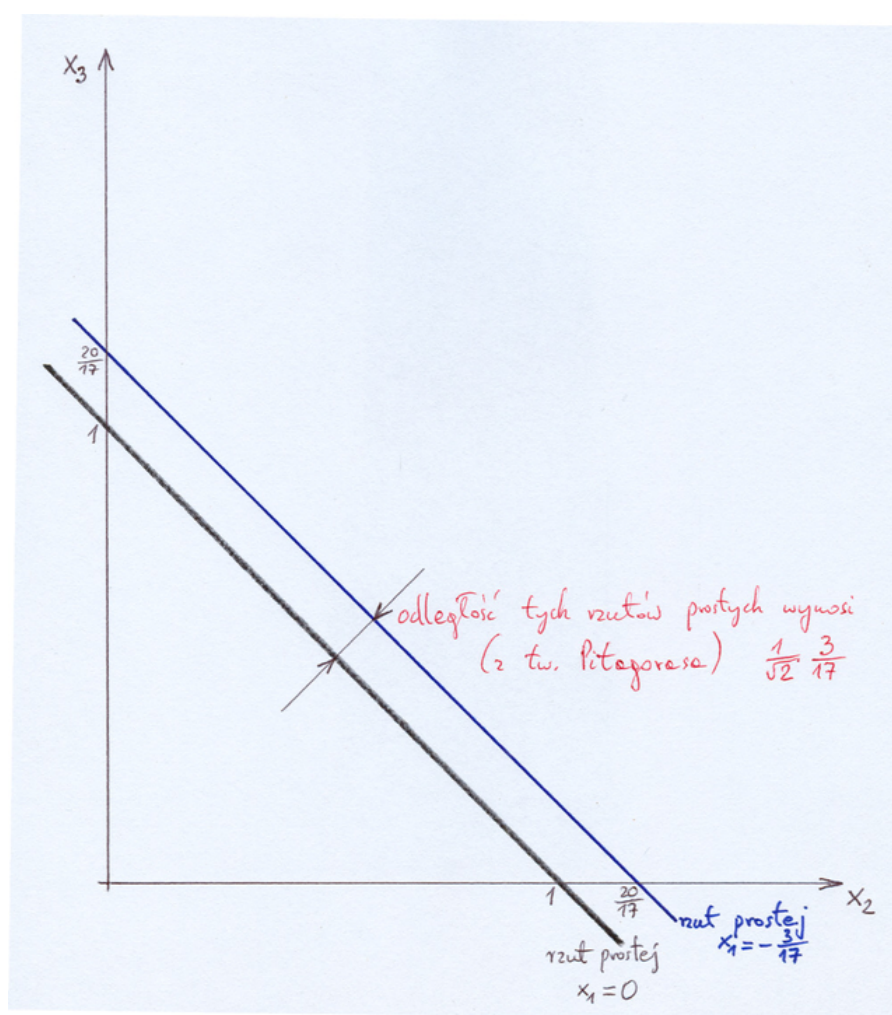
Następnie, pracując w tej płaszczyźnie, udzielają różnych odpowiedzi:  $\frac{20}{17} - 1$ ,  $\sqrt{2}\left(\frac{20}{17} - 1\right)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{20}{17} - 1\right)$ . Ta ostatnia liczba jest odległością prostych na powyższym rysunku, jednak żadna z tych liczb nie jest odpowiedzią do pytania w zadaniu.

Odpowiedź liczbowa do Pytania dodatkowego z kolokwium:  
obraz prostej krytycznej  $x_1 = -\frac{3}{17}$  (czyli pocisk Markowitza) oglądany na płaszczyźnie  $(\sigma^2, E)$  ma równanie

$$\sigma^2 = \frac{91}{51} + \frac{3}{4} \left(E - \frac{11}{3}\right)^2, \quad (12.1)$$

natomiast obraz prostej  $x_1 = 0$  ma równanie

$$\sigma^2 = \frac{23}{12} + \frac{3}{4} \left(E - \frac{11}{3}\right)^2. \quad (12.2)$$



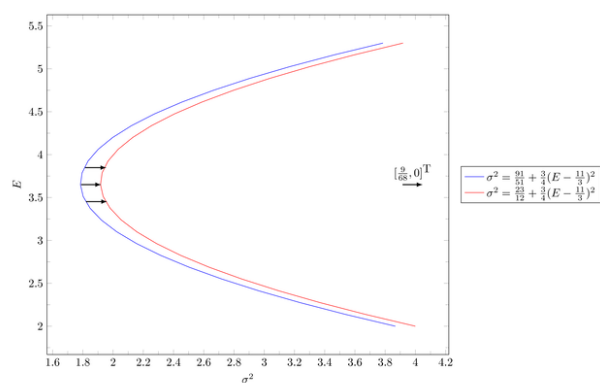
Rysunek 12.1. .

Ten drugi obraz jest więc przesunięciem równoległym pierwszego o wektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{23}{12} - \frac{91}{51} \end{bmatrix} =$

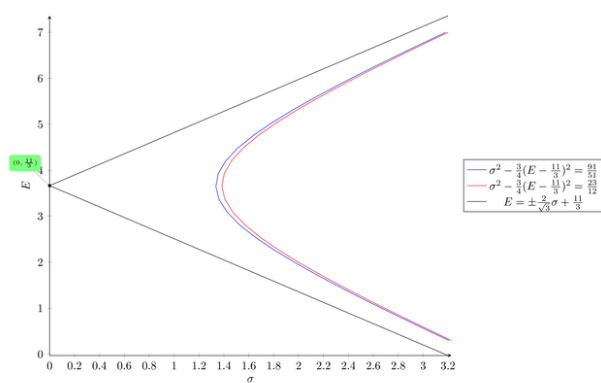
$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{68} \end{bmatrix}$  =  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.13235... \end{bmatrix}$ , jak na rysunku poniżej [w wersji pdf Rysunek 12.2 trafia na następną stronę].

Jeśli chodzi o związane z nimi gałęzie hiperbol,<sup>1</sup> to mają one, oczywiście, **te same asymptoty** przecinające oś  $\overrightarrow{OE}$  na wysokości  $\frac{11}{3}$ , ze stosunkiem długości półoś  $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Jednak konkretne wartości długości półoś są różne: dla hiperboli (12.1) (niebieskiej na Rysunku 12.3 poniżej) wynoszą one  $a_{123} = 1.3358$ ,  $b_{123} = 1.5424$ , zaś dla hiperboli (12.2) (czerwonej na Rysunku 12.3) wynoszą  $a_{23} = 1.3844$ ,  $b_{23} = 1.5986$ . Oto te gałęzie [w wersji pdf Rysunek 12.3 przeskakuje na następną stronę]:

<sup>1</sup> w zadaniu się o nie nie pytano



Rysunek 12.2. Krzywa o równaniu (12.2) to czerwona parabola.



Rysunek 12.3. Przesunięte równoległe parabole z Rysunku 12.2 stają się gałęziami hiperbol mających te same asymptoty.

## 13. Wykład XIII, 8.I.2010

Zanim podamy uzasadnienie algorytmicznej<sup>1</sup> metody dochodzenia do portfeli optymalnych  $\tilde{x}_{op}$  opisanej w Wykładzie XI, pierwszą połowę tego wykładu chcemy poświęcić *alternatywnemu* spojrzeniu na optymalność portfeli w aspekcie **M**. W tym spojrzeniu [dominujący w głównym nurcie analizy portfelowej] współczynnik Sharpe’a zostaje zastąpiony tzw. *oczekiwaną użytecznością inwestora*.

Jest to podejście pochodzące od J. von Neumanna i O. Morgensterna – ich podstawowe dzieło poświęcone tej tematyce to [24]. Podejście to wykładane jest bardziej systematycznie na kursach mikroekonomii (także na Wydziale MIM UW; również na WNE, SGH, w Szkole Koźmińskiego, na LSE ...). Dla ogólnego i zgrubnego wyrobienia sobie poglądu na tę dziedzinę bardzo godny polecenia jest przeglądowy artykuł [15] dobrze nam znanych autorów Kuhna i Tuckera w zeszycie BAMS upamiętniającym J. von Neumanna.

Podejście z funkcjami użyteczności prowadzi, przy szukaniu portfeli – teraz optymalnych w sensie oczekiwanej użyteczności danego inwestora! – do bardzo naturalnego, kolejnego już w tych wykładach, użycia twierdzenia K-KT (czyli Twierdzenia 9.2 z Wykładu IX). Z tego (i z innych) powodów(ów) warto zrobić taki *détour*.

Gdzie wobec tego w tej chwili jesteśmy? Po Wykładzie XI tkwimy w pewnym rozkroku, jeśli tak można powiedzieć: jesteśmy w trakcie maksymalizowania współczynnika Sharpe’a w aspekcie **M**, lecz wykracza to poza optymalizację najbardziej przez nas lubianych [różniczkowalnych] funkcji wklęsłych i wypukłych. Mamy już zasygnalizowane – koniec Wykładu XI – co należy robić; przy tym przy  $\Sigma > 0$  – czysto algorytmicznie.

Podczas, gdy ta nowa (dla nas) mgła osiada,<sup>2</sup> jest najlepszy moment, by przypomnieć słowa dawnej oceny twierdzenia K-KT, wypowiedziane przez Góreckiego i Turowicza w Wiadomościach Matematycznych XII.1 (i przytoczone w Wykładzie IX w akapicie poprzedzającym Twierdzenie 9.2). Twierdzenie było zaiste doniosłe. Kuhn i Tucker nadali swojej pracy [14] taki, a nie inny tytuł celowo. Chcieli oni wyjść poza rozwiązywanie bardzo wtedy modnych zadań programowania liniowego (liniowa funkcja celu i liniowe ograniczenia równościowe i nierównościowe) – i zdołali to zrobić, zaś przed nimi i niezależnie – uczynił to Karush w [11]. Dlatego **nonlinear programming**.

Zapowiedziane powyżej zastosowanie twierdzenia K-KT w teorii użyteczności jest dość świeże w wykładach z APRK1 na Wydziale MIM UW – datuje się dopiero od roku akademickiego 2007/08.

W podejściu von Neumanna i Morgensterna uważa się (albo: przyjmuje), że każdy inwestor ma swoją funkcję użyteczności  $u$ , którą mierzy czy ocenia możliwy zysk  $X$  danego scenariusza inwestycyjnego. Powszechnie przyjmuje się – patrz np już pierwszy rozdział w [2] – że funkcje użyteczności  $u$  spełniają trzy aksjomaty (tj, że inwestorzy tylko po takie funkcje sięgają w swoich podświadomościach, albo dokładniej: tylko po takie funkcje sięgają ich podświadomości):

- A1.  $u$  jest rosnąca (inwestor jest nienasycony, ang. *nonsatiation*),  $u' > 0$ ;
- A2.  $u$  jest wklęsła (inwestor ma awersję do ryzyka, ang. *risk aversion*),  $u'' < 0$ ;

<sup>1</sup> w sytuacjach niezdegenerowanych

<sup>2</sup> właśnie dlatego nowy algorytm był podany od razu z marszu w Wykładzie XI – by w międzyczasie miało co osiadać

A3.  $-\frac{u''}{u'}$  jest malejąca (inwestor ma malejącą bezwzględną awersję do ryzyka, ang. *decreasing absolute risk aversion*).<sup>3</sup>

Dyskutuje się jeszcze jeden (uzupełniający) aksjomat A4, dotyczący zachowania się *względnej* awersji do ryzyka inwestora, porównaj [2, strony 24–26], co do zasadności którego nie ma jednak pełnej zgody wśród ekonomistów. Jeden z najbardziej wśród nich znanych, Bawa, ujął to w roku 1975 następująco: "... decreasing absolute risk aversion is the most restrictive class of utility functions acceptable to most economists."

Taki  $X$  jest zmienną losową z wachlarza (czasem mówi się też: uniwersum) możliwych scenariuszy inwestycyjnych (biznesowych)  $\mathfrak{X}$ :  $X \in \mathfrak{X}$ . Zwykle są one wszystkie określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej  $\Omega$ . Oczekiwana użyteczność danego scenariusza  $X$ , oznaczana  $\mathcal{U}(X)$ , to wartość oczekiwana zmiennej losowej  $u(X)$ :

$$\mathcal{U}(X) = \mathbb{E}(u(X)) = \int_{\Omega} u(X) \quad (13.1)$$

dla  $X \in \mathfrak{X}$ . W teorii użyteczności przyjmuje się, że inwestor dąży do maksymalizacji oczekiwanej użyteczności  $\mathcal{U}(X)$ :

$$\mathcal{U}(X) \longrightarrow \max_{X \in \mathfrak{X}}.$$

Jednak na takim poziomie ogólności nie jest to wszystko zbyt ... użyteczne. Liczenie oczekiwanych użyteczności zależy przecież od całkowania po trudnych do dokładniejszego sprecyzowania przestrzeniach probabilistycznych. Także problem *istnienia* scenariusza maksymalizującego oczekiwaną użyteczność jest w ogólności trudny.

Teoria użyteczności sama staje się **użyteczna** gdy oczekiwana użyteczność  $\mathcal{U}(X)$  zależy tylko od kilku dyskretnych parametrów związanych ze zmienną losową  $X$ . Najlepiej – jedynie od wartości oczekiwanej  $\mathbb{E}(X)$  i odchylenia standardowego  $\sigma(X)$ :

$$\mathcal{U}(X) = f(\mathbb{E}(X), \sigma(X)), \quad (13.2)$$

przy czym, powtórzmy,  $\mathcal{U}(\cdot)$  cały czas spełnia (13.1), z funkcją użyteczności  $u$  spełniającą A1–A3+

**Przykład 13.1.** Wachlarz możliwych scenariuszy inwestycyjnych to zbiór zmiennych losowych, wyrażających np. możliwy zysk z jakiejś dużej planowanej inwestycji (określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej) mających rozkłady normalne  $N(E, \sigma)$ , przy podaniu jakichś rozsądnych przedziałów, z których brane są wartości parametrów  $\sigma$  oraz  $E$ . Natomiast funkcja użyteczności inwestora to  $u$ ,  $u(w) = -e^{-aw}$ , gdzie  $a > 0$  jest stałą, która może podlegać kalibracji (albo: zależy od inwestora).

Taka funkcja użyteczności inwestora jest rosnąca (A1) i wklęsła (A2), choć już bezwzględna awersja do ryzyka takiego inwestora jest stała (równa  $a$ ), nie zaś malejąca – lokujemy się więc na obrzeżach aksjomatu A3, wystawiając trochę na szwank słowa Bawy.

Jaka jest tutaj oczekiwana użyteczność  $\mathcal{U}$ ? Po krótkim i pouczającym rachunku – czytelnik jest zachęcany do wykonania go samodzielnie – okazuje się być idealna, uzasadniając *ex post* cały przykład. Po prostu i nawet bez żadnych przybliżeń (o których wspomina się niżej, gdy mowa o ogólnym stosowaniu aksjomatów A1–A3),  $\mathcal{U}(X) = -\exp\left(-a\mathbb{E}(X) + \frac{a^2\sigma(X)^2}{2}\right)$ , jak w (13.2).

Zatem na poziomach tej funkcji **jedynie** od argumentów  $\sigma = \sigma(X)$  i  $E = \mathbb{E}(X)$ , po rozwikłaniu,  $E = E(\sigma) = \frac{a}{2}\sigma^2 + \text{const.}$  Są to funkcje rosnące i wypukłe; nie może być lepiej.

<sup>3</sup> wielkość  $-\frac{u''}{u'}$  bywa nazywana miarą Pratt-Arrowa awersji do ryzyka, czyli: w A3 postuluje się malejącość tej właśnie miary

Jak naturalny jest, w teorii użyteczności na styku z analizą portfelową, warunek (13.2), niech świadczy następujący dłuższy cytat z jednej z najważniejszych prac w analizie portfelowej [23]. (Dodajmy, że ‘individuals’ uczestniczący w grze akcjami na giełdzie pojawiają się tam, jak *deus ex machina*, dopiero w cytowanym twierdzeniu, na dziewiątej stronie pracy.)

*Theorem I (a mutual fund theorem). Given  $m$  assets satisfying conditions [...], there are two portfolios ("mutual funds") constructed from these  $m$  assets, such that all risk-averse individuals, who choose their portfolios so as to maximize utility functions dependent only on the mean and variance of their portfolios, will be indifferent in choosing between portfolios from among the  $m$  original assets or these two funds.*

*To prove Theorem I, it is sufficient to show that any portfolio on the efficient frontier can be attained by a linear combination of two specific portfolios because an optimal portfolio for any individual (as described in the theorem) will be an efficient portfolio.*

Podczas kursu APRK2 przedstawiana jest dosyć szeroka klasa rozkładów zmiennych losowych  $X$ , dla których (13.2) ma miejsce. Teraz musimy się zadowolić tylko stroną praktyczną – zakładać (13.2) i rozważać konkretne sytuacje związane z maksymalizowaniem pewnych funkcji od  $E$ ,  $\sigma$ , gdzie w domyśle  $E = \mathbb{E}(X)$ ,  $\sigma = \sigma(X)$  dla  $X \in \mathfrak{X}$ . Przy tym w analizie portfelowej, jak już wspominaliśmy w Wykładzie VII, wachlarz  $\mathfrak{X}$  to  $\{x^T R: x \in \Delta^k\}$  w aspekcie  $\mathbf{M}$ , względnie  $\{x^T R: x \in H \subset \mathbb{R}^k\}$  w aspekcie  $\mathbf{B}$ .

Co więcej można powiedzieć o pojawiających się w taki sposób funkcjach  $f(E, \sigma)$ ? Dokładniej, co można powiedzieć o poziomicach takich funkcji, czyli krzywych obojętności inwestora (ang. *indifference curves*)?

Otóż wymienione wcześniej aksjomaty A1 – A3 implikują,<sup>4</sup> że rozwikłania związków  $f(E, \sigma) = \text{const}$ , tzn. funkcje  $E = E(\sigma)$ , są rosnące i wypukłe.

Właśnie te własności funkcji  $E = E(\sigma)$  są implicite zakładane w *konkretnych* zadaniach pojawiających się od pewnego czasu w kursie APRK1.

**Przykład 13.2** (z kolokwium z APRK1 w XII. 2007). Niech dane (13.6) (na których później jeszcze będzie ćwiczony i utrwalany algorytm dochodzenia do portfeli optymalnych) definiują taki model Markowitza, w którym inwestor *dodatkowo* zna swoją funkcję oczekiwanej użyteczności  $\mathcal{U}$  zależną tylko od  $E$  i  $\sigma$  danego portfela (czyli scenariusza inwestycyjnego),

$$\mathcal{U}(E, \sigma) = 86E - 7E^2 - 7\sigma^2. \quad (13.3)$$

Należy wyznaczyć portfel optymalny dla *tego* inwestora, tj portfel optymalny ze względu na tę funkcję oczekiwanej użyteczności – po prostu portfel, który ma maksymalną oczekiwaną użyteczność wśród wszystkich portfeli Markowitza.

Chcemy zatem zmaksymalizować funkcję

$$\Delta^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto 86(3x_1 + 4x_2 + 5x_3) - 7(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 - 7(x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2) \quad (13.4)$$

i w pierwszej chwili nie wydaje się to łatwe. Przedstawimy dwa zupełnie różne rozwiązania. Pierwsze opiera się o dodatkową „tajemną” wiedzę, która dopiero później znajdzie wyjaśnienie.

<sup>4</sup> po pewnych dodatkowych przybliżeniach, w tym: bliskich zaproponowaniu **pewnej** formy aksjomatu A4, porównaj też [2]

*Rozwiązanie.* [Rozwiązanie A] Zapisujemy trochę inaczej funkcję

$$\frac{1}{7}\mathcal{U}(E, \sigma) = \left(\frac{43}{7}\right)^2 - \left(E - \frac{43}{7}\right)^2 - \sigma^2,$$

przez co widoczne stają się poziomice funkcji  $\frac{1}{7}\mathcal{U}$ , więc też poziomice  $\mathcal{U}$ . Są to części półokręgów ( $\sigma > 0$ ) w rodzinie współśrodkowych okręgów o środku w  $\left(0, \frac{43}{7}\right)^T$ , zaznaczone na czerwono na Rysunku 13.1 poniżej. Okazuje się, że ten wspólny środek tworzy, z: (a) pewnym punktem  $P^5$  na granicy minimalnej  $F_{\min}$  w tym modelu Markowitza, i z (b) punktem, w którym prosta styczna w  $P$  do  $F_{\min}$  przecina oś  $\overrightarrow{OE}$ , trójkąt **prostokątny** widoczny tu na rysunku.

[W wersji pdf Rysunek 13.1 przeskakuje aż na następną stronę.]

Upewniamy się o tym bezpośrednim rachunkiem

$$\left(\frac{43}{7} - \frac{34}{7}\right)^2 + 2\left(\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(\frac{34}{7} - \frac{11}{3}\right)^2 = \left(\frac{43}{7} - \frac{11}{3}\right)^2.$$

Skoro tak, to to już koniec rozwiązania: portfel  $x = \left(0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)^T$ , który w mapie  $\mathcal{M}$  przechodzi na punkt  $P$  [i który wypłynie jeszcze w innym zagadnieniu później w tym wykładzie] okazuje się być optymalny w sensie podanej funkcji oczekiwanej użyteczności. Wartość

$$\mathcal{U}(E(x), \sigma(x)) = 86 \cdot \frac{34}{7} - 7\left(\frac{34}{7}\right)^2 - 7\left(\frac{5}{7}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1693}{7}$$

jest maksymalna możliwa dla portfeli – scenariuszy inwestycyjnych z  $\Delta^3$ .

W tym rozwiązaniu wsparliśmy się wyciągniętym z kapelusza faktem geometrycznym, który znajdzie swoje objaśnienie dopiero *ex post*. Czy nie możnaby rozwiązywać takich zadań na ślepo, niejako automatycznie?

Odpowiedź brzmi TAK, ponieważ chodzi tu o maksymalizację funkcji  $F(x_1, x_2, x_3)$  stojącej po prawej stronie (13.4), która jest wkłęśła i różniczkowalna jako funkcja zmiennych  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Maksymalizacja ma być warunkowa, przy ograniczeniu równościowym  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  i ograniczeniach nierównościowych  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ . Mieści się to dokładnie w zakresie stosowalności twierdzenia K-KT, skąd wyłania się

*Rozwiązanie.* [Rozwiązanie B] Szukamy portfela  $x \in \Delta^3$  takiego, że

$$\nabla F(x) + \lambda e \leq 0 \quad \text{oraz} \quad x^T(\nabla F(x) + \lambda e) = 0$$

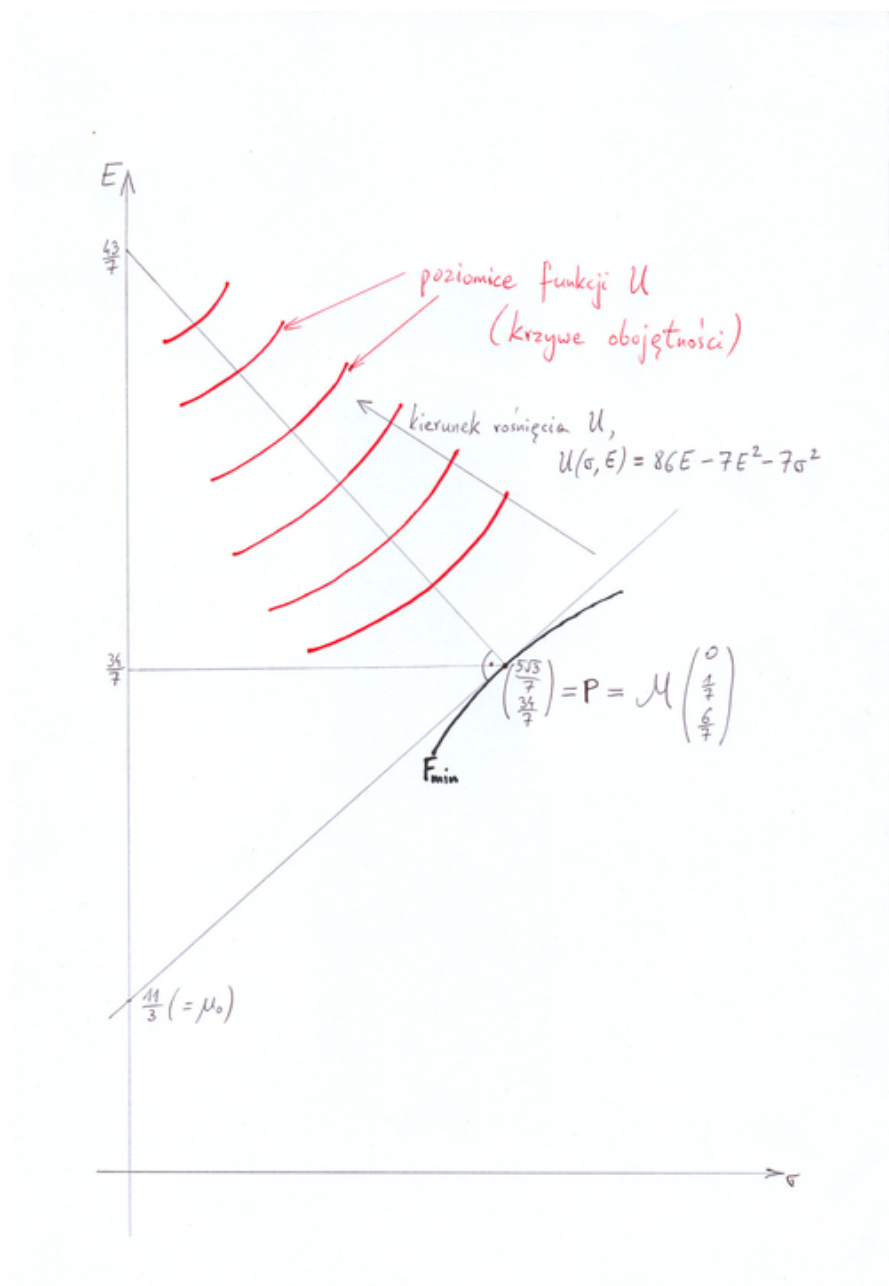
dla jakiegoś  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; ten drugi warunek to aktualna postać warunku komplementarności w twierdzeniu K-KT.

Poszukiwanie odbywa się etapami, zaczynając od

Etap 0.  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Warunek komplementarności oznacza teraz "=" zamiast " $\leq$ ", co łącznie z ograniczeniem równościowym oznacza

$$\begin{bmatrix} -140 & -182 & -210 & 1 \\ -182 & -266 & -280 & 1 \\ -210 & -280 & -378 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -258 \\ -344 \\ -430 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>5</sup> będącym  $\mathcal{M}$ -obrazem konkretnego portfela efektywnego w aspekcie  $\mathbf{M}$  – patrz Rysunek 13.1



Rysunek 13.1. Prostopadła do stycznej przecina oś  $\overrightarrow{OE}$  właśnie na wysokości  $\frac{43}{7}$ .

Rozwiązaniem jest  $(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \left(-\frac{6}{17}, \frac{52}{119}, \frac{109}{119}, -\frac{604}{17}\right)$ , a więc Etap 0 nie daje rozwiązania. Etap 1.1.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Tym razem warunek komplementarności prowadzi do układu równań

$$\begin{bmatrix} -266 & -280 & 1 \\ -280 & -378 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -344 \\ -430 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i dalej do  $(x_2, x_3, \lambda) = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, -66\right)$ . W tym momencie musimy jeszcze sprawdzić nierówność

$(\nabla F(x) + \lambda e)_1 \leq 0$ , tzn. nierówność  $-182x_2 - 210x_3 + 192 \leq 0$ . Jest ona spełniona ( $-14 \leq 0$ ), więc procedura opierająca się o twierdzenie K-KT właśnie znalazła rozwiązanie  $x = \left(0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)^T$ , to samo, co w Rozwiązaniu A.

Twierdzenie K-KT jeszcze raz pokazało swoją siłę.

Zwracamy uwagę, że w tym podejściu funkcja oczekiwanej użyteczności  $\mathcal{U}$  nie zawsze musi być podana explicite. Znane mogą być tylko jej poziomice, czyli krzywe obojętności inwestora, bez podania, jakim wartościom  $\mathcal{U}$  odpowiadają. Tak było np w zadaniu z egzaminu z APRK1 ze stycznia 2008.

**Ćwiczenie 13.1.** Rozpatrujemy model Blacka z  $k = 2$  i parametrami  $\sigma_1 = 2$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_{12} = \frac{1}{2}$  oraz  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 1$ . Wiadomo, że poziomice różniczkowalnej funkcji oczekiwanej użyteczności inwestora  $\mathcal{U}$ , są łukami współśrodkowych okręgów na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ , mających środek w punkcie  $(0, 5)^T$ , i że gradient tej funkcji wszędzie patrzy w stronę środka  $(0, 5)^T$ .

- Znaleźć portfel optymalny w powyższym modelu Blacka ze względu na taką funkcję oczekiwanej użyteczności  $\mathcal{U}(\sigma, E)$ . Czy ten portfel używa krótkiej sprzedaży?
- Rozważamy rodzinę modeli Blacka o parametrach

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$  są takie, jak powyżej. Powiększamy współczynnik korelacji  $\rho$  do takiej wartości, że portfel  $(1, 0)^T$  staje się portfelem optymalnym w danym modelu względem tej samej, niezmiennianej funkcji oczekiwanej użyteczności. Wyznaczyć tę wartość  $\rho$ .

- Wyznaczyć taką (jeszcze większą od poprzedniej) wartość  $\rho$ , by portfel  $(7/5, -2/5)^T$  był portfelem optymalnym w danym modelu Blacka względem tej samej, niezmiennianej funkcji oczekiwanej użyteczności.

Pierwsza część zadania *Rozwiązanie*. Ze szkoły średniej (ale ... przedwojennej) wiadomo, jak wygląda równanie *afinicznej* prostej stycznej do hiperboli (3.2) przechodzącej przez punkt  $(\bar{\sigma}, \bar{E})^T$  leżący na tej hiperboli, konkretnie – obraz portfela szukanego w tej części zadania. Równanie to ma postać

$$\bar{\sigma}\sigma - 4\left(\bar{E} - \frac{9}{8}\right)E = \text{const},$$

gdzie podstawiono już znane wartości do [naszego starego] wzoru (3.1) na  $E_0$ . Znamy więc już wektor prostopadły do tej prostej stycznej,

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \frac{9}{2} - 4\bar{E} \end{bmatrix}.$$

W warunkach zadania ten wektor powinien być równoległy do wektora łączącego środek rodziny okręgów  $(0, 5)^T$  z punktem  $(\bar{\sigma}, \bar{E})^T$ , tzn. do wektora

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{E} - 5 \end{bmatrix}.$$

Wobec równych i niezerowych pierwszych składowych obu wektorów, równe muszą też być ich drugie składowe,

$$\frac{9}{2} - 4\bar{E} = \bar{E} - 5,$$

skąd  $\bar{E} = \frac{19}{10}$ , więc  $x = \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)^T$ . Widzimy, że ten portfel nie używa krótkiej sprzedaży (jest portfelem Markowitza). Teraz część druga zadania. *Rozwiązanie.* Jeżeli portfel  $(1, 0)^T$  jest optymalny względem tej samej funkcji oczekiwanej użyteczności, natomiast inny jest teraz współczynnik korelacji  $\rho$  – to właśnie on jest teraz niewiadomą, zaś wiadome są  $\bar{\sigma} = \sigma_1 = 2$  oraz  $\bar{E} = \mu_1 = 2$ . Równanie prostej stycznej do pocisku Markowitza w punkcie  $(2, 2)^T$  ma więc teraz postać

$$2\sigma - (5 - 4\rho)(2 - E_0)E = \text{const},$$

gdzie  $E_0 = \frac{6-6\rho}{5-4\rho}$  zgodnie z (3.1). Stąd jeden z wektorów prostopadłych do tej prostej to

$$\begin{bmatrix} 2 \\ (5 - 4\rho) \left( \frac{6-6\rho}{5-4\rho} - 2 \right) \end{bmatrix}.$$

W zadaniu postuluje się, by ten wektor był równoległy do wektora wodzącego idącego od środka okręgów – krzywych obojętności do punktu styczności  $(2, 2)^T$ ,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

co daje równanie

$$(5 - 4\rho) \left( \frac{6 - 6\rho}{5 - 4\rho} - 2 \right) = -3,$$

albo  $\rho = \frac{1}{2}$ . Współczynnik korelacji zwiększyliśmy od wyjściowej wartości  $\frac{1}{4}$  do  $\frac{1}{2}$  i w tym czasie portfel optymalny w nowym sensie przesunął się do samego krańca odcinka  $\Delta^2$ . Część trzecia zadania. *Rozwiązanie.* Cały czas przedwojenna szkoła średnia: równanie afinicznej prostej stycznej do hiperboli (3.2) przechodzącej przez punkt  $(\bar{\sigma}, \bar{E})^T$  – obraz portfela optymalnego w tej części zadania, ma postać

$$\bar{\sigma}\sigma - (5 - 4\rho) \left( \frac{12}{5} - \frac{6 - 6\rho}{5 - 4\rho} \right) E = \text{const}$$

(patrz znowu wzór (3.1)). Stąd wektor prostopadły do tej prostej stycznej to

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ 6 - 6\rho - \frac{12}{5}(5 - 4\rho) \end{bmatrix}.$$

W warunkach zadania ten wektor powinien być równoległy do wektora łączącego środek rodziny okręgów  $(0, 5)^T$  z punktem styczności  $\left(\bar{\sigma}, \frac{12}{5}\right)^T$ , tzn. do wektora

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ -\frac{13}{5} \end{bmatrix}.$$

Skoro  $\bar{\sigma} \neq 0$ , drugie składowe tych wektorów są równe,

$$-\frac{13}{5} = 6 - 6\rho - \frac{12}{5}(5 - 4\rho),$$

skąd  $\rho = \frac{17}{18}$ . Współczynnik korelacji wzrósł dramatycznie (od wartości  $\frac{1}{2}$ ) i w tym czasie portfel optymalny w nowym sensie przesunął się bardzo znacznie poza odcinek portfeli Markowitza.

Jako pewien test, czy ten nowy obszar zastosowań twierdzenia K-KT został już dobrze oparty, spróbujmy wspólnymi siłami poszukać portfela Markowitza w modelu z parametrami

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

optymalnego ze względu na (skądś) znaną funkcję oczekiwanej użyteczności  $\mathcal{U}(\sigma, E) = 33E - 2E^2 - 2\sigma^2$ . No i na koniec policzyć też, ile ta maksymalna oczekiwana użyteczność wynosi: 50, 75, 100?

Mają to być oczekiwane użyteczności portfeli, a więc wprowadzamy funkcję wklęsłą i różniczkowalną  $F(x) = 33\mu^T x - 2(\mu^T x)^2 - 2x^T \Sigma x$  i pamiętamy o ograniczeniu równościowym  $e^T x = 1$  oraz o standardowych ograniczeniach nierównościowych w Markowitzu  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Szukamy zatem – właśnie technologia K-KT – takiego(ch) portfela(i)  $x$ , dla którego(ch) istnieje  $\lambda \in \mathbb{R}$  taka, że  $\nabla F(x) + \lambda e \leq 0$  w sensie wektorowym oraz spełniony jest warunek komplementarności  $x^T(\nabla F(x) + \lambda e) = 0$ .

$$\nabla F(x) + \lambda e = 33 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 \left( \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 - 20x_1 - 36x_2 - 48x_3 + \lambda \\ 132 - 36x_1 - 80x_2 - 104x_3 + \lambda \\ 165 - 48x_1 - 104x_2 - 164x_3 + \lambda \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

Szukać będziemy etapami.

Etap 0.  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Warunek komplementarności oznacza teraz wszystkie "=" zamiast " $\leq$ ", co, wobec rachunku (13.5) i łącznie z ograniczeniem równościowym oznacza

$$\begin{bmatrix} 20 & 36 & 48 & -1 \\ 36 & 80 & 104 & -1 \\ 48 & 104 & 164 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 132 \\ 165 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem jest  $(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \left(-\frac{19}{24}, \frac{65}{36}, -\frac{1}{72}, -\frac{35}{2}\right)$ , a więc Etap 0 na pewno nie da nam rozwiązania.

Etap 1.1.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Tym razem, znowu używając (13.5), warunek komplementarności prowadzi do układu równań

$$\begin{bmatrix} 80 & 104 & -1 \\ 104 & 164 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132 \\ 165 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i dalej do  $(x_2, x_3, \lambda) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -46\right)$ . To już stwarza nadzieję na rozwiązanie, choć musimy jeszcze sprawdzić nierówność

$(\nabla F(x) + \lambda e)_1 \leq 0$ , tzn. nierówność  $66 - 36x_2 - 48x_3 + \lambda \leq 0$ .

Jest ona spełniona,  $66 - 36 \cdot \frac{3}{4} - 48 \cdot \frac{1}{4} - 46 = -19 \leq 0$ , więc twierdzenie K-KT właśnie dało nam szukane rozwiązanie  $x = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$ .

Liczymy (niemalże) w pamięci, że  $E(x) = \frac{17}{4}$  oraz  $\sigma^2(x) = \frac{11}{2}$ . Oczekiwana użyteczność portfela  $x$ , maksymalna w aspekcie  $\mathbf{M}$ , to  $\mathcal{U}(\sigma(x), E(x)) = 33 \cdot \frac{17}{4} - 2 \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{11}{2} = 93.125$ .

Wreszcie, jako ostateczny test w zakresie teorii użyteczności, polecamy szczególnie Zadanie 2 w następującym przykładowym zestawie trzech zadań z analizy portfelowej (oferującym też jeszcze pytanie dodatkowe).

**Przykład 13.3.** We wszystkich dotychczasowych przykładach krzywe obojętności były łukami okręgów, co mogło zachęcać przy szukaniu rozwiązań do alternatywnego sięgania po czystą geometrię analityczną. W zestawie zadań tuż poniżej (Rysunek 13.2, Zadanie 2) krzywe obojętności są łukami elips. Taka okoliczność nie wyklucza stosowania geometrii analitycznej, lecz wyraźnie zwiększa pokusę sięgnięcia po nasze główne narzędzie, czyli twierdzenie K-KT.

[W wersji pdf pierwszy arkusz przeskakuje na następną stronę, zaś drugi – na jeszcze następną.]

(W tym kolokwium trochę inny niż 18.XII.2009 był rozkład punktów za zadania, lecz też do zdobycia było ich łącznie 40, oraz dodatkowo 8 w bonusie za pytanie dodatkowe.)

Przerywamy już tę (za) długo trwającą dygresję o teorii użyteczności; mogła ona trwać jeszcze dłużej, jeśli po drodze rozwiązywało się zadania.

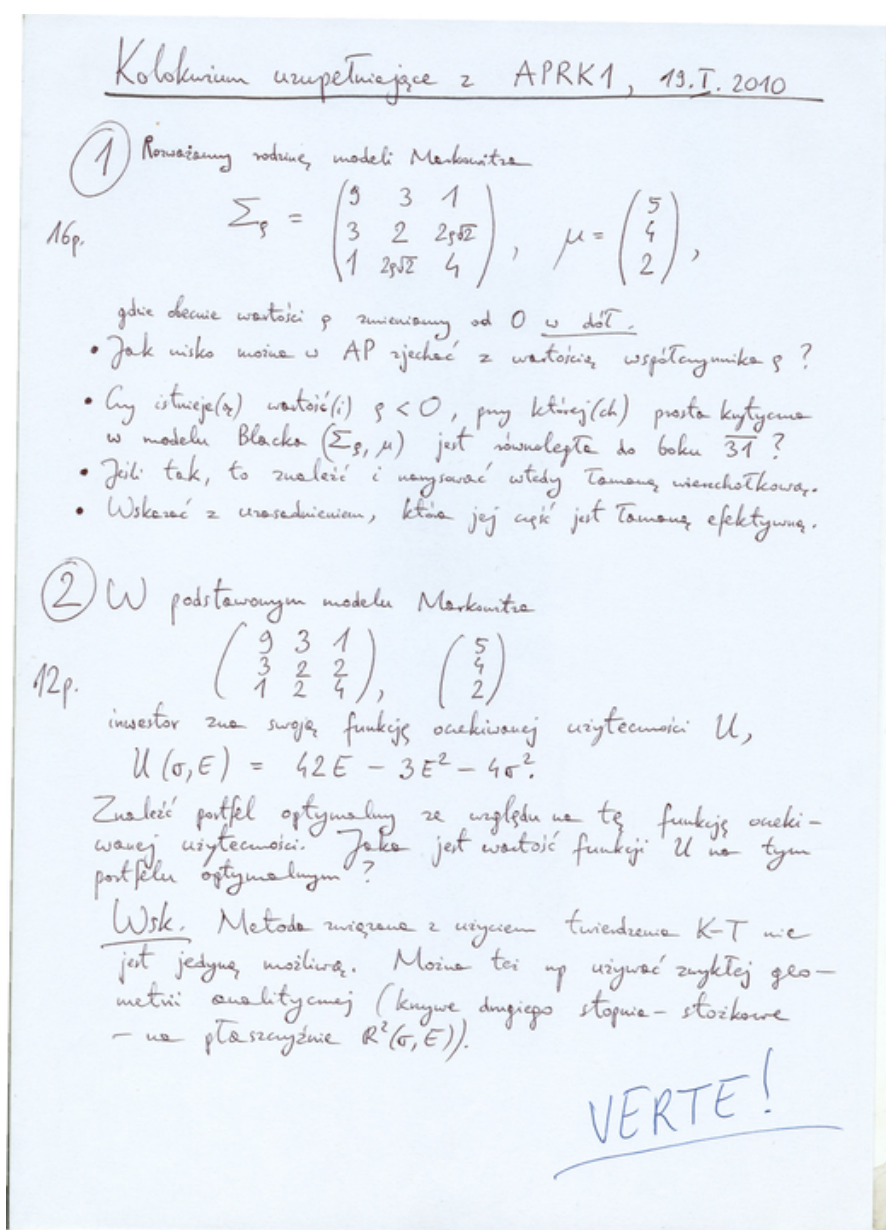
Wracamy do sprawy najważniejszej, czyli do maksymalizowania współczynnika Sharpe’a w aspekcie  $\mathbf{M}$ , no i do algorytmu, który ma to robić „za nas”.

Dużą część naszej dotychczasowej wiedzy puścimy w ruch w trakcie dyskusji jednej konkretnej sytuacji. Mianowicie

jednym z dobrze rozpoznanych, jeśli chodzi o łamaną wierzchołkową  $\mathbf{L}$ , jest przykład

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (13.6)$$

który wystąpił na egzaminie w VI.2006 i – w innym kontekście – także na kolokwium w XII.2007, no i także już w tym bieżącym wykładzie (w Przykładzie 13.2, w kontekście teorii użyteczności). Łamana  $\mathbf{L}$  wygląda w nim następująco:



Rysunek 13.2. Pierwszy arkusz kolokwium uzupełniającego w dniu 19.I.2010.

[w wersji pdf Rysunek 13.4 przekakuje aż dwie strony dalej!]

Zaproponujemy tutaj portfel  $\tilde{x}_{op}$ , nie znając jeszcze konkretnej wartości  $\mu_0$ , której on odpowiada.  $\mu_0$  poznamy chwilę później, używając już posiadanej wiedzy.

Niech  $\tilde{x}_{op}$  będzie środkiem 'najwyższego' boku  $L$ ,  $\tilde{x}_{op} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{M}(\tilde{x}_{op}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}\sqrt{3} \\ \frac{34}{7} \end{pmatrix}$ . Ten punkt

leży na granicy efektywnej w odpowiednim modelu Markowitza (granica efektywna w aspekcie  $\mathbf{M}$  tu zaczyna się dokładnie tam, gdzie zaczyna się aktywna w modelu Markowitza część pocisku Markowitza). Styczna do granicy efektywnej w  $\mathcal{M}(\tilde{x}_{op})$  przecina pionową oś  $\overrightarrow{OE}$  na wysokości

③ W modelu  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 znaleźć wszystkie portfele optymalne  $x_{op}$ , które razem  
 12p. są portfelami  $\tilde{x}_{op}$  ze względu na tę samą prężną stopę  
 bezryzykowną  $\mu_0$  ( $x_{op}$  to portfel optymalny w Blacku,  
 $\tilde{x}_{op}$  – w Markowitzu).

Pytanie dodatkowe (8p.)  
 Rozszerzając rodzinę  $(\Sigma, \mu)$  w rodzinie 1 na wszystkie  $s \leq \frac{1}{12}$ ,  
 które są dopuszczalne w AP, znaleźć te wartości  $s$ , przy których  
 granica minimalna w Markowitzu nie ma punktów zła-  
 mienia. Odpowiedź uzasadnić.  
 [Uwaga: Tę samą sumę zdobytych punktów nie może przekroczyć  
 40p. – zasada podobna jak przy zadaniach domowych.]

Rysunek 13.3. Drugi arkusz kolokwium uzupełniającego w dniu 19.I.2010.

 $\mu_0$ ,

$$\mu_0 = \frac{\alpha_{23} - \frac{34}{7}\beta_{23}}{\beta_{23} - \frac{34}{7}\gamma_{23}},$$

gdzie  $\alpha_{23}$ ,  $\beta_{23}$  i  $\gamma_{23}$  są z teorii Blacka przy  $IN = \{2, 3\}$ . Dla tego modelu liczy się je niemalże w pamięci i wtedy

$$\mu_0 = \frac{\frac{107}{6} - \frac{34}{7} \cdot \frac{23}{6}}{\frac{23}{6} - \frac{34}{7} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{11}{3}$$

(przypadkowo też wysokość przełączenia się granicy minimalnej z pocisku Markowitza na obraz boku  $\overline{e_1 e_3}$ ). Teraz już wiemy, że portfel  $\tilde{x}_{op}$  jest optymalny w tym modelu Markowitza ze względu na stopę bezryzykowną  $\mu_0 = \frac{11}{3}$ .

Te słowa rzucają też snop światła na Rysunek 13.1 i dotąd tajemnicze rozwiązanie A problemu zaproponowanego w Przykładzie 13.2 (tamten rysunek jest ukryty w rozwiązaniu; trzeba w nie wejść, by go zobaczyć).

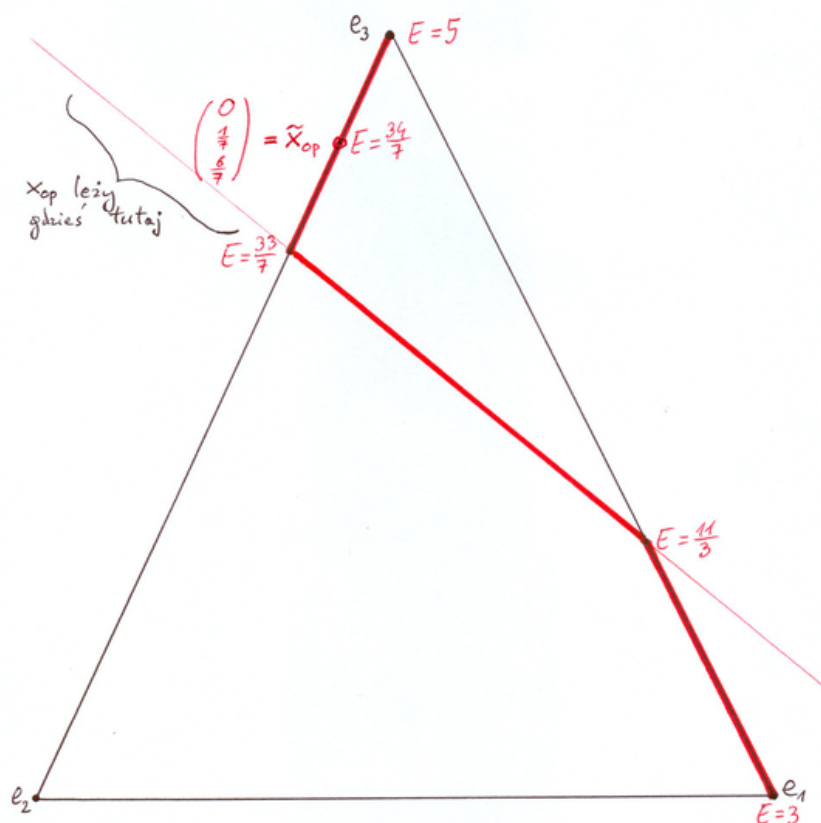
Zobaczmy, jak w tej sytuacji pracuje algorytm podany na Wykładzie XI.

Etap 0 to [w pierwszej fazie, przed sprawdzaniem ostrych nierówności], z warunku komplementarności, poszukiwanie portfela  $x_{op}$  optymalnego w Blacku (13.6) ze względu na tę samą  $\mu_0 = \frac{11}{3}$ . Otóż ten portfel nie jest Markowitza. Istotnie, portfel  $\left(0, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)^T$  na przecięciu boku  $\overline{e_2 e_3}$  i prostej krytycznej Blacka dla danych (13.6) jest optymalny w takim modelu Blacka ze względu na

$$\frac{\frac{107}{6} - \frac{33}{7} \cdot \frac{23}{6}}{\frac{23}{6} - \frac{33}{7} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5}{2} < \frac{11}{3},$$

a więc  $E(x_{op}) > \frac{33}{7}$  i portfel  $x_{op}$  leży na prostej krytycznej poza sympleksem  $\Delta^{3,6}$ .

<sup>6</sup> Jest ćwiczeniem sprawdzającym znaleźć ten portfel  $x_{op}$ , patrz też Rysunek 13.4.



Rysunek 13.4. Łamana wierzchołkowa i portfel  $\tilde{x}_{\text{op}}$  (optymalny względem  $\mu_0 = \frac{11}{3}$ ) na niej.

Etap OUT = {1} to szukanie  $y = (0, y_2, y_3)^T$ ,  $y_2, y_3 > 0$  i

$$\begin{cases} (\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_1 \geq 0, \\ (\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_2 = 0, \\ (\Sigma y - \mu + \mu_0 e)_3 = 0, \end{cases}$$

co daje  $y_2 = \frac{1}{9}$ ,  $y_3 = \frac{6}{9}$ , zaś nierówność na pierwszej składowej  $\frac{1}{9} + \frac{6}{9} - 3 + \frac{11}{3} \geq 0$  jest spełniona. Algorytm kończy się więc na tym etapie, dając po normalizacji  $\frac{y}{e^T y} = (0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7})^T = \tilde{x}_{\text{op}}$  zgodnie z oczekiwaniami.

Nie jest to koniec naszych przykładów szukania portfeli optymalnych w aspekcie **M**. Takie portfele pojawią się jeszcze w następnym Wykładzie XIV.

Tymczasem jednak niecierpiące zwłoki są zrezy ważnej teorii, sięgające wstecz do roku 1965 (praca O. L. Mangasarian [18]) niezbędne do tego, co wymienione w tytule tu poniżej.

**Uzasadnienie algorytmicznej metody przedstawionej w Wykładzie XI.**

Na samym początku potrzebny jest nam mały rozbieg – musimy cofnąć się do różniczkowalnych funkcji wypukłych i wklęsłych wielu zmiennych. Ten temat jest niestety traktowany trochę po macoszemu w kursie AMII (zresztą tam, jak wiadomo, prawie na nic nie starcza czasu). Jeśli  $f: \bigcap_{\mathbb{R}^k} G \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  otwarty wypukły, jest różniczkowalna, wtedy

$$f \text{ jest wypukła} \iff f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) \quad \text{dla } x, y \in G.$$

Także w wersji ostrej, czy ściśle,

$$f \text{ jest ściśle wypukła} \iff f(y) > f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) \quad \text{dla } x, y \in G, x \neq y.$$

Analogiczna, z nierównościami w przeciwnych kierunkach, jest charakteryzacja funkcji wklęsłych różniczkowalnych.

(Tej wiedzy zwykle nie uzyskuje się w kursie AMII, lecz dopiero na zajęciach z Optymalizacji. Tymczasem chodzi tu o zupełnie podstawowe intuicje geometryczne związane z funkcjami wklęsłymi/wypukłymi wielu zmiennych w ich punktach różniczkowalności – o podpieranie z góry/dołu wykresów takich funkcji przez *afiniczne* przestrzenie styczne do tych wykresów.)

To przypomnienie stanowi motywację i punkt wyjścia do zdefiniowania ogólniejszych własności różniczkowalnych funkcji wielu zmiennych, niż wklęsłość/wypukłość.<sup>7</sup>

**Definicja 13.1** ([18]). • Powiemy, że  $f$  j. w. jest pseudo-wklęsła gdy

$$\nabla f(x) \cdot (y - x) \leq 0 \implies f(y) \leq f(x) \quad \text{dla } x, y \in G.$$

•  $f$  j. w. jest pseudo-wypukła gdy

$$\nabla f(x) \cdot (y - x) \geq 0 \implies f(y) \geq f(x) \quad \text{dla } x, y \in G.$$

**Obserwacja. 13.1** Funkcja różniczkowalna wklęsła (wypukła) jest także pseudo-wklęsła (pseudo-wypukła).

Wynika to od razu z Definicji 13.1, po wykorzystaniu przypomnianych chwilę wcześniej charakteryzacji funkcji wklęsłych i wypukłych różniczkowalnych.

*Uwaga 13.1.* Na odwrót nie, bo np funkcja  $\mathbb{R} \ni x \xrightarrow{f} x + x^3 \in \mathbb{R}$  nie jest ani wklęsła, ani wypukła, natomiast jest ona zarówno pseudo-wklęsła, jak i pseudo-wypukła.

Istotnie,  $f'(x)(y - x) = (1 + 3x^2)(y - x)$ , natomiast  $f(y) - f(x) = (1 + x^2 + xy + y^2)(y - x)$  i pierwsze czynniki w tych wyrażeniach iloczynowych są zawsze dodatnie.

<sup>7</sup> na poziomie definicji, sama wklęsłość/wypukłość funkcji **nie** wymaga różniczkowalności

## 14. Wykład XIV, 15.I.2010

Pod koniec poprzedniego wykładu poznaliśmy klasę funkcji wielu zmiennych, które są pseudo-wklęsłe lub pseudo-wypukłe. Najważniejszą dla nas sprawą związaną z tymi funkcjami jest to, że zachodzi dla nich wersja twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera! Czasami mówi się krótko, że to twierdzenie, i to w formie ‘wtedy’, jest też prawdziwe w kategorii pseudo-wypukłej. Podajemy je tutaj, bez dowodu jak i Twierdzenie 9.2, w **nienajogólniejszej** wersji – tylko przy ograniczeniach nierównościowych (bez równościowych, bo w zastosowaniu nasze funkcje będą niezmiennicze ze względu na skalowanie argumentu). Ponadto warunki nierównościowe są tylko w postaci liniowej. Większej ogólności nie potrzebujemy; byłaby tylko naszym wrogiem, nie zaś sojusznikiem.

(Większą ogólność czytelnik znajdzie już w pionierskiej pracy [18]. To właśnie tam, na stronie 281, zdefiniowane zostały funkcje pseudo-wklęsłe i pseudo-wypukłe, natomiast Theorem 1 na stronach 284-5 jest ogólną wersją twierdzenia typu K-KT w kategorii pseudo-wypukłej i w formie ‘wtedy’. Nazwisko Karush nie pojawia się w [18]. Warto też zwrócić uwagę na ‘Section 3. Remarks on pseudo-convex functions’ na stronach 288-9. Lokalne minimum jest zawsze dla tych funkcji globalnym minimum (!) i własność tę dziedziczy nawet pewna jeszcze szersza klasa funkcji **ściśle quasi-wypukłych**, także zdefiniowana w [18].)

**Twierdzenie 14.1** (Karush; Kuhn, Tucker; wersja znacznie późniejsza, w kategorii pseudo-wypukłej). *Niech  $G \subset \mathbb{R}^k$  będzie otwarty i wypukły, zaś  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  będzie pseudo-wklęsła (pseudo-wypukła) na  $G$ . Niech ponadto punkt  $x = x_0 \in G$  spełnia warunki*

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (\text{TT})$$

*gdzie  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^k$ . Wtedy  $x_0$  jest punktem globalnego warunkowego maksimum (minimum) funkcji  $f$  przy warunkach (ograniczeniach) (TT)  $\iff$*

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l \leq 0 \ (\geq 0) \quad \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^l \lambda_i a_i = 0$$

$$\text{oraz} \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i (b_i - a_i^T x_0) = 0 \quad (\text{warunek komplementarności}).$$

Z punktu widzenia formalnego prawie nie ma tu różnic z wersją podaną w Wykładzie IX jako Twierdzenie 9.2. I wtedy i teraz mamy bowiem do czynienia z produktami pochodnymi od fundamentalnych rezultatów zawartych w pracach [11] i [14], o czym była już mowa w Wykładzie IX. Należy jednak pamiętać – powtarzamy to – że Karush oraz Kuhn z Tuckerem dawali tylko warunki konieczne dla ekstremum warunkowego z ograniczeniami nierównościowymi. Dopiero w kategorii wypukłej (Twierdzenie 9.2) bądź pseudo-wypukłej (Twierdzenie 14.1) stają się one warunkami równoważnymi, i to od razu na globalne ekstremum warunkowe.

Teraz do dzieła: wyruszamy na poszukiwanie w analizie portfelowej funkcji pseudo-wklęsłej określonej na dziedzinie wypukłej, i do tego mającej odpowiednie maksimum warunkowe.

### Szczegółowa analiza funkcji prowadzącej do współczynnika Sharpe’a

Innym – a przy tym w analizie portfelowej najważniejszym! – przykładem funkcji, która nie jest ani wklęsła, ani wypukła, jest tzw. **pre-współczynnik Sharpe’a**. Dokładniej, mając dane  $\Sigma$ ,  $\mu$ ,  $\mu_0$ , gdzie  $\Sigma > 0$ ,  $\mu \not\parallel e$  (to nasze dawne założenie (5.2)) oraz:  $\mu_0 < E_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  w aspekcie **B**, względnie  $\mu_0 < \max_{1 \leq i \leq k} \mu_i$  w aspekcie **M**, rozważamy funkcję

$$G = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (\mu - \mu_0 e)^T x > 0, \quad e^T x > 0\} \ni x \mapsto S(x) = \frac{(\mu - \mu_0 e)^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}, \quad (14.1)$$

określoną na otwartym i **wypukłym** (co widoczne) zbiorze  $G \subset \mathbb{R}^k$ .

Zauważamy od razu, że gdy  $x \in G$  oraz  $e^T x = 1$ , wtedy  $S(x)$  jest po prostu współczynnikiem Sharpe’a, przy stopie bezryzykowej wynoszącej  $\mu_0$ , portfela  $x$ . Jest tak zarówno w aspekcie **B**, jak i **M**.

Co prawda – szczegół dość istotny – w żadnym z aspektów nie liczymy tak współczynników Sharpe’a wszystkich dostępnych portfeli, a tylko tych, które mają ten współczynnik dodatni. Idzie jednak o jego maksymalizację i w każdym z aspektów jasno widać, że są portfele o tym współczynniku dodatnim.

**Obserwacja. 14.1** Przy wymienionych wyżej założeniach, każda taka funkcja  $S$  [którą w analizie portfelowej chcemy maksymalizować] nie jest wklęsła na  $G$ .

Uzasadnienie.<sup>1</sup> Oznaczając dla krótkości  $\nu = \mu - \mu_0 e$  ( $\nu \neq 0$ , bo (5.2)), mamy zwartą postać wzoru na funkcję  $S$ ,  $S(x) = \nu^T x (x^T \Sigma x)^{-\frac{1}{2}}$ , dzięki czemu szybko liczymy jej gradient:

$$\nabla S(x)^T = \nu^T x (x^T \Sigma x)^{-\frac{1}{2}} + \nu^T x \left(-\frac{1}{2}\right) (x^T \Sigma x)^{-\frac{3}{2}} 2x^T \Sigma = (x^T \Sigma x)^{-\frac{1}{2}} \left( \nu^T - \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma \right). \quad (14.2)$$

Pokażemy, że w dziedzinie  $G$  niezwykle często zachodzi nierówność pojawiająca się w definicji ściślej wypukłości funkcji różniczkowalnych,

$$S(y) > S(x) + \nabla S(x)^T (y - x). \quad (14.3)$$

Szukamy zatem takich „złych” par  $(x, y) \in G \times G$ , że

$$\frac{\nu^T y}{\sqrt{y^T \Sigma y}} > \frac{\nu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}} + (x^T \Sigma x)^{-\frac{1}{2}} \left( \nu^T - \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma \right) (y - x)$$

(porównaj (14.2)). Lub, równoważnie,

$$\frac{\sqrt{x^T \Sigma x}}{\sqrt{y^T \Sigma y}} \nu^T y > \nu^T y - \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} (x^T \Sigma y - x^T \Sigma x).$$

Lub jeszcze równoważnie,

$$\frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma y - \nu^T y > \nu^T x - \frac{\sqrt{x^T \Sigma x}}{\sqrt{y^T \Sigma y}} \nu^T y. \quad (14.4)$$

Jak to spełnić? Okazuje się, że da się to uzyskać przy dowolnym wektorze  $x \in G$  takim, że  $x \not\parallel \Sigma^{-1} \nu$ , albo, co tutaj równoważne,  $\Sigma x \not\parallel \nu$ . Ustalmy dowolny taki właśnie wektor  $x$ .

<sup>1</sup> zadziwiająco niekrótkie, zastępujące inne, nie do końca przekonujące, podane podczas samych wykładów (w [13] treść Obserwacji 14.1 była zadaniem z gwiazdką)

Zmieniajmy teraz  $y$ , biorąc  $ay$  zamiast  $y$ ,  $a > 0$ . Wtedy nowa lewa strona w (14.4) to (stara LHS)· $a$ , podczas gdy prawa strona w (14.4) pozostaje niezmienna! Wystarczy więc, by stara LHS była dodatnia. Wtedy (biorąc dostatecznie duże  $a > 1$ ) już łatwo uzyskamy pożądaną nierówność dla poprawionej pary wektorów  $x$  i  $ay$ . Jak więc zapewnić sobie  $\frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma y - \nu^T y > 0$ ?

Szukajmy takich wektorów  $y$  (jeszcze przed ich ewentualnym przeskalowaniem) w postaci  $y = x + h$ . Po podstawieniu i skróceniu wyrazów ma więc być  $\frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma h - \nu^T h > 0$ , albo równoważnie

$$h^T \left( \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} \Sigma x - \nu \right) > 0. \quad (14.5)$$

Wektor w nawiasie jest niezerowy – po to właśnie zrobiliśmy założenie  $\Sigma x \nparallel \nu$ . Łatwo zatem znaleźć taki wektor  $h$ , by zachodziła nierówność (14.5) i przy tym taki, by  $x+h \in G$ . (Np, wobec otwartości zbioru  $G$ , dobry jest każdy  $h$  spełniający (14.5) i dostatecznie mały co do długości; euklidesowej, czy też wyznaczonej przez iloczyn skalarny dawany macierzą  $\Sigma$  – bez znaczenia.)

To już koniec (at long last!) uzasadniania Obserwacji 14.1. Nierówność (14.4) zachodzi dla wektorów  $x$  oraz  $y = a(x+h)$  wyspecyfikowanych w trakcie tego uzasadniania. Reasumując, pasują tu m.in. prawie wszystkie  $x \in G$  wraz z dobieranymi do tych  $x$ -ów z ogromną swobodą wektorami  $y = a(x+h)$ .

**Przykład 14.1.** Prześledźmy jeszcze etapy powyższego uzasadnienia na konkretnym przykładzie

$$k=2, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mu_0 = 1, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} \Sigma x - \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Weźmy więc np  $h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; wtedy nierówność (14.5) jest oczywiście spełniona. Czy dla tego  $x$

oraz  $y = x + h$  od razu spełniona jest nierówność (14.4)?

Otóż nie, bo  $3 < 4 - \frac{2}{\sqrt{6}}$ . Lewą stronę trzeba pomocniczo pomnożyć przez dostatecznie dużą liczbę  $a > 1$ . Tutaj np wystarczy wziąć  $a = \frac{11}{10}$ , bo już  $3 \cdot \frac{11}{10} > 4 - \frac{2}{\sqrt{6}}$ . Wtedy dla  $x$  jw i nowego

$$y = \frac{11}{10} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

mamy już jak w (14.3). Mianowicie  $S(x) = 2$ ,  $\nabla S(x)^T = (0, \frac{3}{2})$ ,  $S(y) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ , no i

$$\frac{1}{\sqrt{6}} > \sqrt{\frac{1}{8}} > \sqrt{\frac{49}{400}} = \frac{7}{20} = 2 + (0, \frac{3}{2}) \left( \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{11}{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

*Uwaga 14.1.* Przykład 14.1 pokazuje też przy okazji, że pre-współczynnik Sharpe’a nie jest różniczkowalną funkcją wypukłą (choć taka wiadomość jest dla nas zupełnie marginesowa, bo przecież chcemy ten współczynnik maksymalizować, nie zaś minimalizować). Istotnie, przed przeskalowaniem wektora  $y$  mieliśmy tam nierówność  $S(y) < S(x) + \nabla S(x)^T(y - x)$ :  $\frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2} = 2 + [0, \frac{3}{2}] \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  łamiącą różniczkowalną wypukłość.

*Uwaga 14.2.* Uzasadnienie Obserwacji 14.1 nie poszło nam szybko, bo chodziło o pewne nierówności charakterystyczne dla ścisłej wypukłości funkcji różniczkowalnych. Takie nierówności są – w sytuacji z Obserwacji 14.1 – sprawą delikatną. Mianowicie, w (14.4) szukane były pary  $x, y \in G$  takie, że

$$\frac{x^T \Sigma y}{x^T \Sigma x} \nu^T x + \frac{\sqrt{x^T \Sigma x}}{\sqrt{y^T \Sigma y}} \nu^T y > \nu^T x + \nu^T y,$$

przy czym oba składniki po prawej stronie były, z definicji zbioru  $G$ , dodatnie. Zakładając nawet, że  $x^T \Sigma y > 0$ , tzn., że i po lewej stronie oba składniki były dodatnie, mimo wszystko iloczyn tych składników po lewej stronie, czyli liczba

$$\frac{x^T \Sigma y}{\sqrt{x^T \Sigma x} \sqrt{y^T \Sigma y}} \nu^T x \cdot \nu^T y$$

był, z nierówności Schwarza, niewiekszy niż iloczyn  $\nu^T x \cdot \nu^T y$  składników po prawej stronie; najczęściej zaś był po prostu mniejszy. Otóż potrzeba pewnej gimnastyki, by przy mniejszym iloczynie dwóch czynników mieć (jednak) większą sumę tych czynników. Taką sytuację udało nam się w sposób ścisły wygenerować.

Natomiast okazuje się, że takie funkcje  $S$  są pseudo-wklęsłe.

**Twierdzenie 14.2.** *Przy założeniach jak na początku bieżącego wykładu, pre-współczynnik Sharpe’a  $S$  jest funkcją pseudo-wklęsłą na  $G$ .*

*Dowód.* Zakładamy, że  $\nabla S(x)^T(y - x) \leq 0$ , przy czym gradient(y)  $\nabla S(x)^T$  został(y) już policzony(e) w uzasadnieniu Obserwacji 14.1 powyżej. Zapisujemy to w postaci rozwiniętej

$$\begin{aligned} 0 &\geq (x^T \Sigma x)^{-\frac{1}{2}} \left( \nu^T y - \nu^T x - \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma (y - x) \right) \\ &= (x^T \Sigma x)^{-\frac{1}{2}} \left( \nu^T y - \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} x^T \Sigma y \right), \end{aligned}$$

albo równoważnie – patrz lewa nierówność poniżej, a potem kontynuując dalej (prawa nierówność poniżej) przy pomocy nierówności Schwarza:

$$\nu^T y \leq \underbrace{\frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x}}_{\text{ten ułamek} > 0} x^T \Sigma y \leq \frac{\nu^T x}{x^T \Sigma x} \sqrt{x^T \Sigma x} \sqrt{y^T \Sigma y}.$$

To już daje

$$\frac{\nu^T y}{\sqrt{y^T \Sigma y}} \leq \frac{\nu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}.$$

□

### Maksymalizacja współczynnika Sharpe'a, w aspekcie M i przy silnych założeniach.

Aspekt M oznacza, że chcemy maksymalizować pre-współczynnik Sharpe'a  $S$  na zbiorze  $G \cap \{x \geq 0\}$ . Nie ma więc tu żadnych ograniczeń równościowych (pracujemy z pre-współczynnikiem niezmienniczym ze względu na skalowania), zaś ograniczenia nierównościowe to właśnie  $x \geq 0$  (jedna nierówność wektorowa skrywająca  $k$  nierówności składowych). W tej części zakładamy, że  $\Sigma > 0$ . Zaraz puścimy w ruch budowaną od dawna maszynę.

Jest niezwykle ważne, że punkty maksymalizujące funkcję  $S$  na  $G$  przy podanych ograniczeniach w ogóle **istnieją** – że mamy czego szukać przy pomocy Twierdzeń 14.1 i 14.2.

Istotnie, z racji dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji  $S$  można rozważać tylko argumenty z  $G \cap \Delta^k$ , zaś skoro o maksymalizację  $S$  chodzi, to „nic złego nam nie dojdzie” gdy będziemy rozważać wszystkie portfele z  $\Delta^k$  (bo wobec założeń o  $\mu_0$  istnieją portfele  $x \in \Delta^k$ , dla których  $S(x) > 0$ , więc maksymalizacja  $S$  i tak odbywać się będzie w części  $G \cap \Delta^k$ ). Dalej to już standard z pogranicza analizy i topologii: ciągłość  $S$  na zwartym zbiorze  $\Delta^k$  i twierdzenie Weierstrassa.

Tak więc maksimum funkcji  $S$  na  $G \cap \{x \geq 0\}$  jest osiągalne. Przechodzimy teraz do wyłuskiwania tych miejsc, gdzie to się dzieje. Będzie ich dużo, bo przecież wspomniana dodatnia jednorodność stopnia 0.

W Twierdzeniu 14.1 przyjmujemy  $l = k$  oraz  $a_i = -e_i$ ,  $b_i = 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Wtedy warunki (TT) właśnie kodują nieujemność wszystkich składowych wektora  $x$ . (Spotykaliśmy się już z takim kodowaniem nieujemności składowych portfela Markowitza przy stosowaniu Twierdzenia 9.2. Można powiedzieć, że jest to dla nas chleb powszedni.)

Na mocy Twierdzenia 14.1,  $x_0 \in G \cap \{x \geq 0\}$  jest punktem (pre-portfelem) maksymalizującym  $S$  na  $G \cap \{x \geq 0\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niedodatnie współczynniki  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  takie, że

1.  $\nabla S(x_0) = -\sum_{i=1}^k \lambda_i (-e_i)$  oraz
2.  $\sum_{i=1}^k \lambda_i (0 - (-e_i)^T x_0) = 0$  (z warunku komplementarności).

Pierwszy z tych wzorów pokazuje, że gradient  $S$  w  $x_0$  jest niedodatni jako wektor i równocześnie mówi, że współczynniki  $\lambda_i$  są po prostu składowymi tego wektora gradientu. To pozwala dużo bardziej operatywnie zapisać drugi wzór, i łącznie w ten sposób

- $\nabla S(x_0) \leq 0$  oraz
- $x_0^T \nabla S(x_0) = 0$ .

Teraz należy rozszyfrować • pamiętając, że  $\nabla S(x_0) = (x_0^T \Sigma x_0)^{-\frac{1}{2}} \left( \nu - \frac{\nu^T x_0}{x_0^T \Sigma x_0} \Sigma x_0 \right)$ . Pisząc jako

$y_0 = \frac{\nu^T x_0}{x_0^T \Sigma x_0} x_0$  pewną dodatnią wielokrotność portfela  $x_0$ , • oznacza

$$\Sigma y_0 - \mu + \mu_0 e \geq 0,$$

zaś •• oznacza  $x_0^T (\Sigma y_0 - \mu + \mu_0 e) = 0$ , albo równoważnie

$$y_0^T (\Sigma y_0 - \mu + \mu_0 e) = 0,$$

przy czym oczywiście  $y_0 \geq 0$ ,  $e^T y_0 > 0$ . To właśnie są nasze stare dobrze znajome związki (11.10).

Uzasadnienie sposobu szukania portfeli optymalnych  $\tilde{x}_{\text{op}}$  w teorii Tobina przy  $\Sigma > 0$  jest teraz zakończone. (W końcu trochę szybko to poszło; czytelnik nie takiej końcówki się spodziewał po długim wstępie.) Jednak – uwaga – dalece nie jest zakończone przy ogólniejszych macierzach  $\Sigma \geq 0$ . Tym przypadkiem zajmiemy się niebawem.

W tym momencie narzuca się, tak: wręcz narzuca się pytanie, czy rozwinięta tu powyżej technika pracy z pre-współczynnikiem Sharpe'a  $S$  nie wyprodukowałyby jeszcze raz (niejako po

drodze) wzoru na portfele optymalne  $x_{\text{op}}$  w zmodyfikowanej teorii Tobina, tj przy z powrotem dopuszczanej nieograniczonej krótkiej sprzedaży i, oczywiście, dla  $\Sigma > 0$ .

Odpowiedź jest twierdząca, bo przecież zerowanie się gradientu funkcji pseudo-wklęsłej w punkcie zbioru otwartego wypukłego jest równoważne jej maksymalizacji na tym zbiorze w tym właśnie punkcie: konieczność tego warunku to fakt ogólny z AM II, sięgający wstecz aż do Fermata (połowa XVII wieku), natomiast jego dostateczność wynika z samej definicji – patrz Definicja 13.1 w Wykładzie XIII.

Mając zatem jakiś  $y \in G$  taki, że

$$0 = \nabla S(y) = \left(y^T \Sigma y\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\nu - \frac{\nu^T y}{y^T \Sigma y} \Sigma y\right),$$

zapisujemy ten fakt w postaci

$$\left(\frac{\nu^T y}{y^T \Sigma y}\right) y = \Sigma^{-1} \nu. \quad (14.6)$$

Skoro ten  $y$  spełnia (14.6), to wszystkie  $ty: ty \in G$  też spełniają (14.6). Zatem wszystkie  $y = t\Sigma^{-1}\nu$ ,  $t > 0$ , spełniają (14.6), a wśród nich ten dla  $t = \left(e^T \Sigma^{-1} \nu\right)^{-1}$ , tzn. portfel  $x_{\text{op}}$ . Rozumiemy to tak, że wiele punktów w  $G$  maksymalizuje  $S$ , lecz wśród nich jest tylko jeden portfel — właśnie portfel  $x_{\text{op}}$ .

#### **Maksymalizacja współczynnika Sharpe’a, w aspekcie M i teraz przy słabszych założeniach.**

Założenie (5.2) jest nie do podważenia – nie mogą wszystkie wartości oczekiwane stóp zwrotu z walorów giełdowych być takie same; mapa Markowitza musi być dwuwymiarowa! Za to do rozważenia jest osłabienie założenia  $\Sigma > 0$ . W tej części Wykładu XIV zakładamy tylko, że  $\Sigma \geq 0$ . Jaką wtedy mamy wiedzę nt portfeli optymalnych?

Jeśli chodzi o aspekt **B**, to takie osłabienie wiedzy nt macierzy kowariancji, nawet bez zerowania się ryzyka niektórych portfeli, może prowadzić do nieistnienia portfeli optymalnych ze względu na jakąkolwiek ustaloną stopę bezryzykową. Pamiętamy jeszcze Przykład 7.1 w Wykładzie VII, gdzie po przejściu od aspektu **M** do aspektu **B** portfele efektywne po prostu wyparowały. Tymczasem portfel optymalny względem jakiejś stopy  $\mu_0$  musiałby być efektywny; optymalnych więc nie ma. Zresztą granica minimalna jest pionową prostą  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  jak na Rysunku 7.1, i współczynnik Sharpe’a każdego portfela krytycznego łatwo jest (graficznie) powiększyć.

Dużo ciekawszy jest aspekt **M**, kiedy to większość dotychczasowych rozważań przechodzi, co prawda tylko dla odpowiednio wybranych wartości  $\mu_0$ .

Po pierwsze, przy macierzy kowariancji nieujemnie określonej ryzyko portfeli Markowitza *nie musi* schodzić do zera; widzieliśmy to już w ćwiczeniu w Uwadze 7.2. Wtedy dodatkowe ograniczenie dolne na  $\mu_0$  zaproponowane w (14.7) poniżej jest puste. Często jednak ryzyko schodzi do zera (choćby w modelach doskonale  $\pm$  skorelowanych), i wtedy w mianowniku wyrażenia definiującego współczynnik Sharpe’a może (czy: mogłaby) dziać się katastrofa. By jej uniknąć,<sup>2</sup> zakładamy w dalszym ciągu, że

$$\max\{E(x) \mid x \in \Delta^k, \sigma(x) = 0\} < \mu_0 < \max_{1 \leq i \leq k} \mu_i \quad (14.7)$$

(piszemy  $\max$  zamiast  $\sup$ , bo znowu w grę wchodzi ciągle funkcja  $E(\cdot)$  na zbiorze zwartym).

Uwaga. Jeśli w  $\Delta^k$  nie ma portfeli o zerowym ryzyku, to dodatkowego dolnego ograniczenia na  $\mu_0$  po prostu nie ma.

Pre-współczynnik Sharpe’a  $S$  zdefiniujemy teraz nie na całym zbiorze  $G$  zdefiniowanym w (14.1), tylko na o wiele mniejszym zbiorze [też, jak i  $G$ ] wypukłym i otwartym  $\tilde{G}$  w  $\mathbb{R}^k$ ,  $\tilde{G} \subset G$ .

<sup>2</sup> by, jak mówią anglosasi, *be on the safe side*

W dobrym określeniu tej dziedziny dla  $S$  tkwi teraz główna trudność. Szczególnie chodzi tu o wypukłość zbioru – funkcje pseudo-wklęsłe potrzebują wszak wypukłej dziedziny!

Uwaga. W ważnym fragmencie wykładu przedstawionym tu niżej mignie też przez chwilę jedna najprostsza możliwość, gdy nowy  $\tilde{G}$  będzie starym  $G$ . Nie o to nam jednak głównie chodzi ...

**Konstrukcja dziedziny pre-współczynnika Sharpe’a gdy  $\Sigma \geq 0$ .**

Zauważamy, że zbiór  $Z_1 = \{x \in \Delta^k \mid \nu^T x > 0\}$  jest niepusty wypukły (co oczywiste) oraz nie zawiera portfeli o zerowym ryzyku, bo na nich (jeśli takowe w  $\Delta^k$  są) funkcjonal  $\nu^T$  jest ujemny – patrz (14.7).

Dla potrzeb dalszego rozumowania, niech  $Zero = \{x \in H \mid \sigma(x) = 0\}$ . Ten zbiór stanowi przeszkodę, choć wyjątkowo może nawet być pusty przy macierzy  $\Sigma \geq 0$  (znamy dobrze jeden taki przykład).

Jeśli zbiory  $\Delta^k$  i  $Zero$  są rozłączne, to liczby  $\delta$  tu poniżej nie definiujemy. Natomiast jeśli mają one niepuste przecięcie, to zauważamy, że wartości funkcji liniowej  $E(\cdot)$  na zbiorach  $Z_1$  oraz  $Zero \cap \Delta^k$  różnią się – patrz (14.7) – o pewną dodatnią wielkość. Te dwa zbiory wartości są od siebie oddzielone na osi liczbowej, natomiast funkcja  $E: H \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła. Zatem i zbiory argumentów muszą być oddzielone w przestrzeni  $H$ :

$$\text{dist}(Z_1, Zero \cap \Delta^k) = \delta > 0. \quad (14.8)$$

Trochę większy kłopot jest z częścią zbioru  $Zero$  położoną poza  $\Delta^k$  — znowu: jeśli tylko jest ona niepusta. (Jeśli jest pusta, to z kolei nie definiujemy liczby  $\delta'$  poniżej.)

Mamy więc sytuację  $Zero \setminus \Delta^k \neq \emptyset$ .

Przypuśćmy wówczas, że  $\text{dist}(Z_1, Zero \setminus \Delta^k) = 0$ .

Istnieją zatem ciągi portfeli  $(x_n) \subset Z_1 \subset \Delta^k$  oraz  $(y_n) \subset Zero \setminus \Delta^k$  takie, że  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$  gdy  $n \rightarrow \infty$ . Sympleks  $\Delta^k$  jest zwarty, więc istnieje podciąg portfeli  $(x_{n_m})$  zbieżny do jakiegoś portfela  $\bar{x} \in \Delta^k$  gdy  $m \rightarrow \infty$ . Oczywiście też  $\|y_{n_m} - \bar{x}\| \rightarrow 0$  gdy  $m \rightarrow \infty$ .

Wobec  $\sigma(y_{n_m}) = 0$  dla  $m \in \mathbb{N}$ , i z ciągłości funkcji  $\sigma(\cdot)$  na  $H$ , mamy  $\sigma(\bar{x}) = 0$ . W sytuacji, gdy  $Zero \cap \Delta^k = \emptyset$  (tj. gdy nie ma liczby  $\delta$ ), sprzeczność jest już, bo jednak  $\bar{x} \in Zero \cap \Delta^k$ .

Jeśli zaś  $Zero \cap \Delta^k \neq \emptyset$  (liczba  $\delta$  jest), wtedy sprzeczność jeszcze przez chwilę dokuwamy:  $\nu^T \bar{x} \geq 0$ , bo  $\nu^T x_{n_m} > 0$  dla  $m \in \mathbb{N}$ . Ta własność hipotetycznego portfela Markowitza  $\bar{x}$  wraz z wcześniejszą wiadomością  $\sigma(\bar{x}) = 0$  już dają sprzeczność z lewą nierównością w (14.7).

Tak, czy inaczej, portfel  $\bar{x}$  nie może istnieć. Tym samym udowodniliśmy *ad absurdum*, że

$$\text{dist}(Z_1, Zero \setminus \Delta^k) = \delta' > 0, \quad (14.9)$$

o ile tylko  $Zero \setminus \Delta^k \neq \emptyset$ .

Mamy więc dwiema warunkowo zdefiniowane liczby:  $\delta$  i  $\delta'$ . Warunkowość oznacza tu, że być może któraś z nich jest nieokreślona, względnie nawet obie są nieokreślone (powtarzamy, że *może* tak być nawet przy częściowo zdegenerowanej macierzy  $\Sigma$ ).

Jeśli obie te liczby są nieokreślone, albo innymi słowy  $Zero = \emptyset$ , wtedy ... nie dzieje się nic nowego pod słońcem<sup>3</sup> i kładziemy  $\tilde{G} = G$ . O tej rozczarowującej możliwości wspominaliśmy już w Uwadze wyżej.

Jeśli zaś przynajmniej jedna z tych liczb jest określona, to wnioskiem z (14.8) i/lub (14.9) jest

$$\text{dist}(Z_1, Zero) = \min(\delta, \delta') = r > 0, \quad (14.10)$$

z naturalnym rozumieniem i rolą liczby  $r$  gdy jednej z liczb delta nie ma. Teraz już możemy skonstruować zbiór  $Z_2$ ,  $H \supset Z_2 \supset Z_1$ , otwarty w  $H$ , wypukły i rozłączny z niebezpiecznym zbiorem  $Zero$ :

$$Z_2 = \bigcup_{x \in Z_1} B(x, r), \quad (14.11)$$

<sup>3</sup> zasada brzytwy Ockhama

gdzie  $B(x, r)$  to kula otwarta w hiperpłaszczyźnie  $H$  o środku w  $x$  i promieniu  $r$  (zawsze w użyciu jest odległość euklidesowa, dziedziczona w  $H$  z  $\mathbb{R}^k$ ).

Otwartość  $Z_2$  w  $H$  jest jasna, rozłączność ze zbiorem  $Zero$  wynika z (14.10) (kule w (14.11) są, przypominamy, otwarte). Wypukłość  $Z_2$  wynika wprost z wypukłości  $Z_1$ . Dokładniej, pożyteczne jest samodzielnie rozwiązać następujące ogólne

**Ćwiczenie 14.1.** W przestrzeni euklidesowej  $V$  dany jest niepusty zbiór wypukły  $Z$ , zaś  $r > 0$  jest ustaloną liczbą dodatnią. Uzasadnić, że zbiór  $\bigcup_{x \in Z} B(x, r) \supset Z$  też jest wypukły w  $V$ .

Wybór  $Z_2$  dokonany w (14.11) jest kluczowy. To pewna wypukła otoczka w  $H$  pewnej części sympleksu standardowego  $\Delta^k$ . Może to jednak być bardzo cienka otoczka w  $H$  ( $r$  może być maleńkie dodatnie), niewiele większa od samej otaczanej części sympleksu.

Niech teraz  $\tilde{G}$  będzie po prostu stożkiem nad  $Z_2$ ,

$$\tilde{G} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}_+} aZ_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^k \mid e^T x > 0, x^T \Sigma x > 0\} \quad (14.12)$$

(prawa inkluzja jest oczywista). Skoro zbiór  $Z_2$  był wypukły i otwarty w  $H$ , więc zbiór  $\tilde{G}$  zdefiniowany w (14.12) jest z kolei wypukły i otwarty w  $\mathbb{R}^k$ . Właśnie na takiej dziedzinie  $\tilde{G}$  rozważamy teraz pre-współczynnik Sharpe'a  $S: \tilde{G} \ni x \mapsto S(x)$ . Dosyć ciężka walka została stoczona, by był on dobrze określony na całym otwartym i wypukłym  $\tilde{G}$  (pamiętna rozłączność  $Z_2$  z  $Zero$  na poziomie hiperpłaszczyzny  $H$ ).

Czy jest to właściwy punkt wyjścia do jego maksymalizacji na całym sympleksie standardowym, oczywiście z wyłączeniem portfeli mających zerowe ryzyko?<sup>4</sup> Wyjaśnijmy to tutaj dokładniej. Lewą nierówność w (14.7) można przepisać w postaci

$$\max\{\nu^T x \mid x \in \Delta^k, \sigma(x) = 0\} < 0.$$

Skoro jest tak, to także

$$\sup\{\nu^T x \mid x \in \Delta^k, \sigma(x) < \sigma_0\} < 0$$

dla pewnego dostatecznie małego dodatniego  $\sigma_0$ . Wobec tego maksymalizacja współczynnika Sharpe'a na zbiorze  $\{x \in \Delta^k \mid \sigma(x) > 0\}$  jest tym samym, co jego maksymalizacja na zbiorze  $\{x \in \Delta^k \mid \sigma(x) \geq \sigma_0\}$  – bo odpadają tylko pewne ujemne wartości funkcji, która przyjmuje też<sup>5</sup> wartości dodatnie. Na ostatnim zapisanym tu zbiorze ten współczynnik jest funkcją ciągłą, zaś sam zbiór jest zwarty. Przeto jego kres górny na tym zbiorze jest skończony i jest osiągalny. To właśnie było nam potrzebne, bo tym samym kres górny współczynnika Sharpe'a na  $\{x \in \Delta^k \mid \sigma(x) > 0\}$  jest skończony i osiągalny! Przy tym, rzecz prosta, jest on osiągalny w punkcie, lub punktach, zbioru  $Z_1$ , który posłużył nam wcześniej do zaproponowania okrojonej dziedziny dla pre-współczynnika  $S$ .

Idziemy teraz za ciosem, bez straty ogólności pozostajemy w naszej dziedzinie dla  $S$  i z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji  $S$  dostajemy, że

\* kres górny  $S$  na  $\tilde{G} \cap \{x \geq 0\}$  jest skończony i jest osiągalny.

<sup>4</sup> Taka propozycja dziedziny dla  $S$  jest lekko niestandardowa. Ta dziedzina nie obejmuje przecież całego  $\Delta^k$  bez portfeli zerowego ryzyka! Tak jest, lecz tak też było w łatwiejszej sytuacji  $\Sigma > 0$  na początku tego wykładu; nie będzie to przeszkadzać w naszej maksymalizacji  $S$ . To tylko cena (niejedyna, też założenie (14.7)), jaką musimy zapłacić, by mieć wypukłość dziedziny dla  $S$ .

<sup>5</sup> zresztą dokładnie na zbiorze  $Z_1$  zdefiniowanym wcześniej

**Twierdzenie 14.3.** *Gdy  $\Sigma \geq 0$ , wtedy warunki (11.10) skrywają wszystkie portfele optymalne w aspekcie  $M$  ze względu na stopę bezryzykową  $\mu_0$  spełniającą (14.7). Innymi słowy, również wtedy portfele optymalne (już niekoniecznie jeden jedyny portfel optymalny!) znajduje się, rozwiązując liniowe zagadnienie komplementarności (11.10).*

*Dowód.* Czytelnik domyśla się już, że kluczowy dla dowodu jest właśnie fakt \*, czyli osiągnięcie największej wartości przez  $S$  na wymienionym tam zbiorze. Gdyż poza tym cały (gruby, otwarty)  $\tilde{G}$  jest zbiorem wypukłym, na którym funkcja  $S$  jest pseudo-wklęsła. Tak samo, jak przy  $\Sigma > 0$  ten sam pre-współczynnik Sharpe’a był pseudo-wklęsły na (o wiele większym) zbiorze  $G \supset \tilde{G}$ . (Czasami  $G$  nie jest „o wiele większy”, tylko jest tym samym, co  $\tilde{G}$ , lecz to zupełny szczegół. W trudniejszych sytuacjach  $G$  może być o wiele większy niż  $\tilde{G}$ .)

Dowód pseudo-wklęsłości przechodzi bez zmian, bo skurczona dziedzina jest wypukła, wzór na gradient  $\nabla S$  pozostaje w mocy, zaś nieostra nierówność Schwarza zachodzi też dla formy dwuliniowej z nieujemnie określoną macierzą współczynników.

Dalej zaś włącza się znowu do akcji Twierdzenie 14.1, drugi raz tak samo prowadząc do warunków (11.10), w 100% wiernie charakteryzujących punkty warunkowego maksimum  $S$  przy warunkach nieujemności współrzędnych.  $\square$

*Uwaga 14.3* (po dowodzie). (i) W sytuacji łatwiejszej (początek tego wykładu) wycinaliśmy z  $\Delta^k$  część  $\{\nu^T x \leq 0\}$ , a potem resztę powiększaliśmy do stożka  $G$  (nad tą resztą budowaliśmy stożek  $G$ ).

Teraz w trudniejszej sytuacji też wycinamy tę część, lecz dodatkowo musimy też wyciąć zbiór [nieprzyjemny, algebraiczny, niby „tylko” stopnia 2, lecz przecież w wielu wymiarach!]  $Zero$ . To wycięcie sprawia pewien kłopot, jeśli chodzi o otwartą wypukłość tego, co zostaje. Potem już tylko powiększamy do stożka  $\tilde{G}$ .

Po drodze ubezpieczamy się, postulując w (14.7), by  $Zero \cap \Delta^k \subset \{\nu^T x \leq \text{pewna liczba ujemna}\}$ . To ubezpieczenie jest absolutnie naturalne – wystarczy je sobie zinterpretować graficznie na pionowej osi na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma, E)$ .

Zauważmy jeszcze, by postawić małą kropkę nad „i”, że w definicji zbioru  $G$  w (14.1) występował warunek  $\nu^T x > 0$ . Natomiast w definicji (14.12) zbioru  $\tilde{G}$  ten warunek eksplicite się nie pojawia i wręcz miejscami może nie być spełniony w  $\tilde{G}$ .

Był on w definicji zbioru  $Z_1$  i był tam ważny, natomiast mógł się zagubić przy rozszerzaniu  $Z_1$  do  $Z_2$  [stożkiem nad którym jest  $\tilde{G}$ ]. Dla samej maksymalizacji funkcji  $S$  nie ma to żadnego znaczenia, bo technika K-KT wyłuskuje nam tutaj pre-portfele maksymalizujące  $S$  siedzące w  $\tilde{G} \cap \{x \geq 0\}$ , czyli w stożku nad  $Z_1$ , gdzie z powrotem (czy: od początku) warunek  $\nu^T x > 0$  zachodzi.

(ii) Twierdzenie 14.3 może zostać/zostanie w pełni ocenione dopiero podczas wykładów APRK2, gdy staje/stanie się czymś nieodzownym w badaniu ważnego modelu Alexandera ogłoszonego w roku 1993 w pracy [1], proponującego dość realistyczne podejście do krótkiej sprzedaży. Nie tak krańcowo restryktywne, jak u Lintnera (porównaj Wykład IX), i też nie tak krańcowo swobodne/nierrealistyczne, jak u Blacka i współautorów (porównaj Wykłady V i VI). W modelu Alexandera macierze kowariancji tylko nieujemnie określone są czymś najbardziej naturalnym pod słońcem.

Gdy to Twierdzenie 14.3 jest już udowodnione, najwyższa pora na ilustrację, jak konkretnie tamte słynne warunki (11.10) pracują w sytuacji, gdy macierz kowariancji jest tylko nieujemnie określona.

W ćwiczeniu poniżej ograniczenie dolne na  $\mu_0$  w (14.7) jest puste, bo  $Zero \cap \Delta^3 = \emptyset$ . I nawet

„gorzej”: po prostu  $Zero = \emptyset$ , więc w całej konstrukcji dziedziny dla  $S$  powyżej można było wziąć  $\tilde{G} = G$  itd. Tym niemniej macierz  $\Sigma$  jest tam tylko nieujemnie określona...

Algorytm z Wykładu XI nie działa w sensie dosłownym – nie możemy wszak odwracać macierzy  $\Sigma$ . Mimo to, zgodnie z Twierdzeniem 14.3, warunki (11.10) jednak dobrze kodują portfele optymalne w aspekcie **M**. Rozwiążemy te warunki (lecz dopiero w ... Rozwiązaniu ćwiczenia!) „całościowo”, czyli łącznie i z marszu rozwiążemy odpowiednie liniowe zagadnienie komplementarności. Do dzieła zatem.

**Ćwiczenie 14.2.** W słynnym już modelu Markowitza z ćwiczenia w Uwadze 7.2 (Wykład VII) znaleźć portfele optymalne ze względu na bankową stopę bezryzykową  $\mu_0 \in [0, 1]$ . (Podkreślamy, że tym razem chodzi o aspekt **M**, bo aspektowi **B** w tym modelu zostało już poświęcone Ćwiczenie 9.2 w Wykładzie IX.)

*Rozwiązanie.* Wiemy już z Uwagi 7.2, że w tym modelu wszystkie portfele Markowitza są portfelami relatywnie minimalnego ryzyka. Przy każdej ustalonej wartości  $E \in [1, 3]$  jest cały odcinek takich portfeli; dla skrajnych wartości  $E$  odcinek degeneruje się do punktu – jednego portfela. Więc dla wartości  $\bar{E}$  odpowiadającej ustalonej na pionowej osi wartości  $\mu_0$  powinniśmy mieć cały taki odcinek portfeli optymalnych względem tej stopy bezryzykowej.

Dokładniej, jaką pionową współrzędną  $\bar{E}$  ma punkt na górnym „wąsie” pocisku  $\sigma^2 - (E-2)^2 = 1$ ,  $\sigma > 0$  (wzór uzyskany w Uwadze 7.2), w którym styczna do pocisku przecina oś  $\overrightarrow{OE}$  na wysokości  $\mu_0 < 2$ ?

Jest to standardowa geometria analityczna krzywych stożkowych, kiedyś obecna w podręcznikach licealnych:  $\bar{E} = \frac{5-2\mu_0}{2-\mu_0}$ . Konkretnie, gdy  $\mu_0 \in [0, 1]$ , wtedy  $\bar{E} \in [\frac{5}{2}, 3]$ .

Jakie portfele Markowitza przechodzą w mapie Markowitza na punkt pocisku Markowitza położony na wysokości  $E$ ?<sup>6</sup> Na boku  $\overline{e_1 e_3}$  jest to portfel  $\begin{pmatrix} \frac{3-E}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , natomiast na boku  $\overline{e_2 e_3}$  — portfel  $\begin{pmatrix} 0 \\ E-2 \end{pmatrix}$ . Zatem cały odcinek między tymi skrajnymi portfelami,

$$x(t, E) = t \begin{pmatrix} \frac{3-E}{2} \\ 0 \\ \frac{E-1}{2} \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 3-E \\ E-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \frac{3-E}{2} \\ (1-t)(3-E) \\ t \frac{E-1}{2} + (1-t)(E-2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

przechodzi na punkt pocisku położony na wysokości  $E$ . Gdy podstawimy  $E = \frac{5-2\mu_0}{2-\mu_0}$  i policzymy  $\Sigma x(t, E)$ , wtedy zależność od  $t$  znika:  $\Sigma x(t, E) = \frac{1}{2-\mu_0} \begin{pmatrix} 1-\mu_0 \\ 2-\mu_0 \\ 3-\mu_0 \end{pmatrix}$ . Teraz staje się jasne, jak realizuje się krytyczność, o której mowa we wskazówce do Uwagi 7.2:

$$\Sigma x(t, E) = \frac{1}{2-\mu_0} \mu - \frac{\mu_0}{2-\mu_0} e.$$

Natomiast w terminach problemu (11.10) trzeba oczywiście wziąć  $y = y(t, E) = (2-\mu_0)x(t, E)$ , który dla rozważanych tu wartości  $t$  i  $E$  ma wszystkie składowe nieujemne, no i mieć wtedy, właśnie całościowo i niezależnie od oddzielnych etapów,  $\Sigma y(t, E) - \mu + \mu_0 e = 0$ .

Normalizacja pre-portfela  $y(t, E)$  daje portfel  $x(t, E)$  optymalny ze względu na stopę  $\mu_0$ . Zależność tych portfeli od  $t$  jest oczywiście afiniczna. Jest ich wiele przy ustalonej  $\mu_0$ , nie ma mowy o jakiegokolwiek jednoznaczności portfela optymalnego (od dawna wiemy, że cały przykład jest

<sup>6</sup> jedno nazwisko występuje trzy razy w jednym pytaniu, i wszystko jest najzupełniej legalne

co najmniej dziwny). Natomiast jak te portfele zależą od  $\mu_0$ ?

To też nic trudnego. Do znanego już wzoru na  $x(t, E)$  podstawiamy znalezioną zależność  $E = E(\mu_0)$ , dostając

$$x(t, E(\mu_0)) = \frac{1}{2 - \mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t\mu_0 \\ 1 - t - \mu_0 + t\mu_0 \\ 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t\mu_0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

**Ćwiczenie 14.3** (kontynuacja Ćwiczenia 14.2). Znaleźć najmniejszą wartość stopy bezryzykowej  $\mu_0$ , ze względu na którą portfel  $e_3$  jest optymalny w modelu Markowitza z Ćwiczenia 14.2.

Wskazać jakąś inną większą stopę bezryzykową, ze względu na którą portfel  $e_3$  także jest optymalny w aspekcie **M**.

Czy jest to jedyny portfel optymalny w aspekcie **M** przy tej większej stopie bezryzykowej?

Na koniec tych rozważań o portfelach optymalnych ze względu na stopę(y)  $\mu_0$  w aspekcie **M**, przeprowadźmy jedną dłuższą analizę ich zachowania i zmienności w trochę podkreślonym przykładzie Krzyżewskiego. Mianowicie, przy niezmienionej tamtej macierzy kowariancji, przesunijmy wszystkie wartości oczekiwane o wielkość 3 w górę – rodzaj przesunięcia równoległego stóp, pojęcia występującego m. in. w kursie Inżynierii Finansowej. Tzn. rozważamy teraz model Markowitza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 19 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (14.13)$$

wzbogacony o stopę wolną od ryzyka  $\mu_0$  zmieniającą się od 0 do  $\frac{33}{13}$ . Te wartości graniczne stopy bezryzykowej są uzasadnione geometrią przykładu i są po prostu wysokościami, na których styczne do granicy minimalnej w obrazach portfeli  $e_3$  i  $e_1$  przecinają pionową oś  $\overrightarrow{OE}$ . (W samym przykładzie Krzyżewskiego przedział wartości dla stopy bezryzykowej zaczynałby się w  $-3$  – dość nieciekawej stopie zwrotu pozbawionej ryzyka.)

Wiemy, że i tutaj cała granica minimalna jest efektywna, bo to stary przykład Krzyżewskiego, tylko „kopnięty” o 3 w górę. Portfele optymalne przy zmienianiu stopy  $\mu_0$  przebiegają więc całą łamaną wierzchołkową, która jest, oczywiście, identyczna jak w przykładzie Krzyżewskiego – patrz Rysunek 7.5 w Wykładzie VII.

Gdy więc przejeżdżamy wartością  $\mu_0$  przedział  $[0, 3]$ , wtedy portfele optymalne  $\tilde{x}_{\text{op}}$  jadą (bądź stoją) kolejno po (w) częściach łamanej z Rysunku 7.5 położonych na ścianach: (a)  $\{3\}$ , (b)  $\{1, 3\}$ , (c)  $\{1, 2, 3\}$ , (d)  $\{2, 3\}$ , (e)  $\{2\}$ , (f)  $\{1, 2\}$ , (g)  $\{1\}$ .

Skomentujemy prawdziwe ruchy portfela optymalnego oraz jego postój w wierzchołku  $e_2$ . Nie przytaczamy szczegółowych obliczeń – mogą to być (bardzo zalecane) dla czytelnika **ćwiczenia sprawdzające**.

Ad (b). Dzieje się tak dla  $0 < \mu_0 \leq \frac{17}{13}$ , zaś wartość oczekiwana portfela optymalnego  $\tilde{E}_{\text{op}}$  zmienia się wtedy między 2 i  $\frac{36}{17}$ . Sam zaś ten portfel to

$$\tilde{x}_{\text{op}} = \frac{1}{68 - 35\mu_0} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 0 \\ 68 - 36\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Jego składowe są wyrażone funkcjami wymiernymi (homografiami) od  $\mu_0$ . Jest to całkiem naturalne, bo przecież jego wartość oczekiwana jest pewną homografią od  $\mu_0$ .

Ad (c). Dzieje się tak dla  $\frac{17}{13} < \mu_0 < \frac{4}{3}$ , zaś  $\tilde{E}_{\text{op}}$  zmienia się wtedy między  $\frac{36}{17}$  i  $\frac{7}{3}$ . Natomiast

$$\tilde{x}_{\text{op}} = \frac{1}{17 - 12\mu_0} \begin{pmatrix} 4 - 3\mu_0 \\ -17 + 13\mu_0 \\ 30 - 22\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Ad (d). Dzieje się tak dla  $\frac{4}{3} \leq \mu_0 < \frac{3}{2}$ , zaś  $\tilde{E}_{\text{op}}$  zmienia się wtedy między  $\frac{7}{3}$  i 3. Natomiast

$$\tilde{x}_{\text{op}} = \frac{1}{5 - 3\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \mu_0 \\ 6 - 4\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Ad (e). Portfel optymalny stoi na  $e_2$ , podczas gdy  $\mu_0$  rośnie od  $\frac{3}{2}$  do 2. Dostajemy proste nadstyczne w punkcie  $\mathcal{M}(e_2)$  do granicy efektywnej, wszystko oczywiście w aspekcie  $\mathbf{M}$ . ( $\mathcal{M}(e_2)$  jest punktem załamania – kinkiem – na granicy minimalnej.)

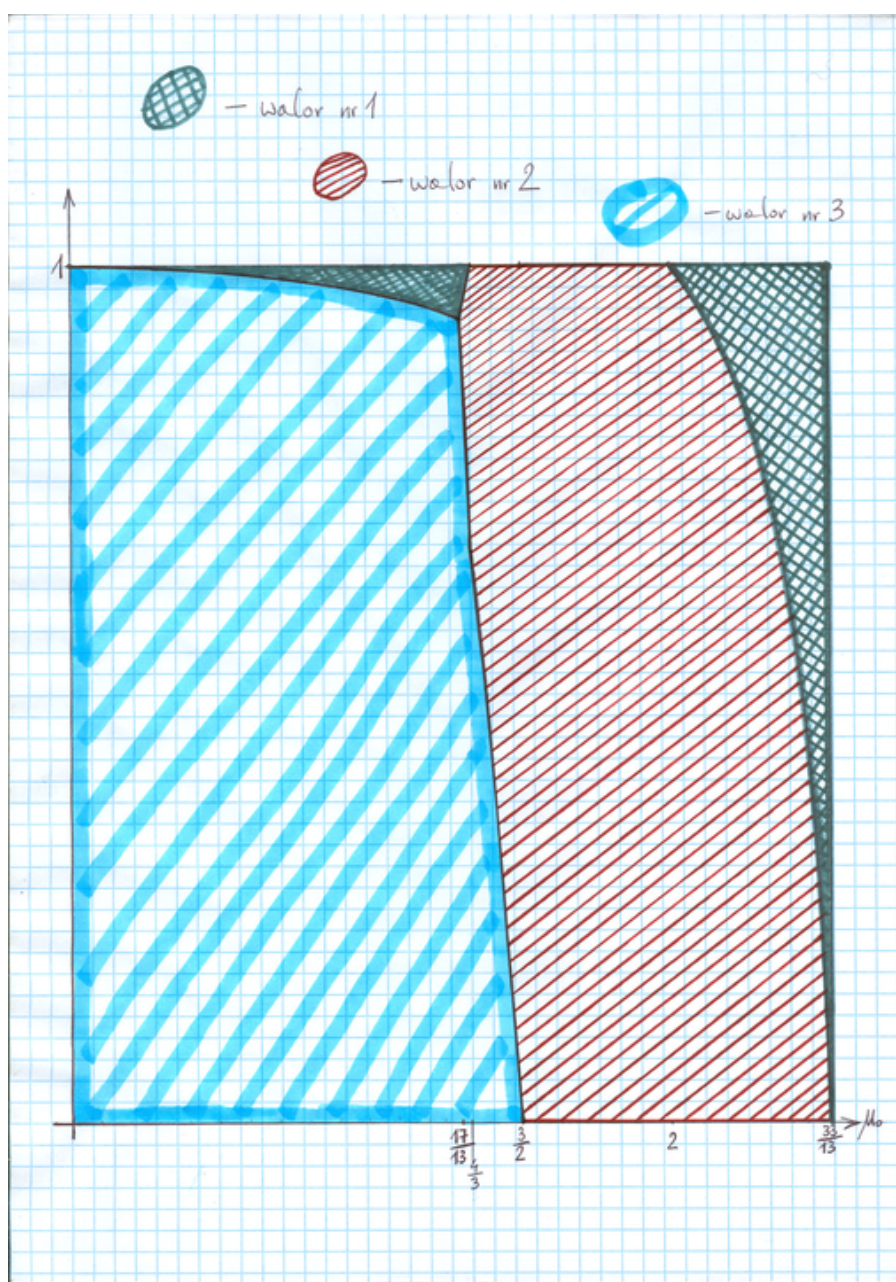
Ad (f). Dzieje się tak dla  $2 < \mu_0 < \frac{33}{13}$ , zaś  $\tilde{E}_{\text{op}}$  zmienia się wtedy między 3 i 4. Natomiast

$$\tilde{x}_{\text{op}} = \frac{1}{27 - 10\mu_0} \begin{pmatrix} -6 + 3\mu_0 \\ 33 - 13\mu_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Spróbujmy raz jeden zobrazować wszystkie te portfele optymalne **dynamicznie na jednym wspólnym rysunku**, na osi odciętych odkładając wartości  $\mu_0$ , zaś na pionowych prostych, nad odpowiednimi wartościami stopy  $\mu_0$ , zaznaczając różnymi kolorami *wkłady* odpowiednich walorów do portfela optymalnego. Konkretnie: kolorem ciemnozielonym zaznaczając wkład waloru 1, czerwonym – waloru 2, niebieskim – waloru 3. Oto wynik takiego obrazowania:

[w wersji pdf chochlik drukarski przerzucił diagram na następną stronę]

Łamana efektywna jest tu, jak wiemy, bardzo bogata. Jej wizualizacja graficzna podana w funkcji parametru  $\mu_0$  trochę rozczarowuje – widać chyba mniej, niż na Rysunku 7.5. W ramach porównywania tamtego rysunku z obecnym Rysunkiem 14.1, można zadać sobie pytanie



Rysunek 14.1. Diagram wyglądałby trochę inaczej – jak? – gdyby na osi odciętych odkładać wartości  $\tilde{E}_{\text{op}}$  zamiast  $\mu_0$ .

(oczywiście kontrolne), czy na obecnym umiemy wskazać punkty, w których, na dawnym, prosta krytyczna przecina boki sympleksu standardowego.

Jest to nietrudne w przypadku portfela krytycznego niemającego waloru numer 2 ( $x_2 = 0$ ): nad odciętą  $\mu_0 = \frac{17}{13}$  widzimy charakterystyczny punkt potrójny.<sup>7</sup>

Jest to trudniejsze w przypadku portfela krytycznego niemającego waloru numer 1 ( $x_1 = 0$ ). Czytelnik widzi na pewno lekki kink na Rysunku 14.1 na granicy między obszarami niebieskim i czerwonym. Ma on odciętą  $\mu_0 = \frac{4}{3}$  i rzędną  $\frac{2}{3}$ . Taką samą odciętą  $\frac{4}{3}$  ma punkt o rzędnej 1

<sup>7</sup> może komuś przypominają się lekcje fizyki w liceum, np punkt potrójny wody ...

– wspólny punkt narożny obszarów: małego zielonego i czerwonego. Oba wymienione punkty trzeba myślowo skleić ze sobą; dostanie się wtedy drugi punkt potrójny na diagramie.

**Ćwiczenie 14.4.** Dokonujemy przesunięcia równoległego wszystkich wartości oczekiwanych o wielkość  $c$ ,  $\tilde{\mu} = \mu + ce$ , nie zmieniając przy tym [odwracalnej] macierzy kowariancji.

- Znaleźć wzory na nowe wielkości „greckie”  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  i  $\tilde{\gamma}$  po takim przesunięciu, a następnie
- sprawdzić, że takie przesunięcie równoległe ma (skądinąd naturalną i oczekiwaną) własność funktorialności

$$\frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}(t + c)}{\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}(t + c)} = \frac{\alpha - \beta t}{\beta - \gamma t} + c$$

dla wszystkich wartości  $t \in R$ . (Taka własność funktorialności prześliskiwała kilka razy w „przesuniętym przykładzie Krzyżewskiego” dyskutowanym tuż przed tym ćwiczeniem.)

### Łamane wierzchołkowe revisited i początek dyskusji algorytmu CLA

Łamane wierzchołkowe – te odpowiedniki w modelach Markowitza prostych krytycznych Blacka – mogą być, jak już wiemy, bardzo skomplikowane. Szukanie portfeli relatywnie minimalnego ryzyka w modelach Markowitza jest żmudne – porównaj algorytm, czyli de facto metodę prób opisaną w Wykładzie X (bazującą na twierdzeniu Karusha-Kuhna-Tuckera). Również podzbiór łamanej wierzchołkowej – łamana efektywna obsługująca granicę efektywną – może być bardzo złożony, jak pokazują przykłady znalezione przez studentów naszego wydziału<sup>8</sup> w roku 2008.

Komentatorzy pracy Markowitza z 1952 czynili mu z tego zarzuty, określając całą rzecz jako mało praktyczną. Jak bowiem w praktyce [wtedy, prawie 60 lat temu] znajdować tak złożone obiekty? Markowitz odpowiedział artykułem [20] i [pierwszą] książką [21]. Mianowicie ukonkretnił i wyszlifował prawdziwy klejnot, tzw. algorytm prostej krytycznej (Critical Line Algorithm – CLA) zręcznie wyluskujący te ściany sympleksu, przez które przebiega łamana efektywna, czy łamana wierzchołkowa, zależnie od wariantu.

Należy jednak zaznaczyć, że pierwsze, i od razu przełomowe uwagi na ten temat zawarł on już w [19]! Kluczowa w tym aspekcie jest tam strona 87. Proszę ocenić samej/samemu, reprodukcja poniżej.

[W wersji pdf Rysunek 14.2 jest dopiero pół strony dalej ...]

Natomiast jak po latach oceniał to sam Markowitz? Odpowiedź jest na stronie 38 w jego drugiej książce [22]: ‘The general portfolio selection model [...] was presented in [20], along with the critical line algorithm for computing efficient sets.’ Te słowa nie wymagają żadnego dodatkowego komentarza odnośnie pierwszeństwa w odkryciu algorytmu prostej krytycznej w analizie portfelowej.

Przy ilości spółek w modelu  $k \approx 200$ , zamiast ogromnej ilości ścian do rozważenia, algorytm CLA zwykle wskazuje tych kilkaset istotnych, na których dzieje się wszystko, co ważne dla analizy portfelowej i decyzji inwestycyjnych o nią opartych.

(W [22] na stronie 157 czytamy: ‘Fortunately we can find these few hundred [critical lines], and their efficient portions, without enumerating all critical lines.’)

W naszym opisie algorytmu CLA będziemy stale zakładać, że  $\Sigma > 0$  i (5.2). Potem dojdą jeszcze inne niezbędne założenia. Wszystko polegać będzie na zręcznym, innym niż do tej pory szukaniu portfeli relatywnie minimalnego ryzyka  $x_E$  bez eksponowania parametru  $E$ .

Zanim to ukonkretnimy i rozwiiniemy, chcemy jeszcze przywołać słowa Sharpe’a z [26]. Zamiast bardzo długiego w tym przypadku cytatu, oto dwie odpowiednie strony z tamtej pracy. Ich lektura, i to **teraz**, dosłownie na poczekaniu, może być dla czytelnika pierwszym spotkaniem i pochyleniem się nad algorytmem Markowitza. Wyjaśnienia, które nastąpią później, w tym i w

<sup>8</sup> P. Grodzki i J. Gruszczyński, patrz też lista osiągnięć studentów podana pod koniec Wykładu VII

able set. In this case there is a security which does not enter into any efficient portfolio. (2) Two securities have the same  $\mu_i$ . In this case the isomean lines are parallel to a boundary line. It may happen that the efficient portfolio with maximum  $E$  is a diversified portfolio. (3) A case wherein only one portfolio is efficient.

The efficient set in the 4 security case is, as in the 3 security and also the  $N$  security case, a series of connected line segments. At one end of the efficient set is the point of minimum variance; at the other end is a point of maximum expected return<sup>10</sup> (see Fig. 4).

Now that we have seen the nature of the set of efficient portfolios, it is not difficult to see the nature of the set of efficient  $(E, V)$  combinations. In the three security case  $E = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$  is a plane;  $V = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2$  is a paraboloid.<sup>11</sup> As shown in Figure 5, the section of the  $E$ -plane over the efficient portfolio set is a series of connected line segments. The section of the  $V$ -paraboloid over the efficient portfolio set is a series of connected parabola segments. If we plotted  $V$  against  $E$  for efficient portfolios we would again get a series of connected parabola segments (see Fig. 6). This result obtains for any number of securities.

Various reasons recommend the use of the expected return-variance of return rule, both as a hypothesis to explain well-established investment behavior and as a maxim to guide one's own action. The rule serves better, we will see, as an explanation of, and guide to, "investment" as distinguished from "speculative" behavior.

10. Just as we used the equation  $\sum_{i=1}^4 X_i = 1$  to reduce the dimensionality in the three

security case, we can use it to represent the four security case in 3 dimensional space. Eliminating  $X_4$  we get  $E = E(X_1, X_2, X_3)$ ,  $V = V(X_1, X_2, X_3)$ . The attainable set is represented, in three-space, by the tetrahedron with vertices  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ , representing portfolios with, respectively,  $X_4 = 1$ ,  $X_3 = 1$ ,  $X_2 = 1$ ,  $X_1 = 1$ .

Let  $s_{a1}$  be the subspace consisting of all points with  $X_4 = 0$ . Similarly we can define  $s_{a1}, \dots, s_{aa}$  to be the subspace consisting of all points with  $X_i = 0$ ,  $i \neq a_1, \dots, a_a$ . For each subspace  $s_{a1}, \dots, s_{aa}$  we can define a *critical line*  $l_{a1}, \dots, l_{aa}$ . This line is the locus of points  $P$  where  $P$  minimizes  $V$  for all points in  $s_{a1}, \dots, s_{aa}$  with the same  $E$  as  $P$ . If a point is in  $s_{a1}, \dots, s_{aa}$  and is efficient it must be on  $l_{a1}, \dots, l_{aa}$ . The efficient set may be traced out by starting at the point of minimum available variance, moving continuously along various  $l_{a1}, \dots, l_{aa}$  according to definite rules, ending in a point which gives maximum  $E$ . As in the two dimensional case the point with minimum available variance may be in the interior of the available set or on one of its boundaries. Typically we proceed along a given critical line until either this line intersects one of a larger subspace or meets a boundary (and simultaneously the critical line of a lower dimensional subspace). In either of these cases the efficient line turns and continues along the new line. The efficient line terminates when a point with maximum  $E$  is reached.

11. See footnote 8.

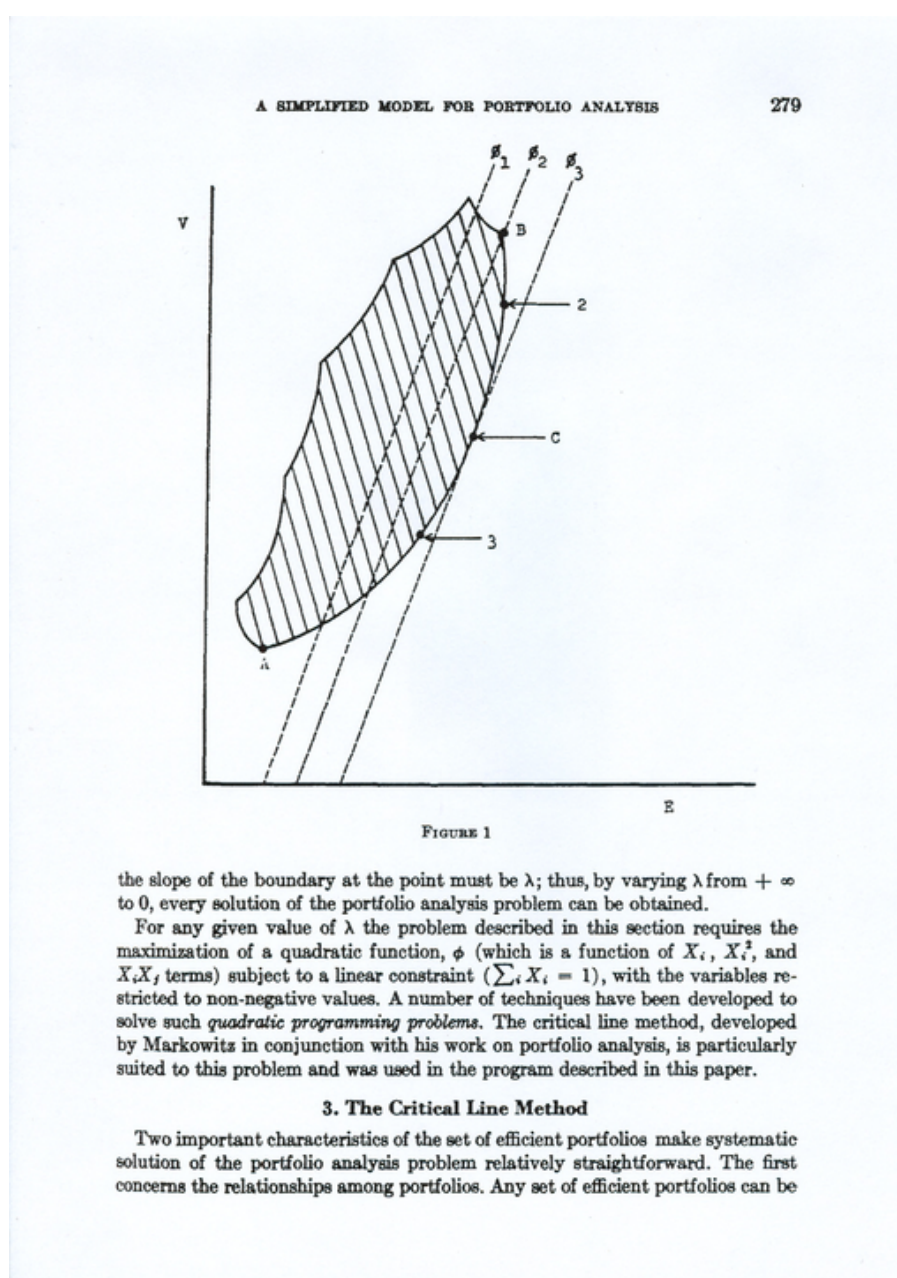
Rysunek 14.2. A stroke of genius w dolnej części tej strony reprodukowanej z [19].

następnym (ostatnim) wykładzie, będą inaczej odbierane, gdy czytelnik będzie coś pamiętał ze wstępnego opisu Sharpe'a.

[W wersji pdf idący teraz Rysunek 14.3 przeskoczył aż na następną stronę, zaś zaraz po nim idący Rysunek 14.4 – na jeszcze następną. Zapoznać się z nimi należy **przed** zagłębieniem się w konkrety opisu algorytmu.]

Zagłębiamy się już teraz w konkrety opisu algorytmu. Przypuśćmy, że szukamy takich portfeli na ścianie  $IN \subset \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\#(IN) \geq 1$  (wierzchołki sympleksu są teraz dopuszczalne!), tzn. rozwiązujemy zagadnienie

$$x_i > 0, \quad (\sum x + \lambda e - \lambda_E \mu)_i = 0 \quad \text{dla } i \in IN, \quad (14.14)$$



Rysunek 14.3. Markowitz otrzymuje tutaj swoje credits.

$$x_j = 0, \quad (\Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu)_j \geq 0 \quad \text{dla } j \in \text{OUT} = \{1, 2, \dots, k\} \setminus \text{IN} \quad (14.15)$$

przy jakichś rzeczywistych  $\lambda$ ,  $\lambda_E$  zależnych od szukanego  $x$ . Markowitz doszedł do wniosku, że  $\lambda_E$  należy traktować jako *niezależny* parametr oraz szukał pełnego układu  $k$  równań, a nie jedynie  $\#(\text{IN})$  równań. Sztuczne  $\#(\text{OUT})$  równań wprowadził on w zaskakująco prosty sposób.

described in terms of a smaller set of *corner portfolios*. Any point on the  $E, V$  curve (other than the points associated with corner portfolios) can be obtained with a portfolio constructed by dividing the total investment between the two adjacent corner portfolios. For example, the portfolio which gives  $E, V$  combination  $C$  in Figure 1 might be some linear combination of the two corner portfolios with  $E, V$  combinations shown by points 2 and 3. This characteristic allows the analyst to restrict his attention to corner portfolios rather than the complete set of efficient portfolios; the latter can be readily derived from the former.

The second characteristic of the solution concerns the relationships among corner portfolios. Two corner portfolios which are adjacent on the  $E, V$  curve are related in the following manner: one portfolio will contain either (1) all the securities which appear in the other, plus one additional security or (2) all but one of the securities which appear in the other. Thus in moving down the  $E, V$  curve from one corner portfolio to the next, the quantities of the securities in efficient portfolios will vary until either one drops out of the portfolio or another enters. The point at which a change takes place marks a new corner portfolio.

The major steps in the critical line method for solving the portfolio analysis problem are:

1. The corner portfolio with  $\lambda = \infty$  is determined. It is composed entirely of the one security with the highest expected return.<sup>4</sup>
2. Relationships between (a) the amounts of the various securities contained in efficient portfolios and (b) the value of  $\lambda$  are computed. It is possible to derive such relationships for any section of the  $E, V$  curve between adjacent corner portfolios. The relationships which apply to one section of the curve will not, however, apply to any other section.
3. Using the relationships computed in (2), each security is examined to determine the value of  $\lambda$  at which a change in the securities included in the portfolio would come about:
  - a. securities presently in the portfolio are examined to determine the value of  $\lambda$  at which they would drop out, and
  - b. securities not presently in the portfolio are examined to determine the value of  $\lambda$  at which they would enter the portfolio.
4. The next largest value of  $\lambda$  at which a security either enters or drops out of the portfolio is determined. This indicates the location of the next corner portfolio.
5. The composition of the new corner portfolio is computed, using the relationships derived in (2). However, since these relationships held only for the section of the curve between this corner portfolio and the preceding one, the solution process can only continue if new relationships are derived. The method thus returns to step (2) unless  $\lambda = 0$ , in which case the analysis is complete.

The amount of computation required to complete a portfolio analysis using

<sup>4</sup> In the event that two or more of the securities have the same (highest) expected return, the first efficient portfolio is the combination of such securities with the lowest variance.

Rysunek 14.4. Sedno konstrukcji; można i należy to porównywać z tekstem w dolnej części Rysunku 14.2.

**Definicja 14.1.** Niech  $e_{IN}, \mu_{IN}$  to nowe wektory o  $k$  współrzędnych, tożsame z  $e, \mu$  na miejscach z IN, lecz zerowe na miejscach z OUT. Niech  $\Sigma_{IN}$  to macierz  $k \times k$ , której  $(i, j)$ -ty wyraz to

$$\begin{cases} (i, j)\text{-ty wyraz } \Sigma & \text{gdy } (i, j) \in IN \times IN, \\ 1 & \text{gdy } i = j \in OUT, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j, (i, j) \notin IN \times IN. \end{cases}$$

(Proszę porównać te nowe symbole z innymi symbolami  $e^{IN}, \mu^{IN}, \Sigma^{IN}$  wprowadzonymi i używanymi w Wykładzie X.)

Równania (14.14) zapisujemy teraz jako układ

$$\Sigma_{\text{IN}}x + \lambda e_{\text{IN}} = \lambda_E \mu_{\text{IN}},$$

do którego dołączamy równanie budżetowe  $e_{\text{IN}}^T x = 1$ . Łącznie dostajemy układ  $k + 1$  równań z  $k + 1$  „niewiadomymi”, wśród których jest  $\#(\text{OUT})$  wiadomych  $x_j = 0$ ,  $j \in \text{OUT}$ :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{\text{IN}} & e_{\text{IN}} \\ e_{\text{IN}}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_E \mu_{\text{IN}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.16)$$

W podejściu Markowitza kluczowe są macierze  $M_{\text{IN}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Sigma_{\text{IN}} & e_{\text{IN}} \\ e_{\text{IN}}^T & 0 \end{pmatrix}$  układów równań (14.16).

**Twierdzenie 14.4.** *Gdy  $\Sigma > 0$  oraz (10.3) (tzn. wszystkie liczby  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  są różne), wtedy wszystkie macierze  $M_{\text{IN}}$  są odwracalne dla  $\text{IN}: 1 \leq \#(\text{IN}) \leq k$ .*

*Dowód.* Jest to widoczne bezpośrednio dla  $\text{IN}$  jednoelementowych. Istotnie, gdy  $\text{IN} = \{i\}$ , wtedy, rozwijając<sup>9</sup> wyznacznik względem  $i$ -go wiersza, składnik z czynnikiem  $\sigma_{ii}$  znika i zostaje tylko

$$\det M_{\text{IN}} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{i-1} & \overbrace{\begin{matrix} & & & & \\ & & & & 0 \end{matrix}}^{k-i} \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} (-1)^{k-i+1} \cdot 1 = -1,$$

a więc ten wyznacznik nie zależy nawet od wariancji  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ .

Dla  $\text{IN}$  więcej niż jednoelementowych potrzeba tu więcej pracy. Na ścianie  $\text{IN}$  rozwijamy teorię Blacka przy danych  $\Sigma^{\text{IN}}, \mu^{\text{IN}}, e^{\text{IN}}$  – patrz wspomniane starsze oznaczenia z Wykładu X. (Oczywiście wykorzystujemy tutaj założenia  $\Sigma > 0$  oraz  $\neq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ , czyli założenie (10.3), właśnie jeszcze z Wykładu X; jest to centralny moment dowodu.)

<sup>9</sup> rozwinięcie Laplace’a

Niech liczby  $\alpha, \beta, \gamma$  pojawiające się w tej teorii będą teraz nazwane  $A, B, C$  i, konsekwentnie,

$$\lambda_E = \frac{\begin{vmatrix} E & B \\ 1 & C \end{vmatrix}}{AC - B^2}, \quad \lambda = -\frac{\begin{vmatrix} A & E \\ B & 1 \end{vmatrix}}{AC - B^2}. \quad (14.17)$$

Pytamy się, czy układ  $k + 1$  równań (14.16) ma rozwiązanie. W czystym sensie wyjętym z GALu, bez żadnego związku z analizą portfelową. To pytanie jest jednak źle postawione – trzeba najpierw sprecyzować wartość  $\lambda_E$  w kolumnie wyrazów wolnych! Sprecyzujemy więc, biorąc np  $E = 0$ . Wtedy z (14.17) dostajemy  $\lambda_E = \frac{B}{B^2 - AC}$  i równocześnie  $\lambda = \frac{A}{B^2 - AC}$ . Jaki wektor  $x$  mógłby dopełnić tę wartość  $\lambda$  do rozwiązania w sensie z GALu układu (14.16)? Oczywiście portfel Blacka  $x^{\text{IN}}(0)$  – porównaj podstawowy wzór (6.2) – uzupełniony zerami na miejscach OUT, by dostać portfel  $x \in H \subset \mathbb{R}^k$  (!)

Układ równań po doprecyzowaniu ma więc rozwiązanie.

Przypuśćmy teraz, że istnieją dwa **różne** rozwiązania, cały czas w sensie z GALu, tego układu po doprecyzowaniu,  $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ \lambda' \end{pmatrix}$ .

Natura równań (14.16) jest taka, że  $x, x'$  leżą w płaszczyźnie ściany IN:  $x_j = x'_j = 0$  dla  $j \in \text{OUT}$ . Wtedy także  $x \neq x'$  (bo, wobec

$$\lambda e_{\text{IN}} = \lambda_E \mu_{\text{IN}} - \Sigma_{\text{IN}} x,$$

równość  $x = x'$  pociągałaby  $\lambda = \lambda'$ ). W takiej sytuacji wspomniana teoria Blacka na ścianie IN ma dwa różne rozwiązania  $x$  i  $x'$  przy jednej wartości oczekiwanej  $E = 0$ . Dwa różne portfele relatywnie minimalnego ryzyka w aspekcie **B** odpowiadające ustalonej wartości oczekiwanej  $E$ ! (Punkty  $x, x'$  rozumiane są teraz jako punkty w przestrzeni  $\#(\text{IN})$ -wymiarowej;  $\#(\text{IN}) \geq 2$  jest, przypominamy to jeszcze raz, istotne.)

Tak, jak dobrze wiadomo, być nie może. Przypuszczenie o dwóch różnych rozwiązaniach jest więc fałszywe. Skoro układ równań liniowych (14.16), po doprecyzowaniu  $E = 0$ , ma jedno jedyne rozwiązanie w sensie z GALu, jego macierz  $M_{\text{IN}}$  jest nieosobliwa.  $\square$

Korzystamy teraz z Twierdzenia 14.4 i rozwiązujemy układ (14.16), lecz teraz już przy **dowolnej ustalonej wartości**  $\lambda_E$  (takie to *added values* oferuje nam za darmo GAL; ktoś inny powie w tym miejscu, że jest to alfabet matematyki):

$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{M_{\text{IN}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\alpha_{\text{IN}}} + \underbrace{M_{\text{IN}}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_{\text{IN}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\beta_{\text{IN}}} \cdot \lambda_E. \quad (14.18)$$

Tak **zdefiniowane**  $\alpha_{\text{IN}}$  oraz  $\beta_{\text{IN}}$  są to wektory o  $k + 1$  składowych (!), które będą używane w każdym danym etapie IN algorytmu CLA. Lecz nie tylko one.

Obok nich używane będą jeszcze dwa inne wektory, tym razem o  $k$  składowych, bezpośrednio związane z nierównościami (14.15).

**Definicja 14.2.**

$$\eta := \Sigma x + \lambda e - \lambda_E \mu$$

(podstawowy wektor używany podczas stosowania twierdzenia K-KT do poszukiwania portfeli relatywnie minimalnego ryzyka).

Zapisujemy ten wektor  $\eta$  trochę inaczej, używając rozwinięcia (14.18):

$$\eta = (\Sigma e) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} - \lambda_E \mu = (\Sigma e) (\alpha_{\text{IN}} + \beta_{\text{IN}} \lambda_E) - \lambda_E \mu = \underbrace{(\Sigma e) \alpha_{\text{IN}}}_{\gamma_{\text{IN}}} + \underbrace{\left( (\Sigma e) \beta_{\text{IN}} - \mu \right)}_{\delta_{\text{IN}}} \lambda_E, \quad (14.19)$$

gdzie  $(\Sigma e)$  nie jest wynikiem działania macierzy  $\Sigma$  na wektorze  $e$ , tylko **niekwadratową** macierzą  $k \times (k+1)$ .

Algorytm CLA to, na każdym etapie IN, dosyć zręczne żonglowanie rozwinięciami (14.18) i (14.19). Dla większej przejrzystości, w dalszym ciągu opuszczać będziemy subskrypty IN w wektorach  $\alpha_{\text{IN}}$ ,  $\beta_{\text{IN}}$ ,  $\gamma_{\text{IN}}$ ,  $\delta_{\text{IN}}$ . Istnieje ryzyko kolizji oznaczeń z symbolami w teorii Blacka i współautorów, lecz zawsze należy zwracać uwagę na kontekst pojawienia się danego symbolu.

## 15. Wykład XV, 22.I.2010

Przystępujemy do opisu działania CLA; komentarze objaśniające będą podane później, by nie zaciemniać głównej, pięknej pętli algorytmu.

Zakładamy już do końca, że  $\Sigma > 0$  oraz  $\neq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ . To pociąga, że macierze  $\Sigma_{\text{IN}}$ , a także  $M_{\text{IN}}$ , są odwracalne dla wszystkich  $\emptyset \neq \text{IN} \subset \{1, 2, \dots, k\}$  – patrz Twierdzenie w Wykładzie XIV. Algorytm CLA odnajduje, na nowo i niezależnie od metody prób opartej na twierdzeniu Karusha-Kuhna-Tuckera (patrz Wykład X), łamaną wierzchołkową  $\bar{L}$  zbudowaną z portfeli relatywnie minimalnego ryzyka. Względnie – w oryginalnej prezentacji Markowitza w [22] – tylko łamaną efektywną, co jest różnicą mało istotną z punktu widzenia metodologii CLA. Najczęściej sprawnie i bezbłędnie odnajduje on tych „kilkaset boków”  $\bar{L}$ , jak wyraża się Markowitz, spośród setek tysięcy czy milionów ścian sympleksu, przez które a priori mogłaby przebiegać  $\bar{L}$ . Redukuje problem o potencjalnej złożoności wykładniczej od  $k$  do problemu w praktyce wielomianowego od  $k$ , i to wielomianowego – wydaje się, jest to otwarte pole do badań – bardzo niskiego stopnia.

Skoncentrujmy uwagę na jednej ustalonej ścianie IN, w której leży jeden z boków  $\bar{L}$ . W tym obecnym spojrzeniu może to nawet być jeden z wierzchołków sympleksu  $\Delta^k$ , oczywiście taki, przez który przechodzi  $\bar{L}$ . Tzn.  $\#(\text{IN}) = 1$  jest możliwe.

Zakładamy, że algorytm już doszedł do boku  $\bar{L}$  leżącego w IN i biegnie po nim (lub stoi, gdy  $\#(\text{IN}) = 1$ ), zmniejszając przy tym wartość parametru  $\lambda_E$ .

Jak długo to się dzieje, tzn. jak długo utrzymuje się relatywna optymalność portfeli – punktów na tym boku? Oczywiście, z twierdzenia K-KT, dopóki

$$x_i = \alpha_i + \beta_i \lambda_E > 0 \quad \text{dla } i \in \text{IN}$$

oraz

$$\eta_j = \gamma_j + \delta_j \lambda_E \geq 0 \quad \text{dla } j \in \text{OUT}.$$

Dodatniość, względnie nieujemność, może przy zmniejszaniu  $\lambda_E$  popsuć się tylko w tych wyrażeniach, w których współczynniki przy  $\lambda_E$  są *dodatnie*. Wynikają stąd naturalne dolne ograniczenia

$$\lambda_E > -\frac{\alpha_i}{\beta_i} \quad \text{dla } i \in \text{IN}, \beta_i > 0$$

oraz

$$\lambda_E \geq -\frac{\gamma_j}{\delta_j} \quad \text{dla } j \in \text{OUT}, \delta_j > 0.$$

Kresem dolnym optymalności portfeli na ścianie IN, wyrażonym w terminach parametru  $\lambda_E$ , jest zatem

$$\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{\beta_i > 0 \\ \delta_j > 0}} \left( -\frac{\alpha_i}{\beta_i}, -\frac{\gamma_j}{\delta_j} \right), \quad (15.1)$$

gdzie też oczywiście  $i \in \text{IN}$ ,  $j \in \text{OUT}$ . Gdy  $\#(\text{IN}) = 1$ ,  $\text{IN} = \{i\}$ , wtedy nie ma aktywnej nierówności na temat  $x_i$ , są tylko pewne nierówności na temat  $\eta_j$ ,  $j \neq i$ , związane z optymalnością wierzchołka numer  $i$  oraz związanymi z tym możliwymi wartościami parametru  $\lambda_E$ .<sup>1</sup>

Algorytm będzie „wiedział”, gdzie skierować się dalej (gdzie leży następny bok łamanej  $\bar{L}$ ) gdy zawsze tylko jedna liczba z tych wymienionych po prawej stronie równości (15.1) realizuje dane maksimum. W celu zapewnienia skuteczności algorytmu CLA będziemy to zakładali do końca wykładu. Dokładniej,

**Definicja 15.1.** O modelu Markowitza  $(\Sigma, \mu)$ ,  $\Sigma > 0$ ,  $\neq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ , mówimy, że ma niezdegenerowane parametry gdy

$$\neq \left( \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \frac{\gamma_j}{\delta_j} \mid i \in \text{IN}, j \in \text{OUT}, \beta_i > 0, \delta_j > 0 \right) \quad \forall \emptyset \neq \text{IN} \subset \{1, 2, \dots, k\}. \quad (15.2)$$

Komentarz po definicji: zakładając w dalszym ciągu niezdegenerowanie parametrów modelu, zakładamy w tym wykładzie więcej, niż jest potrzebne do sprawnego przebiegu algorytmu (choć i tak mniej, niż u Markowitza w [22]). Bo przecież nie wszystkie ściany IN muszą być odwiedzone przez konkretną łamaną  $\bar{L}$  oraz, dla jakiegokolwiek *danego* IN, który występuje w konkretnym przebiegu algorytmu, nie wszystkie ułamki wymienione w (15.2) muszą być różne! Tylko *największy* z nich musi być różny od wszystkich pozostałych.

*Uwaga 15.1.* Gdy patrzymy na formułę (15.1), czy też na dualną formułę (15.22), która pojawi się [dopiero] pod koniec tego wykładu, nie sposób nie zauważyć ich dużego podobieństwa z formułami, jakie występują w **programowaniu liniowym**. Można przykładowo spojrzeć na wzory na stronie 126 w klasycznej książce [7] poświęconej programowaniu liniowemu, czy też na towarzyszącą im dyskusję na stronach sąsiednich tamże.

W istocie to, czym od strony technicznej zajmuje się analiza portfelowa, to **programowanie kwadratowe**, oczywiście ze specyficznymi ograniczeniami „portfelowymi”. Ekstremalizacja funkcji wypukłej bądź wklęsłej (bądź też, jak w Wykładzie XIV, pseudo-wklęsłej), a więc zasadniczo twierdzenie K-KT, nierówności opisujące wypukłą dziedzinę takiej funkcji i równocześnie pochodne nierówności typu K-KT wiążące się z ekstremalizacją tej funkcji – stąd biorą się **dwie** rodziny ułamków, w których teraz łącznie szukamy liczby najmniejszej bądź największej. O tyle<sup>2</sup> programowanie kwadratowe jest bogatsze od liniowego. Przypominamy jeszcze raz tytuł przełomowej pracy [14]: **nonlinear programming**. Warto też jeszcze rzucić okiem na sam tytuł książki [17], albo też przewertować ją dokładnie.

W książce Gassa jedna rodzina ułamków jest poddawana ekstremalizacji w każdym kroku *algorytmu sympleks*, zaś teraz są temu poddawane równocześnie dwie rodziny różnego pochodzenia.

### Opis algorytmu CLA dla modeli z niezdegenerowanymi parametrami

A. Zaczynamy od  $\text{IN} = \{i\}$ , gdzie  $\mu_i = \max_{1 \leq l \leq k} \mu_l (= E_{\max})$ , tzn. od wierzchołka  $e_i$ , w którym zaczyna się łamana wierzchołkowa  $\bar{L}$ . Algorytm przez długi czas stoi na tym wierzchołku, podczas gdy parametr  $\lambda_E$  maleje od  $+\infty$  do wartości  $\lambda_{\text{low}}^{\{i\}}$ . Ta wartość progowa, na mocy niezdegenerowania parametrów modelu, jest równa  $-\frac{\gamma_j}{\delta_j}$  dla jednego jedynego  $j \neq i$ ,  $\delta_j > 0$ . Stąd wiemy, że następnym etapem będzie  $\text{IN}' = \text{IN} \cup \{j\} = \{i, j\}$ , w którym parametr  $\lambda_E$  będzie się zmniejszał poniżej wartości  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}$ .

B. Załóżmy, że już trwa jakiś etap IN w algorytmie, zaś  $\lambda_E$  zmniejsza się poniżej poznanej już poprzedniej wartości progowej. Afiniczne od  $\lambda_E$  wzory na  $x_i$ ,  $i \in \text{IN}$ , opisują bok  $\bar{L}$  na ścianie

<sup>1</sup> wtedy, jak wiadomo, rozwiązania warunków Karusha-Kuhna-Tuckera nie dają jednoznacznie wyznaczonych współczynników Lagrange’a  $\lambda$  i  $\lambda_E$

<sup>2</sup> słynna Passentowska mała różnica, którą chciałoby się umieć zagrać – na jakim instrumencie?

IN, dla  $\lambda_E$  poniżej poprzedniej wartości progowej aż do wartości  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}$  danej wzorem (15.1). Na mocy niezdegenerowania parametrów modelu, w (15.1) jest jeden jedyny indeks  $i \in \text{IN}$  lub  $j \in \text{OUT}$  taki, że  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}$  lub  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}} = -\frac{\gamma_j}{\delta_j}$ .

Następny etap algorytmu to  $\text{IN}' = \text{IN} \setminus \{i\}$  w pierwszym przypadku, względnie  $\text{IN}' = \text{IN} \cup \{j\}$  w drugim, przy czym parametr  $\lambda_E$  zmniejsza się w nim poniżej  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}$  (do jakiejś wartości lub do  $-\infty$ ). W ten sposób rekurencyjnie podany jest już cały algorytm, opisujący bok po boku całą łamaną wierzchołkową  $\bar{L}$ . Ostatni etap to, oczywiście,  $\text{IN} = \{i\}$ ,  $\mu_i = \min_{1 \leq l \leq k} \mu_l (= E_{\min})$ , zaś  $\lambda_E$  zmniejsza się w nim od poprzedniej wartości progowej do  $-\infty$  (przyjmujemy, że maksimum pustego zbioru liczb wynosi  $-\infty$ ).

**Komentarz po opisie algorytmu.** Stosując algorytm CLA, rekurencyjnie wędrujemy po niektórych ścianach sympleksu  $\Delta^k$ , włączając w to niektóre wierzchołki, cały czas ściśle kontrolując malejącą ewolucję wiodącego parametru  $\lambda_E$ . Po drodze uzyskujemy parametryczne opisy boków łamanej wierzchołkowej  $\bar{L}$  wraz z progowymi wartościami parametru  $\lambda_E$  odpowiadającymi wierzchołkom spójnej łamanej  $\bar{L}$ .

Algorytm jest wydajny w 100% – wędrujemy w nim dokładnie po tych ścianach  $\Delta^k$ , przez które przebiega łamana  $\bar{L}$ . Czasami zdarza się – o czym Markowitz w [22] wydaje się nie wiedzieć – że ten maksymalnie wydajny algorytm musi odwiedzić wszystkie  $2^k - 1$  niepuste ściany  $\Delta^k$ . Tak właśnie dzieje się w przykładzie Więcha omówionym w Wykładzie X, i też w przykładzie Iwanickiego w wymiarze 5 omawianym tutaj poniżej (czy też w, tylko wzmiankowanym pod koniec Wykładu VII, nie-praw-do-po-dob-nym przykładzie Iwanickiego w wymiarze 6).

**Przykład 15.1** (Więch [29], kontynuacja). Odnajdywanie łamanej  $\bar{L}$  zaczynamy od  $\text{IN} = \{3\}$ , bo  $\mu_3 = 30 = E_{\max}$ .  $\lambda_{\text{low}}^{\{3\}} = \frac{155}{32}$ , wchodzi indeks 2,  $\text{IN}' = \{2, 3\}$ . Kolejne  $\lambda_{\text{low}}^{\{2,3\}} = \frac{167}{64}$ , wychodzi indeks 3,  $\text{IN}'' = \{2\}$ . Kolejne  $\lambda_{\text{low}}^{\{2\}} = \frac{19}{8}$ , wchodzi indeks 1, itd. Z tabeli w Wykładzie X odczytujemy, jadąc od dołu do góry, kolejne etapy. Po  $\{1, 2\}$  etap  $\{1, 2, 3\}$ , następnie  $\{1, 3\} \rightarrow \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 4\} \rightarrow \{2, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\} \rightarrow \{3, 4\} \rightarrow \{4\} \rightarrow \{1, 4\} \rightarrow \{1\}$ .

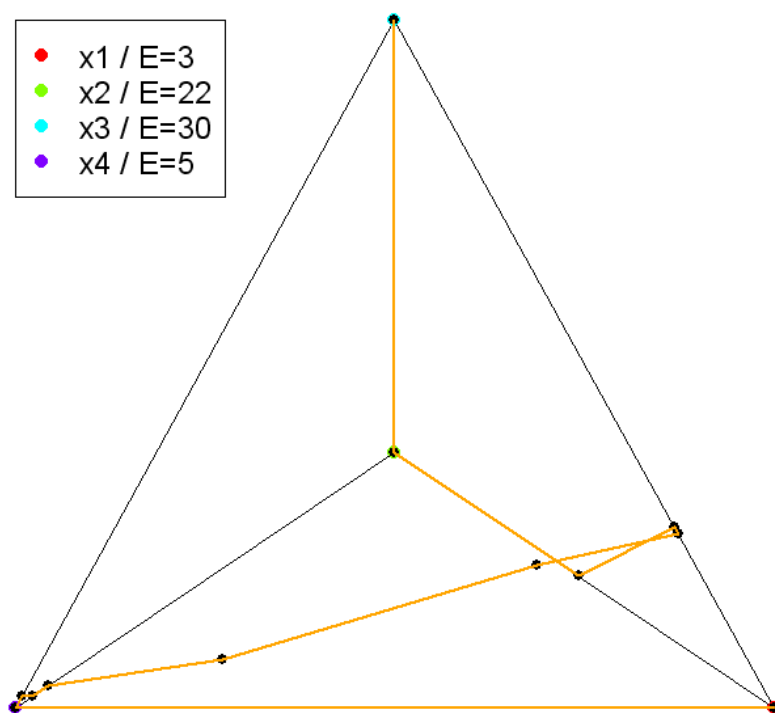
Odpowiednie wartości progowe  $\lambda_{\text{low}}$  są w środkowej kolumnie tamtej tabeli, też jadąc od dołu do góry:  $\lambda_{\text{low}}^{\{1,2\}} = \frac{5341}{9392}$ , itd. Istotnie zatem, łamana  $\bar{L}$  w przykładzie Więcha odwiedza wszystkie podzbiory zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$  poza pustym. Ten przykład w chwili pojawienia się jesienią 2001 stanowił prawdziwą sensację.

A oto jak łamana wierzchołkowa w przykładzie Więcha wygląda w rzucie na płaszczyznę ekranu bądź rysunku, przy odpowiednim wyborze kierunku rzutowania:

[w wersji pdf Rysunek 15.1 jest na następnej stronie]

Jeszcze bardziej intrygujący przykład podał w roku 2007 w swojej pracy licencjackiej [9] student A. Iwanicki; anonsowaliśmy to odkrycie już w Wykładzie VII.<sup>3</sup> Jest to najbogatszy możliwy przykład w wymiarze 5. Ma on granicę minimalną składającą się z 26 kawałków różnych

<sup>3</sup> Iwanicki wyszedł od programu dla Critical Line Algorithm (w Visual Basicu) autorstwa G.P. Todda, podanego w [22], lecz udoskonalił go przez wprowadzenie pomysłowych shortcutów i dodanie własnej części probabilistycznej – losowanie próbek danych. Jego program wykonywał przez jedną noc najpierw dziesiątki, a potem nawet setki tysięcy przebiegów algorytmu CLA na próbnych danych! Przykład podany w tekście wykładu został znaleziony po około 8 dobach poszukiwań netto. Bez algorytmu CLA, i bez książki [22] jako wstępnego inputu, nie byłoby to możliwe.



Rysunek 15.1. Reprodukacja rysunku Czuby z roku 2007.

hiperbol, zaś granica efektywna składa się w nim z (aż) 19 kawałków różnych hiperbol!

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.080810 & 3.498620 & 5.155060 & -0.137649 & 4.392940 \\ 3.498620 & 25.242400 & 49.611500 & -1.707990 & 39.800400 \\ 5.155060 & 49.611500 & 233.167000 & -3.108180 & 95.732900 \\ -0.137649 & -1.707990 & -3.108180 & 0.341958 & -2.498140 \\ 4.392940 & 39.800400 & 95.732900 & -2.498140 & 67.339300 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1.572040 \\ 4.211660 \\ 6.351950 \\ -0.365159 \\ 5.352790 \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z tym, co wyżej zaanonsowane, łamana wierzchołkowa okazuje się mieć tu aż  $2^5 - 5 - 1 = 26$  boków, natomiast algorytm CLA odnajduje ją w  $31 = 2^5 - 1$  krokach IN,  $1 \leq \#(\text{IN}) \leq 5$ . Kolejne kroki są następujące. (Przy wierzchołkach dających punkty załamania granicy minimalnej podajemy w nawiasach przedziały dla „nadstycznego” parametru  $\lambda_E$ ; dyskusja nt tych przedziałów – patrz Stwierdzenie 15.1 niżej. Wielkości  $\lambda_{hi}$  są tożsame z wielkościami  $\lambda_{low}$  w

etapach bezpośrednio poprzedzających, porównaj Obserwacja 15.1, część ••, poniżej.)

$$\begin{aligned} \text{IN} = \{3\} \rightarrow \{3, 5\} \rightarrow \{5\} \quad (\lambda_{\text{hi}} = 28.417, \lambda_{\text{low}} = 24.133) \rightarrow \{2, 5\} \rightarrow \{2, 3, 5\} \rightarrow \{2, 3\} \rightarrow \\ \{2\} \quad (\lambda_{\text{hi}} = 11.386, \lambda_{\text{low}} = 8.237) \rightarrow \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 5\} \rightarrow \{1, 2, 5\} \rightarrow \\ \{1, 5\} \rightarrow \{1, 3, 5\} \rightarrow \{1, 3\} \rightarrow \{1\} \quad (\lambda_{\text{hi}} = 0.852, \lambda_{\text{low}} = 0.629) \rightarrow \{1, 4\} \rightarrow \{1, 3, 4\} \rightarrow \\ \{1, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 4\} \rightarrow \{2, 4\} \rightarrow \\ \{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{2, 4, 5\} \rightarrow \{4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4\} \rightarrow \{4\}. \end{aligned}$$

**Ćwiczenie 15.1.** Policzyc do końca tę łamaną wierzchołkową, a następnie zobrazować ją na rzucie sympleksu  $\Delta^5$  na płaszczyznę (możliwym, tak jak możliwy jest rzut hipersześcianu na płaszczyznę, itd.).

**Uzasadnienie poprawności algorytmu CLA wraz z dodatkowymi informacjami na jego temat.**

Chcemy dokładniej przyjrzeć się, co się dzieje, gdy łamana wierzchołkowa  $\bar{L}$ , odkrywana stopniowo przez algorytm CLA, zmienia

(A) ścianę  $\text{IN}$ ,  $\#(\text{IN}) \geq 2$ , na inną ścianę  $\text{IN}'$ ,  $\#(\text{IN}') \geq 2$ , względnie

(B) ścianę  $\text{IN}$ ,  $\#(\text{IN}) \geq 2$  na wierzchołek, np  $\{i\}$ , po którym z kolei łamana  $\bar{L}$  wchodzi w ścianę  $\text{IN}'$ ,  $\#(\text{IN}') \geq 2$ .

*Uwaga 15.2.* Sytuacje (A) i (B) można też scharakteryzować/rozróżnić inaczej. Mianowicie, pamiętamy jeszcze z dowodu Twierdzenia 10.1, że parami rozłączne przedziały  $E(\text{IN})$ ,  $\#(\text{IN}) \geq 2$ , dają w sumie z węzłami wyróżnionymi cały przedział  $[E_{\min}, E_{\max}]$ . W sytuacji (A) domknięcia przedziałów  $E(\text{IN}')$  oraz  $E(\text{IN})$  zahaczają się zatem jednym punktem  $\inf E(\text{IN}) = \sup E(\text{IN}')$ . Jest to jeden z węzłów w Twierdzeniu 10.1, przy czym węzeł **niewyróżniony**: łamana przechodząc ze ściany  $\text{IN}$  na ścianę  $\text{IN}'$  nie przechodzi przez żaden wierzchołek sympleksu. Ten wspólny kres leży więc w dokładnie jednym z przedziałów  $E(\text{IN})$ ,  $E(\text{IN}')$ .

Natomiast sytuacja (B) to po prostu inne wypowiedzenie zdania ' $\mu_i$  jest węzłem **wyróżnionym**' – porównaj definicję węzłów wyróżnionych w dowodzie Twierdzenia 10.1 na początku Wykładu XI.

Tak więc, w telegraficznym skrócie, sytuacja (A) – węzły niewyróżnione, sytuacja (B) – węzły wyróżnione.

W naszych rozważaniach pomocna będzie funkcja wypukła

$$[E_{\min}, E_{\max}] \ni E \mapsto \sigma^2(x_E), \quad (15.3)$$

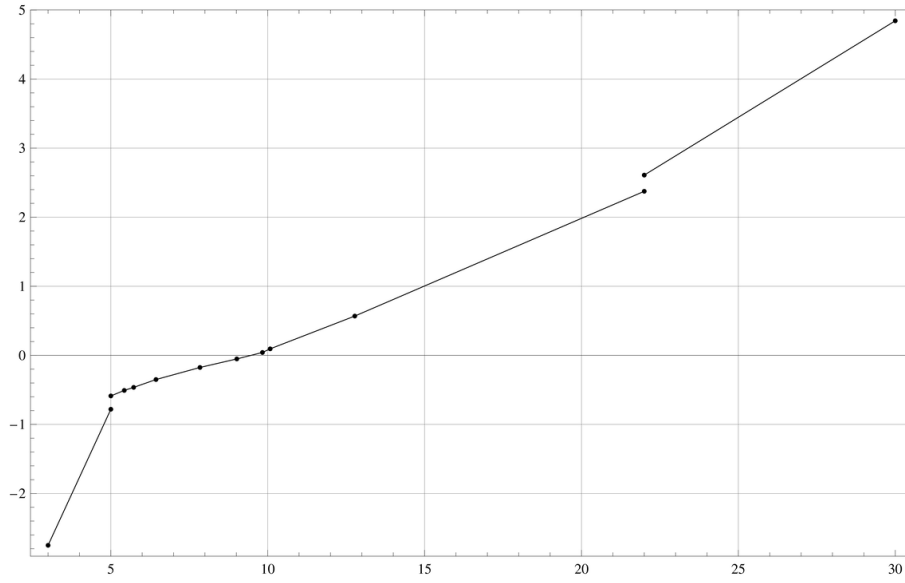
której dotyczył już Wniosek 11.1 w Wykładzie XI.

Jako funkcja wypukła, ma ona wszędzie skończone pochodne jednostronne, zaś w punktach różniczkowalności ma pochodną o wartości  $2\lambda_E(E)$ , gdzie  $\lambda_E(\cdot)$  to funkcja związana z danym bokiem łamanej  $\bar{L}$  leżącym na jakiejś ścianie ( $\geq 1$ )-wymiarowej. (Przy rygorystycznym podejściu ta funkcja powinna być oznaczana symbolem  $\lambda_E^{\text{IN}}(\cdot)$ . Na ścianach  $\text{IN}$ ,  $\#(\text{IN}) \geq 2$ , współczynniki Lagrange'a  $\lambda$  i  $\lambda_E$  są wyznaczone jednoznacznie jako funkcje portfela wierzchołkowego, a więc też jako funkcje  $E$ .) Wynika to wprost z Obserwacji 6.1 w Wykładzie VI; wspominaliśmy nie raz, że tamta obserwacja jest technicznie bardzo użyteczna.

W związku z tym globalna funkcja  $\Lambda_E$ ,

$$[E_{\min}, E_{\max}] \ni E \xrightarrow{\Lambda_E} \lambda_E(E)$$

jest ściśle rosnąca i kawałkami liniowa, z możliwymi skokami w górę:



Rysunek 15.2. Reprodukacja rysunku Teklińskiego z roku 2009.

— w węzłach wyróżnionych, jak np w przykładzie Więcha na rysunku powyżej,  
 — co widzieliśmy przy okazji rozwiązywania zadania sprawdzającego z Wykładu X,  
 — oraz *być może* w jakichś węzłach niewyróżnionych – tego jeszcze w tym momencie nie wiemy; w przykładzie Więcha – bez takich skoków w węzłach niewyróżnionych.

Odcinki, na których funkcja  $E \xrightarrow{\Lambda_E} \lambda_E(E)$  jest liniowa, etykietujemy odpowiednimi zbiorami indeksów  $IN$  – nazwami ścian, których dotyczą. Węzły wyróżnione, w których jest skok funkcji  $\Lambda_E$ , nazywamy pojedynczymi indeksami – numerami odpowiednich wierzchołków sympleksu. Przejście od parametru  $E$  do  $\lambda_E$  jest w takich węzłach rodzajem blow-upu: rozdmuchania punktu do odcinka [wartości parametru  $\lambda_E$ ].

Niech dla  $IN: \#(IN) \geq 2$ ,  $E(IN)$  będzie jak w dowodzie w Wykładzie XI (zbiór wartości oczekiwanych wszystkich portfeli wierzchołkowych  $x_E$  leżących na ścianie  $IN$ ).

Niech ponadto, tym razem dla *wszystkich*  $IN$  niepustych,  $L(IN)$  oznacza zbiór wszystkich wartości współczynników Lagrange’a  $\lambda_E$  w rozwiązaniach warunków K-kT dla portfeli wierzchołkowych leżących na ścianie  $IN$ .

Gdy  $\#(IN) \geq 2$ , jest to (wiemy to już!) przedział – obraz odpowiedniego przedziału  $E(IN)$  w globalnej funkcji  $\Lambda_E$ :

$$L(IN) = \Lambda_E(E(IN)).$$

Natomiast gdy  $IN = \{i\}$ ,

$$L(\{i\}) \text{ też jest przedziałem,} \quad (15.4)$$

bo dla  $\lambda_E, \lambda'_E \in L(\{i\})$  i  $s, t > 0, s + t = 1$ , nierówności wektorowe

$$\begin{cases} \Sigma e_i + \lambda e - \lambda_E \mu \geq 0, \\ \Sigma e_i + \lambda' e - \lambda'_E \mu \geq 0, \end{cases}$$

pociągają (też wektorową) nierówność

$$\Sigma e_i + (s\lambda + t\lambda')e - (s\lambda_E + t\lambda'_E)\mu \geq 0,$$

zaś warunki komplementarności

$$e_i^T(\Sigma e_i + \lambda e - \lambda_E \mu) = 0, \quad e_i^T(\Sigma e_i + \lambda' e - \lambda'_E \mu) = 0$$

oczywiście pociągają warunek

$$e_i^T(\Sigma e_i + (s\lambda + t\lambda')e - (s\lambda_E + t\lambda'_E)\mu) = 0.$$

Istotnie zatem  $s\lambda_E + t\lambda'_E \in L(\{i\})$ .

*Uwaga 15.3.* W języku używanym w tym Wykładzie XV, całkiem naturalnym dla algorytmu CLA, wierzchołek  $e_i$  sympleksu  $\Delta^k$  występuje po prostu jako singleton  $\{i\}$  – pewien jednoelementowy podzbiór zbioru numerów wszystkich wierzchołków sympleksu. Jest to na tyle naturalne, że nie powinno powodować nieporozumień.<sup>4</sup>

$L(\{i\})$  jest zatem przedziałem, ok, lecz jakim konkretnie? To pytanie jest technicznie najtrudniejsze w całej dyskusji algorytmu CLA. Zajmiemy się nim za chwilę przy omawianiu sytuacji (B).

Wracamy teraz do alternatywy (A) versus (B) sformułowanej na początku dyskusji poprawności algorytmu CLA. (Rzecz dotyczy węzłów leżących w przedziale  $[E_{\min}, E_{\max}]$ . Po Uwadze 15.2 wiemy już, że to jest po prostu alternatywa węzły niewyróżnione versus wyróżnione.)

Ad (A) Wobec ścisłej wypukłości funkcji (15.3) i geometrycznej interpretacji współczynnika  $\lambda_E$ , przedziały  $L(\text{IN})$  oraz  $L(\text{IN}')$  są rozłączne. Chcemy uzasadnić, że ich domknięcia przecinają się w jednym punkcie, który zresztą okaże się leżeć w jednym z tych przedziałów:  $L(\text{IN})$  lub  $L(\text{IN}')$ .

Punkt  $\tilde{E}$  leżący w części wspólnej domknięć  $\overline{E(\text{IN})}$  i  $\overline{E(\text{IN}')}$  jest w sytuacji (A) węzłem niewyróżnionym – wiemy to z dowodu (podanego w Wykładzie XI) Twierdzenia 10.1 o łamanej wierzchołkowej z Wykładu X.

Pokażemy, że w węźle niewyróżnionym  $\tilde{E}$  globalna funkcja  $\Lambda_E$  nie ma skoku. Dla ustalenia uwagi niech np  $\tilde{E} \in E(\text{IN})$ ,  $\tilde{E} \notin E(\text{IN}')$ . Dla wartości  $E$  trochę mniejszych od  $\tilde{E}$  bierzemy, jednoznacznie określone w etapie  $\text{IN}'$  dowodu z Wykładu XI, wielkości

$$(x, \lambda, \lambda_E) = (x_E, \lambda(E), \lambda_E(E))$$

oraz ich granice

$$x_{\tilde{E}} = \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} x_E, \quad \tilde{\lambda} = \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} \lambda(E), \quad \tilde{\lambda}_E = \lim_{E \rightarrow \tilde{E}-} \lambda_E(E),$$

tak jak w tamtym dowodzie w Wykładzie XI. Z warunków dawanych przez twierdzenie K-KT mamy

$$\Sigma x_E + \lambda(E)e - \lambda_E(E)\mu \geq 0, \quad x_E^T(\Sigma x_E + \lambda(E)e - \lambda_E(E)\mu) = 0$$

dla  $E$  trochę mniejszych od  $\tilde{E}$ . Zatem również po przejściu granicznym  $E \rightarrow \tilde{E}-$ ,

$$\Sigma x_{\tilde{E}} + \tilde{\lambda}e - \tilde{\lambda}_E\mu \geq 0, \quad x_{\tilde{E}}^T(\Sigma x_{\tilde{E}} + \tilde{\lambda}e - \tilde{\lambda}_E\mu) = 0.$$

Portfel  $x_{\tilde{E}}$  leży na ścianie  $\text{IN}$ , zaś współczynniki Lagrange'a dla portfeli wierzchołkowych leżących na ścianie  $\text{IN}$  są wyznaczone jednoznacznie. A więc, w szczególności,  $\tilde{\lambda}_E = \lambda_E(\tilde{E})$  liczone

<sup>4</sup> Symbolika  $e_i$  pozostaje w użyciu gdy opuszczamy język CLA, np tu powyżej w samym uzasadnieniu faktu (15.4), lub gdy dyskutujemy zachowanie konkretnych odwzorowań Markowitza w punktach ekstremalnych sympleksu.

na boku leżącym na ścianie IN. Zatem to właśnie liczba  $\tilde{\lambda}_E$  okazuje się leżeć w części wspólnej domknięć przedziałów  $L(\text{IN})$  i  $L(\text{IN}')$ . Dokładniej,

$$\tilde{\lambda}_E = \inf L(\text{IN}) = \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}, \quad (15.5)$$

przy czym  $\tilde{\lambda}_E \in L(\text{IN})$ . Równocześnie

$$\tilde{\lambda}_E = \sup L(\text{IN}') \quad (15.6)$$

oraz  $\tilde{\lambda}_E \notin L(\text{IN}')$ , bo, przypominamy,  $L(\text{IN})$  i  $L(\text{IN}')$  są rozłączne.

W sytuacji przeciwnej w (A):  $\tilde{E} \notin E(\text{IN})$ , lecz  $\tilde{E} \in E(\text{IN}')$  byłoby, oczywiście,  $L(\text{IN}') \ni \sup L(\text{IN}')$  oraz  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}} \notin L(\text{IN})$ , natomiast równości (15.5)–(15.6) oczywiście pozostawałyby w mocy.

Wnioskiem z (15.5) i (15.6) jest równość

$$\sup L(\text{IN}') = \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}. \quad (15.7)$$

**Wniosek 15.1.** *Obraz [w odwzorowaniu Markowitza] każdego wierzchołka łamanej  $\mathbb{L}$ , który nie jest wyróżniony (patrz Twierdzenie 10.1 w Wykładzie X), jest punktem gładkości granicy minimalnej  $F_{\min}$ . Innymi słowy, sytuacja (A) daje tylko punkty gładkości granicy minimalnej. Albo też – patrz Uwaga 15.2 powyżej – punkty na  $F_{\min}$ , których rzędne są węzłami niewyróżnionymi, są punktami gładkości granicy minimalnej.*

Co natomiast skrywa się za sytuacją (B) mogącą wystąpić w przebiegu algorytmu, czyli – znowu Uwaga 15.2 – co się skrywa za węzłami wyróżnionymi? By odpowiedzieć, zajmijmy się tą sytuacją szczegółowo.

Ad (B) Teraz w łamanej  $\mathbb{L}$  wierzchołek  $e_i = x_{\tilde{E}}$ ,  $\tilde{E} = \mu_i$ , sąsiaduje z bokiem leżącym na ścianie IN, na którym wartości  $E$  są większe od  $\mu_i = \tilde{E}$ , oraz z bokiem leżącym na ścianie IN', na którym wartości  $E$  są mniejsze od  $\tilde{E}$ . Wartość  $\tilde{E}$  jest węzłem wyróżnionym w terminologii z Wykładu X.

Dla tego portfela wierzchołkowego  $e_i$  nie ma jednoznaczności współczynników Lagrange'a  $\lambda$  i  $\lambda_E$  – teoria Blacka się nie stosuje. Jednak oczywiście można robić przejścia graniczne przy  $E \rightarrow \tilde{E}$  – analogicznie, jak w sytuacji (A), dostając, w oznaczeniach z tamtej sytuacji,

$$\Sigma e_i + \tilde{\lambda}e - \tilde{\lambda}_E \mu \geq 0, \quad e_i^T (\Sigma e_i + \tilde{\lambda}e - \tilde{\lambda}_E \mu) = 0, \quad (15.8)$$

gdzie  $\tilde{\lambda}_E = \sup L(\text{IN}')$ . I oczywiście też przy  $E \rightarrow \tilde{E}+$ , dostając analogicznie

$$\Sigma e_i + \tilde{\tilde{\lambda}}e - \tilde{\tilde{\lambda}}_E \mu \geq 0, \quad e_i^T (\Sigma e_i + \tilde{\tilde{\lambda}}e - \tilde{\tilde{\lambda}}_E \mu) = 0, \quad (15.9)$$

gdzie tym razem  $\tilde{\tilde{\lambda}}_E = \inf L(\text{IN}) = \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}$ . Związki (15.8)–(15.9) pokazują zatem, że  $\sup L(\text{IN}')$ ,  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}} \in L(\{i\})$ . Wobec własności (15.4),

$$[\sup L(\text{IN}'), \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}] \subset L(\{i\}). \quad (15.10)$$

W istocie jest lepiej. Mianowicie

**Stwierdzenie 15.1.**  $L(\{i\}) = [\sup L(\text{IN}'), \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}]$ .

*Dowód.* Pokażemy, że dowolna liczba  $\lambda_E \in L(\{i\})$  spełnia

$$\sup L(\text{IN}') \leq \lambda_E \leq \inf L(\text{IN}) \quad (= \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}), \quad (15.11)$$

co łącznie z inkluzją (15.10) zakończy dowód.

Zauważamy w tym celu, że  $\#(\text{IN}) = 2 = \#(\text{IN}')$ , tzn ściany  $\text{IN}$ ,  $\text{IN}'$  są po prostu *krawędziami* spotykającymi się w wierzchołku  $e_i$ . Istotnie, warunki niezdegenerowania spełniane przez  $(\Sigma, \mu)$  pociągają, że w algorytmie przy przejściu  $\text{IN} \rightarrow \{i\}$  wypada tylko jeden indeks, np  $j$ , oraz przy przejściu  $\{i\} \rightarrow \text{IN}'$  wchodzi też tylko jeden indeks, np  $j'$ . Tak więc  $\text{IN} = \{i, j\}$ , gdzie  $\mu_j > \mu_i$ , oraz  $\text{IN}' = \{i, j'\}$ , gdzie  $\mu_{j'} < \mu_i$ .

Fakt, że  $\lambda_E \in L(\{i\})$  oznacza, że dla  $\lambda_E$  i jakiegoś rzeczywistego współczynnika  $\lambda$  zachodzi

$$\Sigma e_i + \lambda e - \lambda_E \mu \geq 0, \quad e_i^T (\Sigma e_i + \lambda e - \lambda_E \mu) = 0,$$

a więc równość na składowej numer  $i$  oraz nieostre nierówności  $\geq 0$  na wszystkich pozostałych składowych, w szczególności na składowych nr  $j$  i  $j'$ :

$$\sigma_{ii} + \lambda - \lambda_E \mu_i = 0, \quad (15.12)$$

$$\sigma_{ji} + \lambda - \lambda_E \mu_j \geq 0, \quad (15.13)$$

$$\sigma_{j'i} + \lambda - \lambda_E \mu_{j'} \geq 0. \quad (15.14)$$

Z (15.12) wyznaczamy  $\lambda$  i podstawiamy do nierówności (15.13)–(15.14), dostając odpowiednio

$$\sigma_{ji} - \sigma_{ii} + \lambda_E(\mu_i - \mu_j) \geq 0, \quad (15.15)$$

$$\sigma_{j'i} - \sigma_{ii} + \lambda_E(\mu_i - \mu_{j'}) \geq 0. \quad (15.16)$$

Pamiętając, że  $\mu_{j'} < \mu_i < \mu_j$ , nierówności (15.15)–(15.16) dają

$$\frac{\sigma_{ii} - \sigma_{j'i}}{\mu_i - \mu_{j'}} \leq \lambda_E \leq \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{ji}}{\mu_i - \mu_j}. \quad (15.17)$$

Za chwilę okaże się, że nierówności (15.17) są dokładnie nierównościami (15.11). Policzmy w tym celu wielkość  $\lambda_E(\mu_i)$  w teorii Blacka, gdy zbiorem aktywnych indeksów jest  $\{i, l\}$ ,  $l \neq i$  (teoria Blacka w wymiarze 2). Wtedy portfele Blacka

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E - \mu_l}{\mu_i - \mu_l} \\ \frac{\mu_i - E}{\mu_i - \mu_l} \end{pmatrix}$$

mają wariancję

$$\sigma^2(E) = \frac{1}{(\mu_i - \mu_l)^2} \left( \sigma_{ii}(E - \mu_l)^2 + 2\sigma_{il}(E - \mu_l)(\mu_i - E) + \sigma_{ll}(\mu_i - E)^2 \right),$$

zaś  $\lambda_E(\mu_i) = \frac{1}{2}(\sigma^2(E))' \Big|_{E=\mu_i}$  (porównaj – kolejny raz! – Obserwacja 6.1 w Wykładzie VI).

Liczmy zatem tę pochodną

$$\lambda_E(\mu_i) = \frac{1}{2(\mu_i - \mu_l)^2} \left( 2\sigma_{ii}(\mu_i - \mu_l) + 2\sigma_{il}((\mu_i - \mu_l)(-1) + 0) + 0 \right) = \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{il}}{\mu_i - \mu_l}.$$

Następnie, biorąc  $l = j$ , mamy

$$\frac{\sigma_{ii} - \sigma_{ij}}{\mu_i - \mu_j} = \lambda_E(\mu_i) = \lim_{E \rightarrow \mu_i+} \Lambda(E) = \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}.$$

Biorąc natomiast  $l = j'$ , mamy

$$\frac{\sigma_{ii} - \sigma_{ij'}}{\mu_i - \mu_{j'}} = \lambda_E(\mu_i) = \lim_{E \rightarrow \mu_i-} \Lambda(E) = \sup L(\text{IN}').$$

Istotnie więc, (15.17) są tożsame z (15.11). Dowód stwierdzenia jest zakończony.  $\square$

Zauważmy, że ze Stwierdzenia 15.1 wynika

$$[\lambda_{\text{low}}^{\{i\}}, \sup L(\{i\})] = [\sup L(\text{IN}'), \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}]. \quad (15.18)$$

Jedną szczegółową ilustrację rachunków w tym ostatnim dowodzie (w ramach przykładu Iwanickiego w wymiarze 5 podanego już wcześniej w tym Wykładzie XV) podamy jeszcze później, po pewnym ogólniejszym podsumowaniu.

**Pora na rekapitulację.** Przeprowadzona powyżej dyskusja algorytmu CLA pokazała, że w każdej z sytuacji (A) i (B), w opisie wzajemnych położeń zbiorów  $L(\text{IN})$ , obok liczb  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}$  zdefiniowanych już jakiś czas temu wzorem (15.1), ważną – niejako dualną – rolę odgrywają też liczby  $\sup L(\text{IN})$ . Naturalne jest w takiej sytuacji przyjąć następującą ogólną

**Definicja 15.2.**

$$\lambda_{\text{hi}}^{\text{IN}} := \sup L(\text{IN}),$$

gdzie  $\text{IN}$  to dowolny z etapów *występujących* w danej realizacji algorytmu CLA.

(Podkreślamy, że w książce Markowitza [22] wielkości  $\lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}$  i  $\lambda_{\text{hi}}^{\text{IN}}$  definiowane są równocześnie. W tych wykładach – nie. Wiąże się to ze zbyt mocnymi warunkami niezdegenerowania zakładanymi u Markowitza. Nasze „niezdegenerowane parametry” są scharakteryzowane słabszymi warunkami; niżej piszemy o tym szerzej.)

Po przyjęciu takiego oznaczenia, w sytuacji (A) wzór (15.7) przybiera przejrzystą postać

$$\lambda_{\text{hi}}^{\text{IN}'} = \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}. \quad (15.19)$$

Natomiast w sytuacji (B), równość (15.18) po wprowadzeniu tego nowego symbolu, oznacza

$$\lambda_{\text{hi}}^{\text{IN}'} = \lambda_{\text{low}}^{\{i\}} \quad (15.20)$$

oraz

$$\lambda_{\text{hi}}^{\{i\}} = \lambda_{\text{low}}^{\text{IN}}. \quad (15.21)$$

**Wniosek 15.2.** W każdym węźle wyróżnionym  $\tilde{E} = \mu_i$  globalna funkcja  $\Lambda_E$  ma skok w górę równy  $\lambda_{\text{hi}}^{\{i\}} - \lambda_{\text{low}}^{\{i\}} > 0$ . Innymi słowy, w sytuacji (B) w opisie przebiegu algorytmu CLA mamy zawsze punkt załamania granicy minimalnej w aspekcie  $M$ .

Zestawiając ten wniosek z poprzednim Wnioskiem 15.1, widzimy, że to dokładnie węzły wyróżnione okazują się być rzędnymi punktów załamania granicy minimalnej, zaś dany skok funkcji  $\Lambda_E$  mierzy (co prawda na mniej kanonicznej płaszczyźnie wariancja – wartość oczekiwana i tylko z dokładnością do czynnika 2) wielkość takiego załamania.

Zapamiętajmy ten fakt; to jeden z kilku kluczowych momentów całego wykładu APRK1.

*Uwaga 15.4.* Dla każdego zbioru IN pojawiającego się w danej realizacji algorytmu CLA istnieje poręczna formuła na wielkość  $\lambda_{hi}^{IN}$ , analogiczna do formuły (15.1) definiującej  $\lambda_{low}^{IN}$ . Skoro jest to kres górny wartości  $\lambda_E$ , przy których na ścianie IN zachodzą warunki K-KT charakteryzujące portfele wierzchołkowe, zatem, rozwiązując wiadomy układ liniowych nierówności dających ograniczenia z góry na  $\lambda_E$ ,

$$\lambda_{hi}^{IN} = \min \left\{ -\frac{\alpha_i}{\beta_i}, -\frac{\gamma_j}{\delta_j} \mid i \in \text{IN}, \beta_i < 0, j \in \text{OUT}, \delta_j < 0 \right\}. \quad (15.22)$$

(We wszystkich literach greckich w (15.22) dla lepszej czytelności opuszczony jest dolny indeks 'IN'. Ponadto, gdy w momencie startu algorytmu  $\text{IN} = \{i_0\}$  i  $\mu_{i_0} = E_{\max}$ , wtedy ten kres górny przyjmuje się równy  $+\infty$ ).

Z przeprowadzonych dotąd rozważań wynika

### Obserwacja. 15.1

- $\lambda_{low}^{IN} < \lambda_{hi}^{IN}$  dla każdego  $\text{IN} \subset \{1, 2, \dots, k\}$  pojawiającego się w danej realizacji algorytmu CLA.
- Jeśli w realizacji algorytmu CLA po etapie IN bezpośrednio następuje etap  $\text{IN}'$ , to  $\lambda_{low}^{IN} = \lambda_{hi}^{IN'}$ .

Punkt • wynika z samego opisu etapów algorytmu CLA. Natomiast punkt ••, ogniskujący jak w soczewce całe piękno algorytmu CLA, wynika z równości (15.19), (15.20) i (15.21). Wzory na  $\lambda_{low}^{IN}$  (patrz (15.1)) i na  $\lambda_{hi}^{IN'}$  (patrz (15.22), gdzie oczywiście IN trzeba zastąpić przez  $\text{IN}'$ ) nie mają na pierwszy rzut oka nic wspólnego. A jednak zawsze wyrażają te same wielkości!

Jest bardzo pouczające przeanalizować ten punkt •• Obserwacji 15.1 powyżej na wybranych fragmentach przebiegu algorytmu CLA w przykładzie Iwanickiego (już wcześniej przytoczonym).

Kolejność następowania etapów w tamtym przykładzie jest znana, bo też już była podana wcześniej. I otóż, z przybliżeniem do trzech miejsc dziesiętnych po przecinku,

$$\begin{aligned} \lambda_{low}^{\{3,5\}} &= 28.417 = \lambda_{hi}^{\{5\}}, \\ \lambda_{low}^{\{2,3\}} &= 1.386 = \lambda_{hi}^{\{2\}}, \\ \lambda_{low}^{\{1,3\}} &= 0.852 = \lambda_{hi}^{\{1\}}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Ta ostatnia równość (15.23) jest szczególnie godna uwagi. Z jednej strony można obliczyć nawet dokładniej, że

$$\lambda_{hi}^{\{1\}} = 0.8523696, \quad \lambda_{low}^{\{1\}} = 0.6289798.$$

Z drugiej strony walory, których wartości oczekiwane sąsiadują z  $\mu_1 = 1.57204$  to: walor drugi (sąsiadowanie z góry,  $\mu_2 = 4.21166$ ) oraz walor czwarty (sąsiadowanie z dołu,  $\mu_4 = -0.365159$ ). Kuszące jest spróbować zastosować poznane wcześniej (jeszcze w dowodzie Stwierdzenia 15.1) wzory:  $\frac{\sigma_{11}-\sigma_{14}}{\mu_1-\mu_4}$  na  $\lambda_{low}^{\{1\}}$ , oraz  $\frac{\sigma_{11}-\sigma_{12}}{\mu_1-\mu_2}$  na  $\lambda_{hi}^{\{1\}}$ . W efekcie dostalibyśmy poprawnie

$$\lambda_{low}^{\{1\}} = \frac{1.08081 - (-0.137649)}{1.57204 - (-0.365159)} = 0.62898,$$

lecz także

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{12}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{1.08081 - 3.49862}{1.57204 - 4.21166} = 0.91597,$$

co już nie jest wartością występującą w (15.23). Czyżby rozwinięta wcześniej teoria przestawała pracować? Nic podobnego. Zapomnieliśmy tylko, że w aktualnym przebiegu CLA w przykładzie

Iwanickiego, przed dojściem do wierzchołka  $\{1\}$  nie jesteśmy na krawędzi łączącej go z wierzchołkiem najbliższym w sensie wartości oczekiwanej (tj na krawędzi  $\{1, 2\}$ ), tylko na krawędzi łączącej  $\{1\}$  z dalszym w sensie wartości oczekiwanej wierzchołkiem  $\{3\}$  (por. też (15.23)). Po uwzględnieniu tego przeoczenia

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{13}}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{1.08081 - 5.15506}{1.57204 - 6.35195} = 0.85237 = \lambda_{hi}^{\{1\}}$$

już jak trzeba.

W charakterze komentarza do Obserwacji 15.1 powyżej należy stwierdzić, że słowa „pojawiającego się w danej realizacji algorytmu” są w tej obserwacji kluczowe.

★ Np w znanym nam przykładzie Mordona [przytaczanym tu od nowa dla wygody czytelnika]

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

na ścianie  $\{1, 3\}$ , przez którą *nie* przebiega łamana wierzchołkowa<sup>5</sup> wielkości  $\lambda_{low}^{IN}$  i  $\lambda_{hi}^{IN}$  nabierają zaskakujących znaczeń. Dokładniej, wzory z Wykładu XIV dają formalnie na tej ścianie

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{11} + \frac{3}{11}\lambda_E, \\ \eta_2 &= -\frac{10}{11} - \frac{10}{11}\lambda_E, \\ x_3 &= \frac{8}{11} - \frac{3}{11}\lambda_E. \end{aligned}$$

Zatem, liczone czysto formalnie,  $\lambda_{low}^{\{1,3\}} = \max\left(-\frac{3}{11}/\frac{3}{11}\right) = -1$ ,

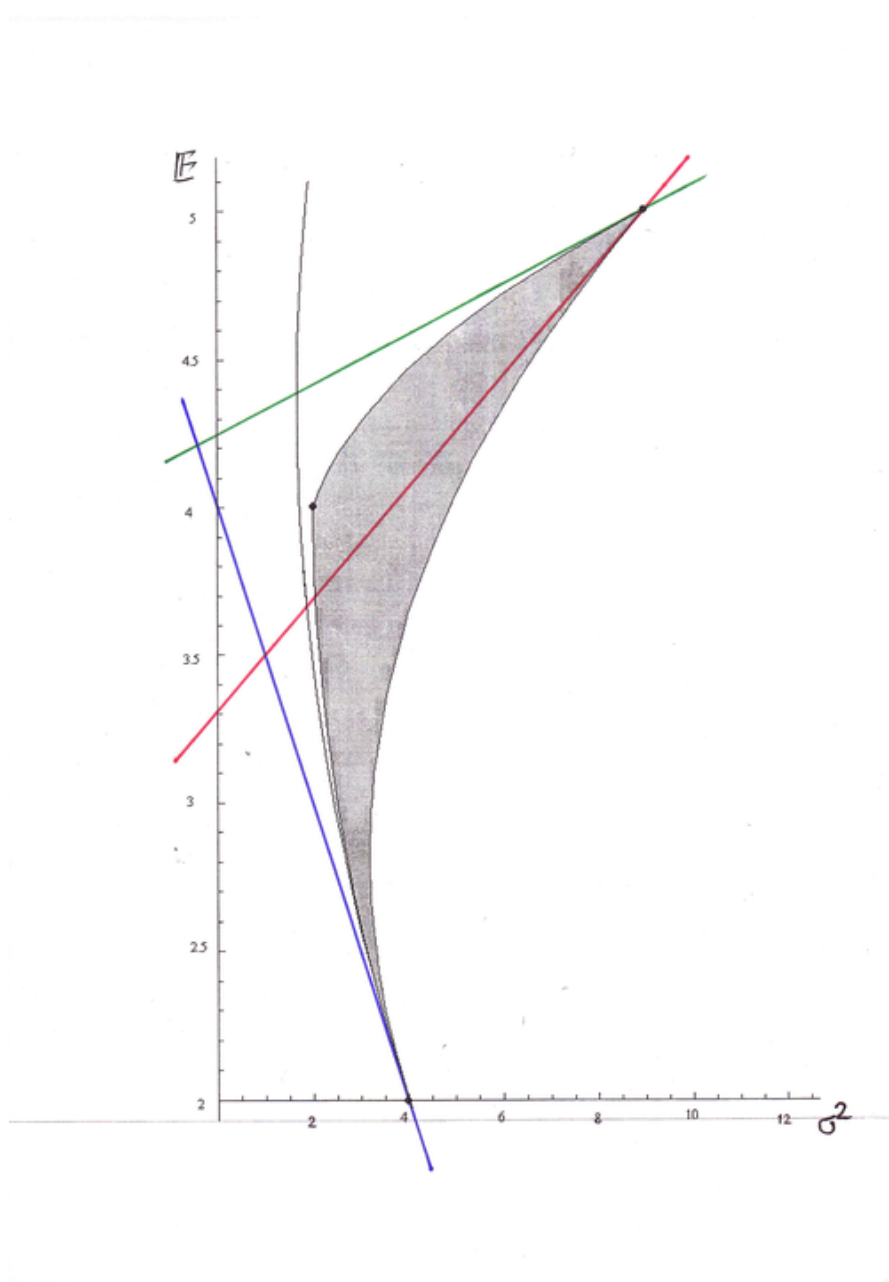
$$\lambda_{hi}^{\{1,3\}} = \min\left(-(-\frac{10}{11})/(-\frac{10}{11}), -\frac{8}{11}/(-\frac{3}{11})\right) = \min\left(-1, \frac{8}{3}\right) = -1.$$

Pouczające jest porównać to z pochodną funkcji  $\sigma^2(E)$  na tym boku. Tutaj  $\sigma^2(x) = 9x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2$  oraz  $x_1 = \frac{E-2}{3}$ ,  $x_3 = \frac{5-E}{3}$ . Prowadzi to do

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dE} = \frac{11}{9}E - \frac{31}{9}.$$

To wyrażenie jest równe  $-1$  tylko przy  $E = 2$ , a więc tylko w wierzchołku  $e_3$  sympleksu  $\Delta^3$  (leżącym w *domknięciu* ściany, której dotyczą tu obliczenia). Zatem wirtualne współczynniki  $\lambda_{low}^{\{1,3\}} = \lambda_{hi}^{\{1,3\}} = -1$  wychwytyują ten jeden jedyny portfel na boku  $x_2 = 0$ , który a) jest wierzchołkowy (tj leży na łamanej  $\mathbb{L}$ ) i b) w obrazie którego styczna do obrazu boku  $x_2 = 0$  jest *tożsama* ze styczną do granicy minimalnej. Na rysunku poniżej, na – uwaga – płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2(\sigma^2, E)$ , ta wspólna styczna w punkcie  $\mathcal{M}(e_3)$  jest niebieska, natomiast w punkcie  $\mathcal{M}(e_1)$ : styczna do granicy minimalnej jest zielona, zaś styczna do obrazu boku  $x_2 = 0$  jest czerwona. [W wersji pdf rysunek trafia na następną stronę.]

<sup>5</sup> w tym doskonale rozpoznanym przykładzie przebieg algorytmu CLA to  $\{1\} \rightarrow \{1, 2\} \text{ (cała)} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{2, 3\} \text{ (cała)} \rightarrow \{3\}$



Rysunek 15.3. Styczne w skrajnych punktach przykładu Mordona.

**Ćwiczenie 15.2** (kontrolne). Czy czytelnik umie policzyć, na jakich dokładnie wysokościach narysowane tu styczne przecinają pionową oś zmiennej  $E$ ?

★★ Jeszcze ciekawszy efekt może wystąpić na ścianie, której podprzestrzeń afiniczną (rozpiętą przez tę ścianę) łamana  $\mathbb{L}$  w ogóle omija. Dzieje się tak np w wymiarze 5 ze ścianą  $\{2, 4\}$

w modelu z parametrami

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 6 & 4 \\ 6 & \frac{21}{2} & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 3 & \frac{19}{2} & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Czysto formalnie, wzory z Wykładu XIV dawałyby na tej ścianie

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{27}{8} - \frac{5}{2}\lambda_E, \\ x_2 &= \frac{1}{4} + \lambda_E, \\ \eta_3 &= -\frac{51}{8} - \frac{1}{2}\lambda_E, \\ x_4 &= \frac{3}{4} - \lambda_E, \\ \eta_5 &= -\frac{27}{8} + \frac{3}{2}\lambda_E. \end{aligned}$$

A zatem, dalej czysto formalnie, byłoby  $\lambda_{\text{low}}^{\{2,4\}} = \max\left(-\frac{1}{4}, \frac{27}{8}/\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ , oraz

$$\lambda_{\text{hi}}^{\{2,4\}} = \min\left(-\left(-\frac{27}{8}\right)/\left(-\frac{5}{2}\right), -\left(-\frac{51}{8}\right)/\left(-\frac{1}{2}\right), -\frac{3}{4}/(-1)\right) = \min\left(-\frac{27}{20}, -\frac{51}{4}\right) = -\frac{51}{4}.$$

W tym przykładzie ściana  $\{2, 4\}$  okazuje się bardzo nieoptymalna z punktu widzenia relatywnego minimalizowania ryzyka w modelu i dla wirtualnych wielkości z algorytmu z nią związanych mamy  $\lambda_{\text{low}}^{\{2,4\}} > \lambda_{\text{hi}}^{\{2,4\}}$ .<sup>6</sup>

### Podsumowanie algorytmu CLA.

Podczas dyskusji algorytmu CLA wydzieliliśmy dwie sytuacje – dwa możliwe rodzaje przejść między kolejnymi etapami algorytmu, przy przyjętych przez nas założeniach niezdegenerowania (15.2).

Po pierwsze

(A).  $\text{IN} \longrightarrow \text{IN}'$ , gdzie  $\#(\text{IN}), \#(\text{IN}') \geq 2$ .

<sup>6</sup> Warto zwrócić uwagę, że ograniczenia na  $\lambda_E$  pochodzące od dodatniości współrzędnych  $x$ -owych podlegają teorii użytej w dowodzie Stwierdzenia 15.1, i monotoniczność ograniczeń pochodzących od tych współrzędnych jest zachowywana:

$$-\frac{1}{4} = \frac{\frac{19}{2} - 9}{2 - 4} = \frac{\sigma_{44} - \sigma_{42}}{\mu_4 - \mu_2} < \lambda_E^{\{2,4\}} < \frac{\sigma_{22} - \sigma_{24}}{\mu_2 - \mu_4} = \frac{\frac{21}{2} - 9}{4 - 2} = \frac{3}{4}.$$

Te ograniczenia są jednak *przesłonięte* mocniejszymi ograniczeniami pochodzącymi od hipotetycznej nieujemności składowych wektora  $\eta$  – tej kwintesencji optymalności. I właśnie nieujemność  $\eta$  jest nie do zrealizowania na boku  $\overline{e_2 e_4}$ .

Jak wiemy, zbiory  $IN$  oraz  $IN'$  różnią się wtedy tylko jednym elementem, zaś parametr  $\lambda_E$  zmienia się płynnie przy przejściu łamanej wierzchołkowej  $\bar{E}$  ze ściany  $IN$  na ścianę  $IN'$ . Dokładniej,  $\lambda_E$  przechodzi przy takim przejściu przez wartość  $\lambda_{low}^{IN} = \lambda_{hi}^{IN'}$  (odpowiadający temu **węzeł** – wartość  $E$  jest **niewyróżniony**, Wniosek 15.1 powyżej).

Po drugie

(B).  $IN \longrightarrow \{i\} \longrightarrow IN'$

Wiemy, że wtedy oba zbiory  $IN$  oraz  $IN'$  są dwuelementowe i oba są – różnymi! – nadzbiorami singletonu  $\{i\}$ . W tej fazie algorytmu łamana wierzchołkowa biegnie po krawędzi  $IN$ , wpada w wierzchołek  $e_i$ , zaś po chwili wybiega z niego po krawędzi  $IN'$ . Jeśli chodzi o parametr  $\lambda_E$ , to na boku łamanej  $\bar{E}$  będącym częścią lub całą krawędzią  $IN$ , zmniejsza się on (będąc cały czas związany zależnością z Obserwacji 6.1 ze stycznymi do obrazów punktów na boku  $IN$ ) do swego kresu dolnego  $\lambda_{low}^{IN} = \lambda_{hi}^{\{i\}}$  – gdy punkt biegnący na tym boku dobiega do wierzchołka  $e_i$ . Następnie parametr obniża się dalej, teraz parametryzując tylko *nadstyczne* położenia prostych podpierających granicę minimalną w obrazie wierzchołka  $e_i$ , który jest, jak wiemy, punktem załamania tej granicy. (Odpowiadający temu **węzeł** – wartość  $E = \mu_i$  jest **wyróżniony**, Wniosek 15.2 powyżej.)

Parametr  $\lambda_E$  przebiega tak cały przedział  $L(\{i\})$  aż do jego lewego końca  $\lambda_{low}^{\{i\}} = \lambda_{hi}^{IN'}$ . W tym momencie prosta podpierająca staje się znowu styczna – tym razem do obrazu krawędzi  $IN'$ . Dalsze zmniejszanie  $\lambda_E$  to parametryzowanie boku łamanej  $\bar{E}$  będącego częścią lub całą krawędzią  $IN'$ , znowu zgodnie z zależnością z Obserwacji 6.1 w Wykładzie VI.

Uwaga. Przypomnianego tu w (B) opisu zbioru  $L(\{i\})$  (patrz Stwierdzenie 15.1 powyżej) wykładowca nie znalazł w dostępnej literaturze. Został on włączony do wykładów dopiero w roku akademickim 2009/10.

Podany opis przebiegu algorytmu CLA obowiązuje, powtarzamy to, przy założeniu warunków niezdegenerowania (15.2). Zauważmy jednak na koniec, że można podać równoległy zestaw *innych* warunków, też pociągający ten sam przebieg algorytmu, tzn występowanie w jego realizacji tylko sytuacji typu (A) oraz (B), co prawda przebieganych w przeciwnym porządku i kierunkach, niż poprzednio. Mianowicie, jeśli zakładać tylko, że

$$\neq \left( \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \frac{\gamma_j}{\delta_j} \mid i \in IN, j \in OUT, \beta_i < 0, \delta_j < 0 \right) \quad \forall \emptyset \neq IN \subset \{1, 2, \dots, k\}, \quad (15.24)$$

wtedy łamaną wierzchołkową  $\bar{E}$  można odzyskiwać od końca do początku: od  $E_{\min}$  (i  $\lambda_E = -\infty$ ) do  $E_{\max}$  (i  $\lambda_E = +\infty$ ). W dyskusji jej przebiegu, w pełni analogicznej do tej przedstawionej w Wykładzie XV, akcentuje się wtedy tylko progowe wartości  $\lambda_{hi}^{IN}$ ,  $IN$  – ściany aktywne, goszczące łamaną  $\bar{E}$ . Warunki (15.24) gwarantują wtedy z nadstatkiem brak kolizji przy zmianach ścian. Zatem  $\bar{E}$  wygląda wtedy tak samo jak przy obowiązywaniu warunków (15.2): doznaje tylko ewolucji typu (A) i/lub (B). Podkreślamy jeszcze raz, że każdy z zestawów warunków (15.2) i (15.24) sam w sobie jest słabszy niż ten, który podany jest na stronie 161 w [22].

Można zauważyć na koniec, że tak właśnie, na samym początku, w [19] Markowitz planował znajdować wszystkie portfele efektywne: **zaczynać** od portfela mającego minimum wariancji, natomiast **kończyć** na portfelu mającym maksimum wartości oczekiwanej. Można to dokładnie prześledzić w tekście na Rysunku 14.2 (reprodukcja strony 87 z [19]) w Wykładzie XIV.

# Literatura

- [1] G. J. Alexander. Short selling and efficient sets. *J. of Finance*, 48:1497–1506, 1993.
- [2] G. J. Alexander, J. C. Francis. *Portfolio Analysis (third edition)*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [3] F. Black. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *J. of Business*, 45:444–455, 1972.
- [4] E. J. Elton, M. J. Gruber. *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych (przekład z angielskiego)*. WIG-Press, Warszawa, 1998.
- [5] E. J. Elton, M. J. Gruber, M. W. Padberg. Simple criteria for optimal portfolio selection. *J. of Finance*, 31:1341–1357, 1976.
- [6] F. R. Gantmacher. *Teorija matric (po rosyjsku, wydanie piąte)*. Fizmatlit, Moskwa, 2004.
- [7] S. I. Gass. *Programowanie liniowe (przekład z angielskiego, wydanie czwarte)*. PWN, Warszawa, 1980.
- [8] P. Grodzki, J. Gruszczyński. *Poszukiwanie bogatych łamanych efektywnych w modelu Markowitza przy pomocy własnej implementacji algorytmu prostej krytycznej*. Praca magisterska, Wydział MIM UW, 2008.
- [9] A. Iwanicki. *Badanie liczby boków łamanej w klasycznym modelu Markowitza*. Praca licencjacka, Wydział MIM UW, 2007.
- [10] K. Jajuga, T. Jajuga. *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa (wydanie drugie, uaktualnione)*. PWN, Warszawa, 2004.
- [11] W. Karush. *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. M.Sc. Dissertation, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, USA, 1939.
- [12] T. H. Kjeldsen. A contextualized historical analysis of the Kuhn–Tucker theorem in nonlinear programming. *Historia Mathematica*, 27:331–361, 2000.
- [13] K. Krzyżewski. *Wykłady z analizy portfelowej i rynków kapitałowych I*. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 1995–2006 (wersja z roku 2000).
- [14] H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, strony 481–492, 1951.
- [15] H. W. Kuhn, A. W. Tucker. John von Neumann’s work in the theory of games and mathematical economics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64.3, Part 2:100–122, 1958.
- [16] J. Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47:13–37, 1965.
- [17] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming (second edition)*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [18] O. L. Mangasarian. Pseudo-convex functions. *SIAM Journal, Series A Control*, 3:281–290, 1965.
- [19] H. M. Markowitz. Portfolio selection. *J. of Finance*, 7:77–91, 1952.
- [20] H. M. Markowitz. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3:111–133, 1956.
- [21] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York, 1959.
- [22] H. M. Markowitz. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, revised reissue, with a chapter and program by G. P. Todd*. Fabozzi Associates, New York, 2000.
- [23] R. C. Merton. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7:1851–1872, 1972.
- [24] J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- [25] R. Pallu de la Barriere. *Matematyczne podstawy teorii sterowania automatycznego (przekład z francuskiego)*. PWN, Warszawa, 1972.
- [26] W. F. Sharpe. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9:277–293, 1963.

- 
- [27] W. F. Sharpe. *Portfolio Theory and Capital Markets*. Mc Graw-Hill, New York, 1970.
  - [28] M. Spivak. *Analiza na rozmaitościach (przekład z angielskiego)*. PWN, Warszawa, 1977.
  - [29] K. Więch. *O pewnym algorytmie wyznaczania łamanej portfeli relatywnie minimalnego ryzyka oraz łamanej portfeli efektywnych w podstawowym modelu Markowitza z nieosobliwą macierzą kowariancji*. Praca magisterska, Wydział MIM UW, 2001.