

Równania różniczkowe cząstkowe w zadaniach

Praca zbiorowa

Opracowali:

Maciej Borodzik, Tomasz Cieślak, Piotr Mucha, Piotr Rybka, Witold Sadowski,
Paweł Strzelecki, Agnieszka Tarasińska i Anna Zatorska–Goldstein

Streszczenie, czyli czym jest i czym nie jest ten tekst

Niniejszy tekst ma charakter dość obszernego zbioru zadań z równań różniczkowych cząstkowych. Objęty materiał to wstęp do (potraktowanej przez autorów w znacznej mierze narzędziowo) teorii dystrybucji i przestrzeni Sobolewa oraz wybrane podstawy dwudziestowiecznych zastosowań tej teorii do liniowych równań cząstkowych. Obecne są także pewne elementy klasycznej teorii równań cząstkowych, np. funkcje harmoniczne czy metoda charakterystyk, wzory na rozwiązanie równania falowego w niskich wymiarach itp.

Poszczególne rozdziały zostały uzupełnione o materiał teoretyczny, który wprowadzie **nie może zastąpić** pełnego wykładu (ani podręcznika), gdyż nie zawiera większości dowodów, ale Czytelnikowi obeznanemu z analizą matematyczną w zakresie pierwszych dwóch lat studiów uniwersyteckich powinien przypomnieć wszystkie niezbędne pojęcia i definicje, oraz pozwolić na samodzielne rozwiązanie większości zadań.

Materiał został pomyślany jako pomoc dla słuchaczy semestralnego wykładu *Równania Różniczkowe Cząstkowe I*, prowadzonego na Wydziale MIM. Pełny zestaw treści, wiążących się z zebranymi tu licznymi zadaniami o bardzo różnym stopniu trudności (łącznie jest ich 300, nie licząc prostych ćwiczeń, do których podano rozwiązania), obejmuje z dużą nawiązką praktycznie każdy wariant tego wykładu. Zdaniem autorów tekstu, należy zakładać, że student, który umie rozwiązać wszystkie zamieszczone niżej zadania, otrzyma ocenę bardzo dobrą od każdego wykładowcy, niezależnie od doboru treści i akcentów, kładzionych w danej edycji przedmiotu.

Treść poszczególnych rozdziałów omawiamy nieco bliżej we Wstępie (patrz strona 6).

Spis treści

Wstęp	6
Zawartość kolejnych rozdziałów	7
Autorzy poszczególnych partii tekstu	8
1 Przypomnienie wiadomości z Analizy Matematycznej	10
1.1 Całkowanie przez części. Teoria	10
1.1.1 Podstawowe wzory	10
1.1.2 Całki powierzchniowe	11
1.1.3 Formy różniczkowe	12
1.2 Całkowanie przez części i formy różniczkowe. Zadania	14
1.2.1 Manipulacje wzorami	14
1.2.2 Zasady zachowania	15
1.2.3 Obliczenia całek powierzchniowych	16
1.2.4 Formy różniczkowe	18
2 Funkcje harmoniczne	21
2.1 Funkcje harmoniczne. Teoria	21
2.1.1 Definicje	21
2.1.2 Funkcje Greena	22
2.1.3 Funkcje harmoniczne i funkcje holomorficzne	23
2.1.4 Funkcje subharmoniczne	24
2.2 Funkcje harmoniczne. Zadania	25
2.2.1 Laplasjan w różnych układach współrzędnych	27
2.2.2 Funkcje Greena	30
2.2.3 Funkcje harmoniczne i funkcje holomorficzne	32
2.2.4 Funkcje subharmoniczne. Zadania.	33
3 Transformata Fouriera i jej zastosowania w równaniach cząstkowych	35
3.1 Przestrzeń Schwartza	35
3.2 Transformata Fouriera	36
3.3 Własności transformaty Fouriera	37
3.4 Wzór Parsewala i twierdzenie Plancherela	39
3.5 Przykłady zastosowań	39

3.6	Zadania	41
4	Wstęp do teorii dystrybucji	43
4.1	Dystrybucje	43
4.2	Pochodne dystrybucyjne	44
4.3	Dystrybucje temperowane	45
4.4	Sploty	46
4.5	Rozwiązanie podstawowe	46
4.6	Rozwiązania przykładowych zadań.	46
4.7	Zadania	48
5	Przestrzeń Sobolewa	49
5.1	Słabe pochodne	49
5.2	Przestrzeń Sobolewa $W^{m,p}$	50
5.3	Przestrzeń $H^s(\mathbb{R}^n)$	51
5.4	Przestrzeń $H^s(\Omega)$	53
5.5	Twierdzenia o śladzie	54
5.6	Rozwiązania przykładowych zadań	55
5.7	Zadania	58
6	Twierdzenia o zanurzeniu	60
6.1	Wprowadzenie	60
6.1.1	Twierdzenie Poincarégo	61
6.1.2	Twierdzenie Sobolewa	61
6.1.3	Twierdzenie Morreya	63
6.1.4	Twierdzenie Rellicha-Kondraszowa	64
6.2	Ćwiczenia	65
6.3	Zadania	68
7	Funkcjonały na przestrzeniach Sobolewa	72
7.1	Fizyczna motywacja	72
7.2	Zasada Dirichleta	73
7.3	O pewnym funkcyjale na przestrzeni Hilberta	74
7.4	Zastosowanie w teorii równań różniczkowych	75
7.5	Zadania	76
8	Lemat Laxa–Milgrama	78
8.1	Wprowadzenie	78
8.1.1	Idea słabego rozwiązania	78
8.1.2	Dlaczego akurat tak?	79
8.1.3	Lemat Laxa–Milgrama	79
8.1.4	Nierówności Poincarégo	80
8.2	Przykłady zagadnień brzegowych	80

8.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	84
9	Lemat Weyla	88
9.1	Naturalne pytania	88
9.2	Zadania	91
10	Słaba zbieżność w przestrzeniach Hilberta	93
10.1	Zadania	98
11	Metoda Galerkina	100
11.1	Przykład pierwszy: liniowe równanie eliptyczne	101
11.2	Przykład drugi: równanie ciepła z nieliniową siłą	106
11.3	Zadania	111
12	Metoda rozdzielania zmiennych	113
12.1	Zagadnienia hiperboliczne	113
12.1.1	Zagadnienia hiperboliczne: przypadek niejednorodny	116
12.1.2	Zagadnienia paraboliczne	117
12.2	Zadania do samodzielnego rozwiązania	117
12.2.1	Równania hiperboliczne	117
12.2.2	Równania paraboliczne	119
13	Zasady maksimum	121
13.1	Rozwiązania przykładowych zadań	121
13.2	Zadania	123
14	Równania pierwszego rzędu i metoda charakterystyk	125
14.1	Układ charakterystyczny	126
14.2	Dopuszczalność warunków początkowych	129
14.3	Niecharakterystyczność danych początkowych	130
14.4	Rozwiązania lokalne	131
14.5	Przykłady	133
14.6	Zadania do samodzielnego rozwiązania	141
15	Zagadnienia hiperboliczne	145
15.1	Równanie falowe	148
15.2	Hiperboliczne układy równań pierwszego rzędu	154
15.3	Równania hiperboliczne drugiego rzędu ogólniej	155
15.4	Zastosowanie transformaty Fouriera	156
15.5	Oszacowania energetyczne i jednoznaczność	159

Wstęp

Równania różniczkowe cząstkowe stanowią *bardzo obszerny* dział analizy matematycznej. Aby zdać sobie sprawę z wagi słów zaznaczonych kursywą, należy przypomnieć sobie, że np. cała teoria funkcji analitycznych jednej zmiennej zespolonej stanowi — w jakimś sensie — opis własności rozwiązań pewnego bardzo konkretnego układu dwóch liniowych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, mianowicie układu równań Cauchy’ego–Riemanna. Należy też pamiętać, że badanie własności rozwiązań takiego czy innego *pojedynczego* równania, lub jakiejś konkretnej, wąskiej klasy równań, bywa treścią wieloletnich programów badawczych, prowadzonych przez całe zespoły matematyków, czasem z perspektywy teoretycznej (która potrafi obejmować także związki równań cząstkowych z innymi gałęziami matematyki, przede wszystkim z szeroko rozumianą geometrią), czasem zaś z uwagi na pewne zastosowania fizyczne czy techniczne. Mamy zresztą nadzieję, że Czytelnik, który przeczyta cały niniejszy tekst i rozwiąże samodzielnie znaczącą liczbę zadań ze wszystkich rozdziałów, doceni i zrozumie nasz pogląd.

Właśnie z uwagi na tę obszerność każdy, kto ma poprowadzić wstępny wykład z równań różniczkowych cząstkowych, przeznaczony nie dla inżynierów czy fizyków, ale dla studentów matematyki, staje przed karkołomnym zadaniem. Równania cząstkowe nie są wcale, naszym zdaniem, jakimś szczególnie i ponadprzeciętnie trudnym działem matematyki, jednak żeby zrozumieć różne pojęcia i docenić sens oraz znaczenie rozmaitych twierdzeń, trzeba po pierwsze opanować dość obszerny aparat narzędzi analitycznych,¹ po drugie zaś — nie mieć nadmiernych kłopotów z *rachunkami*, bez których czasem ani rusz.

Aby oswoić równania cząstkowe i choć trochę zaprzyjaźnić się z nimi, warto więc spróbować oceniać urodę konkretnych rachunków z pewnego dystansu, odkładając na dalszy plan bezpośrednie trudności, jakie prawie zawsze wiążą się z rachowaniem. Rachowanie nie jest wszak celem samym w sobie. Warto spoglądać z perspektywy, jaką przynosi połączenie czystej i twardej teorii, która daje matematykowi (a pośrednio także innym osobom, korzystającym z jego pracy) gwarancję sensowności różnych formalnych manipulacji, z różnorodnymi, czasem bardzo praktycznymi zastosowaniami, dostarczającymi części motywacji do budowy i uprawiania takiej teorii. Bliski związek między matematyką czystą, teoretyczną, oraz matematyką stosowaną, szczególnie w równaniach cząstkowych widać jak na dłoni.

Jednym z możliwych sposobów prowadzenia wykładu z równań cząstkowych jest oparcie go o zdobycze matematyki dwudziestowiecznej: elementarną analizę funkcjonalną, teorię dys-

¹Bardzo wiele pojęć, obecnych w klasycznych wykładach analizy i analizy funkcjonalnej i stanowiących dziś obiekty niezależnych badań, pojawiło się po raz pierwszy w matematyce właśnie jako narzędzia, służące do rozwiązywania równań cząstkowych; tak było choćby z szeregiem Fouriera czy przestrzeniami Hilberta.

trybucji i przestrzeni Sobolewa oraz pojęcie *słabych rozwiązań*. Ten arsenał pojęć i zbudowany dzięki niemu język pozwalają na szersze spojrzenie i pewien dystans, a jednocześnie są nieodzowne dla każdego, kto zechce — choćby w ramach studiów magisterskich czy doktoranckich — poznać równania cząstkowe w zakresie, wykraczającym poza wstępny, semestralny wykład. Taki właśnie sposób organizacji materiału został przyjęty przez autorów niniejszego tekstu. Abstrakcyjne, lecz w gruncie rzeczy stosunkowo proste, narzędzia analizy funkcjonalnej, stanowią szkielet całości. Konkretnie równania (uzupełnione odpowiednimi warunkami brzegowymi lub początkowymi) oraz opis własności ich rozwiązań mają, przy takim ujęciu, charakter przykładów. Czasem chodzi w nich po prostu o ilustrację typowych i mniej typowych zastosowań teorii, a czasem — o dodatkową motywację wprowadzanych abstrakcyjnych pojęć.

Zawartość kolejnych rozdziałów

Rozdział 1 ma wstępny charakter i poświęcony jest przypomnieniu materiału, związanego z całkowaniem po krzywych, powierzchniach i podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$. Komuś, kto nie opanował w miarę sprawnie tych partii wykładu z analizy matematycznej, trudno będzie opanować ze zrozumieniem większość tematów, pojawiających się w typowym wykładzie, wprowadzającym w równania cząstkowe.

Rozdział 2 poświęcony jest pięknemu fragmentowi klasycznej teorii równań cząstkowych, funkcjom harmonicznym i subharmonicznym.

W Rozdziałach 3, 4, 5, 6 oraz 10 wprowadzone są kluczowe narzędzia analityczne, używane później do badania konkretnych równań. Zaczynamy od transformaty Fouriera, później krótko, niemal hasłowo omawiamy najważniejsze pojęcia teorii dystrybucji, potem, w Rozdziałach 5 i 6, definiujemy przestrzeń Sobolewa — przestrzeń funkcji całkowalnych z pewną potęgą, których dystrybucyjne pochodne do ustalonego rzędu włącznie też są całkowalne z daną potęgą — i dokonujemy przeglądu ich najważniejszych (z punktu widzenia teorii równań cząstkowych) własności, wreszcie w Rozdziale 10 omawiamy słabą zbieżność w przestrzeniach Hilberta.

Najważniejsze zastosowania powyższych narzędzi do równań cząstkowych opisane są:

- w Rozdziałach 7 i 8, gdzie wprowadzamy pojęcie słabego rozwiązania równania eliptycznego i podajemy różne metody konstrukcji takich rozwiązań (metoda wariacyjna, wykorzystanie lematu Laxa i Milgrama);
- w Rozdziale 11, poświęconym metodzie Galerkina, służącej zarówno do dowodzenia istnienia rozwiązań, jak i do konstrukcji (sensownych z punktu widzenia zastosowań matematyki) przybliżeń tych rozwiązań;
- w niektórych zadaniach Rozdziału 15, poświęconego zagadnieniom hiperbolicznym; jest to skądinąd klasa równań szczególnie trudna do badania z czysto matematycznego punktu widzenia, a zarazem szczególnie ważna z punktu widzenia zastosowań do opisu najróżniejszych zjawisk falowych — Czytelnik znajdzie więc tam przegląd bardzo różnych metod matematycznych.

Krótki rozdział 9 został zamieszczony po to, by Czytelnik poznał lemat Weyla, stanowiący jeden z najprostszych (a zarazem bardzo klasycznych) przykładów twierdzeń o regularności słabych rozwiązań.

W pozostałych rozdziałach, 12–14, przestrzenie Sobolewa pojawiają się rzadziej lub wcale, obok różnorodnej, lekko eklektycznej mieszanki, które można byłoby omówić, nie odwołując się nazbyt głęboko do analizy funkcjonalnej. Objęte tą częścią tekstu zagadnienia to m.in. metoda rozdzielania zmiennych (która dostarcza pewnej liczby względnie prostych, “typowo rachunkowych” zadań, ale także pozwala zrozumieć, skąd w matematyce wzięły się szeregi Fouriera) oraz metoda charakterystyk, służąca do rozwiązywania równań cząstkowych pierwszego rzędu², a także zasady maksimum dla równań eliptycznych i parabolicznych.

Jak wspomnieliśmy w Streszczeniu na stronie 2, całość zagadnień objętych niniejszym tekstem pokrywa (na ogół z nawiązką) praktycznie każdy semestralny wykład z równań cząstkowych prowadzony na Wydziale MIM UW, niezależnie od upodobań i zainteresowań poszczególnych wykładowców.

Autorzy poszczególnych partii tekstu

Tekst powstał w wyniku zespołowej pracy szeregu osób.

Maciej Borodzik napisał rozdziały o całkowaniu przez części i o funkcjach harmonicznych;

Tomasz Cieślak napisał rozdział o zasadach maksimum i przygotował wstępne wersje rozdziałów 4 i 5;

Piotr Bogusław Mucha napisał rozdziały o słabej zbieżności w przestrzeniach Hilberta i o metodzie Galerkina;

Piotr Rybka napisał ostatni rozdział, poświęcony zagadnieniom hiperbolicznym oraz był koordynatorem całego projektu;

Witold Sadowski jest autorem rozdziałów o twierdzeniach o zanurzeniu (inaczej: włożeniu) i o funkcjonalach na przestrzeniach Sobolewa;

Paweł Strzelecki wykonał redakcję, korektę i skład całości, napisał wstęp i krótki rozdział o lemacie Weyla;

Agnieszka Tarasińska napisała rozdziały o lemacie Laxa i Milgrama oraz o metodzie Fouriera rozdzielania zmiennych;

²Zarówno metoda rozdzielania zmiennych, jak i metoda charakterystyk ilustrują, że rozwiązywanie pewnych równań różniczkowych cząstkowych można sprowadzić do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Nie zawsze oznacza to, że problem został uproszczony w poważnym stopniu: niektóre partie klasycznej teorii funkcji specjalnych, w szczególności słynne funkcje Bessela, powstały dlatego, że proces rozdzielania zmiennych bardzo często prowadzi do takich równań zwyczajnych, których nie można rozwiązać w kwadraturach!

Anna Zatorska–Goldstein napisała rozdziały o transformacie Fouriera i o metodzie charakterystyk, a także dokonała lekkiej rozbudowy i redakcji rozdziałów 4 i 5, wykorzystując materiały Tomasza Cieślaka.

Wszystkie błędy i niedoskonałości, zawarte na kolejnych stronach, są naszym wspólnym dziełem i nikt inny nie ponosi za nie odpowiedzialności. Prosimy wszystkich użytkowników tego materiału o nadsyłanie informacji o usterkach, propozycji poprawek, ulepszeń itp.

*Zespół autorów
Warszawa, lato 2010*

Rozdział 1

Przypomnienie wiadomości z Analizy Matematycznej

1.1 Całkowanie przez części. Teoria

1.1.1 Podstawowe wzory

W przypadku jednowymiarowym podstawowy wzór to

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

z którego wynika bezpośrednio wzór na całkowanie przez części

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Mówimy potocznie, że całka z pełnej pochodnej jest równa przyrostowi funkcji.

Wzory na całkowanie mają swoje ogólne, wielowymiarowe wersje. Aby je podać, trzeba uogólnić zarówno pojęcie przyrostu funkcji, jak i pojęcie pełnej pochodnej.

Najpierw wprowadzimy pojęcie dywergencji. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, zaś $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną (interpretowaną jako pole wektorowe $F = (F_1, \dots, F_n)$, które ma k -tą współrzędną $F_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$), to określamy

$$\operatorname{div} F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}.$$

Powyższą funkcję skalarną nazywamy *dywergencją* pola wektorowego F . Dywergencja mówi o tym, czy potok pola wektorowego rozszerza (zwiększa) objętość, czy też ją ścieśnia (zmniejsza). Wynika to ze wzoru $L_F d_{\text{vol}} = \operatorname{div} F \cdot d_{\text{vol}}$, gdzie L_F jest pochodną Liego, zaś d_{vol} formą objętości; całka z dywergencji pola wektorowego po obszarze określa tempo zmian objętości obszaru pod wpływem potoku tego pola wektorowego (jest to tak zwane *twierdzenie Liouville'a*). Więcej

o pochodnej Liego można przeczytać w [21, Tom 1, Rozdz. 5]. Dowód tak sformułowanego twierdzenia Liouville'a znajduje się w [3, Rozdz. 36].

Przypuśćmy teraz, że Ω jest obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$ o brzegu klasy C^1 . W punkcie $x \in \partial\Omega$ określamy n_x jako wektor normalny do $\partial\Omega$ o długości 1 skierowany na zewnątrz Ω . Jeśli $\Omega = \{x : g(x) > 0\}$ i ∇g nie znika na $\partial\Omega$, to $n_x = -\frac{1}{|\nabla g(x)|} \nabla g(x)$.

Twierdzenie 1.1 (wzór Greena). *Dla funkcji F klasy C^1 zachodzi wzór*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma_{\partial\Omega},$$

gdzie całka po prawej stronie jest całką powierzchniową.

Uwaga 1. Całkę $\int_M F \cdot n \, d\sigma_M$ interpretuje się jako *strumień pola wektorowego* przechodzącego przez powierzchnię M .

1.1.2 Całki powierzchniowe

Warto przypomnieć pokrótce (zob [6, Rozdział 5]), jak oblicza się całki powierzchniowe (ogólnie, całki po podzaimnościach w $\mathbb{R}^n$). Wystarczy się ograniczyć do podzaimności sparametryzowanych. Niech więc $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzaimnością k -wymiarową, $U \subset \mathbb{R}^k$ podzbiorem otwartym, zaś $F : U \rightarrow M$ parametryzacją (gładka bijekcja, której różniczka ma w każdym punkcie rząd k). Niech $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowaną. Wtedy określamy

$$\int_M g \, d\sigma_M = \int_U g(F(x)) \sqrt{\det DF(x)^T \cdot DF(x)} \, dx, \quad (1.1)$$

gdzie DF jest pochodną, $DF^T \cdot DF$ jest macierzą Grama macierzy DF .

W szczególności, jeśli $k = n - 1$, zaś M jest wykresem funkcji, czyli

$$M = \{x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\},$$

to

$$\int_M g \, d\sigma_M = \int_U g(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \cdot \sqrt{1 + f_1'^2 + \dots + f_{n-1}'^2} \, dx_1 \dots dx_n,$$

gdzie f_k' oznacza pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Z drugiej strony, jeśli $k = 1$, zaś $M = \{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n : t \in (a, b)\}$, mamy

$$\int_M g \, d\sigma_M = \int_a^b g(x_1(t), \dots, x_n(t)) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2} \, dt. \quad (1.2)$$

Tutaj $\dot{x}_k$ oznacza pochodną $\frac{dx_k}{dt}$.

Uwaga 2. W literaturze matematycznej spotyka się różnorodne oznaczenia miary powierzchniowej: $d_{\text{vol}}(M)$ lub $d\text{vol}(M)$, po prostu dM lub dS (jeśli M jest powierzchnią), $dl_k(M)$, $d\mathcal{H}^k$ (dla podkreślenia, że chodzi o k -wymiarową miarę Hausdorffa). My preferujemy tutaj oznaczenie $d\sigma_M$, które podkreśla, iż całkujemy względem naturalnej miary na rozmaitości (powierzchni) M . Często rozmaitość M jest jasna z kontekstu — np. jest brzegiem obszaru, w którym rozpatrujemy jakieś równanie różniczkowe; będziemy wtedy pisali po prostu $d\sigma$. Czasami, jeśli będziemy chcieli podkreślić, że całkujemy względem konkretnej zmiennej, będziemy pisali $d\sigma(y)$.

1.1.3 Formy różniczkowe

Przedstawimy pokrótce metodę całkowania, która używa form różniczkowych. Ścisłą definicję formy można znaleźć w innych źródłach (najlepiej [3, Część 7] lub [20, Rozdział 6]). Tu podamy tylko najważniejsze wyniki i definicje.

k –formą różniczkową na rozmaitości M nazwiemy obiekt, który w lokalnych współrzędnych $x_1, \dots, x_n$ zapisuje się jako

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

Symbol “ $\wedge$ ” oznacza mnożenie antysymetryczne wyrażeń, tzn.

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \text{oraz} \quad dx_i \wedge dx_i = 0.$$

Formy różniczkowe można dodawać, a także mnożyć przez funkcje gładkie. Na formach można wykonywać również następujące operacje:

Mnożenie k –formy przez l –formę. Jeśli $\omega = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest k –formą, zaś $\eta = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ jest l –formą, to określamy

$$\omega \wedge \eta = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}.$$

przyjmując umowę, że całe wyrażenie jest równe zero, jeśli powtarzają się chociażby dwie z liczb

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l.$$

Mnożenie kombinacji liniowych form (o współczynnikach zależnych od punktu x) traktujemy jak zwykle mnożenie (rozdzielnie względem dodawania)

Przeciągnięcie formy przez odwzorowanie. Jeśli $F: M \rightarrow N$ jest odwzorowaniem klasy C^1 , zaś ω jest k –formą na N , możemy określić k –formę $F^*\omega$ na M w następujący sposób. Określamy

$$F^* dy_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_k}{\partial x_j} dx_j. \quad (1.3)$$

Tutaj M ma wymiar n , zaś w lokalnych współrzędnych odwzorowanie F opisane jest wzorami

$$(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{F} (y_1, \dots, y_n),$$

gdzie $y_k = y_k(x_1, \dots, x_m)$ jest k -tą składową F . Wzór (1.3) jest bardzo łatwy do zapamiętania.

W przypadku formy $\omega = f_{j_1 \dots j_k}(y_1, \dots, y_n) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$ definiujemy

$$\begin{aligned} F^* \omega(x_1, \dots, x_m) &= f_{j_1 \dots j_k}(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)) \\ &\cdot \left(\sum_{l_1=1}^m \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_1}} dx_{l_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{l_k=1}^m \frac{\partial y_{j_k}}{\partial x_{l_k}} dx_{l_k} \right). \end{aligned}$$

Po wykonaniu wszystkich mnożeń zewnętrznych i skorzystaniu z antysymetrii mnożenia zewnętrznego, otrzymujemy stąd wzór

$$\begin{aligned} F^* \omega(x_1, \dots, x_m) &= \\ &= f_{j_1 \dots j_k}(\dots) \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq m} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_2}} & \dots & \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_k}} \\ \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{l_2}} & \dots & \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{l_k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{j_k}}{\partial x_{l_1}} & \frac{\partial y_{j_k}}{\partial x_{l_2}} & \dots & \frac{\partial y_{j_k}}{\partial x_{l_k}} \end{pmatrix} dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_k} \end{aligned}$$

Różniczka funkcji określona jest wzorem $df = f'_1 dx_1 + \dots + f'_n dx_n$, i jest 1-formą.

Różniczka zewnętrzna. Różniczka formy $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest $k+1$ formą postaci $df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Różniczka kombinacji liniowej (o współczynnikach niezależnych od punktu x) form postaci $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest sumą różniczek.

Całka z n -formy po podzbiornie otwartym $\mathbb{R}^n$. Jeśli $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ jest n -formą określoną na podzbiornie otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$, to określamy

$$\int_U \omega = \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1.4)$$

Zamiana zmiennych w całce. Jeśli $F: U \rightarrow V$ jest dyfeomorfizmem podzbiorów otwartych $\mathbb{R}^n$, zaś ω jest n -formą na V , to $\int_U F^* \omega = \int_V \omega$. Jest to wzór na zamianę zmiennych w całce z formy.

Całka z formy po rozmaitości. Niech M będzie k -wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ zbiorem otwartym, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametryzuje zbiór M . Wtedy, dla dowolnej k -formy ω na M określamy $\int_M \omega = \int_U F^* \omega$. Z poprzedniej własności (zamiany zmiennych w całce) wynika, iż całka $\int_M \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji $F: U \rightarrow M$.

Najważniejszym twierdzeniem rachunku form różniczkowych jest twierdzenie Stokesa, które uogólnia twierdzenie Gaussa–Greena–Ostrogradzkiego.

Twierdzenie 1.2. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $k+1$ wymiarową podrozmaitością zorientowaną z brzegiem ∂M . Niech ω będzie k -formą określoną na pewnym otoczeniu U zbioru M . Wtedy

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega. \quad (1.5)$$

Aby zobaczyć, że twierdzenie Stokesa jest uogólnieniem twierdzenia Greena, podajmy kilka prostych w dowodzie faktów.

Lemat 1. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością $(n-1)$ -wymiarową, zaś $v = (v_1, \dots, v_n)$ polem wektorowym na $\mathbb{R}^n$. Określmy formę ω_v wzorem

$$\begin{aligned} \omega_v = & v_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \\ & + v_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n-1} v_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\int_M \omega_v = \int_M v \cdot \vec{n} d\sigma_M.$$

Lemat 2. Jeśli $v = (v_1, \dots, v_n)$ i ω_v jest określona jak w Lemacie 1, to

$$d\omega_v = \operatorname{div} v dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

1.2 Całkowanie przez części i formy różniczkowe. Zadania

1.2.1 Manipulacje wzorami

Zadanie 1.1. Wykazać, że jeśli u jest funkcją, a X polem wektorowym, to

$$\operatorname{div}(uX) = u \operatorname{div}(X) + Xu,$$

gdzie Xu oznacza pochodną kierunkową funkcji u w kierunku X .

Zadanie 1.2. Udowodnić następujący analog wzoru Leibniza. Jeśli $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C^1 , to

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

Zadanie 1.3. Wyprowadzić pierwszy wzór Greena:

$$-\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx - \int_{\partial\Omega} u \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma$$

gdzie $\frac{\partial v}{\partial n}$ oznacza pochodną kierunkową funkcji v w kierunku wektora normalnego do brzegu (tzn. prostopadłego) skierowanego na zewnątrz.

Zadanie 1.4. Wykazać, że jeśli funkcja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^2 to

$$\operatorname{div} \nabla f = \Delta f,$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a (zob. (2.1)).

Zadanie 1.5. Wyprowadzić drugi wzór Greena:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v - u \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \right] \, d\sigma.$$

Zadanie 1.6. Udowodnić twierdzenie o wartości średniej (patrz podrozdział 2.1.1), korzystając z wzorów Greena.

Zadanie 1.7. Rozwiązać Zadanie 15.45.

1.2.2 Zasady zachowania

Zadanie 1.8. Niech $u(x, t)$, $x \in S^1, t \in \mathbb{R}^+$ będzie funkcją klasy C^2 spełniającą równanie struny

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

Niech

$$E_p(t) = \int_{S^1} u_x^2(x, t) \, dx, \quad E_k(t) = \int_{S^1} u_t^2(x, t) \, dx.$$

Udowodnić zasadę zachowania energii $E_p + E_k = \text{const}$.

Zadanie 1.9. Uogólnić zasadę zachowania energii na przypadek wielowymiarowy. Mianowicie, niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^n$ o brzegu klasy C^1 . Niech $u \in C^2$ będzie rozwiązaniem równania struny

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{w } \Omega$$

z warunkiem $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ we wszystkich punktach brzegu. Definiujemy energię kinetyczną potencjalną wzorami

$$E_k = \int_{\Omega} u_t^2 \, dx_1 \dots dx_n, \quad E_p = \int_{\Omega} (u_{x_1}^2 + \dots + u_{x_n}^2) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Udowodnić zasadę zachowania energii: $E_p + E_k = \text{const}$.

Zadanie 1.10. Rozpatrujemy równanie $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, \pi)$, $t \in (0, \infty)$, uzupełnione warunkami brzegowymi $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ (von Neumanna). Określamy $E(T) = \int u_x^2(T, x) \, dx$. Zbadać przebieg funkcji $E'(T)$. Wykorzystać to do udowodnienia jednoznaczności rozwiązania. Zbadać zachowanie $E(T)$ przy $T \rightarrow \infty$.

1.2.3 Obliczenia całek powierzchniowych

Zadanie 1.11. Obliczyć całkę z funkcji z^n po torusie $T \subset \mathbb{R}^3$ sparametryzowanym przez

$$\begin{cases} x &= (R + r \cos \phi) \cos \theta \\ y &= (R + r \cos \phi) \sin \theta \\ z &= r \sin \phi, \end{cases}$$

gdzie $\phi, \theta \in (0, 2\pi)$, zaś R i r są ustalonymi liczbami dodatnimi takimi, że $r < R$.

Rozwiązanie. Znajdujemy macierz pochodnych parametryzacji

$$DF = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \cos \theta & -(R + r \cos \phi) \sin \theta \\ -r \sin \phi \sin \theta & (R + r \cos \phi) \cos \theta \\ r \cos \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Wtedy

$$DF^T \cdot DF = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos \phi)^2 \end{pmatrix}.$$

W związku z tym pozostaje nam do obliczenia całka

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (r \sin \phi)^n \cdot r (R + r \cos \phi) = 2\pi r^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin^n \phi (R + r \cos \phi) d\phi.$$

Dla $n = 2k + 1$ całka znika, natomiast dla $n = 2k$ mamy

$$\int_0^\pi \sin^{2k} \phi \cos \phi = - \int_\pi^{2\pi} \sin^{2k} \phi \cos \phi.$$

Pozostaje więc do obliczenia wyrażenie

$$2\pi r^{2k+1} R \int_0^{2\pi} \sin^{2k} \phi d\phi = 8\pi r^{2k+1} R \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \phi d\phi.$$

Teraz

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \phi d\phi = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k},$$

gdzie $B(\cdot, \cdot)$ oznacza funkcję beta Eulera. Ostatecznie uzyskujemy odpowiedź

$$\int_T z^n = \begin{cases} 0: & n = 2k + 1 \\ 8\pi^2 R \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1} \binom{2k}{k}: & n = 2k. \end{cases}$$

◇

Zadanie 1.12. Obliczyć średnią wartość funkcji x_1^k po sferze $\{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ dla całkowitych dodatnich k i n .

Zadanie 1.13. Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka $\{x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]\}$, całkując funkcję 1 po odpowiedniej powierzchni.

Zadanie 1.14. Obliczyć długość krzywej zadanej parametrycznie przez $x = t \cos t, y = t \sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 1.15. Niech γ będzie krzywą w $\mathbb{R}^3$ zadaną parametrycznie przez $s \rightarrow (s, s^2, s^3)$, gdy $s \in [0, 1]$. Każdy punkt γ łączymy odcinkiem z punktem $(0, 0, 0)$. Obliczyć objętość tak uzyskanego zbioru.

Zadanie 1.16. Obliczyć całkowity strumień pola $(x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2)$ przez brzeg sześcianu $V = \{|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a\}$.

Zadanie 1.17. Obliczyć całkowity strumień pola

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

przez powierzchnię elipsoidy $E = \{x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 4\}$.

Rozwiązanie. Zamiast rachować brutalnie, zastosujemy wzór Greena. Zauważmy, że pole wektorowe

$$v = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

ma znikającą dywergencję w $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Gdyby E było brzegiem obszaru w $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, pierwszy wzór Greena powiedziałby, że całkowity strumień jest zero. Tak jednak nie jest i musimy postępować w inny sposób.

Niech V będzie obszarem zadanym przez

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 \leq 4\}.$$

Wtedy $\operatorname{div} v = 0$ na V , ponadto $\partial V = E \cup -S$, gdzie $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, a znak „−” oznacza, że bierzemy przeciwną orientację. Ze wzoru Greena (Twierdzenie 1.1):

$$\int_{-S} v \cdot n + \int_E v \cdot n = \int_V \operatorname{div} v = 0.$$

A zatem

$$-\int_S v \cdot n + \int_E v \cdot n = 0,$$

gdyż strumień pola przez $-S$ jest równy $(-1) \cdot$ strumień pola przez S . Czyli strumienie pola przez S i przez E są równe. Natomiast na S pole v jest równe polu $w = (x, y, z)$, gdyż $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. A zatem

$$\int_S v \cdot n = \int_S w \cdot n = \int_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} \operatorname{div} w = \int_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} 3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 = 4\pi,$$

gdzie ponownie użyliśmy wzoru Greena. $\diamond$

1.2.4 Formy różniczkowe

Zadanie 1.18. Dla form

$$\omega = 2x dx + y^2 z dy + 3xy dz \quad \text{oraz} \quad \eta = (x^3 + y^5) dx \wedge dy + 2yz dy \wedge dz + 3y dx \wedge dz$$

obliczyć $d\omega$, $d\eta$ oraz $\omega \wedge \eta$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $d(2x dx) = 0$. Istotnie, $d(2x dx) = d(2x) \wedge dx = 2dx \wedge dx = 0$. Jako, że $d(y^2 z) \wedge dy = y^2 dz \wedge dy = -y^2 dy \wedge dz$ oraz $d(3xy) \wedge dz = 3y dx \wedge dz + 3x dy \wedge dz$, otrzymujemy

$$d\omega = (-y^2 + 3x) dy \wedge dz + 3y dx \wedge dz.$$

Przy obliczaniu $d\eta$ obserwujemy, że $d((x^3 + y^5) dx \wedge dy) = d(2yz dy \wedge dz) = 0$. Istotnie, w pierwszym przypadku funkcja $x^3 + y^5$ zależy tylko od x i y , zatem $d(x^3 + y^5)$ będzie zawierało wyrazy tylko z dx i dy , które zostaną skasowane po pomnożeniu przez $dx \wedge dy$. Podobnie rozumiemy pokazując, że $d(yz dy \wedge dz) = 0$. Stąd

$$d\eta = d(3y dx \wedge dz) = 3dy \wedge dx \wedge dz = -3dx \wedge dy \wedge dz.$$

Obliczmy teraz $\omega \wedge \eta$. W wyrażeniu

$$(2x dx + y^2 z dy + 3xy dz) \wedge ((x^3 + y^5) dx \wedge dy + 2yz dy \wedge dz + 3y dx \wedge dz)$$

mnożymy każdy składnik z nawiasu po lewej stronie przez każdy składnik nawiasu z prawej strony. Z dziewięciu możliwych do uzyskania składników sumy, niezerowe są tylko te, w których nie powtarza się żadne wyrażenie dx , dy , dz , a więc:

$$2x dx \wedge (2yz dy \wedge dz), \quad y^2 z dy \wedge (3y dx \wedge dz), \quad 3xy dz \wedge ((x^3 + y^5) dx \wedge dy).$$

Ostatecznie

$$\omega \wedge \eta = (4xyz - 3y^3 z + 3x^4 y + 3xy^5) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Znak minus przed $3y^3 z$ bierze się stąd, że $dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$. $\diamond$

Zadanie 1.19. Udowodnić Lemat 2.

Zadanie 1.20. Używając wzoru Stokesa, obliczyć pole koła $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rozwiązanie. Niech $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Rozważmy formę $\omega = x dy$. Wtedy $d\omega = dx \wedge dy$ oraz

$$\int_{\Omega} 1 \cdot dx dy = \int_{\Omega} dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę, parametryzujemy $\partial\Omega$ przez $t \xrightarrow{F} (x(t), y(t))$, gdzie $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ oraz $t \in (0, 2\pi)$. Wtedy $F^* dy = \cos t dt$, więc $F^* \omega = \cos^2 t dt$ (osoby bardziej wprawne w rachunkach często opuszczają przy tych obliczeniach F^* pisząc po prostu $dy =$

$\cos t \, dt$, $\omega = \cos^2 t \, dt$. Jak zwykle w takich przypadkach, jest to poprawne tak długo, jak nie prowadzi do nieporozumień). Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi.$$

◇

Zadanie 1.21. Obliczyć pole obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ (asteroida).

Zadanie 1.22. Obliczyć całkę z formy $\omega = zdx + 4z^2dy + (6x - 8zy)dz$ po krzywej $\{x^2 + z^2 = 1, x^3 + 3y + z^3 = 2\}$.

Zadanie 1.23. Niech ω będzie formą określoną wzorem

$$\omega = \frac{(y-2)dx - (x+2)dy}{x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8} + \frac{(y-1)dx - (x+1)dy}{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2},$$

zaś $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ — krzywą zadaną równaniem

$$\gamma = \{(x, y) : |x|^{4/3} + |y|^{5/4} = 2.\}$$

Oblicz $\int_{\gamma} \omega$.

Zadanie 1.24. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie hiperpowierzchnią zadaną przez warunek $f = 0$, gdzie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i ∇f nie równa się zero w żadnym punkcie M . Określamy

$$\omega_f = \frac{1}{|\nabla f|} \sum_{k=1}^n (-1)^k f'_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

gdzie daszek nad dx_k oznacza, że w danym wyrażeniu czynnik dx_k należy *pominąć*. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ całkowanej na M zachodzi

$$\int_M g \cdot \omega_f = \int_M g \, d\sigma_M,$$

gdzie po lewej stronie widnieje całka z $(n-1)$ -formy, zaś po prawej całka z funkcji względem miary powierzchniowej.

Zadanie 1.25. Wyprowadzić wzór Greena (Twierdzenie 1.1) z Twierdzenia Stokesa.

Zadanie 1.26. Udowodnić, że spośród wszystkich krzywych zamkniętych $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ o danej długości l największe pole ogranicza okrąg.

Wskazówka: postępować według następującego schematu.

1. Rozpatrzmy wszystkie krzywe $\gamma = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, klasy C^2 , takie, że $x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0$. Wykazać, że każdą taką krzywą można przeparametryzować tak, aby $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \equiv l^2$, gdzie l jest długością krzywej.
2. Zauważyć, że dla krzywej γ , funkcjonal $L(x, y) = \int_0^1 x(t)\dot{y}(t)dt$ przyjmuje wartość równą polu obszaru ograniczonego przez γ .
3. Rozważyć zagadnienie ekstremalne dla $L(\gamma)$ z mnożnikiem Lagrange'a

$$F(x, y) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt;$$

napisać równanie Eulera–Lagrange'a dla

$$L(x, y) - \lambda F(x, y).$$

Zagadnienie jest dwuwymiarowe, więc będą dwa równania; pierwsze z nich pochodzi od zaburzenia $x \mapsto x + \delta_x$, a drugie — od $y \mapsto y + \delta_y$. Dzięki wyborowi parametryzacji (punkt 1.) oba równania mają stosunkowo prostą postać.

4. Rozwiązać otrzymane równania. Ponieważ wiadomo, jaki ma wyjść wynik, rozwiązanie nie powinno być trudne.

Rozdział 2

Funkcje harmoniczne

2.1 Funkcje harmoniczne. Teoria

2.1.1 Definicje

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym¹. Funkcję $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy *harmoniczną*, jeśli jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia równanie Laplace’a

$$\Delta f = 0,$$

gdzie

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}. \quad (2.1)$$

Wiadomo, że każda taka funkcja musi być analityczna. Poza tym ma szereg interesujących własności.

1. Pierwszą z nich jest *twierdzenie o wartości średniej*. Stanowi ono, że jeśli kula $B(x, r)$ jest zawarta w Ω , to

$$f(x) = \frac{\int_{B(x,r)} f(y) dy}{\int_{B(x,r)} 1 dy} = \frac{\int_{S(x,r)} f(y) d\sigma}{\int_{S(x,r)} 1 d\sigma}.$$

2. Ponadto mamy *zasadę maksimum*, która mówi, że funkcja harmoniczna *nie ma maksimumów lokalnych*. W szczególności, jeśli Ω jest ograniczony, to

$$\sup\{f(x) : x \in \Omega\} = \sup\{f(x) : x \in \partial\Omega\}.$$

Uwaga. $S(x, r)$ oznacza tu sferę o środku x i promieniu $r > 0$.

3. Funkcja harmoniczna na Ω jest ponadto analityczna w Ω .

Twierdzenie o wartości średniej sugeruje wprowadzenie następującej definicji

Definicja 2.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym.

(a) O funkcji lokalnie całkowalnej² $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ powiemy, że spełnia *twierdzenie o wartości*

¹Funkcje (a także formy) harmoniczne można definiować także rozmaitościach riemannowskich; tym jednak nie będziemy się zajmować.

²Tzn. całkowalnej na zwartych podzbiorach swojej dziedziny

średniej dla kuli, jeśli dla wszystkich $x \in \Omega$ i wszystkich $r > 0$ takich, że kula $B(x, r) \subset \Omega$ zachodzi

$$f(x) = \frac{\int_{B(x,r)} f(y) dy}{\int_{B(x,r)} 1 dy}.$$

- (b) O funkcji ciągłej $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ powiemy, że spełnia *twierdzenie o wartości średniej dla sfery*, jeśli dla wszystkich $x \in \Omega$ i wszystkich $r > 0$ takich, że kula $B(x, r) \subset \Omega$ zachodzi

$$f(x) = \frac{\int_{\partial B(x,r)} f(y) d\sigma(y)}{\int_{\partial B(x,r)} 1 d\sigma(y)}.$$

Definicja 2.2. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym z brzegiem klasy C^1 . Niech $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą. *Zagadnieniem Dirichleta* (dla równania Laplace'a) nazwiemy problem znalezienia funkcji klasy C^2 na Ω , ciągłej na brzegu takiej, że

$$f|_{\partial\Omega} = g, \quad \Delta f(x) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

Definicja 2.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym z brzegiem klasy C^1 . Niech $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą. Niech $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ też będzie ciągłą. *Zagadnieniem Poissona* nazwiemy problem znalezienia funkcji klasy C^2 na Ω , ciągłej na brzegu takiej, że

$$f|_{\partial\Omega} = g, \quad -\Delta f(x) = h(x) \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

2.1.2 Funkcje Greena

Zagadnienia Dirichleta i Poissona można rozwiązać, jeśli zna się tzw. funkcję Greena dla danego obszaru.

Definicja 2.4. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. *Funkcją Greena* dla Ω (z warunkami brzegowymi Dirichleta) nazywamy funkcję

$$\Phi: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R},$$

o tych własnościach, że

- (a) Dla wszystkich $x \in \Omega$ i $y \in \partial\Omega$ zachodzi $\Phi(x, y) = 0$.
- (b) Dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi równość $-\Delta_y \Phi = \delta_x$, gdzie Δ_y oznacza laplasjan po współrzędnej y , a δ_x jest dystrybucją δ Diraca (gęstością miary punktowej; miara punktu $\{x\}$ wynosi 1). Na przekątnej $y = x$ pochodne rozpatrujemy w sensie dystrybucyjnym; patrz Rozdział 4.

Dla $\mathbb{R}^n$ funkcją Greena (zob. Zadanie 2.2 i 2.3) jest

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}, & n > 2. \end{cases}$$

Tutaj $\alpha(n)$ jest objętością jednostkowej kuli n -wymiarowej.

Znaczenie funkcji Greena wynika z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. Niech Ω oznacza obszar w $\mathbb{R}^n$ o brzegu klasy C^1 . Załóżmy, że $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe. Jeśli Φ jest funkcją Greena dla Ω , to funkcja $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial\Phi}{\partial n_y} d\sigma(y) + \int_{\Omega} h(y) \Phi(x, y) dy \quad (2.2)$$

spełnia zagadnienie Poissona dla Ω z funkcjami g i h . Symbol $\frac{\partial\Phi}{\partial n_y}$ oznacza pochodną kierunkową Φ w kierunku wektora normalnego, a różniczkowanie jest względem zmiennej y .

Kładąc $h = 0$ w (2.2) uzyskujemy rozwiązanie zagadnienia Dirichleta,

$$f(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial\Phi}{\partial n_y} d\sigma(y). \quad (2.3)$$

Definicja 2.5. Funkcję $P(x, y): \Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$P(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial n_y}(x, y)$$

nazywamy *jądrem Poissona* dla obszaru Ω . Wzór (2.3), który można zapisać jako

$$f(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) P(x, y) d\sigma(y).$$

nazywamy *wzorem Poissona*.

W wyznaczaniu funkcji Greena dla różnych obszarów przydatna może być interpretacja elektrostyczna: przy ustalonym x funkcja Greena to jest potencjał elektrostatyczny, wyznaczony przez ładunek jednostkowy znajdujący się w punkcie x oraz przez, być może, inne ładunki rozmieszczone poza Ω , ale tak, by potencjał na $\partial\Omega$ był stale równy 0.

2.1.3 Funkcje harmoniczne i funkcje holomorficzne

W przypadku $n = 2$, a więc funkcji określonych na podzbiorach otwartych $U \subset \mathbb{R}^2$ mamy piękne i głębokie związki pomiędzy funkcjami harmonicznymi a funkcjami holomorficznymi (zob. [18, Rozdział 10]). Przypomnijmy definicję.

Definicja 2.6. Niech $U \subset \mathbb{C}$. Funkcję $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ nazwiemy *holomorficzną*, jeśli dla każdego $z_0 \in U$ spełniony jest jeden z następujących, równoważnych warunków.

- Istnieje granica

$$\lim_{w \rightarrow 0, w \in \mathbb{C}} \frac{F(z_0 + w) - F(z_0)}{w};$$

- Pochodna funkcji F (traktowanej jako funkcja z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$) ma postać $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$;
- Jeśli zapiszemy $z = x + iy$ zaś $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, to $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$;
- Forma różniczkowa $F(z)dz = F(z)dx + iF(z)dy$ jest zamknięta.

Mamy następujące fakty.

Lemat 3 (uproszczony wzór całkowy Cauchy'ego). Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną, zaś koło $B(z_0, r) \subset U$, to

$$\int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Całkę po prawej stronie można rozumieć albo w sensie funkcji analitycznych (patrz np. książka Rudina [18]), albo jako całkę z 1-formy.

Parametryzując $\partial B(z_0, r)$ przez $z = z_0 + re^{it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, wstawiamy $dz = ire^{it}dt$ i sprawdzamy, że lewa strona jest równa

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \frac{i}{r} \int_{\partial B(z_0, r)} f(z) d\sigma.$$

Całka po prawej stronie jest całką względem miary na okręgu. W takim wypadku ze wzoru całkowego Cauchy'ego uzyskujemy

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(z_0, r)} f(z) d\sigma = f(z_0), \quad (2.4)$$

inaczej mówiąc, wartość funkcji holomorficzej w punkcie z_0 jest średnią z jej wartości po okręgu $\partial B(z_0, r)$.

2.1.4 Funkcje subharmoniczne

Przypomnijmy następującą definicję

Definicja 2.7. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funkcję $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nazwiemy *półciągłą z góry*, jeśli dla każdego $a \in \mathbb{R}$, zbiór $\{x \in \Omega: f(x) < a\}$ jest otwarty w Ω , bądź, równoważnie, jeśli dla każdego $x_0 \in \Omega$ zachodzi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Podamy też definicję funkcji subharmonicznej (patrz [12, Rozdział 2]).

Definicja 2.8. Funkcję $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, półciągłą z góry, nazwiemy *subharmoniczną* jeśli dla każdego $x \in \Omega$ i każdego r takiego, że $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$ oraz dla dowolnej funkcji harmonicznej $h: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej na $\overline{B}(x, r)$, warunek

$$f(x) \leq h(x) \text{ dla wszystkich } x \in \partial B(x, r)$$

implikuje warunek

$$f(x) \leq h(x) \text{ dla wszystkich } x \in B(x, r).$$

Funkcje subharmoniczne mają całe mnóstwo ważnych własności. Część z nich opiszemy w zadaniach. Ogólnie rzecz biorąc, funkcje subharmoniczne przypominają pod wieloma względami funkcje wypukłe.

2.2 Funkcje harmoniczne. Zadania

Zadanie 2.1. Udowodnić, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^3 i jest harmoniczna, to, dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^n$, pochodna kierunkowa $D_v f = v \cdot \nabla f$ też jest harmoniczna.

Zadanie 2.2. Niech $n > 2$. Sprawdzić bezpośrednio z definicji, że funkcja

$$u(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{(2-n)/2}$$

jest harmoniczna na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zadanie 2.3. Wykazać, że funkcja

$$u(x, y) = \ln |x^2 + y^2|$$

jest harmoniczna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Zadanie 2.4. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, które są harmoniczne i sferycznie symetryczne (to znaczy $f(x_1, \dots, x_n) = u(r)$ dla pewnego u , przy czym $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

(a) $n = 2$;

(b) $n > 2$.

Porównać otrzymane wyniki z Zadaniem 2.2 i 2.3.

Zadanie 2.5. Wykazać, że każda funkcja klasy C^2 na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest harmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia twierdzenie o wartości średniej.

Zadanie 2.6. Niech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która spełnia twierdzenie o wartości średniej. Niech $\eta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją całkowalną, taką, że $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(|x|) dx = 1$. Wykazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \eta(|x - y|) dy = f(x).$$

Wskazówka: Wariant 1 (trudniejszy): skorzystać z twierdzenia o wartości średniej dla kuli i wykazać, że wzór zachodzi, gdy η jest funkcją prostą, a następnie wykonać przejście graniczne. Wariant 2: skorzystać z twierdzenia o wartości średniej dla sfery i twierdzenia Fubiniego.

Zadanie 2.7. Wykazać, że jeśli funkcja ciągła na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ spełnia twierdzenie o wartości średniej, to jest klasy C^∞ . Wskazówka: wziąć η z zadania 2.6 gładkie o nośniku zawartym w przedziale $(0, \varepsilon)$.

Zadanie 2.8. Udowodnić, że granica niemal jednostajnego ciągu funkcji harmonicznych jest harmoniczna. Wskazówka: Zadanie 2.7.

Zadanie 2.9. Niech $B = B(0, 2r) \subset \mathbb{R}^n$ będzie kulą o promieniu $3r > 0$, zaś $u: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną w B , taką, że $u(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in B(0, r)$. Wykazać, że dla dowolnych $x, y \in B(0, r)$ zachodzi

$$u(x) \leq 3^{3n} u(y).$$

Wskazówka. Połączyć x i y odcinkiem i weź punkty w, z odpowiednio w $1/3$ i $2/3$ tego odcinka. Następnie zastosować twierdzenie o wartości średniej, aby wykazać, że $u(x) \leq 3^n u(w)$ i dalej $u(w) \leq 3^n u(z)$, $u(z) \leq 3^n u(x)$.

Zadanie 2.10. Wykazać, że funkcja harmoniczna na $\mathbb{R}^n$ ograniczona jest stała.

Wskazówka: Posłużyć się wynikiem poprzedniego zadania. Spróbować wykonać przejście graniczne $r \rightarrow \infty$.

Zadanie 2.11. Posłużyć się Zadaniem 2.9 do dowodu *nierówności Harnacka*: dla dowolnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograniczonego, i podzbioru otwartego $U \subset \Omega$ takiego, że $\overline{U} \subset \Omega$, istnieje stała $C > 0$ o tej własności, że jeśli $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest harmoniczna oraz $u(x) \geq 0$, to

$$\sup_{x \in U} u(x) \leq C \inf_{x \in U} u(x).$$

Zadanie 2.12. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$ będzie otwarty, zaś $x_0 \in U$. Przypuśćmy, że dana jest funkcja $F: U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmoniczna i ograniczona. Wykazać, że F przedłuża się do funkcji ciągłej $\tilde{F}: U \rightarrow \mathbb{R}$ i $\tilde{F}$ jest harmoniczna.

Zadanie 2.13. Scharakteryzować funkcje harmoniczne w $\mathbb{R}^1$. Znaleźć funkcję Greena dla jednowymiarowego zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a, dla odcinka $[a, b]$. Przedyskutować sytuację dla warunków von Neumanna.

Zadanie 2.14. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną, której wszystkie punkty krytyczne (miejsca takie, że $\nabla f = 0$) mają niezdegenerowany hessjan (macierz drugich pochodnych). Wykazać, że równanie Laplace'a nie pozwala na to, aby hessjan był dodatnio (ani też ujemnie) określony, więc takie f nie może mieć lokalnych maksimów ani minimów.

Zadanie 2.15. Rozważmy torus $S^1 \times S^1$, na którym współrzędne oznaczmy przez x i y . Znaleźć wartości własne operatora Laplace'a $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$.

Zadanie 2.16. Zbadać zagadnienie własne operatora Laplace'a $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ na prostokącie $L = [0, a] \times [0, b]$ z warunkiem brzegowym $u|_{\partial L} = 0$.

2.2.1 Laplasjan w różnych układach współrzędnych

Zadanie 2.17. Niech $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ będzie dwuwymiarowym laplasjanem. Znaleźć jego postać we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) .

Zadanie 2.18. Wyznaczyć postać trójwymiarowego laplasjanu we współrzędnych sferycznych (r, ψ, ϕ) ,

$$x = r \sin \phi \sin \psi, y = r \sin \phi \cos \psi, z = r \cos \phi.$$

Uwaga. Rachunki są nieco żmudniejsze, niż w poprzednim zadaniu.

Zadanie 2.19. Wykazać, możliwie najprościej, że laplasjan jest niezmienniczy przy ortogonalnej zamianie zmiennych, to znaczy, że przy przejściu do układu ortogonalnego, postać laplasjanu nie zmienia się.

Zadanie 2.20. Znaleźć postać Laplasjanu we współrzędnych walcowych $x = r \sin \phi, y = r \cos \phi, z = z$.

Zadanie 2.21. Znaleźć postać laplasjanu we współrzędnych sferycznych w $\mathbb{R}^4$, zadanych wzorami

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ y &= r \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ z &= r \cos \alpha \sin \beta \\ u &= r \sin \alpha. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Na tym przykładzie pokażemy pewien uniwersalny sposób postępowania, wykorzystujący fakt, iż $\Delta F = \operatorname{div} \nabla F = *d * dF$, gdzie d jest różniczkowaniem form, zaś $*$ jest operatorem tzw. gwiazdki Hodge'a. (Podstawowe informacje o nim – patrz np. [21, Tom 4, Rozdz. 7, Addendum 2], lub monografia [7, Rozdz. 19.3 i 25].

Zauważmy, że w zadanym punkcie przestrzeni, wektory styczne

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

powiązane są następującymi relacjami:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + \cos \alpha \sin \beta \frac{\partial}{\partial z} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} &= -r \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} - r \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad - r \sin \alpha \sin \beta \frac{\partial}{\partial z} + r \cos \alpha \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} &= -r \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} - r \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + r \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} &= -r \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ponieważ wektory $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u}$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej (w standardowej metryce w $\mathbb{R}^4$) możemy sprawdzić, że wektory $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \gamma}$ są wzajemnie prostopadłe, zaś ich długość równa jest odpowiednio

$$1, r, r \cos \alpha, r \cos \alpha \cos \beta.$$

A zatem wektory

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{1}{r \cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{1}{r \cos \alpha \cos \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

tworzą bazę ortonormalną przestrzeni stycznej. Stąd wynika, że formy

$$\begin{aligned}e_1 &= dr \\ e_2 &= r d\alpha \\ e_3 &= r \cos \alpha d\beta \\ e_4 &= r \cos \alpha \cos \beta d\gamma\end{aligned}$$

tworzą bazę ortonormalną przestrzeni kostycznej. Czyli $*e_1 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, $*e_2 = -e_3 \wedge e_4 \wedge e_1$, $*e_3 = e_4 \wedge e_1 \wedge e_2$ i $*e_4 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ oraz $*e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = 1$.

A zatem

$$\begin{aligned}*dr &= r^3 \cos^2 \alpha \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \\ *d\alpha &= -r \cos^2 \alpha \cos \beta d\beta \wedge d\gamma \wedge dr \\ *d\beta &= r \cos \beta d\gamma \wedge dr \wedge d\alpha \\ *d\gamma &= -\frac{r}{\cos \beta} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\ *dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma &= \frac{1}{r^3 \cos^2 \alpha \cos \beta}.\end{aligned}$$

Mamy

$$dF = \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial F}{\partial \gamma} d\gamma.$$

Przeto

$$\begin{aligned} *dF = & \frac{\partial F}{\partial r} r^3 \cos^2 \alpha \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma - \\ & - \frac{\partial F}{\partial \alpha} r \cos^2 \alpha \cos \beta d\beta \wedge d\gamma \wedge dr + \\ & + \frac{\partial F}{\partial \beta} r \cos \beta d\gamma \wedge dr \wedge d\alpha - \\ & - \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{r}{\cos \beta} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Obliczenie $d * dF$ jest *de facto* jedynym miejscem, gdzie pojawiają się nieco bardziej złożone rachunki.

$$\begin{aligned} d * dF = & \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} r^3 \cos^2 \alpha \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial r} 3r^2 \cos^2 \alpha \cos \beta + \right. \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} r \cos^2 \alpha \cos \beta - \frac{\partial F}{\partial \alpha} 2r \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta + \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} r \cos \beta - \frac{\partial F}{\partial \beta} r \sin \beta + \\ & \left. + \frac{r}{\cos \beta} \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} \right] dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma. \end{aligned}$$

Stąd uzyskujemy

$$\begin{aligned} \Delta F = *d * dF = & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \frac{\partial F}{\partial \gamma^2} \\ & + \frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{-\operatorname{tg} \beta}{r^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

◇

Uwaga 3. Powyższa metoda jest skuteczna, dzięki temu, że macierz DF pochodnej zamiany zmiennych $(r, \alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{F} (x, y, z, u)$ ma taką własność, że $DF \cdot DF^T$ jest diagonalna. Dzięki temu wektory $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial}{\partial \beta}$ i $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ były ortogonalne i gwiazdka Hodge'a miała stosunkowo prostą postać.

Zadanie 2.22. Niech $R > r_0 > 0$. Udowodnić, że wzór

$$\begin{aligned} x &= (R + r \cos \phi) \cos \theta \\ y &= (R + r \cos \phi) \sin \theta \\ z &= r \sin \phi \end{aligned}$$

dla $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$ oraz r bliskich r_0 zadaje lokalny układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ w otoczeniu torusa $\{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r_0^2)^2 + 4R^2 z^2 = 4r_0^2 R^2\}$. Wyrazić Δf we współrzędnych r, ϕ, θ .

2.2.2 Funkcje Greena

Zadanie 2.23. Wyznaczyć funkcję Greena z warunkami brzegowymi Dirichleta dla obszaru

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}.$$

Rozwiązanie. Jeśli położymy $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi}|x - y|^{-1}$ (funkcja Greena dla $\mathbb{R}^3$), nie będzie spełniony warunek, żeby Φ zniknęła dla $y_1 = 0$. Z pomocą przychodzi nam interpretacja fizyczna, jako potencjału. Sugeruje to, że trzeba dołożyć gdzieś w $\mathbb{R}^3$ taki ładunek, aby zrównoważyć potencjał na płaszczyźnie $y_1 = 0$. To jest bardzo proste: musimy umieścić go symetrycznie po drugiej stronie płaszczyzny i dać mu znak przeciwny. Powyższe rozważania sugerują (ale nie dowodzą), że funkcja

$$G(x, y) = \Phi((x_1, x_2, x_3), y) - \Phi((-x_1, x_2, x_3), y).$$

powinna być funkcją Greena dla półpłaszczyzny. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że tak jest w istocie. $\diamond$

Zadanie 2.24. Znaleźć funkcję Greena z warunkami brzegowymi Dirichleta dla koła $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie. Spróbujemy postąpić podobnie, tzn. umieścić symetrycznie drugi ładunek tak, aby się zniosły na brzegu koła. Tutaj symetrią będzie inwersja względem koła, a więc przekształcenie

$$x \rightarrow i(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Pokazanie, że ta metoda działa, wymaga trochę pracy. Zauważmy, że jeśli $\Phi(x, y)$ jest funkcją Greena dla $\mathbb{R}^n$, to funkcja

$$\tilde{\Phi}(x, y) = \Phi(|x|i(x), |x|y)$$

naład jest harmoniczna względem y . Łatwo sprawdzić, że dla $|x| = 1$ obie funkcje się pokrywają, zatem

$$G(x, y) = \Phi(x, y) - \tilde{\Phi}(x, y)$$

jest szukaną funkcją Greena. $\diamond$

Zadanie 2.25. Wyprowadzić następujący wzór Poissona dla koła jednostkowego $B(0, 1)$ w $\mathbb{R}^2$:

$$u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + x}{e^{it} - x} \right) f(e^{it}) dt, \quad (2.5)$$

gdzie $x \in B(0, 1)$, $\Delta u = 0$ w kole $B(0, 1)$, a $f = u|_{\partial B(0,1)}$ jest warunkiem brzegowym.

Rozwiązanie. Jako, że całka po prawej stronie jest równa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S(0,1)} \operatorname{Re} \left(\frac{y + x}{y - x} \right) f(y) dy,$$

wystarczy pokazać, że pochodna normalna funkcji Greena dla okręgu jest równa

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{y+x}{y-x} \right),$$

gdzie dzielenie rozumiemy w sensie dzielenia liczb zespolonych. Teraz zauważmy, że zgodnie z Zadaniem 2.24 funkcja Greena jest równa

$$\frac{1}{2\pi} (-\ln|x-y| + \ln|\frac{x}{|x|^2} - y| - \ln|x|),$$

przy czym ostatni wyraz zeruje się przy różniczkowaniu po y . Przy ustalonym u pochodna w kierunku normalnym funkcji $\ln|u-y|$, dla $|y|=1$ jest równa

$$\frac{(u_1 - y_1)y_1 + (u_2 - y_2)y_2}{|u - y|}.$$

Stąd pochodna funkcji Greena dla $y \in S^1$ w kierunku normalnym jest równa

$$\frac{(y_1 - x_1)y_1 + (y_2 - x_2)y_2}{|x - y|^2} - \frac{(y_1 - \frac{x_1}{|x|^2})y_1 + (y_2 - \frac{x_2}{|x|^2})y_2}{|\frac{x}{|x|^2} - y|^2},$$

gdzie piszemy $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$. Skoro $|y|=1$, to $|y-x| = |y - \frac{x}{|x|^2}| \cdot |x|$. Tak więc powyższy wzór sprowadza się do

$$\begin{aligned} & \frac{(y_1 - x_1)y_1 + (y_2 - x_2)y_2 - (|x|^2 y_1 - x_1)y_1 - (|x|^2 y_2 - x_2)y_2}{|y - x|^2} = \\ & = \frac{(y_1^2 + y_2^2)(1 - |x|^2)}{|y - x|^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Skoro $y_1^2 + y_2^2 = 1$, mamy $y = y_1 + iy_2$, $x = x_1 + ix_2$. Tak więc

$$|y|^2(1 - |x|^2) = |y|^2 - |x|^2 = \operatorname{Re}(y+x)(\bar{y} - \bar{x}).$$

Czyli (2.6) staje się

$$\operatorname{Re} \frac{y+x}{y-x}.$$

◇

Zadanie 2.26. Znaleźć funkcję Greena dla obszaru $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, 0 < x_1 < 1\}$.

Zadanie 2.27. Znaleźć funkcję Greena dla wycinka płaszczyzny:

$$\{(x_1, x_2): x_2 > 0, x_1 > 0, x_1 < \alpha x_2\},$$

gdzie $\alpha = \tan \frac{\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.28. Wykazać, że funkcja Greena $G(x, y)$ dla ćwiartki półpłaszczyzny dąży do zera przy $\|y\| \rightarrow \infty$ niemal jednostajnie po x .

Zadanie 2.29. Znaleźć funkcję Greena dla warunków von Neumanna (tzn. $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ na brzegu obszaru) dla wycinka płaszczyzny: $\{(x_1, x_2): x_2 > 0, x_1 > 0, x_1 < \beta x_2\}$, gdzie $\beta = \tan \frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.30. Znaleźć funkcję Greena dla zbioru $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$, gdzie B jest dyskiem o promieniu 1. Wykaż, że znika ona w nieskończoności.

Zadanie 2.31. Znaleźć funkcję Greena dla obszaru $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 0 < x_1 < 1\}$.

Zadanie 2.32. Znaleźć funkcję Greena dla wycinka płaszczyzny:

$$\{(x_1, x_2): x_2 > 0, x_1 > 0, x_1 < \alpha x_2\},$$

gdzie $0 < \alpha < \infty$. To zadanie jest istotnie trudniejsze, niż zadanie 2.27.

Zadanie 2.33. Znaleźć funkcję Greena dla pierścienia $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 1/4 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Zadanie 2.34. Znaleźć rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji Greena dla kwadratu. Sprawdzić, że należy ona do L^2 . Z badać, dla jakich n funkcja Greena dla n -wymiarowego sześciangu należy do L^2 .

2.2.3 Funkcje harmoniczne i funkcje holomorficzne

Zadanie 2.35. Udowodnić równoważność warunków w Definicji 2.6

Zadanie 2.36. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, zaś $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją klasy C^2 . Przypuśćmy, że $\Delta f = 0$ oraz $\Delta(f^2) = 0$. Wykazać, że f albo $\bar{f}$ jest holomorficzna.

Zadanie 2.37. Korzystając z twierdzenia Stokesa udowodnić uproszczone twierdzenie całkowe Cauchy'ego dla funkcji $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Rozwiązanie. Ustalmy punkt z_0 oraz $\varepsilon > 0$ dostatecznie małe. Niech $\Omega = B(z_0, r) \setminus B(z_0, \varepsilon)$. Oczywiście $\Omega \subset U$ (stosujemy oznaczenia z Lematu 3). Niech $\omega = \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Jako, że funkcja $\frac{f(z)}{z - z_0}$ jest holomorficzna na Ω jako iloraz dwóch funkcji holomorficznych, forma ω jest zamknięta na Ω , a więc z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = 0.$$

Zauważmy, że $\partial\Omega = \partial B(z_0, r) \cup -\partial B(z_0, \varepsilon)$, gdzie $-$ oznacza, że bierzemy brzeg przeciwnie zorientowany. A zatem.

$$\int_{\partial B(z_0, r)} \omega = \int_{\partial B(z_0, \varepsilon)} \omega.$$

Pozostaje wyszacować ostatnią całkę.

Z ciągłości f w punkcie z_0 dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje takie $\varepsilon > 0$, że jeśli $|z - z_0| \leq \varepsilon$, to $|f(z) - f(z_0)| < \delta$. Stąd

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{B(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &\leq \int_{\partial B(z_0, \varepsilon)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} d\sigma \\ &\leq \int_{\partial B(z_0, \varepsilon)} \frac{\delta}{\varepsilon} \\ &= 2\pi\varepsilon \frac{\delta}{\varepsilon} = 2\pi\delta, \end{aligned}$$

gdzie w pierwszej nierówności wykorzystaliśmy znany fakt, iż $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| d\sigma$. $\diamond$

Zadanie 2.38. Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Niech $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $h(z) = \log |z|$.

- (a) Wykazać, że h jest harmoniczna.
- (b) Wykazać, że h nie jest częścią rzeczywistą żadnej funkcji holomorficzej na Ω .

Zadanie 2.39. Wyprowadzić twierdzenie o wartości średniej dla funkcji harmonicznych w $\mathbb{R}^2$ korzystając z analogicznego rezultatu dla funkcji holomorficzych.

Zadanie 2.40. Wyprowadzić wzór Poissona dla koła (patrz Zadanie 2.24) korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego.

Zadanie 2.41. Niech $g(\phi) : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją klasy L^2 . Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- (a) rozwinięcie Fouriera funkcji g zawiera wyłącznie dodatnie wyrazy, to znaczy dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq 0$ zachodzi równość

$$\int_{S^1} g(\phi) \phi^m d\phi = 0$$

- (b) istnieje taka funkcja holomorficzna $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, że $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\phi}) = g(\phi)$.

Wskazówka: rozważ funkcje harmoniczne h_1 i h_2 z $B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że h_1 (odpowiednio h_2) na brzegu $C(0, 1)$ są równe odpowiednio $\operatorname{Re} g$ i $\operatorname{Im} g$. Napisz równanie Cauchy'ego–Riemanna dla $h_1 + ih_2$.

2.2.4 Funkcje subharmoniczne. Zadania.

Zadanie 2.42. Udowodnić, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, zaś $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją półciągłą z góry, to istnieje ciąg f_j funkcji ciągłych na Ω , ograniczonych z góry, monotonicznie malejących i punktowo zbieżnych do f (jeśli w jakimś punkcie x_0 , $f(x_0) = -\infty$, to wymagamy, żeby $f_j(x_0) \rightarrow -\infty$).

Wskazówka: Rozważyć funkcje $f_j(x) = \sup_{y \in \Omega} f(y) - j|x - y|$ dla $j = 1, 2, \dots$

Zadanie 2.43. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie półciągłą z góry, zaś $K \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym. Wykazać, że f przyjmuje kres górny na K , tzn. istnieje $x_0 \in K$ takie, że $f(x_0) \geq f(x)$ dla wszystkich $x \in K$, natomiast nie musi przyjmować swojego kresu dolnego na K .

Zadanie 2.44. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ będzie półciągłą z góry. Wykazać, że f jest subharmoniczną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \Omega$ i każdego $r > 0$ zachodzi

$$f(x) \leq \frac{\int_{B(x,r)} f(y) dy}{\int_{B(x,r)} dy}.$$

Zadanie 2.45. Udowodnić, że funkcja subharmoniczna nie ma lokalnych maksimumów.

Zadanie 2.46. Niech f i g będą funkcjami subharmonicznymi na $\mathbb{R}^2$. Czy z tego wynika, że funkcje $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ są subharmoniczne?

Zadanie 2.47. Udowodnić, że funkcja $(x, y) \mapsto \log(x^2 + y^2)$ jest subharmoniczną.

Zadanie 2.48. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie subharmoniczną, zaś $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wypukłą i rosnącą. Wykazać, że $\phi \circ f$ jest subharmoniczną.

Zadanie 2.49. Niech $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$, zaś $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie subharmoniczną. Wykazać, że jest wypukłą.

Zadanie 2.50. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ będzie subharmoniczną. Wykazać, że zbiór $E = \{x: f(x) = -\infty\}$ jest otwarty.

Zadanie 2.51. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie subharmoniczną i klasy C^2 . Wykazać, że $\Delta f \geq 0$.

Zadanie 2.52. Wykaż, że granica punktowa monotonicznie malejącego ciągu funkcji subharmonicznych jest subharmoniczną.

Zadanie 2.53. Niech $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wykazać, że dla wszystkich $p \geq 1$, funkcja $|f|^p$ jest subharmoniczną.

Rozdział 3

Transformata Fouriera i jej zastosowania w równaniach cząstkowych

Niezwykle użytecznym narzędziem w badaniu równań różniczkowych jest transformata Fouriera. Pozwala ona sprowadzić rozwiązywanie równań cząstkowych do rozwiązywania równań algebraicznych bądź też równań różniczkowych zwyczajnych. Dobrym źródłem informacji o transformacie Fouriera jest np. książka Rudina [19]. W książkach Evansa [8] i Taylora [24] znaleźć można informacje o zastosowaniach transformaty w równaniach różniczkowych.

3.1 Przestrzeń Schwartza

Definicja 3.1. Niech f będzie funkcją gładką na $\mathbb{R}^n$ o wartościach zespolonych. Mówimy, że f jest funkcją *szybko malejącą* na $\mathbb{R}^n$ jeśli dla dowolnych wielowskaźników α, β

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

Przestrzeń funkcji szybko malejących na $\mathbb{R}^n$ nazywamy *przestrzenią Schwartza* i oznaczamy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}_n$ lub po prostu $\mathcal{S}$.

Ponieważ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ prawdziwa jest nierówność

$$C^{-1}(1 + |x|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |x^\alpha|^2 \leq C(1 + |x|^2)^m, \quad (3.1)$$

dla pewnej stałej $C > 0$ zależnej jedynie od n oraz m , można równoważnie powiedzieć, że $f \in \mathcal{S}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P \cdot D^\beta f$ jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}^n$ dla każdego wielomianu P i każdego wielowskaźnika β . Oznacza to w szczególności, że jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to wszystkie pochodne $D^\alpha f$ dążą do zera przy $|x| \rightarrow \infty$. Stąd określenie *funkcje szybko malejące*.

Topologia przestrzeni $\mathcal{S}$ jest wyznaczona przez rodzinę półnorm

$$p_k(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{k/2} |D^\alpha f(x)| \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Przyjmując w $\mathcal{S}$ funkcję odległości

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(f - g)}{1 + p_k(f - g)}, \quad (3.2)$$

uzyskujemy przestrzeń metryczną zupełną. Przestrzeń $\mathcal{S}$ z tak zdefiniowaną topologią jest przestrzenią Frécheta. Przestrzeń $\mathcal{S}$ jest także gęstą podprzestrzenią przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$ (wynika to np. z gęstości $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ w $L^2(\mathbb{R}^n)$).

3.2 Transformata Fouriera

Definicja 3.2. Niech $f \in \mathcal{S}$. *Transformatą Fouriera* funkcji f nazywamy funkcję określoną wzorem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Uwaga 3.1. W literaturze matematycznej spotyka się także inne definicje transformaty Fouriera. Dwie najbardziej popularne to:

$$\mathcal{F}_1(f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}^n$$

oraz

$$\mathcal{F}_2(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

To, którą definicję przyjmujemy, jest kwestią jej późniejszych zastosowań, wygody oraz osobistych upodobań. W literaturze spotyka się także określenie *transformacja Fouriera* na oznaczenie odwzorowania, które funkcji f przyporządkowuje funkcję $\hat{f}$.

Zauważmy, że powyższa definicja ma sens, gdy o funkcji f założymy jedynie, iż jest ona funkcją całkowalną, tzn. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 3.1. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$u(x) = e^{-\epsilon|x|^2}.$$

Rozwiązanie. Rozpatrzmy najpierw przypadek $\epsilon = \frac{1}{2}$ oraz $n = 1$. Mamy wówczas

$$\phi(\xi) := \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}.$$

Różniczkując funkcję ϕ , dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi}(\xi) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(-2\pi i x \xi) dx \\ &= 2\pi i \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'_x e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= -(2\pi)^2 \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= -(2\pi)^2 \xi \phi(\xi). \end{aligned}$$

Ponadto wiemy, że

$$\phi(0) = \sqrt{2\pi}.$$

Jedyną funkcją spełniającą powyższe warunki jest funkcja

$$\phi(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 \xi^2}.$$

Obliczyliśmy zatem transformatę Fouriera gęstości rozkładu normalnego w przypadku jednowymiarowym, dla $\epsilon = \frac{1}{2}$. W przypadku $n \geq 2$ korzystamy z twierdzenia Fubiniego i otrzymujemy

$$\mathcal{F}(\exp(-\frac{|x|^2}{2}))(\xi) = \phi(\xi_1) \cdots \phi(\xi_n) = (2\pi)^{n/2} e^{-2\pi^2 |\xi|^2}.$$

Dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\exp(-\epsilon|x|^2))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= (2\epsilon)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-2\pi i y \cdot \xi / \sqrt{2\epsilon}} dy \\ &= (\pi/\epsilon)^{n/2} e^{-\pi^2 |\xi|^2 / \epsilon}. \end{aligned}$$

Zatem transformatą Fouriera funkcji gęstości rozkładu normalnego jest również funkcja gęstości rozkładu normalnego, tyle że przeskalowanego. $\diamond$

3.3 Własności transformaty Fouriera

Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} e_x(y) &:= e^{2\pi i x \cdot y} = \exp\{2\pi i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)\} \\ \tau_x f(y) &:= f(y - x). \end{aligned}$$

Łatwo jest sprawdzić, wykonując proste rachunki i stosując twierdzenie Fubiniego, następujące algebraiczne własności transformaty Fouriera:

Twierdzenie 3.1. Niech $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$.

- (a) $\widehat{(\tau_x f)}(\xi) = e_{-x}(\xi) \hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi);$
- (b) $\widehat{(e_x f)}(\xi) = \tau_x \hat{f}(\xi);$
- (c) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$
- (d) Jeśli $\lambda > 0$ oraz $h(x) = f(x/\lambda)$, to $\hat{h}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda \xi).$

Również nietrudno jest wykazać własności transformaty Fouriera na przestrzeni $\mathcal{S}$:

Twierdzenie 3.2. (a) Jeśli P jest wielomianem, $g \in \mathcal{S}$ oraz α jest wielowskazanikiem, to każde z następujących odwzorowań:

$$f \mapsto Pf, \quad f \mapsto gf, \quad f \mapsto D^\alpha f$$

jest ciągłym odwzorowaniem liniowym $\mathcal{S}$ w $\mathcal{S}$.

(b) Jeśli $f \in \mathcal{S}$, to $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz

$$\begin{aligned} D^\alpha \hat{f}(\xi) &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi), \\ \mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(c) Jeśli $f, g \in \mathcal{S}$, to

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

(d) Transformacja Fouriera

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{F}(f) &= \hat{f} \end{aligned}$$

jest ciągłym odwzorowaniem liniowym.

Niech $f \in \mathcal{S}$; przyjmijmy

$$g(x) = e^{-\epsilon|x|^2}.$$

Transformata tej funkcji, obliczona powyżej, wynosi

$$\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{n/2} e^{-\pi^2|\xi|^2/\epsilon}.$$

Wstawiając te funkcje do równości z punktu (c) powyższego twierdzenia dostajemy

$$\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\pi^2|x|^2/\epsilon} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-\epsilon|x|^2} dx.$$

Dokonując po lewej stronie powyższej równości podstawienia $x \mapsto \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}} x$ i przechodząc po obu stronach z ϵ do zera (możemy to zrobić korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej) otrzymujemy

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Wykorzystując twierdzenie 3.1 punkt (a) dostajemy ostatecznie

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad \text{dla } f \in \mathcal{S}.$$

Definicja 3.3. Niech $f \in \mathcal{S}$. Odwrotną transformatą Fouriera funkcji f nazywamy funkcję określoną wzorem

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\xi \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

3.4 Wzór Parsevala i twierdzenie Plancherela

Zauważmy, że

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x),$$

zatem, z dokładnością do złożenia z symetrią względem początku układu współrzędnych, transformata Fouriera jest równa swojej odwrotności na przestrzeni $\mathcal{S}$. W szczególności więc transformata Fouriera jest bijekcją przestrzeni $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$. Zauważmy również, że biorąc sprzężenie zespolone transformaty Fouriera dostajemy

$$\overline{\hat{f}} = \check{f}.$$

Korzystając z punktu (c) twierdzenia 3.2 otrzymujemy tak zwaną *tożsamość Parsevala*:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{dla } u, v \in \mathcal{S}. \quad (3.5)$$

Wynika z niej, że transformata Fouriera jest nie tylko bijekcją, ale też zadaje izometrię (względem iloczynu skalarnego z L^2) na przestrzeni $\mathcal{S}$. Ponieważ przestrzeń $\mathcal{S}$ jest gęsta w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$, transformację Fouriera można jednoznacznie rozszerzyć do izometrii na całym $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Twierdzenie 3.3 (Twierdzenie Plancherela). *Istnieje izometria liniowa T przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$ na przestrzeń $L^2(\mathbb{R}^n)$, która jest jednoznacznie wyznaczona przez warunek*

$$Tf = \hat{f}, \quad \text{dla każdego } f \in \mathcal{S}.$$

Ponadto wzór Parsevala (3.5) jest prawdziwy dla dowolnych u i v z $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.5 Przykłady zastosowań

Zadanie 3.2. Znaleźć wzór na rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{w } \mathbb{R}_+^2 = (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) \\ u(x, y) &\rightarrow 0 \quad \text{dla } \|(x, y)\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Ustalmy na chwilę $y > 0$. Przykładamy do funkcji u transformatę Fouriera względem zmiennej x , dostając

$$\hat{u}(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} u(x, y) dx.$$

Wykorzystując własności transformaty Fouriera, opisane w Twierdzeniu 3.2, przekształcamy zagadnienie do postaci

$$\begin{aligned} -(2\pi\xi)^2 \hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) &= 0 \quad \text{dla } (\xi, y) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \hat{u}(\xi, y) &= \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Ustalmy teraz $\xi \in \mathbb{R}$ i oznaczmy

$$f(y) = \hat{u}(\xi, y).$$

Funkcja f spełnia wówczas równanie zwyczajne

$$f''(y) = (2\pi\xi)^2 f(y)$$

z warunkiem początkowym

$$f(0) = \hat{g}(\xi).$$

Uwzględniając warunek, że funkcja u zanika w nieskończoności otrzymujemy

$$f(y) = \hat{u}(\xi, y) = \hat{g}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y} \quad \text{dla } y > 0.$$

Aby wyznaczyć funkcję u , przykładamy odwrotną transformatę Fouriera (względem zmiennej ξ):

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left(\hat{g}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y} \right) (x, y) = g * \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-2\pi|\xi|y} \right) (x, y).$$

Pamiętajmy o tym, że spłot bierzemy tylko względem pierwszej zmiennej. Musimy obliczyć transformatę odwrotną funkcji $e^{-|\xi|y}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-2\pi|\xi|y} \right) (x, y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} e^{-2\pi|\xi|y} d\xi \\ &= \left[\int_0^\infty e^{2\pi(ix-y)\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi(ix+y)\xi} d\xi \right] \\ &= \left[\frac{1}{2\pi(y-ix)} + \frac{1}{2\pi(y+ix)} \right] \\ &= \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Wzór na rozwiązanie naszego zagadnienia ma zatem postać

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{(x-z)^2 + y^2} dz.$$

Jest to wynik zgodny z wcześniejszymi rozważaniami dotyczącymi funkcji harmonicznych — to samo rozwiązanie otrzymujemy obliczając funkcję Greena dla półpłaszczyzny. Zauważmy przy okazji, że to, że powyższy wzór określa rzeczywiście rozwiązanie podanego zagadnienia, w szczególności, że funkcja u spełnia warunek brzegowy, nie jest na pierwszy rzut oka oczywiste.

Ten problem jest dokładniej dyskutowany przy omawianiu funkcji Greena. $\diamond$

Zadanie 3.3. Znaleźć wzór na rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równania ciepła

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{w } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= g(x) \quad g \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Ustalmy na chwilę $t \in (0, \infty)$. Przykładając do funkcji u transformatę Fouriera względem zmiennej przestrzennej x i wykorzystując Twierdzenie 3.2, otrzymujemy zagadnienie

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}}{dt}(t, \xi) + (2\pi\xi)^2 \hat{u}(t, \xi) &= 0 \\ \hat{u}(0, \xi) &= \hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$f(t) = \hat{u}(t, \xi) \quad \text{dla } t \in [0, \infty).$$

Funkcja f spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$f'(t) = -(2\pi\xi)^2 f(t)$$

z warunkiem początkowym

$$f(0) = \hat{g}(\xi).$$

Dostajemy zatem

$$\hat{u}(t, \xi) = f(t) = \hat{g}(\xi)e^{-4\pi^2 t \xi^2}.$$

Aby wyznaczyć funkcję u , przykładamy odwrotną transformatę Fouriera — znowu tylko względem zmiennej przestrzennej x — traktując t jako ustalone. Korzystamy przy tym z własności (c) podanej w Twierdzeniu 3.2:

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi)e^{-4\pi^2 t \xi^2}\right) = g * F(t, x),$$

gdzie

$$\begin{aligned}F(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 t \xi^2}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 t \xi^2} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 t \xi^2} d\xi \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.\end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy wzór na rozwiązanie postaci

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) g(y) dy,$$

czyli splot z rozwiązaniem podstawowym dla równania ciepła. $\diamond$

3.6 Zadania

Zadanie 3.4. Sprawdzić, że wzór (3.2) rzeczywiście określa metrykę w przestrzeni Schwartz.

Zadanie 3.5. Wykazać, że jeśli $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to ich iloczyn też należy do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 3.6. Wykazać, że jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$, zaś $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$, to $\hat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$.

Zadanie 3.7. Załóżmy, że $D^\lambda \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dla każdego λ , takiego że $|\lambda| = k$. Wykazać, że $(1 + |\xi|^k) \hat{\phi}(\xi)$ jest funkcją ograniczoną.

Zadanie 3.8. Załóżmy, że $f \in L^2(\mathbb{R})$. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$g(x) = f(x)e^{-2\pi i x a},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.9. Załóżmy, że A jest macierzą symetryczną $n \times n$ i nieosobliwą. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = e^{-Ax \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $a \cdot b$ oznacza iloczyn skalarny wektorów a i b .

Zadanie 3.10. Rozważmy równanie

$$-u_{xx} + u_{yyyy} + u = f \quad \text{w } \mathbb{R}^2.$$

Wykazać, że jeśli $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, to całkowalne z kwadratem są też funkcje u , u_x , u_y , u_{xy} .

Zadanie 3.11. Załóżmy, że $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Znaleźć wzór na rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zadanie 3.12. Załóżmy, że $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Znaleźć wzór na rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Wykazać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|u(\cdot, t)\|_2 \leq Ce^{-t}.$$

Transformata Fouriera jako narzędzie pomocne przy rozwiązywaniu pojawia się w zadaniach w rozdziałach 4 oraz 5. Zadania ilustrujące zastosowania transformaty Fouriera do równania falowego, a także szacowania tempa gaśnięcia rozwiązań, gdy w równaniu występuje składnik odpowiadający z fizycznego punktu widzenia tłumieniu, można znaleźć w podrozdziale 15.4.

Rozdział 4

Wstęp do teorii dystrybucji

Teoria dystrybucji jest ważnym działem analizy funkcjonalnej i stanowi ważne narzędzie w równaniach różniczkowych. Niestety, semestralny wykład z równań cząstkowych nie pozwala na dokładne omówienie tego tematu; czasem zresztą bywa on pomijany przez niektórych wykładowców, którzy wolą skupić uwagę na innych ważnych zagadnieniach teorii równań różniczkowych. Studentów zainteresowanych teorią dystrybucji odsyłamy do książki Rudina [19]. Zastosowania w równaniach różniczkowych są omówione np. w książce Taylora [24] (tom I). Zawarty poniżej materiał teoretyczny zawiera tylko niektóre elementy teorii dystrybucji.

4.1 Dystrybucje

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. W przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ funkcji gładkich o zwartym nośniku zdefiniujemy pojęcie zbieżności w trochę mocniejszy sposób niż standardowo, tzn. przyjmijmy, że ciąg $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ jest zbieżny do funkcji granicznej $f \in C_0^\infty(\Omega)$, jeśli:

- istnieje zwarty podzbiór $K \subset \Omega$ taki, że

$$\text{supp } f_n \subset K \quad \text{dla każdego } n;$$

oraz

- dla dowolnego wielowskaźnika α

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha(f_n) - D^\alpha(f)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Definicja 4.1. Przestrzenią *funkcji próbnych* nazywamy przestrzeń liniową $C_0^\infty(\Omega)$ z topologią wyznaczoną przez zdefiniowane wyżej pojęcie zbieżności. Oznaczamy ją $\mathcal{D}$ lub $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definicja 4.2. *Dystrybucją* nazywamy funkcjonal liniowy ciągły na $\mathcal{D}$. Przestrzeń dystrybucji oznaczamy $\mathcal{D}'$. Działanie dystrybucji na funkcję próbną w sposób standardowy oznaczamy jako

$$w(\phi) = \langle w, \phi \rangle \quad \text{dla } w \in \mathcal{D}' \text{ oraz } \phi \in \mathcal{D}.$$

Zauważmy, że każda funkcja lokalnie całkowalna $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ zadaje funkcjonal na przestrzeni funkcji próbnych:

$$\langle g, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \phi(x) dx \quad \text{dla } \phi \in \mathcal{D}.$$

Dystrybucję zadaną w ten sposób nazywamy *dystrybucją regularną*. Będziemy utożsamiać funkcję g z zadanym przez nią funkcjonalem.

Dystrybucje możemy mnożyć przez funkcje gładkie. Iloczyn funkcji $f \in \mathbb{C}^\infty$ i dystrybucji $w \in \mathcal{D}'$ definiujemy jako

$$\langle fw, \phi \rangle = \langle w, f\phi \rangle$$

dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathcal{D}$.

4.2 Pochodne dystrybucyjne

Na przestrzeni $\mathcal{D}'$ możemy zdefiniować operator różniczkowania

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

w sposób następujący:

$$\langle D^\alpha w, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle w, D^\alpha f \rangle \quad \text{dla } w \in \mathcal{D}' \text{ oraz } f \in \mathcal{D}.$$

Przestrzeń funkcji próbnych w naturalny sposób wkłada się w przestrzeń dystrybucji (gdyż każda funkcja próbna jest lokalnie całkowalna). Całkując przez części łatwo sprawdzić, że włożenie

$$j : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$$

spełnia zależność

$$j(D^\alpha f) = D^\alpha j(f) \quad \text{dla } f \in \mathcal{D}.$$

Widzimy zatem, że operacja różniczkowania zdefiniowana na przestrzeni dystrybucji jest istotnym rozszerzeniem klasycznego różniczkowania. Ten fakt uzasadnia wprowadzenie pojęcia tzw. pochodnej dystrybucyjnej.

Definicja 4.3. Niech g będzie funkcją lokalnie całkowalną. Funkcjonał $D^\alpha g \in \mathcal{D}'$ zdefiniowany jako

$$\langle D^\alpha g, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle g, D^\alpha f \rangle \quad \text{dla } f \in \mathcal{D}$$

nazywamy *pochodną dystrybucyjną* funkcji g .

4.3 Dystrybucje temperowane

W rozdziale 3 wprowadziliśmy pojęcie przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}$. Rozważmy teraz funkcjonal liniowy ciągły

$$w : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ciągłość w tym wypadku oznacza, że istnieją $m \geq 0$ oraz $C \geq 0$ takie, że

$$w(f) \leq Cp_m(f) \quad \text{dla każdego } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

gdzie

$$p_m(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{m/2} |D^\alpha f(x)| \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

jest rodziną półnorm zadających topologię przestrzeni $\mathcal{S}$.

Definicja 4.4. Funkcjonal liniowy ciągły na przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}$ nazywamy *dystrybucją temperowaną*. Przestrzeń wszystkich dystrybucji temperowanych oznaczamy $\mathcal{S}'$. Używane jest czasami określenie *dystrybucje wolno rosnące*.

Zauważmy, że zachodzi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ oraz $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Przestrzeń $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $p \in [1, \infty]$ wkłada się w naturalny sposób w przestrzeń $\mathcal{S}'$:

$$\langle w, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x) dx \quad \text{dla } w \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ oraz } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Oczywiście $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, więc wzór ten daje w szczególności włożenie $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}'$. Podobnie każda miara skończona na $\mathbb{R}^n$ definiuje dystrybucję temperowaną, przykładem może tu być delta Diraca δ :

$$\langle \delta, f \rangle = f(0).$$

Transformację Fouriera zdefiniowaną na przestrzeni $\mathcal{S}$ możemy uogólnić na przestrzeń dystrybucji temperowanych $\mathcal{S}'$.

Definicja 4.5. Niech $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Funkcjonal $\hat{w} = \mathcal{F}(w) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *transformatą Fouriera* dystrybucji w , jeśli

$$\langle \mathcal{F}(w), f \rangle := \langle w, \mathcal{F}(f) \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Transformacja Fouriera przekształca $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}'$. To, że powyższa definicja jest rzeczywiście rozszerzeniem pojęcia transformaty Fouriera, tzn. że na dystrybucjach pochodzących z włożenia $j : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}'$ mamy $\mathcal{F}(j(f)) = j(\mathcal{F}(f))$ wynika z punktu (c) twierdzenia 3.2.

4.4 Sploty

Niech τ_x oznacza operator przesunięcia

$$\tau_x \phi(y) = \phi(y - x),$$

oraz niech

$$\tilde{f}(x) = f(-x).$$

Jeśli $f \in \mathcal{S}$ a $w \in \mathcal{S}'$, to splot funkcji f z dystrybucją w definiujemy jako funkcję

$$(f * w)(x) = \langle w, \tau_x \tilde{f} \rangle \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Tak zdefiniowany splot jest funkcją gładką oraz zachodzi

$$D^\alpha(f * w) = (D^\alpha f) * w = f * (D^\alpha w).$$

Okazuje się ponadto, że

$$f * w \in \mathcal{S}' \quad \text{dla } f \in \mathcal{S} \text{ oraz } w \in \mathcal{S}'.$$

Własności transformaty Fouriera opisane w rozdziale 3 (Twierdzenie 3.1) rozszerzają się na tak zdefiniowany splot i mamy w szczególności

$$\mathcal{F}(f * w) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(w) \quad \text{dla } f \in \mathcal{D} \text{ oraz } w \in \mathcal{S}'.$$

4.5 Rozwiązanie podstawowe

Niech P będzie wielomianem n zmiennych, niezerowego stopnia. Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe liniowe o stałych współczynnikach

$$P(D)u = v, \tag{4.1}$$

Definicja 4.6. *Rozwiązaniem podstawowym równania (4.1) nazywamy dystrybucję $E \in \mathcal{D}'$, spełniającą warunek*

$$P(D)E = \delta. \tag{4.2}$$

Znaczenie pojęcia rozwiązania podstawowego wynika z następującego faktu: jeśli E jest rozwiązaniem podstawowym równania (4.2) i v ma nośnik zwarty, to $u = E * v$ jest rozwiązaniem równania (4.1) (patrz zadanie 4.4).

4.6 Rozwiązania przykładowych zadań.

Zadanie 4.1. Wykazać, że δ Diraca jest dystrybucją oraz dystrybucją temperowaną.

Rozwiązanie. Niech $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Delta Diraca działa na ϕ w następujący sposób: $\delta(\phi) := \phi(0)$. Widać, że zadany jest funkcjonał liniowy.

Z drugiej strony, jeśli $\phi_n \rightarrow \phi$ w $\mathcal{D}$, to w szczególności $\phi_n(0) \rightarrow \phi(0)$, co dowodzi, że $\delta \in \mathcal{D}'$. Podobnie, zbieżność w $\mathcal{S}$ implikuje zbieżność punktową, zatem $\delta \in \mathcal{S}'$. $\diamond$

Zadanie 4.2. Obliczyć transformatę Fouriera delty Diraca.

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją 4.5 dla $\phi \in \mathcal{S}$ mamy

$$\langle \mathcal{F}(\delta), \phi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle.$$

Stąd $\hat{\delta} \equiv 1$. $\diamond$

Zadanie 4.3. Obliczyć pochodną dystrybucyjną tzw. *funkcji Heaviside'a*,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją pochodnej dystrybucyjnej, wobec faktu, że H jest funkcją lokalnie całkowalną, dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathcal{D}$ mamy

$$H'(\phi) = - \int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0).$$

Zatem słaba pochodna funkcji Heaviside'a jest równa delcie Diraca, δ . $\diamond$

Zadanie 4.4. Wykazać, że jeśli E jest rozwiązaniem podstawowym (4.2), a v ma nośnik zwarty, to $u = E * v$ jest rozwiązaniem równania (4.1).

Rozwiązanie. Dla v o nośniku zwartym splot $v * E$ jest zdefiniowany. Ponadto

$$D^\alpha(v * E) = v * D^\alpha(E),$$

zatem

$$P(D)(v * E) = v * P(D)(E) = v * \delta.$$

Ponieważ $\delta \in \mathcal{S}'$, to

$$\mathcal{F}(v * \delta) = \mathcal{F}(v)\mathcal{F}(\delta).$$

Wykazaliśmy wcześniej, że

$$\mathcal{F}(\delta) = 1 \tag{4.3}$$

i wobec tego $v * \delta = v$ co oznacza, że $v * E$ jest rozwiązaniem równania (4.1). $\diamond$

4.7 Zadania

Zadanie 4.5. Obliczyć $(\frac{d}{dx})^k |x|^i$, $k, i = 1, 2, \dots$

Zadanie 4.6. Obliczyć $(\frac{d}{dx})^k |\sin x|$, $k, i = 1, 2, \dots$

Zadanie 4.7. Obliczyć pochodną dystrybucyjną $\ln(|x|)$.

Zadanie 4.8. Obliczyć pochodną dystrybucyjną funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Zadanie 4.9. Niech f będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_i > 0, i = 1, 2\}$. Obliczyć $\partial_{x_i} f(x_1, x_2)$.

Zadanie 4.10. Wykazać, że $f(x) = e^x$ nie jest dystrybucją temperowaną, a $g(x) = e^x \cos(e^x)$ jest.

Zadanie 4.11. Wyznaczyć rozwiązanie podstawowe dla operatora $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 4.12. Wznaczyć rozwiązanie podstawowe dla laplasjanu w $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Zadanie 4.13. Wykazać, że jeśli v ma nośnik zwarty, to rozwiązaniem równania $\Delta u = v$ w $\mathbb{R}^3$ jest

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v(y)}{|x-y|} dy.$$

Rozdział 5

Przestrzenie Sobolewa

Przestrzenie Sobolewa pełnią centralną rolę we współczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych. Stanowią naturalne przestrzenie do poszukiwania rozwiązań równań, gdyż pozwalają na korzystanie z bardzo wielu narzędzi analizy funkcjonalnej i rachunku wariacyjnego. Dobrym źródłem informacji o tych przestrzeniach jest książka Evansa [8]. Podstawową pigułkę informacji i pewną liczbę zadań można znaleźć także w niedużym skrypcie Strzeleckiego [22]. Nie są tam jednak w ogóle omawiane ułamkowe przestrzenie Sobolewa H^s ; zainteresowanym nimi można polecić, jako uzupełnienie książki Evansa, książkę Taylora [24].

W tym rozdziale zajmiemy się różnymi definicjami i podstawowymi własnościami przestrzeni Sobolewa. Dalsze własności (tzw. twierdzenia o włożeniu) są omawiane w rozdziale 6. Przestrzenie Sobolewa są stale obecne w rozdziałach 7, 8, 10, 11, 13 oraz 15.

5.1 Słabe pochodne

W rozdziale 4 pojawiło się pojęcie *pochodnej dystrybucyjnej*. Blisko związane z nim jest pojęcie tzw. *słabej pochodnej*.

Definicja 5.1. Niech Ω oznacza otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ oraz niech $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Mówimy, że g jest *słabą pochodną* funkcji f w Ω , jeśli dla każdego $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ zachodzi równość

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

Stosujemy oznaczenie $g := D^\alpha f$.

Uwaga. Jeśli słaba pochodna istnieje, to jest określona jednoznacznie; patrz Zadanie 7.1 lub skrypt [22, Rozdział 6].

Jeśli f jest wystarczająco gładka, aby posiadać ciągłą pochodną $D^\alpha f$ w klasycznym sensie, to łatwo można sprawdzić, wykonując całkowanie przez części, że w takim przypadku klasyczna pochodna jest jednocześnie słabą. Dlatego też na słabe pochodne nie wprowadzamy specjalnego oznaczenia. Zauważmy jednak, że słaba pochodna, jeśli istnieje, jest funkcją lokalnie całkowalną, zatem jest określona z dokładnością do zbioru miary zero.

Ponieważ każda funkcja lokalnie całkowalna definiuje dystrybucję, naturalne jest pytanie o związek słabej pochodnej z pochodną dystrybucyjną. Łatwo zauważyć, że pojęcia te są równoważne, gdy pochodna dystrybucyjna jest jednocześnie dystrybucją regularną (czyli reprezentuje się przez funkcję lokalnie całkowalną). Pojęcie pochodnej dystrybucyjnej jest jednak ogólniejsze – jeśli f jest funkcją lokalnie całkowalną, to zawsze posiada pochodną dystrybucyjną natomiast słaba pochodna f może nie istnieć (zob. zadanie 5.1). W szczególności, jeśli rozszerzymy funkcję $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ na całe $\mathbb{R}^n$ kładąc $f \equiv 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, to słaba pochodna funkcji f na całym $\mathbb{R}^n$ zazwyczaj *nie istnieje*.

5.2 Przestrzeń Sobolewa $W^{m,p}$

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leq p < \infty$.

Definicja 5.2. Przestrzenią Sobolewa $W^{m,p}(\Omega)$ nazywamy przestrzeń liniową funkcji

$$\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ dla } |\alpha| \leq m\},$$

przyjmując, że $D^\alpha u$ oznacza słabą pochodną lub pochodną dystrybucyjną funkcji u . W przestrzeni tej wprowadzamy normę

$$\|u\|_{p,m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (5.1)$$

Uwaga 5.1. W niektórych podręcznikach równań różniczkowych cząstkowych nie mówi się nic o teorii dystrybucji i wprowadza się od razu pojęcie słabej pochodnej. Z kolei inne podręczniki pomijają to pojęcie mówiąc tylko o pochodnych dystrybucyjnych. Zależy to od sposobu prowadzenia wykładu i treści w nim uwzględnionych. Dystrybucje, w szczególności dystrybucje temperowane, będą użyteczne w dalszej części przy wprowadzaniu definicji przestrzeni Sobolewa za pomocą transformaty Fouriera.

Przestrzeń Sobolewa $W^{m,p}(\Omega)$ posiada następujące własności:

1. jest zupełna, a więc jest przestrzenią Banacha;
2. funkcje klasy C^m są gęste w przestrzeni $W^{m,p}(\Omega)$, tzn. jeśli $u \in W^{m,p}(\Omega)$, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje funkcja $v \in C^m(\Omega)$ taka, że

$$\|u - v\|_{m,p,\Omega} < \epsilon$$

(jest to Twierdzenie Meyersa-Serrina).

Własności te powodują, że możemy równoważnie zdefiniować przestrzeń $W^{m,p}(\Omega)$ jako uzupełnienie – w normie Sobolewa (5.1) – podprzestrzeni liniowej

$$\left\{ u \in C^m(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx < \infty \right\} \subseteq C^m(\Omega).$$

W przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{R}^n$ oraz $1 \leq p < \infty$, funkcje Sobolewa możemy aproksymować funkcjami gładkimi o zwartym nośniku – okazuje się bowiem, że przestrzeń $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Niestety nie jest to prawdą dla dowolnego $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Definicja 5.3. Domknięcie przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ w normie przestrzeni Sobolewa (5.1) nazywamy *przestrzenią Sobolewa funkcji z zerowym śladem na brzegu* i oznaczamy $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Oczywiście $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, natomiast równość na ogół nie zachodzi. Dobrze jest przyjrzeć się następującemu przykładowi:

Przykład 5.1. Niech $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Zdefiniujmy funkcję $\tilde{u}$ w następujący sposób:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dla } x \in \Omega; \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Wówczas $\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega_1)$ dla każdego otwartego $\Omega_1 \supset \Omega$. W szczególności, $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Zauważmy natomiast, że gdy u jest dowolną funkcją z przestrzeni $W^{m,p}(\Omega)$, to funkcja $\tilde{u}$ zdefiniowana jak wyżej zazwyczaj **nie posiada** słabych pochodnych w $\mathbb{R}^n$, nie może zatem należeć do $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

W przypadku, gdy Ω jest zbiorem otwartym z dostatecznie gładkim (np. lipschitzowskim) brzegiem, funkcje z przestrzeni Sobolewa możemy aproksymować funkcjami gładkimi aż do brzegu, tzn. funkcje klasy $C^\infty(\overline{\Omega})$ są gęste w $W^{m,p}(\Omega)$.

Dla $p = 2$ przestrzeń $W^{m,2}(\Omega)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx.$$

Przestrzeń $W^{m,2}(\Omega)$ często bywa oznaczana jako $H^m(\Omega)$ (patrz następny podrozdział o definicji przestrzeni Sobolewa za pomocą transformaty Fouriera).

5.3 Przestrzeń $H^s(\mathbb{R}^n)$

W przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{R}^n$ możemy posłużyć się transformatą Fouriera i podać równoważną definicję dla przestrzeni Sobolewa typu $W^{s,2}$ (często używa się oznaczenia H^s).

Korzystając z twierdzenia 3.2 (własność (b)) i tożsamości Parsevala (3.5), otrzymujemy

$$\|u\|_{2,m} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad \text{dla } u \in \mathcal{S}.$$

Stąd i z nierówności (3.1) wynika, że na przestrzeni $\mathcal{S}$ norma $\|u\|_{m,\Omega}$ oraz norma

$$\|u\|_{*,m} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

są równoważne.

Wykorzystując twierdzenie Plancherela 3.3 oraz gęstość funkcji z klasy Schwartza w L^2 dostajemy równoważną definicję przestrzeni Sobolewa $H^m(\mathbb{R}^n)$ dla $m \in \mathbb{N}$:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Definicja ta ma tę zaletę, że możemy ją uogólnić i zdefiniować przestrzeń $H^s(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$ przyjmując

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

z normą

$$\|u\|_{H^s} = \|u\|_{*,s}.$$

Tak zdefiniowana przestrzeń $H^s(\mathbb{R}^n)$ posiada następujące własności:

1. jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi;$$

2. przestrzenią dualną do $H^s(\mathbb{R}^n)$ jest przestrzeń $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$;
3. $H^s(\mathbb{R}^n)$ jest domknięciem przestrzeni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ względem normy $\|\cdot\|_{H^s}$;
4. jeśli $s > r + \frac{n}{2}$, to

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^r(\mathbb{R}^n).$$

Dla $0 < s < 1$ w przestrzeni $H^s(\mathbb{R}^n)$ możemy wprowadzić równoważną normę

$$\|u\|_{*,H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{1/2}.$$

Ogólniej, dla dowolnego $s > 0$ takiego, że $[s] = k \in \mathbb{Z}$ oraz $\{s\} = s - [s] > 0$ mamy w przestrzeni $H^s(\mathbb{R}^n)$ równoważną normę, mianowicie:

$$\|u\|_{*,H^s} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\{s\}}} dx dy \right)^{1/2}. \quad (5.3)$$

5.4 Przestrzenie $H^s(\Omega)$

Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Rozważania w poprzednim rozdziale pokazały nam, że możliwe jest zdefiniowanie przestrzeni Sobolewa $H^s(\mathbb{R}^n)$ dla wykładników s innych niż liczby naturalne. Taka definicja możliwa jest także w przypadku funkcji określonych nie na całym $\mathbb{R}^n$ a na zbiorze Ω . Dwa naturalne podejścia do tego zagadnienia są następujące:

1. Wykorzystać równoważną normę w przestrzeni $H^s(\mathbb{R}^n)$ zadaną wzorem (5.3) dla $s \geq 0$. Definiujemy przestrzeń Sobolewa $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$, jako przestrzeń tych funkcji z $L^2(\Omega)$, których słabe pochodne istnieją aż do rzędu $k = [s]$ włącznie i też należą do przestrzeni $L^2(\Omega)$, a ponadto są takimi funkcjami, że skończona jest norma $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$, zdefiniowana następująco:

- dla $s = [s]$:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}; \quad (5.4)$$

(jest to więc standardowa norma przestrzeni Sobolewa)

- dla $s \neq [s] = k$, $\{s\} = s - k$:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\{s\}}} dx dy \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

2. Dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$ możemy zdefiniować przestrzeń $\mathcal{H}^s(\Omega)$ jako przestrzeń funkcji, które są obcięciami funkcji z $H^s(\mathbb{R}^n)$ do zbioru Ω :

$$u \in \mathcal{H}^s(\Omega) \iff \exists v \in H^s(\mathbb{R}^n) : v \equiv u \quad \text{na } \Omega.$$

Twierdzenie 5.1. *Jeżeli Ω jest zbiorem otwartym, ograniczonym, z brzegiem lipschitzowskim, to dla $s \geq 0$ powyższe definicje dają tą samą przestrzeń Sobolewa, tzn: $H^s(\Omega) = \mathcal{H}^s(\Omega)$.*

Jeśli chodzi o charakteryzację bezpośrednio za pomocą transformaty Fouriera, to zauważmy, że funkcję $u \in L^2(\Omega)$ możemy rozszerzyć na całą przestrzeń $\mathbb{R}^n$, przyjmując po prostu $u = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Wtedy $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ i na mocy rozważań w poprzednich podrozdziałach możemy mówić o transformacie Fouriera $\hat{u}$. W szczególności wiemy, że $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lemat 5.1. *Niech Ω będzie dowolnym (ograniczonym lub nie) obszarem otwartym w $\mathbb{R}^n$ i niech $m \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$H_0^m(\Omega) \subset \{u \in L^2(\Omega) : (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Gdy Ω jest obszarem ograniczonym z lipschitzowskim brzegiem, zamiast symbolu zawierania możemy wstawić równość.

Niech $s \geq 0$. Przestrzeń Sobolewa funkcji z zerowym śladem na brzegu definiujemy w standardowy sposób:

Definicja 5.4. Przestrzeń $H_0^s(\Omega)$ jest to domknięcie przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ w normie zdefiniowanej wzorami (5.4) dla $s \in \mathbb{N}$ oraz (5.5) dla $s > 0$ nie będącego liczbą całkowitą.

Twierdzenie 5.2. Dla $0 < s < \frac{1}{2}$ mamy $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$.

5.5 Twierdzenia o śladzie

Wprowadzając definicję przestrzeni $W_0^{m,p}(\Omega)$ użyliśmy nazwy *przestrzeń Sobolewa z zerowym śladem na brzegu*. W ogólności, dla dowolnej funkcji z $W^{m,p}(\Omega)$, nie ma sensu mówić o jej śladzie na brzegu obszaru Ω jako obcięciu tej funkcji do brzegu, gdyż $\partial\Omega$ jest zbiorem miary zero. Możemy jednak definicję śladu rozszerzyć tak, aby była ona poprawna także dla funkcji z przestrzeni Sobolewa. Pomocą służy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.3. Niech obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczony, o brzegu klasy C^1 . Istnieje wtedy operator ciągły

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

taki, że w przypadku, gdy u jest funkcją ciągłą na domknięciu obszaru Ω , T przyporządkowuje jej obcięcie do brzegu.

Definicja 5.5. Niech $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Śladem funkcji u na brzegu obszaru Ω nazywamy funkcję $T(u) \in L^p(\partial\Omega)$.

W analogiczny sposób definiujemy ślad w przestrzeniach $H^s(\mathbb{R}^n)$, dla $s \in \mathbb{R}$. Zapiszmy $x \in \mathbb{R}^n$ jako (x', x_n) , $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Definiujemy operator śladu funkcji na hiperpłaszczyźnie $\{x_n = 0\}$ działający na przestrzeni $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \gamma : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \\ (\gamma u)(x') &= u(x', 0). \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.4. Niech $s > \frac{1}{2}$. Operator śladu $\gamma : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ można rozszerzyć do operatora liniowego ciągłego

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

takiego, że

$$\|\gamma(u)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Zauważmy, że teza tego twierdzenia jest trochę mocniejsza niż w przypadku twierdzenia 5.3.

Twierdzenie 5.4 ma swój odpowiednik dla przestrzeni $H^s(\Omega)$, przy założeniu odpowiedniej regularności brzegu $\partial\Omega$ (zob. np. I tom książki Taylora [24]).

5.6 Rozwiązania przykładowych zadań

Zadanie 5.1. Wykazać, że funkcja Heaviside'a

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

nie posiada słabej pochodnej w $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Niech ϕ_n będzie ciągiem funkcji próbnych z przestrzeni $C_0^\infty(\mathbb{R})$ takich, że

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_n &\subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ \phi_n(0) &= 1 \end{aligned}$$

Założmy, że $H' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ jest słabą pochodną funkcji Heaviside'a. Z definicji słabej pochodnej mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x) \phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \phi'(x) dx$$

dla każdej funkcji próbnej $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. W naszym przypadku, dla każdego n , mamy

$$- \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \phi_n'(x) dx = - \int_0^{\infty} \phi_n'(x) dx = \phi_n(0) = 1.$$

Ponieważ z założenia $H' \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ oraz $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, możemy wejść z granicą pod znak całki otrzymując

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} H'(x) \phi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H'(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx = 0,$$

co daje sprzeczność i dowodzi, że funkcja Heaviside'a nie posiada słabej pochodnej. $\diamond$

Zadanie 5.2. Wyznaczyć wszystkie $s \in \mathbb{R}$ takie, że $\delta \in H^s(\mathbb{R}^2)$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $\mathcal{F}(\delta) = 1$. Obliczamy

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}(\delta)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Ostatnia całka jest skończona dla $s < -1$. Zatem $\delta \in H^s(\mathbb{R}^2)$ dla $s < -1$, dla $s \geq -1$ całka jest rozbieżna, zatem $\delta \notin H^s(\mathbb{R}^2)$ $\diamond$

Zadanie 5.3. Niech $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 o ograniczonej pochodnej F' . Załóżmy, że Ω jest ograniczony i $u \in W^{1,m}(\Omega)$ dla $1 < m < \infty$. Wykazać, że $v := F(u)$ należy do przestrzeni $W^{1,m}(\Omega)$ oraz $v_{x_i} = F'(u)u_{x_i}$ w słabym sensie.

Rozwiązanie. Po pierwsze, zauważamy, że ponieważ F' jest ograniczone, więc zarówno $F'(u)u_{x_i}$ jak i $F(u)$ są elementami $L^m(\Omega)$. Przekonajmy się, że $v_{x_i} = F'(u)u_{x_i}$. Weźmy $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; chcemy sprawdzić, że

$$\int_{\Omega} F'(u)u_{x_i}\phi \, dx = - \int_{\Omega} F(u)\phi_{x_i} \, dx. \quad (5.6)$$

W tym celu wybieramy ciąg $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ taki¹, że $u_n \rightarrow u$ w $W^{1,m}(\Omega)$ dla $n \rightarrow \infty$. Oczywiście dla tak wybranych u_n

$$\int_{\Omega} F'(u_n)(u_n)_{x_i}\phi \, dx = - \int_{\Omega} F(u_n)\phi_{x_i} \, dx. \quad (5.7)$$

Wystarczy zatem zauważyć, że lewa strona (5.7) dąży do lewej strony (5.6) (przynajmniej na pewnym podciągu u_{n_k}), a prawa strona (5.7) do prawej (5.6). Ale

$$\int_{\Omega} |\phi_{x_i}| |F(u_n) - F(u)| \, dx \leq C \int_{\Omega} |u_n - u| \, dx,$$

a zgodnie z wyborem u_n całka po prawej stronie zbiega do 0.

Następnie,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi(x)| |F'(u_{n_k})(u_{n_k})_{x_i} - F'(u)u_{x_i}| \, dx &\leq C \int_{\Omega} |F'(u_{n_k})| |u_{x_i} - (u_{n_k})_{x_i}| \, dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} |u_{x_i}| |F'(u) - F'(u_{n_k})| \, dx. \end{aligned}$$

Wiemy, że u_n dąży do u w $W^{1,m}(\Omega)$, czyli także w $L^m(\Omega)$. Zatem, istnieje podciąg u_{n_k} taki, że $u_{n_k} \rightarrow u$ p.w. w Ω . Wtedy również $F'(u_{n_k}) \rightarrow F'(u)$ p.w. w Ω , gdy $n_k \rightarrow \infty$. Wobec tego, z tw. Lebesgue'a o zmajorizowanym przejściu do granicy, mamy

$$\int_{\Omega} |u_{x_i}| |F'(u) - F'(u_{n_k})| \, dx \rightarrow 0.$$

Wybór u_n gwarantuje, że $\int_{\Omega} |F'(u_{n_k})| |u_{x_i} - (u_{n_k})_{x_i}| \, dx \rightarrow 0$ i zadanie jest rozwiązane. $\diamond$

Zadanie 5.4. Rozważmy równanie

$$u_t + \Delta(\Delta u) = 0 \quad \text{w} \quad (0, T) \times \mathbb{R}^n,$$

z warunkiem początkowym

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n,$$

gdzie $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ dla pewnego $s > 0$. Wykazać, że $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

¹Patrz np. Twierdzenie 3, rozdział 5.3.3 książki Evansa [8].

Rozwiązanie. Należy wykazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, zachodzi nierówność

$$\|u(t_1, \cdot) - u(t_2, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

Przypomnijmy, że norma w przestrzeni $H^s(\mathbb{R}^n)$ jest zdefiniowana jako

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

musimy zatem wykazać nierówność

$$\|u(t_1, \cdot) - u(t_2, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(t_1, \xi) - \hat{u}(t_2, \xi)|^2 d\xi < \epsilon^2.$$

W tym celu potrzebna nam jakaś wiedza o transformacie Fouriera funkcji u . Przykładając transformatę (względem zmiennych przestrzennych) do wyjściowego równania otrzymujemy równanie

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + (2\pi|\xi|)^4 \hat{u}(t, \xi) = 0$$

z warunkiem początkowym

$$\hat{u}(0, \xi) = u_0(\xi).$$

Stąd mamy

$$\hat{u}(t, \xi) = u_0(\xi) e^{-(2\pi|\xi|)^4 t}.$$

Norma Sobolewa różnicy rozwiązań w dwóch punktach czasowych wynosi zatem

$$\|u(t_1, \cdot) - u(t_2, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s u_0^2(\xi) |e^{-(2\pi|\xi|)^4 t_1} - e^{-(2\pi|\xi|)^4 t_2}|^2 d\xi.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $T \geq t_2 > t_1 \geq 0$. Wykorzystamy nierówność

$$|e^{-(2\pi|\xi|)^4 t_1} - e^{-(2\pi|\xi|)^4 t_2}|^2 = e^{-2(2\pi|\xi|)^4 t_1} |1 - e^{-(2\pi|\xi|)^4 (t_2 - t_1)}|^2 \leq 1.$$

Ponieważ z założenia wiemy, że $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, więc wyrażenie pod całką szacuje się przez funkcję całkowalną i nierówność

$$\|u(t_1, \cdot) - u(t_2, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 < \epsilon^2$$

zachodzi dla t_1 oraz t_2 dostatecznie bliskich, z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki. $\diamond$

5.7 Zadania

Zadanie 5.5. Wykazać, że dla $n > 1$ nieograniczona funkcja

$$u(x) = \log \log \left(1 + \frac{1}{|x|^2} \right)$$

należy do $W^{1,n}(B(0,1))$, gdzie $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ to kula o środku w 0 i promieniu 1.

Zadanie 5.6. Niech $n > 1$ i niech $B(0,1)$ będzie, jak wyżej, kulą jednostkową w $\mathbb{R}^n$. Wskazać przykład funkcji

$$v \in \bigcap_{1 \leq p \leq n} W^{1,p}(B(0,1)),$$

która jest nieciągła na każdym zbiorze otwartym $U \subset B(0,1)$.

Wskazówka. Wykorzystać funkcję u z poprzedniego zadania i rozpatrzyć szereg

$$\sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} u(x - a_N)$$

gdzie (a_N) jest ciągiem wszystkich punktów $B(0,1)$ o wszystkich współrzędnych wymiernych.

Zadanie 5.7. Wykazać, że jeśli $n = 1$, $u \in W^{1,m}(0,1)$, $1 \leq m$, to u jest równa p.w. pewnej funkcji bezwzględnie ciągłej.

Zadanie 5.8. Nie powołując się na nierówność Morreya, wykazać, że jeśli w założeniach zadania 5.7 warunek $1 \leq m$ zastąpimy przez ostrą nierówność $1 < m$, to funkcja u będzie spełniać

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{m}} \left(\int_0^1 |u'|^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

dla prawie wszystkich $x, y \in (0,1)$, a więc przedłuża się jednoznacznie na cały przedział $(0,1)$ do pewnej funkcji ciągłej.

Zadanie 5.9. Skonstruować funkcję $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, która nie jest funkcją klasy L^∞ .

Zadanie 5.10. Przypuśćmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest spójny, a $Du = 0$ p.w. w Ω dla $u \in W^{1,m}(\Omega)$. Pokazać, że u jest stała p.w.

Zadanie 5.11. Przypuśćmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem ograniczonym. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,m}(\Omega)$, wówczas $|u| \in W^{1,m}(\Omega)$. Wykazać ponadto, że dla $u \in W^{1,m}(\Omega)$ mamy u_+, u_- także należące do $W^{1,m}(\Omega)$. Udowodnić również, że $\nabla u = 0$ p.w. na zbiorze $\{u = 0\}$.

Zadanie 5.12. Wykazać nierówność

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |D^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

dla każdej funkcji $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ i ograniczonego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Wskazówka:* skorzystać z pierwszego wzoru Greena (patrz Zadanie 1.3).

Zadanie 5.13. Udowodnić, że na przestrzeni $X = L^p(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oznacza zbiór ograniczony o gładkim brzegu, nie można zdefiniować operatora śladu, tzn. takiego operatora liniowego ciągłego z X w $L^p(\partial\Omega)$, który na funkcjach ciągłych na domknięciu Ω wybijałby ich wartości na brzegu.

Rozdział 6

Twierdzenia o zanurzeniu

6.1 Wprowadzenie

Wiele znanych twierdzeń matematycznych mówi o tym, że jeden zbiór funkcji jest zawarty w innym zbiorze funkcji. Na przykład, z różniczkowalności funkcji wynika jej ciągłość, możemy więc powiedzieć, że funkcje różniczkowalne są podzbiorem funkcji ciągłych. W tym rozdziale zajmiemy się następującym ogólnym problemem:

Dla jakich przestrzeni funkcyjnych X można traktować przestrzeń Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$ jako podzbiór X ?

Ponieważ przestrzenie Sobolewa są, najprościej mówiąc, po prostu zbiorami takich funkcji u , że zarówno sama funkcja u jak i jej uogólniona pochodna Du należą do pewnej przestrzeni L^p , więc nasz problem można sformułować następująco:

Czy z założenia, że $u \in L^p$ i $Du \in L^p$ wynika jakakolwiek dodatkowa regularność funkcji u ?

Odpowiemy na to pytanie, rozwiązując długą serię zadań. Najpierw przypomnimy kilka podstawowych nierówności, jakie w dalszym ciągu okażą się niezwykle użyteczne, w szczególności kluczową dla naszych rozważań nierówność Höldera. Jest rzeczą zdumiewającą, jak wiele można osiągnąć, posługując się tylko nią i twierdzeniem Newtona–Leibniza. Potem zajmiemy się czterema kluczowymi twierdzeniami: Poincarégo, Sobolewa, Rellicha–Kondraszowa oraz Morreya.

Podamy teraz sformułowania tych twierdzeń i krótko skomentujemy, o co w nich tak naprawdę chodzi.

6.1.1 Twierdzenie Poincarégo



Henri Poincaré

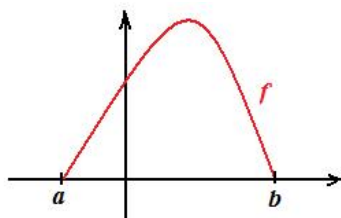
Najprostszym twierdzeniem ze wspomnianej serii jest twierdzenie Poincarégo. Z grubsza biorąc, tłumaczy ono na język przestrzeni Sobolewa następującą, zupełnie elementarną, obserwację.

Przypuśćmy, że funkcja f jest różniczkowalna na przedziale (a, b) , ciągła na $[a, b]$ i znika na końcach tego odcinka (przykład takiej funkcji — patrz rysunek niżej).

Jasne jest (wobec twierdzenia o wartości średniej), że największą wartość funkcji da się ograniczyć przez najszybsze tempo jej wzrostu, to znaczy:

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq |b - a| \cdot \sup_{x \in (a, b)} |f'(x)|.$$

Oznacza to tyle, że z dokładnością do stałej zależnej tylko od obszaru klasyczna norma supremum funkcji u zerowej na brzegu nie może być większa niż norma supremum jej gradientu. To gradient funkcji jest miarą tempa jej wzrostu i przesądza, jak może zmienić się wartość funkcji, gdy przemierzmy w dziedzinie odcinek ustalonej długości.



Twierdzenie Poincarégo tłumaczy powyższą obserwację na język tych przestrzeni, w których wielkość funkcji jest mierzona całką. Mówi ono bowiem, że wielkość funkcji znikającej na brzegu obszaru ograniczonego można oszacować wielkością jej gradientu, jeśli obie wielkości mierzymy w normie L^p .

Twierdzenie Poincarégo. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (6.1)$$

dla każdej funkcji $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dowód twierdzenia w przypadku $n = 2$ i $p = 2$ znajdziemy w Ćwiczeniu nr 3. Jak uogólnić ten dowód — patrz Zadanie 6.5. Od czego zależy stała C patrz Zadanie 6.6.

6.1.2 Twierdzenie Sobolewa

Wysłowimy teraz najslynniejsze twierdzenie z teorii przestrzeni Sobolewa.

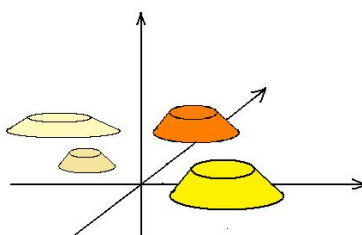
Opiera się ono na nierówności Sobolewa, która mówi, że dla każdej liczby $1 \leq p < n$ istnieje dokładnie jedna liczba $q \geq 1$ o następującej własności: norma dowolnej gładkiej funkcji u o zwartym nośniku zmierzona w przestrzeni $L^q(\mathbb{R}^n)$ jest ograniczona normą gradientu funkcji

u zmierzonej w przestrzeni $L^p(\mathbb{R}^n)$. Jest to zdumiewające twierdzenie, bo poza ograniczonością nośnika nie zakładamy tu absolutnie nic o jego rozmiarach!

W szczególności, nierówność

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

zachodzi dla wszelkich funkcji określonych na płaszczyźnie, których wykres wygląda mniej więcej tak jak którykolwiek z poniższych wykresów:



Wypowiedzmy teraz formalnie omówiony rezultat:



S.L. Sobolev

Nierówność Sobolewa. Niech $1 \leq p < n$. Wówczas istnieje stała $C > 0$ zależna tylko od p i n taka, że dla każdej funkcji $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

gdzie

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Dowód nierówności Sobolewa dla $n = 2$ i $p = 1$ jest przedstawiony w Ćwiczeniu 4. Wykazanie nierówności Sobolewa dla $n = 3$ i $p = 1$ jest odrobinę trudniejsze i zostaje pozostawione jako zadanie 6.10. Jak z nierówności Sobolewa dla ustalonego n i $p = 1$ uzyskać rozwiązanie dla dowolnego $p > 1$? — patrz zadanie 6.11.

Wnioskiem z nierówności Sobolewa i gęstości funkcji gładkich w przestrzeniach Sobolewa jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie Sobolewa. Niech $1 \leq p < n$ i niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym zbiorem ograniczonym z gładkim brzegiem. Wówczas istnieje stała $C > 0$ zależna tylko od p i Ω taka, że

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

dla wszystkich funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega)$ i $q = \frac{np}{n-p}$.

6.1.3 Twierdzenie Morreya

Odpowiemy teraz na pytanie, co się dzieje, gdy funkcja u należy do przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$, gdzie $p > n$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem ograniczonym.



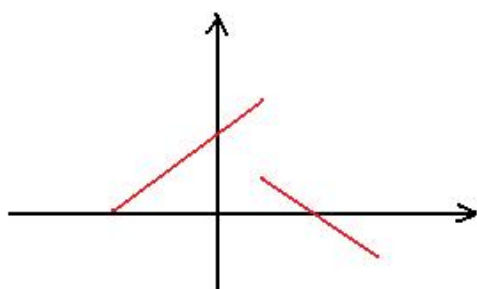
Charles Morrey

W tej sytuacji okazuje się, że funkcja u jest w istocie ciągła, być może po przededefiniowaniu na zbiorze miary zero. Ponieważ kwestia jest subtelna, spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład. Funkcja Dirichleta, która każdej liczbie wymiernej przypisuje 1, a każdej niewymiernej — 0, staje się ciągła po (odpowiednim) przededefiniowaniu na zbiorze miary zero (choć w klasycznym sensie jest nieciągła w każdym punkcie; za to traktowana jako element przestrzeni Sobolewa $W^{1,p}(\mathbb{R})$ jest, dla każdego $p \geq 1$, po prostu niezbyt trafnie wybranym reprezentantem

z tej samej klasy abstrakcji, co funkcja zerowa).

Natomiast funkcja z wykresu poniżej jest nieciągła tylko w jednym punkcie, ale nie da się tak przededefiniować na zbiorze miary zero tak, by stała się ciągła.



Twierdzenie Morreya, które zaraz poznamy, nie tylko zapewnia ciągłość funkcji u z $W^{1,p}(\Omega)$ z $p > n$, ale nawet pozwala oszacować normę u w odpowiedniej przestrzeni Höldera. Kluczową rolę odgrywa tutaj nierówność Morreya.

Nierówność Morreya. Niech $p > n$. Istnieje stała $C > 0$ zależna tylko od p i n taka, że dla każdej funkcji $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność:

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

$$\text{gdzie } \beta = 1 - \frac{n}{p}.$$

Wnioskiem z nierówności Morreya jest twierdzenie Morreya.

Twierdzenie Morreya. Niech $p > n$ i niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym zbiorem otwartym z gładkim brzegiem. Wtedy każda funkcja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem

$$\beta = 1 - \frac{n}{p}$$

(być może po przededefiniowaniu na zbiorze miary zero).

Dowód w szczególnym przypadku można przeprowadzić samodzielnie, rozwiązując ciąg zadań 6.13–6.17.

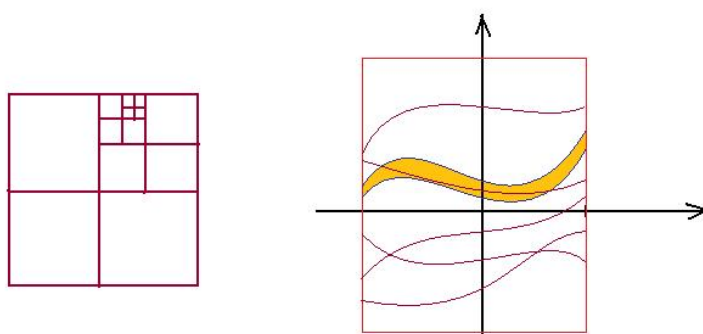
6.1.4 Twierdzenie Rellicha-Kondraszowa



Franz Rellich

Jednym z najbardziej użytecznych twierdzeń teorii przestrzeni Sobolewa jest swego rodzaju uogólnienie twierdzeń Bolzano-Weierstrassa i Ascoli-Arzeliego. Przypomnijmy zatem, że zgodnie z pierwszym z tych twierdzeń dowolny ciąg zawarty w kostce w $\mathbb{R}^n$ zawiera podciąg zbieżny. Twierdzenie Ascoli-Arzeliego pozwala wyciągnąć podobny wniosek w przypadku nieskończonej wymiarowej przestrzeni: z dowolnego ciągu wspólnie ograniczonych i jednakowo ciągłych funkcji możemy wybrać podciąg zbieżny jednostajnie.

W gruncie rzeczy idea leżąca u podstaw obu twierdzeń jest podobna i można ją wyjaśnić poglądowo następująco. Jeśli w kwadracie umieścimy nieskończenie wiele kropek, to dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy kwadracik o boku $\varepsilon > 0$, który zawiera nieskończenie wiele kropek. Podobnie, jeśli w prostokącie $[a, b] \times [-M, M]$ narysujemy nieskończenie wiele wykresów funkcji ciągłych, których wzrost lokalnie jest ograniczony przez pewną uniwersalną stałą, to dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy ε -ową rurkę zawierającą nieskończenie wiele narysowanych wykresów.



Poniższe twierdzenie uogólnia tę obserwację na przypadek funkcji z przestrzeni Sobolewa i okazuje się niesłychanie przydatne w teorii równań różniczkowych.

Twierdzenie Rellicha-Kondraszowa. *Niech Ω będzie otwartym obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy każdy ograniczony ciąg funkcji u_m z przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$ zawiera podciąg zbieżny u_{m_k} w $L^r(\Omega)$ dla każdego $1 \leq r < \frac{np}{n-p}$.*

6.2 Ćwiczenia

Ćwiczenie 6.1. Wykazać, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwartym obszarem ograniczonym oraz $1 \leq q \leq p$, to

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Rozwiązanie. Ponieważ Ω jest ograniczony więc $g(x) \equiv 1$ należy do $L^s(\Omega)$ dla każdego $s \geq 1$. Jeśli zatem $u \in L^p(\Omega)$ to z nierówności Höldera wynika, iż

$$\int_{\Omega} |f(x)|^q dx = \int_{\Omega} |f(x)|^q \cdot 1 dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{q \cdot \frac{p}{q}} dx \right)^{q/p} \left(\int_{\Omega} 1^s dx \right)^{1/s},$$

gdzie wykładnik s został dobrany tak, aby

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{p/q} = 1.$$

Stąd

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^q |\Omega|^{1/s}.$$

Wyciągając pierwiastek stopnia q z obu stron otrzymujemy

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega) \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

◇

Ćwiczenie 6.2. Wiadomo, że $u \in W^{2,1}(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ jest ograniczonym otwartym obszarem z gładkim brzegiem. Korzystając z twierdzenia Sobolewa, wykazać, że $u \in L^2(\Omega)$.

Rozwiązanie. Z treści zadania wynika, że $u \in L^1(\Omega)$ oraz $Du \in L^1(\Omega)$, więc $u \in W^{1,1}(\Omega)$. A zatem z twierdzenia Sobolewa i równości:

$$\frac{4 \cdot 1}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

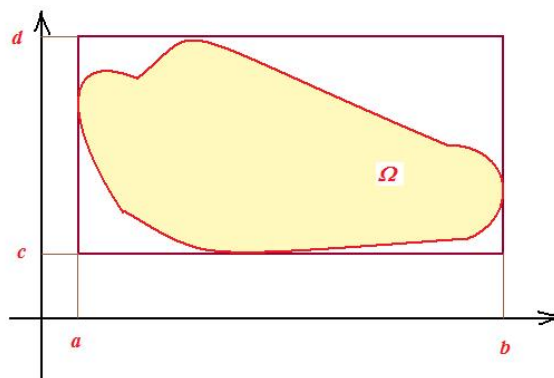
wynika, że $u \in L^{4/3}(\Omega)$. Niech teraz $v_k = D_k u$. Wtedy $v_k \in L^1(\Omega)$ oraz $Dv_k \in L^1(\Omega)$, więc $v_k \in W^{1,1}(\Omega)$ i rozumując jak poprzednio przekonujemy się, że $v_k \in L^{4/3}(\Omega)$. A zatem $u \in W^{1,4/3}(\Omega)$. Korzystając ponownie z nierówności Sobolewa, otrzymujemy, że $u \in L^q(\Omega)$ dla

$$q = \frac{4 \cdot 4/3}{4 - \frac{4}{3}} = 2.$$

◇

Ćwiczenie 6.3. Wykazać nierówność Poincarégo dla $n = 2$ i $p = 2$.

Rozwiązanie. Ze względu na gęstość funkcji gładkich w przestrzeniach Sobolewa twierdzenie wystarczy udowodnić dla funkcji $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Załóżmy więc, że u w istocie jest funkcją gładką o zwartym nośniku w Ω i niech Ω będzie podzbiorem prostokąta $I = [a, b] \times [c, d]$:



Z twierdzenia Newtona-Leibniza wynika, że

$$u(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} D_1 u(t, x_2) dt.$$

Stąd

$$|u(x_1, x_2)| \leq \int_a^{x_1} |D_1 u(t, x_2)| dt \leq \int_a^b |Du(t, x_2)| dt.$$

Stosujemy teraz nierówność Höldera (a właściwie Schwarz) i otrzymujemy

$$|u(x_1, x_2)| \leq \left(\int_a^b 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |Du(t, x_2)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Stąd

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq |b - a| \int_a^b |Du(t, x_2)|^2 dt.$$

Scałkujemy teraz obie strony po x_2 od c do d :

$$\int_c^d |u(x_1, x_2)|^2 dx_2 \leq \int_c^d |b - a| \int_a^b |D(t, s)|^2 dt ds = |b - a| \cdot \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

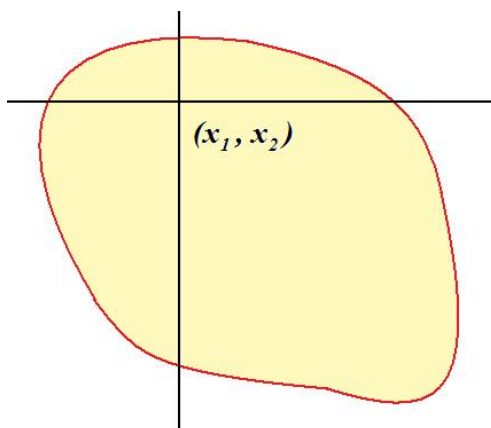
Całkujemy po x_1 (prawa strona już od x_1 nie zależy) od a do b i dostajemy

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq |b - a|^2 \cdot \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Teraz jeszcze tylko wyciągamy pierwiastek kwadratowy z obu stron i otrzymujemy dowodzoną nierówność. $\diamond$

Ćwiczenie 6.4. Wykazać nierówność Sobolewa dla $n = 2$ i $p = 1$

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od skorzystania ze wzoru Newtona-Leibniza. Tym razem całkujemy najpierw nie tylko w jednym wybranym kierunku, ale od razu w dwóch:



Uzyskujemy w ten sposób dwa przedstawienia całkowe:

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} D_1 u(s, x_2) ds \quad \text{oraz} \quad u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} D_2 u(x_1, s) ds.$$

Wynika stąd, że

$$|u(x_1, x_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(s, x_2)| ds \quad \text{oraz} \quad |u(x_1, x_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, s)| ds.$$

Ponieważ obie strony powyższych nierówności są nieujemne, więc możemy te nierówności pomnożyć stronami, uzyskując:

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(s, x_2)| ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, s)| ds \right).$$

Całkujemy teraz obie strony po x_1 :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(s, x_2)| ds \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, s)| ds dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |Du(s, x_2)| ds \|Du\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

I jeszcze raz całkujemy, tym razem po x_2 , by otrzymać:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \|Du\|_{L^1(\Omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(s, x_2)| ds dx_2,$$

co oznacza, że $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|Du\|_{L^1(\Omega)}^2$. Po wyciągnięciu pierwiastka dostajemy nierówność Sobolewa. $\diamond$

6.3 Zadania

Zadanie 6.1. Korzystając z tego, że logarytm jest funkcją wklęsłą, wykazać nierówność Younga

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q},$$

gdzie $p \geq 1, q \geq 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1, a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6.2. Udowodnić następującą nierówność Höldera:

Załóżmy, że $1 \leq p, q \leq \infty$ oraz $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Wtedy jeśli $f \in L^p(\Omega)$ oraz $g \in L^q(\Omega)$, to funkcja fg należy do $L^1(\Omega)$ oraz zachodzi nierówność

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Zadanie 6.3. Załóżmy, że $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ dla $r, s \geq 1$. Wykazać następującą nierówność interpolacyjną:

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)}^\theta \|f\|_{L^s(\Omega)}^{1-\theta}$$

gdzie

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}$$

oraz $0 \leq \theta \leq 1$.

Zadanie 6.4. Załóżmy, że funkcja f należy do $L^2(\mathbb{R}^n)$. Czy wynika stąd, że $f \in L^3(\mathbb{R}^n)$? A może wynika, że $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$?

Zadanie 6.5. Wykazać nierówność Poincarégo dla

- a) $n = 2$ i $p \geq 1$.
- b) $n = 3$ i $p \geq 1$.

Zadanie 6.6. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie

- a) kołem o średnicy d .
- b) elipsą o osiach a oraz b

W każdym z powyższych przypadków znajdź stałą z nierówności Poincarégo. Czy stała ta zależy od p ?

Zadanie 6.7. Niech $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Zbadać czy dla każdej funkcji $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ zachodzi nierówność Poincarégo:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zadanie 6.8. Niech funkcja u będzie gładką funkcją o zwartym nośniku w $\mathbb{R}^n$ i niech

$$u_\lambda = u(\lambda x).$$

Rozważając normy $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ i $\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ wykazać, że jeśli $q \neq \frac{np}{n-p}$, to nie istnieje uniwersalna stała C (zależna tylko od p i n) taka, że

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

dla każdej funkcji gładkiej f o zwartym nośniku w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 6.9. Rozważmy rodzinę funkcji

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| > n+1 \\ 1 & \text{dla } |x| < n \\ n+1-|x| & \text{dla } n \leq |x| \leq n+1 \end{cases}$$

Czy istnieje pochodna uogólniona Df_n ? Czy istnieje stała C oraz pewne $p, q \geq 1$ takie, że

$$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Df_n\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

dla każdego n ?

Zadanie 6.10. Wykazać nierówność Sobolewa dla $n = 3$ i $p = 1$.

Wskazówka. Zaczynamy od przedstawienia całkowego (tym razem otrzymamy trzy różne przedstawienia: w zależności od D_1u , D_2u i D_3u). Znajdujemy oszacowanie całkowe dla $|u|^{3/2}$ (po prawej stronie będzie iloczyn trzech pierwiastków z pewnych całek), a na koniec trzy razy całkujemy obie strony (kolejno po x_1 , x_2 i x_3), korzystając z nierówności Höldera (to główna, praktycznie jedyna różnica pomiędzy $n = 2$ i $n = 3$).

Zadanie 6.11. Zakładając, że nierówność Sobolewa zachodzi dla każdego $n > 1$ i $p = 1$, wykazać, że zachodzi też dla każdego $n > 1$ i $p > 1$.

Wskazówka. Rozważyć funkcję $v = |u|^\gamma$ dla odpowiednio dobranego γ .

Zadanie 6.12. Niech funkcja f będzie dana wzorem

$$f(x) = \int_0^x g(s) ds,$$

gdzie $g \in L^2(0, 1)$. Wykazać, że f jest Hölderowsko ciągła z wykładnikiem $1/2$.

Zadanie 6.13. Wykazać, że istnieje stała C (zależna tylko od p) taka, że dla każdej funkcji $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ z $p > 2$ zachodzi nierówność:

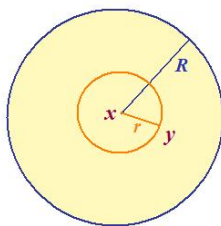
$$\int_{B(x,r)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|} dz \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

gdzie $B(x, r)$ jest kulą ośrodkiem w x i promieniu r .

Zadanie 6.14. Niech $u \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ dla $p > 2$. Rozpatrzmy koło o promieniu $B(x, R)$ i mniejsze koło $B(x, r)$ o promieniu r :

Niech $x = (x_1, x_2)$, $h = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ i $y = x + rh = (x_1 + r \cos \varphi, x_2 + r \sin \varphi)$. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza, wykazać, że:

$$|u(x + rh) - u(x)| \leq \int_0^r |Du(x + sh)| ds.$$



Wynioskować stąd, że

$$\int_{\partial B(x,r)} |u(y) - u(x)| d\sigma \leq r \int_{B(x,r)} \frac{|Du(z)|}{|z - x|} dz$$

oraz

$$\int_{B(x,R)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{R^2}{2} \int_{B(x,R)} \frac{|Du(z)|}{|z - x|} dz.$$

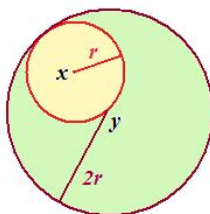
Zadanie 6.15. Korzystając z poprzedniego zadania oraz z nierówności

$$|u(x)| = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} |u(x)| dy \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} (|u(y)| + |u(x) - u(y)|) dy$$

wykazać, że przy poczynionych założeniach mamy

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u(x)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)}$$

Zadanie 6.16. Rozpatrzmy dwa punkty $x, y \in \mathbb{R}^2$ i niech $r = |x - y|$:



Korzystając z nierówności z Zadania 6.14 oraz z nierówności

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} (|u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)|) dz \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| dz + \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(y,2r)} |u(z) - u(y)| dz \end{aligned}$$

wykazać, że przy spełnionych założeniach z zadania 14 zachodzi nierówność:

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}^2} |u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^{1-2/p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^2)}.$$

Zadanie 6.17. Wykorzystując nierówności, uzyskane w zadaniach 6.15–6.16, udowodnić, że każdą funkcję $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest ograniczonym obszarem o gładkim brzegu, a $p > 2$, można przededefiniować na zbiorze miary zero tak, by była Hölderowsko ciągła na $\overline{\Omega}$ z wykładnikiem $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$.

Zadanie 6.18. Wykazać twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

Zadanie 6.19. Wykazać twierdzenie Arzeli-Ascoliego.

Zadanie 6.20. Rozważmy ciąg funkcji $f_m \in L^2(0, \pi)$:

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \sin(nx), \quad \text{gdzie} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}^2 < \infty.$$

Założmy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\|f'_m\|_{L^2(0,2\pi)} < C$$

dla każdego m . Wykazać, że istnieje podciąg f_{m_k} zbieżny w $L^2(0, \pi)$.

Zadanie 6.21. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem otwartym, spójnym i ograniczonym o gładkim brzegu. Korzystając z twierdzenia Rellicha-Kondraszowa, wykazać, że istnieje stała C taka że dla wszystkich funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

gdzie $u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$.

Zadanie 6.22. Przy założeniach zadania 21 wykazać, że istnieje stała C niezależna od r taka że

$$\|u - u_{B(x,r)}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr \|Du\|_{L^p(B(x,r))},$$

Zadanie 6.23. Wykazać, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $u \in W^{m,2}(\Omega)$ dla wszystkich $m = 1, 2, \dots$, to u , z dokładnością do modyfikacji na zbiorze miary zero, jest funkcją klasy C^{∞} .

Wskazówka. Sprawdzić, że można bez straty ogólności założyć, że funkcja u ma zwarty nośnik. Stosować nierówność Sobolewa do kolejnych pochodnych funkcji u , pamiętając, że

$$q = \frac{np}{n-p} > p \quad \text{dla } 1 \leq p < n.$$

Po pewnej liczbie kroków tego typu do (każdej) pochodnej $D^{\alpha}u$ można zastosować nierówność Morrey'a.

Rozdział 7

Funkcjonały na przestrzeniach Sobolewa

7.1 Fizyczna motywacja

Zajmiemy się teraz genialnym pomysłem fizyków, którzy zauważyli, że świat fizyczny, który można bardzo efektywnie opisywać za pomocą równań różniczkowych, jest jednocześnie posłuszny pewnym ogólnym zasadom, które postulują minimalizację pewnych wielkości fizycznych. Żeby sprecyzować, co mamy tutaj na myśli, rozpatrzmy cząstkę o masie m , poruszającą się po linii prostej i która w chwili $t = 0$ jest w punkcie a , natomiast w chwili $t = 1$ jest w punkcie b . Przypuśćmy też, że na cząstkę nie działają siły zewnętrzne (brak potencjału). Zasada Hamiltona mówi, że położenie cząstki w czasie $0 \leq t \leq 1$ opisuje funkcja $\bar{u}$, taka że całka z energii kinetycznej cząstki od czasu 0 do czasu 1 jest najmniejsza z możliwych.

Mówiąc bardziej formalnie, funkcjonał

$$I(x) = \int_0^1 \left| \frac{dx}{dt}(s) \right|^2 ds,$$

określony dla gładkich funkcji x o wartościach $x(0) = a$ oraz $x(1) = b$ osiąga dla funkcji $\bar{u}$ swoją najmniejszą wartość. Przypuśćmy teraz, że rzeczywiście wartość I jest najmniejsza dla $\bar{u}$. Zaburzmy $\bar{u}$ gładką funkcją ε , znikającą na końcach odcinka $[0,1]$. Dla ustalonego $\bar{u}$ oraz ε rozważmy teraz funkcję kwadratową zmiennej z :

$$F(z) = I(\bar{u} + z\varepsilon) = A + 2Bz + Cz^2,$$

gdzie

$$A = \int_0^1 \left| \frac{d\bar{u}(s)}{dt} \right|^2 ds, \quad B = \int_0^1 \frac{d\bar{u}(s)}{dt} \frac{d\varepsilon(s)}{dt} ds \quad \text{oraz} \quad C = \int_0^1 \left| \frac{d\varepsilon(s)}{dt} \right|^2 ds.$$

Funkcja ta ma minimum w zerze, więc jej pochodna się tam zeruje. Ponieważ funkcja F jest kwadratowa, więc jej pochodną potrafimy bez trudu obliczyć. W zerze jest ona równa $2B$. Mamy zatem równość:

$$F'(0) = 2B = 0.$$

Całkując przez części dostajemy:

$$2B = 2 \int_0^1 \frac{d\bar{u}(s)}{dt} \frac{d\varepsilon(s)}{dt} ds = -2 \int_0^1 \frac{d^2\bar{u}(s)}{dt^2} \varepsilon(s) ds,$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że ε znika na końcach odcinka $[0, 1]$. A zatem

$$\int_0^1 \frac{d^2\bar{u}(s)}{dt^2} \varepsilon(s) ds = 0$$

dla dowolnej funkcji gładkiej ε znikającej w zerze i jedynce. Wynika stąd, że

$$\frac{d^2\bar{u}(t)}{dt^2} = 0$$

dla każdego t w przedziale $(0,1)$ (patrz zadanie 1). Uzyskaliśmy zatem wniosek: jeśli cząstka porusza się tak, jak to opisano powyżej, tzn. minimalizując całkę ze swej energii kinetycznej, to jej przyspieszenie jest zerowe. Otrzymaliśmy zatem wniosek zgodny z II prawem dynamiki Newtona.

Można to wysłowić jeszcze inaczej: gładka funkcja minimalizująca całkę

$$\int_0^1 \left| \frac{dx(s)}{dt} \right|^2 ds$$

w zbiorze gładkich funkcji spełniających warunki brzegowe $x(0) = a, x(1) = b$ rozwiązuje też równanie różniczkowe

$$\frac{d^2x(s)}{dt^2} = 0$$

z warunkami brzegowymi $x(0) = a, x(1) = b$.

7.2 Zasada Dirichleta

Ponieważ n -wymiarowym uogólnieniem pochodnej jest gradient, a laplasjan w jednym wymiarze to druga pochodna, więc jest rzeczą naturalną podejrzewać, że pomiędzy funkcją $\bar{u}$, minimalizującą funkcjonal

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

w zbiorze funkcji gładkich takich, że $u = \phi$ na brzegu Ω , a rozwiązaniem równania

$$\Delta u = 0$$

z warunkiem brzegowym $u = \phi$ na $\partial\Omega$ istnieje jakiś związek. Rzeczywiście, zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1 (Zasada Dirichleta). *Założmy, że Ω jest otwartym, spójnym i ograniczonym zbiorem w $\mathbb{R}^n$. Niech brzeg $\partial\Omega$ tego zbioru będzie gładki. Rozważmy funkcjonal I , określony dla wszystkich funkcji u ze zbioru*

$$K = \{u : u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), u = \phi \text{ na } \partial\Omega\}$$

wzorem

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Niech $u \in K$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- i) u jest rozwiązaniem równania $\Delta u = 0$
- ii) $\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = 0$ dla każdej funkcji należącej do $C_0^\infty(\Omega)$
- iii) $I(u) \leq I(v)$ dla każdej funkcji $v \in K$.

Dowód — patrz Zadania 7.2, 7.3 i 7.4.

7.3 O pewnym funkcjonale na przestrzeni Hilberta

Zasada Dirichleta sugeruje, że w badaniu równań różniczkowych istotną rolę mogą pełnić twierdzenia o minimalizowaniu pewnych funkcjonałów. Aby rozważyć szerszą klasę zagadnień, a jednocześnie nie wejść na silnie abstrakcyjny poziom, ograniczymy nasze zainteresowanie do przestrzeni Hilberta. Rozpatrzmy zatem przestrzeń Hilberta H z normą $\|u\|$, wyznaczoną przez iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Rozważmy też funkcjonal

$$I(u) = \|u\|^2 + 2L(u),$$

gdzie L jest liniowym ciągłym funkcjonalem na H . Rozważany funkcjonal jest swego rodzaju uogólnieniem funkcji kwadratowej

$$f(x) = x^2 + 2bx$$

na przypadek nieskończonego wymiaru przestrzeni Hilberta H . Funkcja f ma oczywiście swoje minimum. Jest ono osiągane dla $\bar{x}$, które jest rozwiązaniem równania:

$$x + b = 0.$$

Zobaczmy teraz, że podobnie rzecz się ma z funkcjonalem I .

Twierdzenie 7.2. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta z normą $\|\cdot\|$ wyznaczoną przez iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech I będzie funkcjonalem danym wzorem:*

$$I(u) = \|u\|^2 + 2L(u),$$

gdzie L jest liniowym i ciągłym funkcjonalem na H . Wtedy I osiąga swoje minimum dla dokładnie jednego $\bar{u} \in H$:

$$I(\bar{u}) = \inf_{v \in H} I(v).$$

Dowód. Po pierwsze zauważamy, że funkcjonal I jest ograniczony z dołu - zadanie 7. Istnieje więc kres dolny wartości I osiąganych na H . Oznaczmy ten kres literą M i rozważmy ciąg $u_n \in H$ taki, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = M.$$

Wykazujemy teraz, że ciąg ten jest ciągiem Cauchy'ego - patrz zadanie 8. Ciąg ten ma więc granicę w przestrzeni Hilberta: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Łatwo zauważamy, że $I(u) = M$. Dowód jednoznaczności — patrz Zadanie 7.9.

Kolejne twierdzenie pokazuje, jaki jest związek minimalizowania funkcjonału I z rozwiązaniem pewnego równania w przestrzeni Hilberta H .

Twierdzenie 7.3. *Jeśli $\bar{u} \in H$ minimalizuje funkcjonal $I(u) = \|u\|^2 + 2L(u)$, rozważany w Twierdzeniu 7.2, to jest ono rozwiązaniem równania*

$$\langle u, v \rangle + L(v) = 0 \quad \forall v \in H.$$

Dowód — patrz Zadanie 7.10.

7.4 Zastosowanie w teorii równań różniczkowych

Aby zastosować twierdzenia z poprzedniego podrozdziału do równań różniczkowych, wprowadzimy najpierw pojęcie słabego rozwiązania.

Dla różnych równań słabe rozwiązania można definiować rozmaicie. Przedstawimy więc tę technikę na konkretnym przykładzie. Więcej przykładów — patrz rozdział 8, poświęcony lematowi Laxa i Milgrama.

Rozważmy zatem równanie Poissona:

$$-\Delta u = f.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez gładką funkcję φ , znikającą na brzegu obszaru Ω , a następnie całkując przez części, uzyskamy równość:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

A zatem każde klasyczne rozwiązanie równania Poissona spełnia powyższą tożsamość całkową dla każdej gładkiej funkcji φ . Prowadzi nas to do następującej definicji.

Definicja 7.1. Słabym rozwiązaniem równania Poissona

$$-\Delta u = f \quad \text{w } \Omega$$

z warunkiem brzegowym $u = 0$ na $\partial\Omega$ nazywamy funkcję $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ taką, że

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

dla wszystkich funkcji $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Wykażemy teraz istnienie słabego rozwiązania równania Poissona z zerowym warunkiem brzegowym dla funkcji $f \in L^2(\Omega)$. Rozważmy w tym celu funkcjonal

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int_{\Omega} f(x)u(x) dx.$$

Jest to funkcjonal postaci rozpatrywanej poprzednio:

$$I(u) = \langle u, u \rangle + 2L(u).$$

Rzeczywiście, z nierówności Poincarégo wynika, że iloczyn skalarny w $W_0^{1,2}(\Omega)$ można określić następująco:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Ponadto L jest oczywiście liniowy i ciągły, gdyż jest ograniczony:

$$|L(u)| = \left| \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

A zatem z udowodnionego poprzednio twierdzenia wynika, że istnieje dokładnie jedno $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ minimalizujące funkcjonal I , a w konsekwencji dokładnie jedno rozwiązanie równania:

$$\langle u, v \rangle + L(u) = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Istnieje więc dokładnie jedno słabe rozwiązanie równania Poissona.

7.5 Zadania

Zadanie 7.1. Niech Ω będzie otwartym zbiorem w R^n . Wykazać, że jeśli $f \in L^1(\Omega)$ oraz

$$\int f \varphi = 0$$

dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, to $f = 0$ prawie wszędzie.

Zadanie 7.2. Udowodnić wynikanie $i) \Rightarrow ii)$ w Twierdzeniu 7.1.

Zadanie 7.3. Udowodnić wynikanie $ii) \Rightarrow iii)$ w Twierdzeniu 7.1.

Zadanie 7.4. Udowodnić wynikanie $iii) \Rightarrow i)$ w Twierdzeniu 7.1.

Zadanie 7.5. Wykazać tożsamość równoległoboku:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

dla normy w przestrzeni Hilberta H .

Zadanie 7.6. Wykazać twierdzenie Riesz o reprezentacji: dla każdego ciągłego funkcjonału liniowego L na przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ istnieje dokładnie jeden element $v \in H$ taki, że

$$L(u) = \langle u, v \rangle$$

dla wszystkich $u \in H$.

Zadanie 7.7. W oparciu o twierdzenie Riesz wykazać, że funkcjonal I , rozważany w Twierdzeniu 7.2, jest ograniczony z dołu.

Zadanie 7.8. Posługując się tożsamością równoległoboku, udowodnić, że ciąg u_n rozpatrywany w Twierdzeniu 7.2 jest ciągiem Cauchy'ego

Zadanie 7.9. Wykazać, że istnieje tylko jedna funkcja $\bar{u}$, dla której funkcjonal I , rozpatrywany w Twierdzeniu 7.2, przyjmuje najmniejszą wartość.

Zadanie 7.10. Wykazać Twierdzenie 7.3.

Zadanie 7.11. Zdefiniować słabe rozwiązanie równania:

$$\Delta u = 0 \quad \text{w } \Omega$$

z warunkiem brzegowym $u = \psi$ na brzegu Ω , gdzie ψ jest śladem funkcji $\Psi \in W^{1,2}(\Omega)$. Następnie wykazać istnienie słabego rozwiązania.

Zadanie 7.12. Zdefiniować słabe rozwiązanie równania:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{w } \Omega$$

z warunkiem brzegowym $u = 0$ na brzegu Ω . Powyżej $f \in L^2(\Omega)$. Następnie wykazać istnienie słabego rozwiązania.

Rozdział 8

Lemat Laxa–Milgrama

8.1 Wprowadzenie

8.1.1 Idea słabego rozwiązania

W tym rozdziale zajmiemy się pytaniem o istnienie rozwiązań dla liniowych zagadnień eliptycznych. Konkretnie, będą nas interesowały równania typu

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u(x)_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u(x)_{x_i} + c(x)u(x) = f(x) \quad (8.1)$$

w pewnym obszarze zawartym w $\mathbb{R}^n$. Będziemy rozpatrywać różne warunki brzegowe.

Ponieważ z poprzednich wykładów znamy już pojęcie słabych pochodnych, ograniczymy się do pytania, czy istnieje rozwiązanie równania (8.1) należące do odpowiedniej przestrzeni Sobolewa. Można sobie bowiem wyobrazić, że próba szukania rozwiązania klasycznego jest w ogólności trudna.

Ułatwimy sobie zadanie jeszcze bardziej: zdefiniujemy pojęcie słabego rozwiązania, tzn. takiego rozwiązania, od którego wymagać będziemy jedynie, by miało słabe pochodne pierwszego rzędu. Ponieważ jest to miarę jasne, że definicja takiego rozwiązania musi zależeć zarówno od samego równania, jak i od warunków brzegowych, podamy tu jedynie jej ideę. Konkretnie słabe sformułowania wypiszemy w podrozdziale z przykładami, gdzie będziemy rozpatrywać zagadnienia wyposażone w warunki brzegowe.

Aby wyprowadzić słabą postać rozpatrywanego zagadnienia, mnożymy (8.1) stronami przez funkcję $\phi = \phi(x)$, a potem (formalnie) całkujemy po obszarze Ω . W wyrazach najwyższego rzędu wykonujemy jeszcze całkowanie przez części, otrzymując

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} \phi_{x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i}) \phi \cdot n_j d\sigma \\ + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u \right) \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Jak widać, otrzymujemy wyrazy, w których nie ma już pochodnych drugiego rzędu. Aby ten wzór miał sens, wystarczy żądać, żeby funkcja u miała jedynie pierwsze słabe pochodne. Wszystkie wyrażenia podcałkowe muszą być oczywiście całkowalne.

Dodatkowo, ponieważ równanie (8.2) ma być słabym sformułowaniem dla zagadnienia (8.1), powinno zawierać informacje o warunkach brzegowych.

Funkcję u będziemy więc nazywać słabym rozwiązaniem danego zagadnienia, jeśli będzie należeć do odpowiedniej przestrzeni Sobolewa oraz będzie spełniać powyższą tożsamość dla wszystkich funkcji ϕ z tej samej przestrzeni Sobolewa. Precyzyjne definicje pojawią się za chwilę.

Zwróćmy uwagę na to, że lewą stronę (8.2) możemy traktować jako formę dwuliniową, określoną na produkcie odpowiednich przestrzeni Sobolewa.

Do dowodzenia, że słabe rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne, może posłużyć Lemat Laxa–Milgrama, który przytaczamy nieco niżej.

8.1.2 Dlaczego akurat tak?

Spróbujmy również krótko wyjaśnić, skąd pojawia się pomysł szukania słabych rozwiązań.

Znając pojęcie słabej pochodnej czy pojęcie pochodnej dystrybucyjnej, możemy rozszerzyć klasę obiektów mogących pojawić się po prawej stronie równania (8.1). Możemy rozpatrywać f , które nie jest funkcją ciągłą, albo nawet w ogóle nie jest funkcją, tylko dystrybucją.

Kolejną przyczyną, dla której warto szukać słabych rozwiązań jest fakt, iż często dużo łatwiej znaleźć takie rozwiązania, niż rozwiązania klasyczne. Przede wszystkim, równania postaci (8.1) mogą być dosyć skomplikowane (choćby z uwagi na fakt, iż współczynniki a , b i c są funkcjami zależnymi od x). Dodatkowo idea słabego rozwiązania obejmuje nie tylko równania typu (8.1), ale i równania nieliniowe, zwykle dużo trudniejsze.

Zauważmy, że postać słabego sformułowania (8.2) oraz przestrzenie, w których słabych rozwiązań się poszukuje, umożliwiają stosowanie przeróżnych metod analizy funkcjonalnej. Dysponujemy więc potężnym aparatem, dzięki któremu dostajemy ‘jakieś’ rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia. Następnym krokiem może być próba wykazania, iż takie słabe rozwiązanie jest w rzeczywistości bardziej regularną funkcją, a być może nawet rozwiązaniem klasycznym, czyli funkcją należącą do przestrzeni $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Jeśli tak jest, to u spełniająca tożsamość całkową (8.2), spełnia również wyjściowe równanie (8.1). Wystarczy tu wykonać całkowanie przez części. (Patrz następny rozdział, o lemacie Weyla).

8.1.3 Lemat Laxa–Milgrama

Przytoczmy tu jedynie sformułowanie tego lematu. Dowód można znaleźć np. w monografii Evansa [8].

Lemat 8.1. *Niech $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową*

(i) *ograniczoną, tzn. taką, że*

$$|B[u, \phi]| \leq c \|u\|_H \|\phi\|_H$$

dla pewnej stałej dodatniej c , wspólnej dla wszystkich $u \in H, \phi \in H$;

(ii) eliptyczną, tzn. taką, że

$$B[u, u] \geq d \|u\|_H^2$$

dla pewnej stałej dodatniej d , wspólnej dla wszystkich $u \in H$.

Ponadto, niech f będzie funkcjonalem liniowym ciągłym na przestrzeni H .

Wtedy istnieje dokładnie jeden element $u \in H$ taki, że tożsamość

$$B[u, \phi] = f[\phi]$$

zachodzi dla wszystkich elementów ϕ przestrzeni H .

Uwaga terminologiczna. Zamiast użytej w drugim założeniu nazwy *eliptyczna* spotyka się także czasem przymiotnik *koercywna*, który jest kalką od angielskiego słowa *coercive*. Czasownik *to coerce* znaczy wymuszać.

8.1.4 Nierówności Poincarégo

Zanim podamy przykłady zagadnień, zacytujemy w tym rozdziale przydatne często w dowodzeniu eliptyczności formy B nierówności Poincarégo.

Lemat 8.2. Niech $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dla ograniczonego, spójnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje stała c taka, że

$$\|u\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Lemat 8.3. Niech $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dla ograniczonego, spójnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \right\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p},$$

gdzie $|\Omega|$ oznacza miarę obszaru Ω .

8.2 Przykłady zagadnień brzegowych

Teraz skoncentrujemy się na konkretnych zagadnieniach brzegowych i zobaczymy, w jaki sposób działa przedstawiona wyżej teoria.

Zacznijmy od prostego równania z jednorodnym warunkiem Dirichleta na brzegu.

Przykład 8.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem o brzegu klasy C^1 . Rozważmy zagadnienie

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{w } \Omega, \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8.3}$$

gdzie $f \in L^2(\Omega)$.

Pokażemy, że istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie równania (8.3).

Zacznijmy od zdefiniowania pojęcia słabego rozwiązania dla tego właśnie zagadnienia. Na początek, pomnożmy równanie przez funkcję ϕ i scałkujmy po Ω . Otrzymamy

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} f \phi \, dx, \quad (8.4)$$

gdzie $\vec{n}$ jest jednostkowym wektorem normalnym zewnętrznym do obszaru Ω .

Zauważmy, że powyższa tożsamość całkowa ma sens przy bardzo skromnych założeniach. Poszczególne całki są dobrze określone dla wszystkich funkcji, które mają — zaledwie! — słabe pochodne pierwszego rzędu, takie, że wyrażenia podcałkowe są funkcjami całkowalnymi. Zatem wystarczy, by $u, \phi \in W^{1,2}(\Omega)$. Dodatkowo, rozpatrujemy zagadnienie z zerowym warunkiem Dirichleta na brzegu. Uwzględnimy ten warunek, żądając, aby funkcja u miała zerowy ślad. Dlatego rozwiązań będziemy szukać w przestrzeni Hilberta $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Spójrzmy teraz na całkę brzegową. Szukamy rozwiązań, które mają zerowy ślad na brzegu. Funkcja ϕ ma należeć do tej samej przestrzeni Hilberta, co u , więc $\phi = 0$ na $\partial\Omega$. Zatem całka brzegowa znika.

Możemy więc uściślić, co rozumiemy przez słabe rozwiązanie zagadnienia (8.3).

Definicja 8.1. Funkcję $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nazwiemy słabym rozwiązaniem zagadnienia (8.3), jeśli tożsamość całkowa (8.4) zachodzi dla dowolnej funkcji $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Aby wykazać, że takie słabe rozwiązanie istnieje, skorzystamy z lematu Laxa–Milgrama. W tym celu zauważmy, że $B[u, \phi] = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx$ jest formą dwuliniową określoną na $H \times H$, jeśli za H przyjmiemy $W_0^{1,2}(\Omega)$. Zatem możemy przepisać tożsamość (8.4) jako

$$B[u, \phi] = f[\phi],$$

gdzie $f[\phi] = \int_{\Omega} f \phi \, dx$.

Wystarczy więc sprawdzić, że forma dwuliniowa B jest ograniczona i eliptyczna.

Ograniczoność wynika z nierówności Cauchy’ego:

$$|B[u, \phi]| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

co w sposób oczywisty szacuje się przez $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$.

Aby pokazać eliptyczność, musimy oszacować formę

$$B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$$

od dołu przez pełną normę u w $W_0^{1,2}(\Omega)$. Takie oszacowanie jest mniej oczywiste, ale wynika z nierówności Poincarégo. Mamy bowiem

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq \min \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2c} \right) \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2,$$

gdzie c jest stałą z nierówności Poincarégo. Zatem forma B jest eliptyczna.

Jeśli chodzi o prawą stronę (8.4), to tak określony funkcjonał jest liniowym funkcjonałem ciągłym na H . Mamy bowiem

$$\left| \int_{\Omega} f \phi \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Zauważmy, że aby zagadnienie (8.3) miało słabe rozwiązanie, f nie musi wcale być funkcją całkowalną z kwadratem. W powyższym oszacowaniu wykorzystaliśmy jedynie fakt, iż $\phi \in L^2(\Omega)$, podczas gdy funkcja ta ma większą regularność. Tak więc f może należeć do przestrzeni funkcjonałów liniowych ograniczonych na $W_0^{1,2}(\Omega)$, czyli przestrzeni $H^{-1}(\Omega)$. Wtedy prawą stronę (8.4) należy zastąpić wyrażeniem $f[\phi]$.

Przykład 8.2. Popatrzmy na inne zagadnienie:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0 && \text{na } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u &= 0, \end{aligned} \tag{8.5}$$

gdzie $f \in L^2(\Omega)$.

Najpierw zauważmy, że gdyby nie warunek zerowania się całki, to zagadnienie nie mogłoby mieć jednoznacznie określonego rozwiązania. Rzeczywiście, jeśli rozwiązanie istnieje, to również funkcje różniące się od niego o stałą są rozwiązaniami. Zatem warunek całkowy pozwala ‘wybrać’ jedno konkretne rozwiązanie.

Zacznijmy od słabego sformułowania. Postępując tak, jak w poprzednim przykładzie, dochodzimy do równości

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} f \phi \, dx,$$

gdzie $\vec{n}$ jest jednostkowym wektorem normalnym zewnętrznym do obszaru Ω . Tym razem jednak z innego powodu znika całka brzegowa: na brzegu zeruje się pochodna normalna funkcji u . Zatem słabe sformułowanie dla zagadnienia (8.5) ma postać

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx.$$

Forma dwuliniowa B wygląda tak samo, jak poprzednim przykładzie:

$$B[u, \phi] = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx.$$

Tym razem dziedziną B jest jednak inna przestrzeń Hilberta. Wciąż wymagamy od funkcji u i ϕ , aby należały do przestrzeni $W^{1,2}(\Omega)$. Nie żądamy jednak oczywiście, aby miały zerowy ślad. Takiego warunku brzegowego bowiem nie mamy. Co więcej, warunku o zerowaniu się wyrażenia

$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega}$ nie możemy uwzględnić w definicji przestrzeni. Jest on bowiem źle określony dla funkcji z $W^{1,2}(\Omega)$; twierdzenie o śladzie nawet w najmocniejszej dostępnej wersji nie pozwala zdefiniować $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega}$, gdy wiemy jedynie, że $u \in W^{1,2}$. Uwzględniamy natomiast warunek zerowania się całki funkcji u . Podsumowując, przyjmujemy

$$H = W^{1,2}(\Omega) \cap \left\{ u : \int_{\Omega} u = 0 \right\}.$$

Ograniczoność formy B sprawdza się dokładnie tak samo, jak w poprzednim zagadnieniu. Eliptryczność wynika z nierówności Poincarégo, która jest treścią Lematu 8.3.

Ponieważ na razie skupiliśmy się na różnych warunkach brzegowych, rozpatrzmy jeszcze warunek postaci $(u + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_{\partial\Omega} = 0$.

Przykład 8.3. Jeśli rozważymy zagadnienie

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f && \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + u &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

jego słaba postać będzie wyglądać następująco

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{\Omega} u \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx. \quad (8.6)$$

Zauważmy przede wszystkim, że w całce brzegowej nie możemy zostawić pochodnej normalnej funkcji u , ale musimy ją ‘wymienić’ zgodnie z warunkiem brzegowym. W przeciwnym razie, otrzymana forma dwuliniowa byłaby źle określona dla funkcji z przestrzeni $W^{1,2}(\Omega)$, w której poszukujemy rozwiązań. Warunek brzegowy został już uwzględniony przy wyprowadzeniu słabego sformułowania. Co więcej z uwagi na to, że występuje w nim pochodna na brzegu, nie możemy umieścić go w definicji przestrzeni, do której ma należeć słabe rozwiązanie. Stąd $H = W^{1,2}(\Omega)$.

Forma dwuliniowa jest postaci

$$B[u, \phi] = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \int_{\partial\Omega} u \phi \, d\sigma + \int_{\Omega} u \phi \, dx.$$

Tym razem jej ograniczoność wynika z twierdzenia o śladzie. Pozwala ono oszacować

$$\int_{\partial\Omega} u \phi \, d\sigma \leq c \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Eliptryczność natomiast jest oczywista

$$B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} u^2 \, d\sigma \geq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2.$$

Ponieważ w powyższych przykładach rozpatrywaliśmy jedynie przypadki, kiedy operator różniczkowy najwyższego rzędu był laplasjanem, popatrzmy na następujące równanie

Przykład 8.4. Niech A będzie symetryczną, dodatnio określoną macierzą rozmiaru 2×2 . Załóżmy, że Ω jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, a funkcja $f \in L^2(\Omega)$. Wtedy zagadnienie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w słabym sensie.

Słabych rozwiązań szukamy w przestrzeni $W_0^{1,2}(\Omega)$. Forma dwuliniowa odpowiadająca temu zagadnieniu ma postać

$$B[u, v] = \int_{\Omega} (A\nabla u) \nabla v \, dx.$$

Aby pokazać jej eliptyczność, przypomnijmy, że jeśli macierz A jest dodatnio określona, to istnieje dodatnia stała λ taka, że

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

dla $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. To z kolei oznacza, iż

$$\int_{\Omega} (A\nabla u) \nabla u \, dx \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Powyższa nierówność wraz z nierównością Poincarégo implikuje eliptyczność formy B . Jej ograniczoność jest łatwa do pokazania.

8.3 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 8.1. Załóżmy, że $\Omega = B(0, 2) \subset \mathbb{R}^2$. Dla jakich wartości dodatniego parametru k następujące zagadnienie ma dokładnie jedno słabe rozwiązanie?

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{x_1}{120} u &= \frac{1}{|x|^k} && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.2. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym oraz $f \in L^2(\Omega)$. Wykazać istnienie słabych rozwiązań następującego zagadnienia

$$\begin{aligned} -u_{xx} - 4u_{yy} + u_x + u_y + 5u &= f && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym oraz $f \in L^2(\Omega)$. Wykazać istnienie słabych rozwiązań następującego zagadnienia

$$\begin{aligned} -u_{xx} - 4u_{yy} + u_x + u_y + 5u &= f && \text{w } \Omega \\ u &= 2 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.4. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym. Wykazać istnienie słabych rozwiązań zagadnienia

$$\begin{aligned} -u_{xx} - 2u_{yx} - 3u_{yy} + u_x &= x && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.5. Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest ograniczonym obszarem. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zagadnienie jest dobrze postawione w słabym sensie?

$$\begin{aligned} 2u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= \frac{1}{|x|^\alpha} && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.6. Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczonym obszarem. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zagadnienie jest dobrze postawione w słabym sensie?

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy}u_{zz} &= |x|^\alpha \ln |x| && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.7. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym. Dla jakich parametrów rzeczywistych k zagadnienie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \nabla u \right) &= (\ln |x|)_{x_1} && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w słabym sensie?

Zadanie 8.8. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym. Wykazać, że następujące zagadnienie jest dobrze postawione w słabym sensie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \nabla u \right) &= \frac{1}{|x|} && \text{w } \Omega \\ \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \nabla u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u &= 0. \end{aligned}$$

Zadanie 8.9. Niech $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ dla $n > 1$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ zagadnienie

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{n-1}{|x|} + a && \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0 && \text{na } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u \, dx &= 0 \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w słabym sensie?

Zadanie 8.10. Czy następujące zagadnienie jest dobrze postawione w słabym sensie?

$$\begin{aligned} -u_{xxxx} &= 1 - \delta_0 && \text{na } (-1, 1), \\ u(-1) &= u(1) = 0, && u_x(-1) = u_x(1) = 0. \end{aligned}$$

W powyższym równaniu δ_0 oznacza Deltę Diraca.

Zadanie 8.11. Załóżmy, że $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ oraz $f \in L^{2n/(n+2)}(\Omega)$. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zagadnienie

$$\begin{aligned} -\Delta u - \alpha|x|^2 u &= f && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w słabym sensie?

Zadanie 8.12. Niech $\Omega = B(0, R) - \overline{B(0, r)}$ będzie pierścieniem w $\mathbb{R}^2$. Przez Γ_1 oznaczmy zewnętrzną część brzegu, przez Γ_2 natomiast wewnętrzną. Rozpatrzmy zagadnienie

$$\begin{aligned} -\Delta u + 2u &= \ln|x| && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0 && \text{na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Czy jest ono dobrze postawione w słabym sensie?

Zadanie 8.13. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym a $f \in L^2(\mathbb{R})$. Wykazać istnienie słabego rozwiązania zagadnienia

$$\begin{aligned} \Delta u - u &= f && \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.14. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym a $f \in L^p(\mathbb{R})$ dla pewnego $p \in [1, \infty)$. Dla jakich p istnieje słabe rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f && \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.15. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem o ograniczonym. Rozważmy ciąg zagadnień

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}((k_j(x) + 1)\nabla u_j) + u_j &= 1 && \text{w } \Omega \\ u_j &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8.7)$$

gdzie $k_j(x) \in L^\infty(\Omega)$ są funkcjami dodatnimi, $j = 1, 2, 3, \dots$

Niech $k_j \rightarrow k$ w normie $L^\infty(\Omega)$ przy $j \rightarrow \infty$. Wykazać, że funkcje u_j będące słabymi rozwiązaniami (8.7) zbiegają w normie $W^{1,2}(\Omega)$ do funkcji u , która jest słabym rozwiązaniem problemu

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}((k(x) + 1)\nabla u) + u &= 1 && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 8.16. Niech $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Rozważmy ciąg zagadnień

$$\begin{aligned} -\Delta u_j + \frac{1}{j}u_j &= f_j && \text{w } \Omega \\ u_j &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8.8)$$

gdzie $f_j(x) \in L^2(\Omega)$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Niech $f_j \rightarrow f$ w normie $L^2(\Omega)$ przy $j \rightarrow \infty$. Wykazać, że funkcje u_j , będące słabymi rozwiązaniami (8.8), zbiegają w normie $W^{1,2}(\Omega)$ do funkcji u , która jest słabym rozwiązaniem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{w } \Omega \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Rozdział 9

Lemat Weyla

9.1 Naturalne pytania

Czytelnika, który przeczytał rozdziały 2, 7 i 8, mogą, mimo komentarzy wplecionych w tekst tych rozdziałów, niepokoić, a nawet dręczyć, następujące — skądinąd bardzo naturalne — pytania i wątpliwości:

1. Skoro rozwiązania równań Laplace’a czy Poissona można konstruować i badać metodami, wspomnianymi w rozdziale 2, np. stosując Twierdzenie 2.1, to po co rozważać jakieś skomplikowane *słabe rozwiązania*, wymagające wszak solidnego i abstrakcyjnego aparatu analitycznego?

W dodatku, funkcje z przestrzeni Sobolewa mogą być nieciągłe. W wymiarach $n \geq 2$ wiedza, że $u \in W^{1,2}(\Omega)$ nie daje przecież gwarancji, że u jest choćby ciągła. Świadczy o tym przykład, podany w Zadaniu 5.5. Zatem, słabe rozwiązanie, uzyskane np. dzięki lematowi Laxa i Milgrama lub dzięki minimalizacji odpowiednio dobranego funkcjonału na jakiejś przestrzeni Hilberta, może — przynajmniej *a priori* — być funkcją nieciągłą, i to (teoretycznie) w bardzo paskudny sposób, nawet na całej swojej dziedzinie, tak jak funkcja, o której mowa w Zadaniu 5.6.

A metody klasyczne pozwalają uzyskać rozwiązania gładkie, tzn. w *jakimś sensie lepsze*, więc dlaczego nie ograniczyć się do nich?

2. Równanie Laplace’a na kuli (ale i na obszarach ograniczonych z gładkim brzegiem) ma rozwiązania klasy C^∞ . Podobnie jest z równaniem Poissona $\Delta u = f$, gdy $f \in C^\infty$. Czy, konstruując słabe rozwiązania tych równań, odnajdujemy w istocie te same rozwiązania, które widzieliśmy wcześniej, tylko wskutek przyjętych metod nie wiemy, że mamy do czynienia z funkcjami gładkimi?

Może zaś produkujemy jakieś zupełnie inne, bardzo nieregularne funkcje, które spełniają równania tylko w słabym sensie i nie są np. klasy C^2 ?

3. Czy są sytuacje, gdy można wykazać, że słabe rozwiązanie równania cząstkowego jest w

istocie rozwiązaniem klasycznym, różniczkowalnym w sposób ciągły tyle razy, że wszystkie pochodne występujące w równaniu są funkcjami ciągłymi?

Pełne odpowiedzi na powyższe pytania wykraczają znacznie poza zakres tego tekstu. Dość powiedzieć, że dla równań eliptycznych drugiego rzędu ostatnie z powyższych pytań, w nieznacznie zmienionej wersji, było treścią jednego z problemów Hilberta, a na odpowiedź, która pojawiła się wskutek długiej, wieloetapowej pracy licznych sławnych matematyków,¹ trzeba było poczekać blisko 60 lat. (Nic więc dziwnego, że i dziś nie można się nauczyć, co to są słabe rozwiązania, nie wkładając w to pewnego wysiłku...).

Jedna z możliwych odpowiedzi na pierwsze pytanie — dlaczego w ogóle rozważać słabe rozwiązania? — polega na tym, że warto mieć abstrakcyjny aparat, który pozwala oddzielić pytanie o samo *istnienie* rozwiązań, od pytań o ich *regularność*. Zastępując przestrzeń C^k którąś z przestrzeni Sobolewa $W^{m,p}$, uzyskujemy obszerniejszy zbiór kandydatów na rozwiązanie. Zyskujemy też dodatkowe narzędzia analizy funkcjonalnej, które można stosować. Ponadto zaś, przeprowadzając dowody istnienia, nie musimy dbać o to, by z rozumowania wynikało, że znaleziona funkcja ma ciągłe pochodne do pewnego rzędu włącznie. Musimy wykazać mniej, więc można mieć nadzieję, że będzie to łatwiejsze. I, jak można było zauważyć w dwóch poprzednich rozdziałach, to istotnie bywa łatwiejsze.

Cena, jaką trzeba zapłacić za tę wygodę, jest taka, że uzyskujemy mniej informacji; stąd biorą się pytania drugie i trzecie. W prostych sytuacjach można udzielić na nie skromnych, ale w gruncie rzeczy pełnych odpowiedzi. Tym się teraz zajmiemy. Zaczniemy od tego, co najłatwiejsze: jeśli mamy do czynienia z funkcjami o odpowiedniej gładkości, to wszystko jedno, czy mowa jest o rozwiązaniach słabych, czy rozwiązaniach klasycznych.

Zadanie 9.1. Wykazać, że jeśli funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolnym zbiorem otwartym, jest słabym rozwiązaniem równania Laplace’a w Ω , tzn.

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \text{dla każdej } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

to $\Delta u = 0$ w każdym punkcie Ω .

Szkic rozwiązania. Posługując się założeniem $u \in C^2$, wykonać w równości $\int \nabla u \nabla \varphi \, dx = 0$ jedno całkowanie przez części, a następnie posłużyć się wynikiem Zadania 7.1.

Okazuje się, że założenie, iż $u \in C^2$, jest w Zadaniu 9.1 niepotrzebne. Mówi o tym

Twierdzenie 9.1 (lemat Weyla, wersja I). *Jeśli funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolnym zbiorem otwartym, jest słabym rozwiązaniem równania Laplace’a w Ω , tzn.*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \text{dla każdej } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

to wówczas $u \in C^\infty(\Omega)$ i $\Delta u = 0$ w każdym punkcie Ω .

¹Należeli do nich m.in. wspomniani we wcześniejszych rozdziałach Sobolew i Morrey, a także Weyl, De Giorgi, Nash i Moser; pełna lista byłaby znacznie dłuższa.

Wspomnijmy, że twierdzenie zwane zwykle lematem Weyla jest mocniejsze i dotyczy wszystkich rozwiązań dystrybucyjnych równania Laplace'a, nie tylko zaś takich rozwiązań dystrybucyjnych, które są funkcjami z przestrzeni $W^{1,2}$.

Twierdzenie 9.2 (lemat Weyla, wersja II). *Jeśli dystrybucja $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ spełnia równanie Laplace'a, tzn.*

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = 0 \quad \text{dla każdej } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

to wówczas $u \in C^\infty(\Omega)$ i $\Delta u = 0$ w każdym punkcie Ω .

Podobne twierdzenia można uzyskiwać dla słabych rozwiązań równań eliptycznych i parabolicznych. Więcej informacji znajdzie Czytelnik w podręczniku Evansa [8] (patrz np. Twierdzenie 3 w podrozdziale 6.3, Twierdzenie 7 w podrozdziale 7.1, a także podrozdział 8.3, dotyczący równań nieliniowych).

Dowód twierdzenia 9.1 można przeprowadzić kilkoma sposobami. Wskażemy dwie z możliwych dróg, posługując się odpowiednio dobranymi zadaniami.

Wprowadźmy pomocnicze pojęcie tzw. *jedynek aproksymatywnej*. Niech $\psi \in C_0^\infty(B(0, 1))$ będzie ustaloną nieujemną funkcją gładką na $\mathbb{R}^n$, o nośniku zawartym w kuli jednostkowej $B(0, 1)$ i o całce $\int \psi = 1$. Połóżmy, dla $\varepsilon > 0$,

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi(x/\varepsilon).$$

(To właśnie jest jedynka aproksymatywna; dla $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje ψ_ε są coraz lepszymi przybliżeniami delta Diraca; tej intuicji można nadać ścisły sens). Oznaczmy

$$u_\varepsilon := u * \psi_\varepsilon.$$

Jeśli u jest funkcją lokalnie całkowaną na $\mathbb{R}^n$, to spłot u_ε jest funkcją gładką (klasy C^∞).

Pierwszy z dowodów Twierdzenia 9.1 korzysta z liniowości równania Laplace'a, własności klasycznych funkcji harmoniczných i własności spłotu.

Zadanie 9.2. Wykazać, że jeśli funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania Laplace'a w Ω , to spłot $u_\varepsilon = u * \psi_\varepsilon$ jest dobrze określony w każdym punkcie zbioru

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

i spełnia w tym zbiorze równanie Laplace'a $\Delta u_\varepsilon = 0$ (w sensie klasycznym).

Wskazówka. Wykazać, że u_ε jest słabym rozwiązaniem równania Laplace'a w Ω_ε , a następnie posłużyć się wynikiem Zadania 9.1.

Zadanie 9.3. Przekonać się, że teza poprzedniego zadania połączona z własnościami funkcji harmoniczných, podanymi w Zadaniach 2.5 i 2.6, pociąga za sobą Twierdzenie 9.1 jako natychmiastowy wniosek.

Zadanie 9.4. Wykazać, że w Twierdzeniu 9.1 wystarczyłoby zakładać, że $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Uwaga. W podobny sposób można udowodnić ogólną wersję Lematu Weyla. Nieco inny wariant dowodu Twierdzenia 9.1 podany jest w podrozdziale 7.4 skryptu [22].

Uwaga. Nie jest na ogół prawdą, że słabe rozwiązanie równania cząstkowego ma tyle pochodnych ciągłych, ile potrzeba, żeby wypisać równanie, nie odwołując się do jego dystrybucyjnej interpretacji. Z utratą gładkości mamy często do czynienia w równaniach hiperbolicznych.

Najprostszy przykład takiej sytuacji można znaleźć w podrozdziale 15.1, analizując zachowanie rozwiązań równania struny (15.6). Wszystkie rozwiązania są dane wzorem d'Alemberta (15.8). Ktoś, kto wie, że istnieją funkcje ciągłe, ale nigdzie nie różniczkowalne, może posłużyć się komentarzem zamieszczonym bezpośrednio po tym wzorze i Definicją 15.2, by bez większego trudu podać przykłady takich słabych rozwiązań równania struny $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, które są wprawdzie klasy C^1 , ale nie mają w żadnym punkcie drugich pochodnych!

9.2 Zadania

Zadanie 9.5. Uogólnić wynik zadania 9.1 na równania eliptyczne o zmiennych współczynnikach, tzn. udowodnić twierdzenie zawarte w ostatnim zdaniu podrozdziału 8.1.2.

Jedną z technik dowodzenia gładkości rozwiązań równań eliptycznych i parabolicznych polega na tym, że dowodzi się, że słabe rozwiązanie u ma więcej słabych pochodnych, niż a priori zakładamy, a w dodatku (wszystkie lub niektóre) pochodne funkcji u są słabymi rozwiązaniami podobnych równań. Bardziej rozbudowane przykłady takich sytuacji można znaleźć w Rozdziale 11, poświęconym metodzie Galerkin.

Tu, w zadaniach, podamy bardzo prosty, jednowymiarowy przykład takiego sposobu postępowania, oraz wielowymiarową technikę, którą można wykorzystać do dowodzenia gładkości równań eliptycznych o stałych współczynnikach.

Zadanie 9.6. Niech $u \in W_0^{1,2}((a, b))$ będzie słabym rozwiązaniem równania $-u'' = \lambda u$ na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$, z warunkami brzegowymi Dirichleta $u(a) = u(b) = 0$. Inaczej mówiąc, zakładamy, że

$$\int_a^b u' \varphi' dx = \lambda \int_a^b u \varphi dx \quad \text{dla wszystkich } \varphi \in C_0^\infty((a, b)).$$

Posługując się wyłącznie definicją słabej pochodnej, wykazać, że funkcja u ma słabe pochodne wszystkich rzędów należące do przestrzeni $L^2((a, b))$. Wywnioskować stąd, że każde słabe rozwiązanie równania $-u'' = \lambda u$ jest funkcją klasy C^∞ .

Wskazówka. Patrz Zadania 5.8 i 6.23.

Zadanie 9.7 (nierówność Caccioppoliego dla równania Laplace'a). Niech $u \in W^{1,2}(\Omega)$ będzie słabym rozwiązaniem równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w Ω i niech $B_r = B(a, r)$ oraz $B_R = B(a, R)$

będą współśrodkowymi kulami o promieniach $0 < r < R < \text{dist}(a, \partial\Omega)$ (punkt a należy do Ω). Wykazać, że dla pewnej stałej C_0 zachodzi tzw. *nierówność Caccioppoliego*

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{C_0}{(R-r)^2} \int_{B_R} |u|^2 dx.$$

Wskazówka. Warunek z definicji słabego rozwiązania zachodzi w istocie dla wszystkich $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$; podstawić $\varphi = \zeta^2 u$, gdzie $\zeta = 1$ na B_r , $\zeta = 0$ poza B_R , $\zeta \in C_0^\infty$, $\zeta \geq 0$; następnie, całkę, w której występuje kwadrat gradientu, umieścić po lewej stronie równości, a inne całki – po prawej stronie.

Zadanie 9.8 (zbieżność pochodnych w L^2). Niech $u \in W^{1,2}(\Omega)$ będzie słabym rozwiązaniem równania Laplace’a $\Delta u = 0$ w Ω . Rozważmy funkcje $u_\varepsilon = u * \psi_\varepsilon$, gdzie $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$ jest jedyłą aproksymatywną, zdefiniowaną wcześniej. Wykazać, że dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ i każdego multiindeksu α istnieje takie $N > 0$, że ciąg funkcji

$$\{D^\alpha u_{1/j}\}_{j=N}^\infty$$

spełnia warunek Cauchy’ego w przestrzeni $L^2(K)$. Wnioskować stąd i z zupełności przestrzeni $W^{m,2}$, że u jest funkcją gładką.

Wskazówka. Czy pochodne funkcji u_ε spełniają równanie Laplace’a? W jakim sensie? Po udzieleniu odpowiedzi na te pytania spróbować posłużyć się wynikiem poprzedniego zadania. (Zbiór zwarty K można pokryć skończoną liczbą małych kul o promieniu $r > 0$, dobranych tak, by nieco większe kule wciąż jeszcze były zawarte w Ω .) W końcu rozumowania wykorzystać Zadanie 6.23.

Jak widać, ostatnie zadanie dostarcza nieco innego dowodu Twierdzenia 9.1. Pewna zaleta wskazanej w nim metody polega na tym, że nie musimy polegać na bardzo szczególnej własności funkcji harmonicznych, podanej w Zadaniu 2.6 (chodzi o to, że spłot z funkcją radialną zachowuje harmoniczność); korzystamy jedynie z liniowości spłotu i z eliptyczności, a to nieco mniej. Dlatego podobnie można postępować z innymi równaniami.

Zadanie 9.9 (gładkość funkcji własnych laplasjanu). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym. Sprawdzić, że tezy obu powyższych zadań pozostają w mocy, gdy zamiast słabych rozwiązań równania Laplace’a rozpatrujemy słabe rozwiązania $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ równania

$$-\Delta u = \lambda u$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest stałą.

Rozdział 10

Słaba zbieżność w przestrzeniach Hilberta

W tym rozdziale skupimy się na przedstawieniu podstawowych faktów i twierdzeń z analizy funkcjonalnej, potrzebnych do wprowadzenia słabej zbieżności ciągów w przestrzeniach Hilberta. Z punktu widzenia równań różniczkowych cząstkowych wystarczy ograniczyć się do rozważania przestrzeni ośrodkowych. Hilbertowskie przestrzenie nieośrodkowe występują dość często w zastosowaniach fizycznych, lecz są one dość dalekie od głównego nurtu tematów, objętych zwykle wykładem z Równań Różniczkowych Cząstkowych I.

Z podobnych powodów ograniczymy się do przestrzeni Hilberta nad ciałem liczb rzeczywistych. Istnieje uogólnienie teorii na przestrzenie nad ciałem liczb zespolonych, jednak tym nie będziemy się tym zajmować. Podstawowymi przestrzeniami będą tu

$$L^2(\Omega), H_0^1(\Omega), H^m(\Omega).$$

Pamiętamy o konwencji $W_2^m = H^m$. Definicje można znaleźć w rozdziale, poświęconym przestrzeniom Sobolewa.

Zacznijmy od podstawowych definicji.

Definicja 10.1. Niech H będzie przestrzenią Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych, wyposażoną w iloczyn skalarny, tj. w dwuliniowy funkcjonał

$$(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

taki, że

- (i) $(x, x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$;
- (ii) $(x, y) = (y, x)$ dla wszystkich $x, y \in H$;
- (iii) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in H$ i $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (iv) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ dla wszystkich $x, y, z \in H$.

Taką przestrzeń H , z normą

$$\|x\| := (x, x)^{1,2}, \quad x \in H,$$

nazywamy przestrzenią Hilberta.

Definicja 10.2. Mówimy, że $h^* \in H^*$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym na H , jeśli $h^* : H \rightarrow \mathbb{R}$ oraz

$$h^*(\alpha x + \beta y) = \alpha h^*x + \beta h^*y \text{ dla } x, y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych jest przestrzenią Banacha. Nazywamy ją przestrzenią dualną do H i oznaczamy symbolem H^* . Norma w H^* zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\|h^*\| = \sup_h h^*h,$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich $h \in H$ takich, że $\|h\| \leq 1$.

Jeśli H jest przestrzenią Hilberta, to przestrzeń dualną do niej, H^* , można w naturalny sposób utożsamić z samą przestrzenią H . Mówi o tym twierdzenie Riesz o reprezentacji funkcjonału (patrz np. [1], [16]).

Twierdzenie 10.1 (Riesz o reprezentacji). *Niech $h^* \in H$ będzie funkcjonałem liniowym ciągłym na H . Istnieje wtedy element $h \in H$, jednoznacznie wyznaczony przez h^* i taki, że*

$$h^*g = (g, h) \quad \text{dla każdego } g \in H.$$

Będąc tak wyposażeni, możemy wprowadzić główną definicję tego rozdziału.

Definicja 10.3. Mówimy, że ciąg $\{h_n\}$ zbiega słabo do $h \in H$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$(h_n, g) \rightarrow (h, g) \quad \text{dla każdego } g \in H$$

Słabą zbieżność oznaczamy zwyczajowo w następujący sposób

$$h_n \rightharpoonup h \text{ w } H.$$

Oczywiście słaba zbieżność jest implikowana przez silną (w normie), tj. zachodzi implikacja

$$\|h_n - h\| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad h_n \rightharpoonup h.$$

Jednak twierdzenie odwrotne jest nieprawdziwe. Pokazuje to prosty przykład.

Przykład 10.1. Rozważmy ciąg w przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R})$ funkcji

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus [n, n+1) \end{cases} \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots$$

Zauważmy, że

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \text{ oraz } \|u_n - u_m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}(1 - \delta_{mn}),$$

gdzie δ_{mn} jest deltą Kronekera.

Ciąg (u_m) nie ma więc żadnych podciągów Cauchy'ego (silnie zbieżnych). Natomiast dla dowolnej funkcji $v \in L^2(\mathbb{R})$ mamy

$$(u_n, v) = \int_{\mathbb{R}} u_n(x)v(x)dx = \int_n^{n+1} v(x)dx.$$

Zatem, korzystając z nierówności Schwarza, otrzymujemy

$$|(u_n, v)| \leq \left(\int_n^{n+1} v^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

gdyż całka $\int_{\mathbb{R}} v^2 dx$ jest skończona. Na mocy Definicji 10.3 stwierdzamy, że ciąg u_n słabo zbiega do zera w $L^2(\mathbb{R})$, tj.

$$u_n \rightharpoonup 0 \text{ w } L^2(\mathbb{R}).$$

Warto zwrócić uwagę, że słaba zbieżność jest czym innym niż silna, jak również różni się od zbieżności punktowej. W szczególności musimy bardzo uważać, posługując się tym pojęciem w równaniach nieliniowych, gdyż może się zdarzyć tak, że ciąg u_n zbiega słabo do u , ale ciąg u_n^2 wcale nie jest zbieżny do u^2 , nawet jeśli założymy, że ma granicę. Warto podkreślić, że pojęcie słabej zbieżności zdefiniowane jest dla szerokiej klasy przestrzeni Banacha [1]. Dla nas jednak analiza na przestrzeniach Hilberta jest wystarczająca.

Głównym powodem wprowadzenia do teorii równań cząstkowych słabej zbieżności jest poniższe twierdzenie, będące ubogą wersją ogólnego twierdzenia Banacha-Alaoglu, wykorzystującego własności topologii produktowych (patrz [16]). Tu, ograniczając się do ośrodkowych przestrzeni Hilberta, dostajemy następujące twierdzenie, stanowiące podstawę metody Galerkin, przedstawionej w następnym rozdziale.

Twierdzenie 10.2. Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta i niech ciąg $\{u_n\} \subset H$ będzie ograniczony, tj.

$$\sup_n \|u_n\| \leq M.$$

Wtedy istnieje $u \in H$ oraz podciąg $\{u_{n_k}\}$ taki, że

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{w przestrzeni } H \quad \text{oraz} \quad \|u\| \leq M.$$

Dowód. Niech $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie bazą ortonormalną w H . Wtedy każdy element u_n jest sumą zbieżnego w przestrzeni H szeregu

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k w_k,$$

gdzie ciąg współczynników $\{a_n^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dany jest wzorami

$$a_n^k = (u_n, w_k)$$

i należy do przestrzeni l^2 . Warunek $(w_k, w_l) = \delta_{kl}$ implikuje natychmiast równość norm

$$\|u_n\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_n^k)^2.$$

Krok 1. Ustalmy indeks $m \in \mathbb{N}$. Z ograniczoności ciągu $\{u_m\}$ oraz nierówności Schwarz'a otrzymujemy jednostajne oszacowanie ciągu $\{a_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$|a_n^m| \leq |(u_n, w_m)| \leq M \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Możemy zatem wybrać podciąg z ciągu $\{u_n\}$ taki, że

$$v_l^m = u_{n_l^m} \text{ oraz } a_{n_l^m}^m \rightarrow a_*^m$$

dla pewnego $a_*^m \in \mathbb{R}$.

Krok 2 (metoda przekątniowa). Teraz konstruujemy szukany podciąg. Rozważmy podciąg wybrany w poprzednim kroku dla $m = 0$, tj. $\{v_l^0\}$. Następnie wybieramy podciąg z ciągu $\{v_l^0\}$ dla $m = 1$ i nazywamy go $\{v_l^1\}$. Indukcyjnie określamy podciąg $\{v_l^{m+1}\}$ z danego ciągu $\{v_l^m\}$, tak, żeby

$$a_{n_l^{m+1}}^{m+1} \rightarrow a_*^{m+1} \text{ dla } l \rightarrow \infty.$$

By uniknąć niepotrzebnych rozważań, możemy przyjąć, że $n_1^{m+1} > n_m^m$.

Twierdzimy, że podciąg

$$v_l^l = u_{n_l^l}$$

jest szukany ciąg. Zauważmy, że z konstrukcji wynika, że dla ustalonego k ciąg $\{v_l^l\}_{l > k}$ jest podciągiem ciągu $\{v_l^k\}_{l > k}$. Zatem dla każdego k

$$a_{n_l^l}^k \rightarrow a_*^k \text{ dla } l \rightarrow \infty,$$

czyli

$$(v_l^l, w_k) = a_{n_l^l}^k \rightarrow a_*^k \text{ dla } l \rightarrow \infty.$$

Krok 3 (kandydat na granicę). By wykazać, że wybrany ciąg ma słabą granicę, musimy najpierw sprawdzić, że kandydat

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_*^k w_k$$

jest elementem H . Rozważmy aproksymację $u^N = \sum_{k=0}^N a_*^k w_k$ dla $N \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że

$$\|u^N\| = \sup_{\phi} (u^N, \phi),$$

gdzie supremum jest brane po $\phi \in H$ takich, że $\|\phi\| \leq 1$. Mamy ponadto

$$\sup_{\phi} (u^N, \phi) = \sup_{\phi} (u^N, P_N \phi) = \sup_{\phi} \lim_{l \rightarrow \infty} (v_l^l, P_N \phi),$$

gdzie P_N oznacza rzut na przestrzeń rozpiętą przez wektory $w_0, \dots, w_N$ (Czytelnik zechce pomyśleć, dlaczego prawdziwa jest ostatnia równość powyżej). Dlatego

$$\left(\sum_{k=0}^N (a_*^k)^2 \right)^{1/2} = \|u^N\| \leq \sup_{\phi} \lim_{l \rightarrow \infty} \|v_l^l\| \|P_N \phi\| \leq M.$$

Stąd wnioskujemy, że szereg $\sum_k (a_*^k)^2$ jest zbieżny; co za tym idzie,

$$u \in H \text{ oraz } \|u\| \leq M.$$

Krok 4 (słaba zbieżność). Pozostaje pokazać, że u jest słabą granicą $\{v_l^l\}$. Ustalmy $h \in H$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$(v_l^l - u, h) = (v_l^l - u, P_N h) + (v_l^l - u, (Id - P_N)h).$$

Wybermy N tak duże, by

$$\|(Id - P_N)h\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Daje to następujące oszacowanie drugiego składnika:

$$|(v_l^l - u, (Id - P_N)h)| \leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przy ustalonym N możemy wybrać tak duże l_0 , żeby dla każdego $l > l_0$ nierówność

$$(a_l^m - a_*^m)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4(N+1)\|h\|^2}$$

zachodziła dla wszystkich $m = 0, 1, \dots, N$. Wtedy

$$\begin{aligned} |(v_l^l - u, P_N h)| &= |(P_N(v_l^l - u), h)| \\ &\leq \|P_N(v_l^l - u)\| \|h\| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^N (a_l^m - a_*^m)^2 \right)^{1/2} \|h\| \\ &\leq \left((N+1) \frac{\varepsilon^2}{4(N+1)\|h\|^2} \right)^{1/2} \|h\| = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |(v_l^l - u, h)| \leq \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε dostajemy

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |(v_l^l - u, h)| \leq 0, \text{ czyli } u_{n_l} \rightharpoonup u.$$

Twierdzenie 10.2 zostało wykazane.

10.1 Zadania

Zadanie 10.1. Niech

$$u_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ oraz } u_n(x) = \sin nx.$$

Wykazać, że

$$u_n \rightharpoonup 0 \text{ w } L^2(0, 1)$$

oraz że $\{\sin^2 nx\}$ nie zbiega słabo do zera (dla $n \rightarrow \infty$).

Zadanie 10.2. Niech $\{u_n\} \subset H$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta. Wiemy, że

$$u_n \rightharpoonup u \text{ w } H \text{ oraz } \|u_n\| \rightarrow \|u\|.$$

Wykazać, że $u_n \rightarrow u$ w H (silnie).

Zadanie 10.3. Niech $\{u_n\} \subset L^2(0, 1)$ zbiega słabo do zera. Czy $\{u_n\}$ zbiega punktowo do 0 p.w.?

Zadanie 10.4. Niech $\{u_n\} \subset L^2(0, 1)$ zbiega silnie do zera. Czy $\{u_n\}$ zbiega punktowo do 0 p.w.? Czy odpowiedź zmieni się, jeśli ograniczymy się do podciągu?

Zadanie 10.5. Niech $u_n \in H^1(0, 1) = W^{1,2}(0, 1)$. Wiemy, że

$$u_n \rightharpoonup u \text{ w } L^2(0, 1) \text{ oraz } \sup_n \|u_n\| \leq M.$$

Czy $u_n^2 \rightharpoonup u^2$ w $L^2(0, 1)$?

Zadanie 10.6. Wiadomo, że

$$b_n \rightharpoonup b \text{ w } L^2(0, 1) \text{ oraz } \sup_n \|u_n\|_{H^1(0,1)} \leq M.$$

Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 b_n \sin nx dx.$$

Zadanie 10.7. Niech P będzie wielomianem. Niech $u_n \in W^{1,1}(0, 1)$ oraz

$$\sup_n \|u_n\|_{W_1^1(0,1)} \leq M.$$

Czy ciąg $\{P(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ma podciąg słabo zbieżny w $L^2(0, 1)$?

Rozdział 11

Metoda Galerkina

Równania różniczkowe cząstkowe stoją na pograniczu matematyki stosowanej i analizy matematycznej. Ze względu na wymagania, jakie stawiają nauki przyrodnicze i inżynierskie, celem jest dokładna analiza układu stanowiącego model opisywanego zjawiska. Pojawia się więc potrzeba konstruktywnego rozwiązywania równań: wskazania takiej metody, która w sposób bezpośredni mogłaby przełożyć się na efektywny schemat numeryczny i dać precyzyjnie przybliżenie szukanego rozwiązania badanego modelu.

Takim przykładem jest metoda Galerkina, patrz np. książki Evansa i Temama [8, 25]. Można ją stosować do równań eliptycznych, a także do dużej klasy równań ewolucyjnych. Chcemy tu przedstawić ogólną ideę metody oraz dwa przykłady, po to, by dać Czytelnikowi podstawę do samodzielnych uogólnień na bardziej skomplikowane układy. Warto podkreślić bezpośrednie związki tej teorii z analizą numeryczną, tj. z metodą elementu skończonego.

Będziemy postępować według następującego ogólnego przepisu.

Przepis, tzn. podstawowe kroki metody Galerkina

Krok I. Znalezienie odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej oraz bazy umożliwiającej skończoną aproksymację w normie; w tej przestrzeni będziemy konstruować rozwiązania;

Krok II. Konstrukcja skończonego wymiarowego przybliżenia badanego układu i dowód istnienia rozwiązań układu przybliżonego;

Krok III. Znalezienie wspólnego oszacowania na rozwiązania układów przybliżonych;

Krok IV. Znalezienie odpowiedniej słabej granicy ciągu rozwiązań przybliżonych i wykazanie, iż spełnia ona wyjściowy układ, najczęściej tylko w słabym sensie.

Krok V. Badanie dodatkowych własności rozwiązań; czasem metoda Galerkina pozwala udowodnić wyższą (od spodziewanej) regularność otrzymanego rozwiązania.

11.1 Przykład pierwszy: liniowe równanie eliptyczne

By zilustrować metodę, przedstawimy najpierw prosty przykład rozwiązania metodą Galerkiną pewnego równania eliptycznego z warunkiem brzegowym typu Dirichleta.

Szukamy słabych rozwiązań następującego układu

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u) + B(x) \cdot \nabla u &= f & \text{w } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Nie precyzujemy jeszcze dokładnych założeń. Ustalimy je później, w trakcie konstrukcji rozwiązania.

Krok I

Wskażemy odpowiednią przestrzeń Hilberta, w której będziemy poszukiwać rozwiązań. Za-uważmy, że jeśli tylko istnieje dystrybucyjne rozwiązanie, to spełnia tożsamość całkową

$$(k(x)\nabla u, \nabla \phi) + (B(x) \cdot \nabla u, \phi) = (f, \phi) \quad \text{dla każdej funkcji } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (11.2)$$

(nawiasy okrągłe oznaczają tu standardowy iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem). Łatwo zauważyć, że przestrzenią, w której będziemy szukać rozwiązań, jest podprzestrzeń w $H^1(\Omega)$ złożona z funkcji ze śladem zerowym. Oznaczamy ją standardowo przez $H_0^1(\Omega)$. Możemy zatem wprowadzić następującą definicję słabego rozwiązania.

Definicja 11.1. Mówimy, że $u \in H_0^1(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem układu (11.1) jeśli (11.2) jest spełnione dla każdej funkcji z $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Przestrzeń $H_0^1(\Omega)$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Weźmy dowolną bazę, niekoniecznie ortogonalną; wtedy

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\operatorname{lin}\{w_1, \dots, w_n, \dots\}}^{H^1(\Omega)}.$$

Dzięki powyższej relacji możemy zdefiniować ciąg przestrzeni skończonego wymiaru

$$V^N = \operatorname{lin}\{w_1, \dots, w_N\} \text{ dla } N \in \mathbb{N},$$

wstępujący do $H_0^1(\Omega)$. Będziemy poszukiwać przybliżonego rozwiązania w postaci

$$u^N = \sum_{k=1}^N d_k^N w_k. \quad (11.3)$$

Chcielibyśmy podkreślić, iż zależność współczynników d_k^N od N jest w ogólności bardzo istotna i nie wolno jej ignorować.

Krok II

Postulujemy, by u^N spełniało następującą skończenie wymiarową wersję zagadnienia (11.2)

$$(k(x)\nabla u^N, \nabla \phi^N) + (B(x)\nabla u^N, \phi^N) = (f, \nabla \phi^N) \quad (11.4)$$

dla wszystkich $\phi^N \in V^N$. Układ (11.4) sprowadza się do N równań

$$(k(x)\nabla u^N, \nabla w_k) + (B(x)\nabla u^N, w_k) = (f, \nabla w_k) \quad \text{dla } k = 1, \dots, N.$$

Teraz musimy wykazać istnienie rozwiązań. Zauważmy, że wciąż jeszcze nie postawiliśmy założeń na wielkości, występujące w naszym problemie. Zrobiliśmy to z premedytacją, żeby dokładnie zrozumieć potrzebę i istotę poszczególnych założeń.

Skoro u^N ma mieć postać (11.3), zauważmy, że nasz układ redukuje się do układu równań algebraicznych

$$\sum_{j=1}^N a_{jk} d_j^N = f_k \quad \text{dla } k = 1, \dots, N, \quad (11.5)$$

gdzie $a_{jk} = (k(x)\nabla w_k, \nabla w_j) + (B(x) \cdot \nabla w_k, w_j)$ oraz $f_k = (f, w_k)$.

Wystarczy pokazać, że macierz $\{a_{jk}\}$ jest dodatnio określona, tzn. istnieje stała $\gamma > 0$ taka, że

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk} x^j x^k \geq \gamma |x|^2 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}^N. \quad (11.6)$$

dla pewnej $\gamma > 0$. Wtedy z pewnością $\{a_{jk}\}$ jest odwracalna i rozwiązując układ (11.5), otrzymamy współczynniki d_k^N , pozwalające zdefiniować szukane przybliżone rozwiązanie u^N za pomocą wzoru (11.3).

Niech $X^N = \sum_{k=1}^N x^k w_k$. Wtedy

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk} x^j x^k = (k(x)\nabla X^N, \nabla X^N) + (B(x) \cdot \nabla X^N, X^N) = A_N.$$

Teraz zauważamy, że jeśli

$$k(x) \geq k_* > 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (11.7)$$

to

$$A_N \geq k_* \|\nabla X^N\|_{L^2}^2; \quad (11.8)$$

gdyż

$$(B(x) \cdot \nabla X^N, X^N) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} B(x) \cdot \nabla (X^N)^2 dx \quad (11.9)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (B(x)(X^N)^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{n} B(x) (X^N)^2 d\sigma = 0. \quad (11.10)$$

Ostatnia równość zachodzi, bowiem $\operatorname{div} B = 0$, a $X^N = 0$ na brzegu obszaru. Zatem (11.8) implikuje (11.6).

Wobec faktu, iż wszystkie normy w przestrzeniach skończenie wymiarowych Banacha są równoważne, dostajemy silną dodatniość macierzy $\{a_{jk}\}$, co implikuje istnienie wektora d_k^N dla dowolnego $f \in H^{-1}$.

Krok III

Następnym celem jest znalezienie wspólnego oszacowania na otrzymane rozwiązania układów przybliżonych. Wiemy, że rozwiązania te spełniają

$$(k(x)\nabla u^N, \nabla \phi^N) + (B(x)\nabla u^N, \phi^N) = (f, \phi^N)$$

dla wszystkich $\phi^N \in V^N$. Lecz $u^N \in V^N$, co pozwala nam położyć $\phi^N = u^N$. Tą drogą dostajemy równość

$$(k(x)\nabla u^N, \nabla u^N) + (B(x)\nabla u^N, u^N) = (f, u^N).$$

Zauważmy, że

$$(k(x)\nabla u^N, \nabla u^N) \geq k_* \|\nabla u^N\|^2,$$

gdyż $k(x) \geq k_*$; ponadto,

$$(B(x)\nabla u^N, u^N) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (B(x)(u^N)^2) + \int_{\partial\Omega} n \cdot B(x)(u^N)^2 d\sigma = 0,$$

(korzystamy tu z założenia $\operatorname{div} B = 0$ oraz z faktu, że $u^N = 0$ na brzegu obszaru). Ostatni element układanki to oszacowanie

$$|(f, u^N)| \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u^N\|.$$

Zatem dostajemy

$$k_* \|u^N\|^2 \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u^N\|,$$

czyli

$$\|u^N\| \leq \frac{1}{k_*} \|f\|_{H^{-1}}, \quad (11.11)$$

gdzie prawa strona już nie zależy od N . To jest szukane oszacowanie.

Krok IV

W przypadku liniowym krok ten jest przeważnie bardzo prosty, należy jednak pamiętać, że dla równań nieliniowych staje się on zwykle bardzo nietrywialny. Poszukujemy granicy ciągu aproksymacyjnego u^N , by później pokazać, że jest ona szukanym rozwiązaniem naszego wyjściowego równania. Nadto musimy tu określić zachowanie graniczne wszystkich członów występujących w równaniu.

Stosując Twierdzenie 10.2, szybko znajdujemy podciąg u^{N_k} słabo zbieżny do pewnego elementu u^* w przestrzeni $H_0^1(\Omega)$. Zastępując cały ciąg u^N tym podciągiem, możemy bez straty ogólności przyjąć, że

$$u^N \rightharpoonup u^* \text{ słabo w } H_0^1(\Omega).$$

Nadto, z dokładnością do podciągu, mamy również

$$k(x)\nabla u^N \rightharpoonup k(x)\nabla u^* \text{ słabo w } L^2(\Omega) \quad (11.12)$$

oraz

$$B(x)\nabla u^N \rightharpoonup B(x)\nabla u^* \text{ słabo w } L^2(\Omega). \quad (11.13)$$

Wykażemy, że u^* jest słabym rozwiązaniem.

Ustalmy $\phi \in H_0^1(\Omega)$; chcemy sprawdzić, że

$$L(u^*, \phi) - (f, \phi) = (k(x)\nabla u^*, \nabla \phi) + (B(x)\nabla u^*, \phi) - (f, \phi) = 0.$$

(Pierwszą równość proszę uznać za definicję formy dwuliniowej L .) Wtedy stwierdzimy, że u^* istotnie jest słabym rozwiązaniem naszego problemu. Piszemy

$$\begin{aligned} & |L(u^*, \phi) - (f, \phi)| \\ &= | \lim_{N \rightarrow \infty} L(u^* - u^N + u^N, \phi - \phi^N + \phi^N) - (f - f^N + f^N, \phi - \phi^N + \phi^N) | \\ &= | \lim_{N \rightarrow \infty} (L(u^* - u^N, \phi) + L(u^N, \phi - \phi^N) + [L(u^N, \phi^N) - (f^N, \phi^N)] \\ &\quad + (f - f^N, \phi) + (f^N, \phi - \phi^N)) | \\ &= | \lim_{N \rightarrow \infty} (K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5) |, \end{aligned}$$

gdzie ϕ^N, f^N są, odpowiednio, rzutami ϕ i f na podprzestrzeń V^N .

Ponieważ $(f, \phi_N) = (f_N, \phi_N)$ dzięki własnościom rzutu, więc u^N jest nie tylko rozwiązaniem rozważanego wcześniej, w drugim kroku, aproksymatywnego równania (11.4) z prawą stroną f , ale także takiego samego równania z prawą stroną równą f^N . Daje to natychmiast

$$K_3 = L(u^N, \phi^N) - (f^N, \phi^N) = 0.$$

Teraz oszacujemy składniki K_2, K_4 i K_5 . Przyjmijmy, iż

$$k(x) \leq k^* \text{ oraz } |B(x)| \leq b^*.$$

Następnie, weźmy N tak duże, by

$$\|\phi - \phi^N\|_{H^1} \leq \varepsilon \frac{k_*}{k^* + b^*} \|f\|_{H^{-1}}$$

oraz

$$\|f - f^N\|_{V^*} \leq \frac{\varepsilon}{\|\phi\|}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |K_2| &\leq |(k(x)\nabla u^N, \nabla \phi - \nabla \phi^N)| + |(B(x)\nabla u^*, \phi - \phi^N)| \\ &\leq k^* \|\nabla u^N\|_{L^2} \|\phi - \phi^N\|_{H^1} + b^* \|\nabla u^*\|_{L^2} \|\phi - \phi^N\|_{L^2} \\ &\leq (\|f\|_{H^{-1}} + \frac{b^*}{k^*} \|f\|_{H^{-1}}) \|\phi - \phi^N\|_{L^2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

Zauważmy również, że

$$|K_4| \leq |(f - f^N, \phi)| \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |K_5| \leq |(f^N, \phi - \phi^N)| \leq \varepsilon.$$

Kluczowym składnikiem jest K_1 . Zauważmy, że dla ustalonego $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$L(\cdot, \phi) = (\nabla \cdot, \nabla \phi) + (B(x) \nabla \cdot, \phi)$$

jest funkcjonalem nad $H_0^1(\Omega)$. Zatem, biorąc odpowiednio duże N , na mocy słabej zbieżności (11.12) i (11.13) dostajemy

$$|L(u^N - u^*, \phi)| \leq \varepsilon \text{ dla odpowiednio dużych } N.$$

Podsumowując oszacowania poszczególnych składników K_i , otrzymujemy

$$|L(u^*, \phi) - (f, \phi)| \leq 4\varepsilon.$$

Wobec dowolności ε dostajemy stąd (11.2), czyli istotnie u^* jest słabym rozwiązaniem.

Pokażmy jeszcze, że u^* jest jedynym rozwiązaniem. Załóżmy, że dla pewnego f mamy dwa rozwiązania u_1 i u_2 . Dzięki liniowości dostajemy

$$(\nabla(u_1 - u_2), \nabla \phi) + (B(x) \nabla(u_1 - u_2), \phi) = 0$$

dla dowolnego $\phi \in H_0^1(\Omega)$. W szczególności możemy położyć $\phi = u_1 - u_2$; prowadzi to do równości

$$(\nabla(u_1 - u_2), \nabla(u_1 - u_2)) + (B(x) \nabla(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)) = 0. \quad (11.14)$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (B(x) \nabla(u_1 - u_2)) (u_1 - u_2) dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} B(x) \nabla(u_1 - u_2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left((u_1 - u_2)^2 B \right) dx, \quad \text{gdyż } \operatorname{div} B = 0, \\ &= 0 \quad \text{na mocy wzoru Greena, patrz Twierdzenie 1.1,} \end{aligned}$$

bowiem $u_1 - u_2$ ma ślad zerowy. Stąd dostajemy

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2} = 0,$$

czyli, po uwzględnieniu warunków brzegowych, $u_1 \equiv u_2$.

Podsumowując wszystkie rozważania, dostajemy dowód następującego twierdzenia

Twierdzenie 11.1. Niech $k \in L^\infty(\Omega)$ będzie taką funkcją, że

$$k_* \leq k(x) \leq k^*$$

dla pewnych liczb dodatnich k^*, k_* , a $B \in L^\infty(\Omega)$ — polem wektorowym takim, że $\operatorname{div} B = 0$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$. Jeśli $f \in H^{-1}(\Omega)$, to istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u \in H_0^1(\Omega)$, spełniające układ (11.1) w sensie (11.2).

11.2 Przykład drugi: równanie ciepła z nieliniową siłą

Zasadniczym celem tego podrozdziału jest pokazanie Czytelnikowi, że metoda Galerkin nadaje się także do konstruowania rozwiązań zagadnień nieliniowych. Okazuje się jednak, że nawet najprostsza nieliniowość prowadzi do poważnych trudnień technicznych. Przekona się o tym każdy, kto starannie prześledzi poniższy opis rachunków i samodzielnie uzupełni liczne drobne szczegóły rachunkowe.

Rozważmy następujący przykład:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u^2 && \text{w } \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{na } \Omega. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Jest to równanie nieliniowe typu parabolicznego. Ze względu na nieliniowość możemy spodziewać się tylko rozwiązań lokalnych w czasie. Skoncentrujemy się na przypadku, gdy Ω jest obszarem z gładkim brzegiem w $\mathbb{R}^3$. Przez słabe (dystrybucyjne) rozwiązanie rozumiemy funkcję, która spełnia następującą definicję.

Definicja 11.2. Mówimy, że $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ jest słabym rozwiązaniem (11.15) wtedy i tylko wtedy, gdy tożsamość całkowa

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u \phi_t \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} u^2 \phi \, dx \, dt + \int_{\Omega} u_0 \phi(x, 0) \, dx$$

spełniona jest dla każdej funkcji $\phi \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$ takiej, że $\phi = 0$ na $\partial\Omega \times (0, T)$ oraz $\phi = 0$ na $\Omega \times \{T\}$.

Postępujemy wedle naszkicowanego wcześniej ogólnego przepisu.

Krok I

Zagadnienia ewolucyjne mają trochę inną specyfikę niż zagadnienia eliptyczne; wymagają odpowiedniego traktowania kierunku czasowego. W naszym w miarę prostym przypadku znów ograniczymy się do przestrzeni $H_0^1(\Omega)$ z baza $w_i, i = 1, 2, \dots$. Przybliżenia rozwiązań będziemy poszukiwać w postaci

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N b_k^N(t) w_k(x). \quad (11.16)$$

Wyznaczenie odpowiednich funkcji $b_k^N : [0, T_N) \rightarrow \mathbb{R}$ stanowi część problemu.

Krok II

Aby znaleźć odpowiednie przybliżenia, rozważmy zagadnienie na podprzestrzeni skończonego wymiarowej. Żądamy, by u^N spełniało w sensie dystrybucyjnym na $[0, T)$ problem

$$(u_t^N, \psi^N) + (\nabla u^N, \nabla \psi^N) = ((u^N)^2, \psi^N), \quad (11.17)$$

uzupełniony warunkami początkowymi $b_k^N(0) = (u_0, w_k)$, tzn. chcemy, żeby powyższa tożsamość zachodziła dla każdej funkcji

$$\psi^N \in C^\infty([0, T]) \otimes V^N \cong C^\infty([0, T], V^N)$$

Jak wcześniej, V^N oznacza przestrzeń N -wymiarową rozpiętą przez $w_1, \dots, w_N$.

Bez straty ogólności, stosując ortogonalizację Gramma-Schmidta, możemy założyć, że baza jest ortonormalna, tzn.

$$(w_k, w_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{kl}.$$

Wstawiając w (11.17) $\psi^N = w_k$ dla $k = 1, \dots, N$, dostajemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d}{dt} b_k^N(t) + (\nabla u^N, \nabla w_k) = ((u^N)^2, w_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Podstawowe twierdzenie z teorii równań różniczkowych zwyczajnych implikuje istnienie rozwiązań lokalnych w czasie, tzn. określonych na pewnym odcinku $[0, T_N]$, gdzie, ogólnie biorąc, T_N może zależeć w bardzo istotny sposób od N .

Krok III

Zauważmy, iż Krok II daje tylko istnienie rozwiązań aproksymacyjnych. By móc wykorzystać tę konstrukcję do przejścia granicznego $N \rightarrow \infty$, musimy znaleźć wspólny przedział czasu, na którym zdefiniowane są rozwiązania u^N . W tym celu posłużymy się oszacowaniami energetycznymi. Weźmy (11.17); wiemy, że równanie to może być testowane przez rozwiązanie u^N . Wiemy również, że dla ustalonego skończonego N liczba T_N jest niezerowa. Otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^N\|_{L^2}^2 + \|\nabla u^N\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} (u^N)^3 dx.$$

Scałkowanie obu stron względem $t \in [0, T]$ — przypuśćmy na chwilę, że rozwiązanie u_N jest określone na takim przedziale — prowadzi nas do następującej nierówności:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^N\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|u^N\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C \|u^N\|_{L^3(\Omega \times (0, T))}^3 + \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (11.18)$$

Przypomnijmy, że $\dim \Omega = 3$. Korzystając z Zadania 11.5, dającego tzw. włożenie paraboliczne, otrzymujemy

$$\|u^N\|_{L^{10/3}(\Omega \times (0, T))} \leq C \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^N\|_{L^2} + \|u^N\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \right), \quad (11.19)$$

gdzie stała nie zależy od T . Wprowadźmy

$$X_N(T) = \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^N\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|u^N\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (11.20)$$

Wtedy, korzystając z (11.18), (11.19) oraz nierówności Höldera, dostajemy

$$X_N(T)^2 \leq CT^{1/10} X_N^3(T) + C\|u_0\|_{L^2}^2, \quad (11.21)$$

pamiętając, że $1 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$.

Można stąd wyprowadzić oszacowanie

$$X_N(T) \leq \Xi(T, \|u_0\|_{L^2}) \quad \text{dla wszystkich } N = 1, 2, \dots \text{ i } T < T_{\max}. \quad (11.22)$$

(Czytelnik zechce się zastanowić, jak należy to zrobić). Liczba $T_{\max} = T_{\max}(\|u_0\|_{L^2})$ zależy tylko od normy danych początkowych i zbiega do zera, gdy ta norma rośnie do nieskończoności. Widzimy jednak, że oszacowanie to nie zależy już od N , zatem mamy jednostajne (względem N) oszacowanie rozwiązań przybliżonych, a także wspólne ograniczenie czasów T_N z dołu.

Krok IV

Mając wspólne oszacowania funkcji u_N i liczb $X_N(T)$, możemy spróbować znaleźć granice i zdefiniować rozwiązanie. Zauważmy, że w szczególności z oszacowania (11.22) możemy wydedukować istnienie takiego u , że

$$u^N \rightharpoonup u \text{ słabo w } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (11.23)$$

$$u^N \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ słabo w } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (11.24)$$

Zbieżności te wystarczają, by kontrolować lewą stronę równania, lecz problem pojawia się po prawej stronie. Nieliniowość wymusza potrzebę dodatkowej informacji o zbieżności — sama słaba zbieżność już tu nie wystarczy. Musimy dysponować bogatszą informacją o ciągu u^N . Dysponując oszacowaniami norm w $H^1(\Omega)$, jesteśmy wprawdzie w stanie dostać silną zbieżność, na mocy twierdzenia Relicha, ale tylko w kierunkach przestrzennych. Potrzebujemy zatem dodatkowej informacji o regularności względem czasu.

Na początku zauważmy, że wobec (11.21) i (11.19)

$$(u^N)^2 \rightharpoonup \xi \text{ słabo w } L^{5/3}(\Omega \times (0, T)). \quad (11.25)$$

Zatem granica u ciągu u^N spełnia równanie

$$-(u, \phi_t) + (\nabla u, \nabla \phi) = (\xi, \phi) \quad (11.26)$$

dystribucyjnie na $[0, T)$.

Chcemy pokazać, że $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Dlatego też zajmiemy się wyrazem nieliniowym i wykażemy, że

$$(u^N)^2 \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega));$$

wystarczy w tym celu udowodnić, że

$$(u^N)^2 \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega)),$$

pamiętajmy bowiem, iż $L^{6/5}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Zatem

$$\|(u^N)^2\|_{L^2(0,T;L^{6/5}(\Omega))} \leq \|u^N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|u^N\|_{L^2(0,T;L^3(\Omega))},$$

gdyż $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, a w wymiarze $n = 3$ mamy $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega) \subset L^3(\Omega)$. Tą drogą, pamiętając o oszacowaniach $X_N(T)$ uzyskanych w poprzednim kroku, dochodzimy do nierówności

$$\|(u^N)^2\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Xi(T, u_0)^2, \quad (11.27)$$

gdzie C nie zależy od T . To pozwala już wnioskować, że $\xi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Podsumowując (11.23) i (11.27), dostajemy z (11.26) informację o u_t i u_t^N . Mianowicie,

$$u^N \rightharpoonup u \text{ w } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ oraz } u_t^N \rightharpoonup u_t \text{ w } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Wtedy na mocy twierdzenia Lionsa–Aubina, patrz Zadanie 11.6, otrzymujemy

$$u^N \rightarrow u \quad \text{silnie w } L^2(\Omega). \quad (11.28)$$

Biorąc pod uwagę (11.25) oraz (11.28), sprawdzamy, że

$$\xi = u^2.$$

Zatem u spełnia równanie (11.15) w sensie Definicji 11.2.

Krok V

W naszym przykładzie możemy otrzymać dokładniejszą informację o regularności rozwiązania. Zauważmy, że możemy testować rozwiązanie przybliżone przez u_t^N . Dostajemy wtedy

$$\int_{\Omega} (u_t^N)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u^N|^2 dx = \int_{\Omega} (u^N)^2 u_t^N dx. \quad (11.29)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$I_N(T) := \int_0^T \|u_t^N\|_{L^2}^2 dt, \quad J_N(T) := \int_0^T \int_{\Omega} (u^N)^4 dx dt,$$

oraz

$$S_N(T) := \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u^N(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Korzystamy z nierówności Schwarza po prawej stronie (11.29), całkujemy obie strony względem $t \in [0, T']$, gdzie $T' \leq T$ i przekonujemy się, że I_N , J_N i S_N spełniają nierówność

$$I_N(T) + S_N(T) \leq C (I_N(T)^{1/2} J_N(T)^{1/2} + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2). \quad (11.30)$$

Ponieważ $I^{1/2} J^{1/2} \leq \varepsilon I + J/(4\varepsilon)$ dla wszystkich $I, J \geq 0$ i $\varepsilon > 0$, więc z (11.30) wynika, że

$$I_N(T) + S_N(T) \leq C (J_N(T) + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2) \quad (11.31)$$

(gdzie stała C jest, oczywiście, nieco inna niż wcześniej).

Pokażemy teraz, jak pozbyć się z (11.31) niewygodnego składnika $J_N(T)$. Zauważmy, że

$$\int_{\Omega} (u^N)^4 dx = \int_{\Omega} |u^N|^3 |u^N| dx \leq \left(\int_{\Omega} (u^N)^6 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (u^N)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Zatem, całkując od 0 do T i pamiętając o definicji (11.20) wielkości $X_N(T)$ i oszacowaniu (11.22), które uzyskaliśmy w trzecim kroku, otrzymujemy

$$\begin{aligned} J_N(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (u^N)^4 dx dt \leq \int_0^T \|u^N\|_{L_6(\Omega)}^3 \|u^N\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_6(\Omega)} \cdot \int_0^T \|u\|_{L_6(\Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_6(\Omega)} \cdot X_N(T) \cdot \int_0^T \|u\|_{L_6(\Omega)}^2 dt \\ &\leq C \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_6(\Omega)} \cdot X_N(T)^3. \end{aligned}$$

W ostatniej linii skorzystaliśmy z włożenia $H^1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$ i definicji $X_N(T)$.

Wstawiamy teraz powyższe oszacowanie całki $J_N(T)$ do (11.31). Następnie, zauważamy, że dzięki włożeniu $H_0^1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_6(\Omega)} \leq C \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u^N(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = C S_N(T)^{1/2},$$

co prowadzi do nierówności

$$I_N(T) + S_N(T) \leq C(S_N(T)^{1/2} X_N(T)^3 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2).$$

Teraz pozostaje już tylko pozbyć się $S_N(T)^{1/2}$ z prawej strony. Wykonujemy w tym celu podobną sztuczkę, jak wcześniej, przy rugowaniu $I_N(T)^{1/2}$ z prawej strony (11.30). Ostatecznie dostajemy

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u^N\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|u_t^N\|_{L^2}^2 dt \leq C(\Xi(T, u_0)^6 + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2), \quad (11.32)$$

gdzie $\Xi(T, u_0)$ jest wielkością ograniczającą wszystkie $X_N(T)$, $N = 1, 2, \dots$ — pamiętamy však, że wobec (11.22) taka wielkość, zależna od danych u_0 i (odpowiednio dobranego) czasu T , rzeczywiście istnieje. W szczególności, możemy otrzymać taki podciąg, że

$$u_t^N \rightharpoonup u_t \text{ słabo w } L^2(\Omega \times (0, T)).$$

Dlatego też w sensie dystrybucyjnym nasze słabe rozwiązanie spełnia równanie

$$\Delta u = u_t - u^2 \in L^2(\Omega \times (0, T)),$$

co daje, na mocy Zadania 11.9, nierówność

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq \text{DANE}.$$

Zatem dostajemy następujące twierdzenie

Twierdzenie 11.2. Niech $u_0 \in L^2(\Omega)$. Wtedy istnieje czas $T > 0$ taki, że istnieje słabe rozwiązanie układu (11.15), które spełnia Definicję 11.2 i warunek

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Ponadto, jeśli $u_0 \in H^1(\Omega)$, to

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

11.3 Zadania

Zadanie 11.1. Używając metody Galerkin, udowodnić twierdzenie Laxa–Milgrama dla ośrodkowych przestrzeni Hilberta.

Zadanie 11.2. Niech $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Wykazać istnienie dystrybucyjnych rozwiązań równania

$$-\operatorname{div} (1 + |x|^3) \nabla u + u = f \text{ w } \mathbb{R}^n.$$

Uwaga. Przez dystrybucyjne rozwiązanie rozumiemy tu funkcję $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, która spełnia tożsamość całkową

$$\int_{\mathbb{R}^n} ((1 + |x|^3) \nabla u \nabla \phi + u \phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \phi dx$$

dla każdej $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 11.3. Zbadać, dla jakich f oraz $n \in \mathbb{N}$ zagadnienie

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^3 &= f & \text{w } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w słabym sensie. Zakładamy, że Ω jest obszarem w $\mathbb{R}^n$.

Wskazówka. Proszę skorzystać z Zadania 11.10.

Zadanie 11.4. Zbadać, dla jakich f oraz $n \in \mathbb{N}$ zagadnienie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (1 + u^2) \nabla u + u &= f & \text{w } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

jest dobrze postawione w słabym sensie. Zakładamy, że Ω jest obszarem z $\mathbb{R}^n$.

Wskazówka. Proszę skorzystać z Zadania 11.10.

Zadanie 11.5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ oraz $T > 0$. Wykazać, że jeśli

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

to

$$u \in L^{10/3}(\Omega \times (0, T)).$$

Oszacować normę operatora włożenia.

Zadanie 11.6 (twierdzenie Lionsa–Aubina). Wiemy, że

$$u^n \rightharpoonup u \text{ słabo w } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^n \rightharpoonup u_t \text{ słabo w } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Wykazać, że

$$u^n \rightarrow u \text{ silnie w } L^2(\Omega \times (0, T)).$$

Zadanie 11.7. Wykazać, posługując się metodą Galerkiną, istnienie rozwiązań zagadnienia

$$u_{tt} - \Delta u = f \text{ w } \Omega \times (0, T),$$

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1 \text{ na } \Omega.$$

Określić przestrzeń rozwiązań, a także regularność danych, potrzebną, by otrzymać słabe rozwiązanie.

Zadanie 11.8. Niech $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Wykazać istnienie słabych rozwiązań zagadnienia

$$u_t + \Delta^2 u + u = 0 \text{ w } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ na } \mathbb{R}^n.$$

Zdefiniować słabe rozwiązania i określić przestrzeń funkcyjną dla słabych rozwiązań.

Zadanie 11.9. Niech $f \in L^2(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem ograniczonym $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem. Wykazać, że jeśli u jest słabym rozwiązaniem układu

$$\Delta u = f \text{ w } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

to $u \in H^2(\Omega)$ oraz

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wskazówka. Posłużyć się transformatą Fouriera i twierdzeniem Plancherela.

Zadanie 11.10. Niech $P : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ będzie funkcją ciągłą. Wiemy, że dla wszystkich $|X| \geq r$ spełniony jest warunek

$$P(X) \cdot X \geq 1.$$

Wykazać, że istnieje wtedy punkt $X_0 \in \mathbb{R}^N$ taki, że $|X_0| \leq r$ oraz $P(X_0) = 0$.

Rozdział 12

Metoda rozdzielania zmiennych

W tym rozdziale zajmiemy się metodą rozdzielania zmiennych, którą można zastosować, aby wyrazić jawnymi wzorami rozwiązania pewnych konkretnych równań różniczkowych cząstkowych. Skupimy się tu na równaniach hiperbolicznych i parabolicznych określonych na skończonym odcinku $[0, l] \in \mathbb{R}$.

Zakładana jest znajomość teorii szeregów Fouriera oraz równań różniczkowych zwyczajnych.

12.1 Zagadnienia hiperboliczne

Rozpocznijmy od jednorodnego równania struny o długości l zamocowanej na końcach:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in (0, l), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in (0, l). \end{aligned} \tag{12.1}$$

O funkcjach określających warunki początkowe, czyli $u_0(x)$ i $u_1(x)$, zakładamy, że są elementami przestrzeni $L^2(0, l)$.

Aby rozwiązać powyższe zagadnienie, posłużymy się metodą Fouriera, zwaną inaczej metodą rozdzielania zmiennych. Polega ona na tym, aby poszukiwać rozwiązania postaci

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{12.2}$$

Wstawiając to wyrażenie do równania (12.1) i dzieląc obie strony przez $X(x)T(t)$, otrzymujemy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{12.3}$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy tylko od zmiennej x , a prawa tylko od zmiennej t , więc oba wyrażenia muszą być równe *tej samej* stałej. Nazwijmy ją $-\lambda$.

Stąd otrzymujemy zagadnienie

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \lambda X(x) & \text{dla } x \in (0, l), \\ X(0) &= X(l) = 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Warunki brzegowe dla funkcji X wynikają z postaci, w której szukamy rozwiązania (12.2), oraz z warunków brzegowych dla funkcji $u(x, t)$ określonych w równaniu (12.1).

Dla zagadnienia własnego (12.4) mamy wartości własne

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz odpowiadające im funkcje własne

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Znalezienie wartości i funkcji własnych jest zadaniem z równań różniczkowych zwyczajnych. W ramach wskazówki - należy rozpatrzeć liczby λ ujemne, $\lambda = 0$ oraz λ dodatnie i zauważyć, że tylko w przypadku tych ostatnich spełniony będzie warunek brzegowy.

Dla każdego n znajdujemy funkcje $T_n(t)$ spełniające równanie (z uwagi na (12.3)):

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t).$$

Stąd

$$T_n(t) = A_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t).$$

Zwróćmy uwagę, że każda z funkcji $X_n(x)T_n(t)$ spełnia równanie (12.1) oraz zadane warunki brzegowe. Jednak aby znaleźć rozwiązanie spełniające także zadane warunki początkowe, na ogół musimy rozpatrzeć cały szereg

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \right) \sin(\sqrt{\lambda_n} x). \quad (12.5)$$

Pozostaje więc wyliczyć stałe A_n i B_n . Funkcja u musi spełniać warunek

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x) = u_0(x)$$

oraz

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x) = u_1(x).$$

Wystarczy więc rozwinąć funkcje u_0 i u_1 w szereg Fouriera.

Najpierw przypomnijmy, że każdą funkcję należącą do przestrzeni $L^2(-l, l)$ można rozwinąć w szereg Fouriera, czyli w szereg funkcji

$$\left\{ \frac{1}{2l}, \frac{1}{l} \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \frac{1}{l} \cos(\sqrt{\lambda_n}x) \right\}_{n=1,2,\dots}, \quad x \in (-l, l),$$

które tworzą bazę ortonormalną w $L^2(-l, l)$. Ponieważ przyjęliśmy, że $u_0, u_1 \in L^2(0, l)$, więc możemy przedłużyć je nieparzyście lub parzyście (w zależności od potrzeby) na cały przedział $(-l, l)$. W przypadku naszego zagadnienia przedłużamy więc nieparzyście, co pozwala na rozwinięcie u_0 i u_1 w szereg sinusów, czyli funkcji $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$.

Zatem współczynniki B_n i A_n wynoszą odpowiednio

$$B_n = \frac{1}{l} \int_0^l u_0(x) X_n(x) dx \quad (12.6)$$

oraz

$$A_n = \frac{1}{\lambda_n l} \int_0^l u_1(x) X_n(x) dx. \quad (12.7)$$

W ten sposób znaleźliśmy jawny wzór na rozwiązanie zagadnienia (12.3). Pozostaje pytanie, czy otrzymany szereg zbiega i czy określa rozwiązanie klasyczne, czy słabym, tzn. czy jego sumę można odpowiednio wiele razy zróżniczkować.

Aby $u(x, t)$ mogło być klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.1), szereg (12.5) oraz szeregi drugich pochodnych po zmiennej x i t muszą zbiegać jednostajnie. Aby tak było, potrzebne są pewne założenia na funkcje u_0 i u_1 .

Na przykład, jeśli $u_0(x) \in C^4[0, l]$ oraz $u_1(x) \in C^3[0, l]$, to przy założeniu warunków zgodności, tzn.

$$\begin{aligned} u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0, \\ u_1(0) = u_1(l) = 0, \end{aligned}$$

funkcja $u(x, t)$ postaci (12.5) jest rozwiązaniem zagadnienia (12.1).

Rzeczywiście, przy powyższym założeniu o funkcjach u_0 i u_1 , po wykonaniu we wzorach (12.6) oraz (12.7) odpowiedniej liczby całkowań przez części, otrzymujemy

$$|B_n| \leq \frac{\text{const}}{n^4}$$

oraz

$$|A_n| \leq \frac{\text{const}}{n^3}.$$

Różniczkując dwukrotnie wyrazy szeregu (12.11), zauważamy, że szereg ten jest jednostajnie zbieżny wraz z pochodnymi do rzędu drugiego włącznie. Dlatego otrzymana funkcja $u(x, t)$ jest funkcją klasy C^2 , oraz klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.1). Jeśli interesuje nas tylko istnienie słabych rozwiązań problemu (12.1), nie potrzebujemy różniczkować szeregu określającego funkcję u aż tyle razy.

12.1.1 Zagadnienia hiperboliczne: przypadek niejednorodny

Rozważmy teraz zagadnienie struny na skończonym odcinku przy obecności siły zewnętrznej $f(x, t)$. Dla przykładu rozpatrzmy inne niż poprzednio warunki brzegowe.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= f(x, t) && \text{w } (0, l) \times (0, \infty) \\ u_x(0, t) &= u(l, t) = 0, && t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), && x \in (0, l), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), && x \in (0, l). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Założmy, że $f(x, t)$ daje się przedstawić w postaci szeregu funkcji własnych zagadnienia

$$-X_n''(x) = \lambda_n X_n(x), \quad (12.9)$$

$$X_n'(0) = X_n(l) = 0, \quad (12.10)$$

a także spełnia warunek zgodności

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Podobnie jak we wcześniejszym przykładzie, szukamy rozwiązania $u(x, t)$ w postaci szeregu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (12.11)$$

gdzie X_n są funkcjami własnymi zagadnienia (12.9). Zatem

$$X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x),$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

oraz $n = 1, 2, \dots$

Aby znaleźć funkcje $T_n(t)$, rozwińmy w szereg funkcji $X_n(x)$ prawą stronę równania (12.8), czyli funkcję $f(t, x)$.

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) X_n(x). \quad (12.12)$$

Wstawiając formalnie $u(x, t)$ oraz $f(t, x)$ w postaci szeregów (12.11) i (12.12) do równania (12.8) otrzymujemy (również formalnie różniczkując wyraz po wyrazie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) X_n(x).$$

Stąd, aby u mogło być rozwiązaniem, funkcje $T_n(t)$ powinny spełniać równania zwyczajne

$$\begin{aligned} T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) &= F_n(t), \\ T_n(0) &= u_0^n, \quad T_n'(0) = u_1^n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

gdzie u_0^n oraz u_1^n są współczynnikami rozwinięcia funkcji $u_0(x)$ i $u_1(x)$ w bazie funkcji $X_n(x)$.

12.1.2 Zagadnienia paraboliczne

Przyjrzyjmy się zagadnieniu przepływu ciepła w jednorodnym pręcie.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in (0, l), \end{aligned} \quad (12.13)$$

dla $u_0(x) \in L^2(0, l)$.

Ponieważ rozwiązanie powyższego problemu jest zupełnie analogiczne do rozwiązania zagadnienia struny umocowanej na końcach, zauważmy, że funkcja $u(x, t)$ jest postaci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad (12.14)$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Współczynniki A_n wyliczamy z warunku początkowego. Są to po prostu współczynniki rozwinięcia funkcji $u_0(x)$ w szereg funkcji $\{\sin(\sqrt{\lambda_n} x)\}_{n=1,2,\dots}$:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Zwróćmy uwagę, że przy założeniu $u_0(x) \in L^2(0, l)$ współczynniki A_n są ograniczone niezależnie od n . Zatem, ponieważ w szeregu (12.14) występują szybko gasnące czynniki $e^{-\lambda_n t}$, więc funkcja u jest gładka na zbiorze $(0, l) \times (0, \infty)$.

Regularność funkcji u w chwili $t = 0$ zależy oczywiście od regularności warunku początkowego.

12.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

12.2.1 Równania hiperboliczne

Zadanie 12.1. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 1 && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, && x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) &= 0 && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.2. Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + t \cos x && \text{w } (0, \pi/2) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0, t) &= u(\pi/2, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, && x \in (0, \pi/2) \\ u_t(x, 0) &= \cos x && x \in (0, \pi/2). \end{aligned}$$

Zadanie 12.3. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|, && x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) &= \chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]} && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.4. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \sin t && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, && x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) &= x(x - \pi) && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.5. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \cos(3x) && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 2 \cos x, && x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) &= 5 \cos(2x) && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.6. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \sin(5x) && \text{w } (0, \pi/2) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 2 \sin x, && x \in (0, \pi/2) \\ u_t(x, 0) &= 4 \sin(3x) && x \in (0, \pi/2). \end{aligned}$$

Zadanie 12.7. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= t \quad u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 2 \sin x, && x \in (0, \pi/2) \\ u_t(x, 0) &= 4 \sin(3x) && x \in (0, \pi/2). \end{aligned}$$

Zadanie 12.8. Niech $u = u(x, y, t)$ oraz $Q \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Posługując się metodą Fouriera, rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy} && \text{w } Q \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, y, t) &= u_t(x, y, t) = 0 && \text{dla } t > 0 \text{ i } (x, y) \in \partial Q, \\ u(x, y, 0) &= \sin x \cos(y/2), && (x, y) \in Q \\ u_t(x, y, 0) &= 0 && (x, y) \in Q. \end{aligned}$$

Zadanie 12.9. Niech $u = u(x, y, t)$ oraz $Q \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Za pomocą metody Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy} + xy && \text{w } Q \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, y, t) &= u_t(x, y, t) = 0 && \text{dla } t > 0 \text{ i } (x, y) \in \partial Q, \\ u(x, y, 0) &= 0, && (x, y) \in Q \\ u_t(x, y, 0) &= 0 && (x, y) \in Q. \end{aligned}$$

Zadanie 12.10. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t &= u_{xx} && \text{w } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos 2\pi x, && x \in (0, 1) \\ u_t(x, 0) &= \sin \pi x && x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Zadanie 12.11. Metodą Fouriera rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t &= u_{xx} + 1 && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, && x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) &= 0 && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

12.2.2 Równania paraboliczne

Zadanie 12.12. Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \chi_{[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}. && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.13. Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = \sin t && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 4 \sin(3x) && \text{dla } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.14. Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + tx^2 && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos x. && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Pokazać, że rozwiązanie powyższego problemu jest gładkie w $(0, \pi) \times [T, \infty)$ dla każdego $T > 0$.

Zadanie 12.15. Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-t} && \text{w } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= 0 && x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Jak zachowuje się rozwiązanie u , gdy $t \rightarrow \infty$?

Zadanie 12.16. Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u + \sin x && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin(5x) && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Zadanie 12.17. Pokazać, że rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && x \in (0, \pi), \end{aligned}$$

uzyskane metodą Fouriera jest funkcją gładką w $(0, \pi) \times (T, \infty)$ dla $u_0 \in C^1(0, \pi)$.

Zadanie 12.18. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(x) && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Do jakiej granicy i w jakiej topologii jest zbieżne rozwiązanie $u(\cdot, t)$ uzyskane metodą rozdzielania zmiennych, gdy $t \rightarrow \infty$?

Zadanie 12.19. Niech $u_0(x) \in L^2(0, \pi)$. Wykazać, że rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{w } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{dla } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x). && x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

uzyskane metodą Fouriera spełnia oszacowanie

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq e^{-t} \|u_0\|_{L^2}.$$

Rozdział 13

Zasady maksimum

W tym rozdziale zakładamy, że czytelnik zna zasady maksimum dla regularnych rozwiązań liniowych operatorów eliptycznych oraz parabolicznych przedstawione w książce Evansa[8] (chodzi o Twierdzenia 1, 2, 3 i 4 oraz Lemat Hopfa z rozdziałów 6.4.1 i 6.4.2, oraz o zawartość rozdziału 7.1.4).

Ponadto zakładamy, że Czytelnik zna pojęcie słabego rozwiązania eliptycznego zagadnienia brzegowego oraz parabolicznego zagadnienia początkowo-brzegowego.

13.1 Rozwiązania przykładowych zadań

Zadanie 13.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Przez $\vec{n}$ oznaczamy wektor normalny zewnętrzny do Ω . Wykazać, że klasyczne rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 6u \quad \text{w } \Omega \times [0, T] \\ u_0(x) &= 3 \quad \text{w } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{na brzegu } \Omega, \end{aligned}$$

jest nieujemne. Wyznaczyć maksymalną wartość rozwiązania na $\overline{\Omega} \times [0, 10]$.

Rozwiązanie. Po pierwsze, zauważamy, że $v(x, t) = e^{-6t}u(x, t)$ spełnia zagadnienie przewodnictwa ciepła z zerowym warunkiem Neumanna na brzegu. Na podstawie Zadania 13.15, v spełnia słabą zasadę maksimum. Zatem $v(x, t) \leq v(x, 0) = u_0(x)$. Znaczy to, że v jest jedynym rozwiązaniem. Gdyby istniało inne, powiedzmy $v_1(x, t)$, wówczas $z(x, t) = v(x, t) - v_1(x, t)$ też spełniałoby zagadnienie przewodnictwa ciepła z zerowym warunkiem Neumanna na brzegu oraz warunkiem początkowym $z(x, 0) = 0$. Zatem $z(x, t) \leq 0$ na podstawie Zadania 13.15. Z drugiej strony, analogiczne rozumowanie prowadzi nas do konkluzji, że $z \geq 0$, a więc $v(x, t) = v_1(x, t)$. Łatwo zauważyć, że $v(x, t) = 3$ jest rozwiązaniem, zatem $u(x, t) = 3e^{6t}$. Czyli u jest nieujemne, a jego maksymalna wartość to $3e^{60}$. $\diamond$

Zadanie 13.2. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie kulą o środku w 0 i promieniu 1. Rozważmy zagadnienie

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{w } \Omega \times [0, T]$$

$$u_0(x) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ w } \Omega, \quad u = 1 + te^{13t}(x^2 + y^2) \text{ na brzegu } \Omega.$$

Znaleźć maksymalną wartość u w $\overline{\Omega} \times [0, 3]$.

Rozwiązanie. Ze słabej zasady maksimum dla równań parabolicznych (patrz książka Evansa [8, Tw. 8, Rozdział 7.1.4]) wiemy, że maksymalne wartości u przyjmowane są na brzegu parabolicznego walca $\Omega \times [0, 3]$. Na zbiorze $\Omega \times \{0\}$ (dolnym denku walca) maksymalna wartość u wynosi 1, natomiast na ściankach, czyli na $\partial\Omega \times [0, 3]$, rozwiązanie u jest funkcją rosnącą czasu, zatem wystarczy znaleźć maksimum $x^2 + y^2$ na sferze jednostkowej i będziemy mieli odpowiedź. Na sferze jednostkowej $x^2 + y^2 = 1 - z^2$, zatem wartość maksymalna u wynosi $1 + 3e^{39}$. $\diamond$

Zadanie 13.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Funkcję $u \in W^{1,2}(\Omega)$ nazwiemy słabym podrozwiązaniem zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} -\Delta u &\leq 0 \text{ w } \Omega, \\ u &= g \in L^\infty(\partial\Omega) \text{ na brzegu } \Omega, \end{aligned}$$

gdy u ma na brzegu Ω ślad równy g , a ponadto

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx \leq 0$$

dla każdej nieujemnej funkcji φ klasy $C_0^\infty(\Omega)$.¹

Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,2}(\Omega)$ jest słabym podrozwiązaniem powyższego zagadnienia, to wówczas dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi $u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g$.

Rozwiązanie. Mnożymy równanie przez $(u - k)_+ \in W^{1,2}(\Omega)$, gdzie k jest jakąkolwiek stałą taką, że $g(x) \leq k$ prawie wszędzie na brzegu (względem miary powierzchniowej). Następnie całkujemy przez części i widzimy, że

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (u - k)_+ \, dx + \int_{\partial\Omega} (u - k)_+ \nabla u \cdot \vec{n} \, d\sigma \leq 0,$$

lecz wobec definicji k wiemy, że $(u - k)_+ = 0$ p.w. na $\partial\Omega$. Stąd

$$\int_{\Omega} |\nabla (u - k)_+|^2 \, dx \leq 0,$$

a zatem, z dokładnością do wartości na zbiorze miary zero, $(u - k)_+$ jest funkcją stałą na zbiorze Ω . Ponieważ na $\partial\Omega$ mamy $(u - k)_+ = 0$, więc $(u - k)_+ = 0$ p.w. na Ω . Z dowolności k wynika, że $u \leq \sup_{\partial\Omega} g$. $\diamond$

¹Intuicja związana z tą definicją jest podobna, jak intuicja związana z definicją słabego rozwiązania: mnożymy obie strony przez funkcję gładką i całkujemy przez części. Ponieważ mamy do czynienia z nierównością, więc mnożymy przez funkcję o ustalonym znaku.

13.2 Zadania

Zadanie 13.4. Niech $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ będzie klasycznym rozwiązaniem zagadnienia

$$\Delta u = x^2 \text{ w } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = x^2 + y^2 - 5xy + 2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ to kula o środku w zerze i promieniu 1. Znaleźć maksymalną wartość u .

Zadanie 13.5 (zasada maksimum dla funkcji holomorficznych). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie ograniczonym, spójnym podzbiorem płaszczyzny zespolonej o gładkim brzegu. Niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną w Ω , ciągłą do brzegu włącznie. Udowodnić, że

$$\max_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Zadanie 13.6. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Niech $C(\partial\Omega)$ oznacza przestrzeń Banacha wszystkich funkcji ciągłych na $\partial\Omega$. Niech X oznacza podprzestrzeń $C(\partial\Omega)$ składającą się z tych funkcji, dla których jako warunków brzegowych, istnieje klasyczne rozwiązanie zagadnienia Laplace'a w Ω . Niech h będzie rozwiązaniem takiego zagadnienia dla $\phi' \in X$, natomiast P dowolnym punktem w Ω . Wykazać, że $L_P(\phi') = h(P)$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym na X , który można przedłużyć do $C(\partial\Omega)$. Znaleźć jego normę.

Uwaga. Powyższa prosta obserwacja jest punktem wyjścia konstrukcji funkcji Greena dla równania Laplace'a, zaproponowanej przez Petera Laxa w pracy [13].

Zadanie 13.7. Niech $u : [0, 1] \times [0, 10]$ będzie klasycznym rozwiązaniem zagadnienia

$$u_t - 3u_{xx} = \sin x - 1, \quad u_0(x) = x^2 + 1 \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Oblicz wartość maksymalną u .

Zadanie 13.8. Niech $u : [0, \pi] \times [0, 2]$ będzie klasycznym rozwiązaniem zagadnienia

$$u_t - u_{xx} = \pi u, \quad u_0(x) = \sin x + 1 \quad u(0) = u(\pi) = 1.$$

Wyznacz maksimum i minimum u .

Zadanie 13.9. Niech $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ będzie klasycznym rozwiązaniem zagadnienia

$$-\Delta u - 2u_x = -6u^2 \text{ w } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = x^4 + y^2 - x^2y,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ to kula o środku w zerze i promieniu 1. Znaleźć maksymalną wartość u .

Zadanie 13.10. Korzystając z zasad maksimum wykazać, że jedynymi gładkimi rozwiązaniami zagadnienia Laplace'a z zerowym warunkiem Neumanna na brzegu w ograniczonym spójnym otwartym zbiorze Ω o gładkim brzegu są funkcje stałe.

Zadanie 13.11. Rozważmy klasyczne rozwiązania równania przewodnictwa ciepła z nieujemnym (i nierównym tożsamościowo 0) gładkim warunkiem początkowym w ograniczonym, spójnym, otwartym zbiorze Ω o gładkim brzegu, z zerowym warunkiem Neumanna na brzegu. Wykazać, że rozwiązania $u(\cdot, t)$ są funkcjami dodatnimi dla dowolnego ustalonego $t > 0$.

Zadanie 13.12 (Lemat Serrina). Niech Ω będzie ograniczonym spójnym otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ o gładkim brzegu. Załóżmy, że $u \in C^2(\bar{\Omega})$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$-\Delta u + cu = 0 \quad u \geq 0 \quad \text{w } \Omega,$$

gdzie $c \in L^\infty(\Omega)$. Załóżmy ponadto, że $u \neq 0$ w Ω . Wówczas, po pierwsze, jeśli $x_0 \in \partial\Omega$ spełnia warunek kuli wewnętrznej i $u(x_0) = 0$, to $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) < 0$. Po drugie, $u > 0$ w Ω .

Zadanie 13.13. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Rozważmy słabe rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$-\Delta u = 0 \quad \text{w } \Omega$$

$$u = g \in L^\infty(\partial\Omega) \quad \text{na brzegu } \Omega.$$

Wykazać, że $u \geq \min_{x \in \partial\Omega} g(x)$ p.w..

Zadanie 13.14. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Rozważmy słabe rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{w } \Omega \times [0, T]$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\Omega), \quad u = g \in L^\infty(\partial\Omega) \quad \text{na brzegu } \Omega.$$

Wykazać, że nierówność

$$u \leq \max\left\{\max_{x \in \partial\Omega} g(x), \max_{x \in \Omega} u_0(x)\right\}$$

zachodzi wówczas p.w. w $\Omega \times [0, T]$.

Zadanie 13.15. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Rozważmy słabe rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{w } \Omega \times [0, T],$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{na brzegu } \Omega,$$

Wykazać, że wówczas dla każdego $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ zachodzi $u(x, t) \leq \sup_{x \in \Omega} u_0(x)$.

Zadanie 13.16. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, otwartym, spójnym o gładkim brzegu. Rozważmy słabe rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$u_t - \Delta u = \operatorname{div}(u \nabla v) \quad \text{w } \Omega \times [0, T],$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{na brzegu } \Omega,$$

gdzie v jest z góry daną funkcją klasy C^1 , taką że $\nabla v \in L^\infty(\Omega \times [0, T])$. Załóżmy ponadto, że słabe rozwiązanie u jest jedyne. Wykazać, że jeśli $u_0(x) \geq 0$, to także $u \geq 0$.

Uwaga. Powyższe zadanie zostało ułożone w oparciu o pomysłową pracę Gajewskiego i Zachariasia [9].

Rozdział 14

Równania pierwszego rzędu i metoda charakterystyk

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad (14.1)$$

gdzie

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{jest zadana funkcja gładką.}$$

O zbiorze Ω będziemy zakładać, że jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i ma gładki brzeg. Niewiadomą w tym równaniu jest funkcja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Równanie to uzupełniamy warunkiem brzegowym, zadając wartości funkcji u na brzegu zbioru Ω , bądź na jego kawałku:

$$u(x) = g(x) \quad \text{dla } x \in \Gamma \subseteq \partial\Omega. \quad (14.2)$$

Zajmiemy się metodą rozwiązywania tego typu równań, zwaną *metodą charakterystyk*. Opiera się ona na pomysłe, aby wyznaczyć wartość funkcji u w punkcie $x \in \Omega$, znajdując w zbiorze Ω krzywą γ , która łączy punkt x z pewnym punktem na brzegu $x_0 \in \Gamma$ (gdzie wartości funkcji są już określone) i która ma tę własność, że wiemy, jak obliczać wartości funkcji u w punktach tej krzywej. Krzywą tę wyznaczamy, sprowadzając równanie (14.1) do odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych. W ten sposób powierzchnia całkową równania, czyli wykres funkcji u , zostaje jakby utkana z nitek, tzn. z wartości funkcji u na poszczególnych krzywych γ .

Dobrym źródłem informacji o metodzie charakterystyk jest książka Evansa [8].

Spróbujmy popatrzeć najpierw na pewien prosty przykład.

Założmy, że funkcja F w równaniu (14.1) jest liniowa względem trzeciej zmiennej i jednorodna oraz nie zależy od zmiennej z , tzn. jest postaci

$$F(x, z, p) = a(x) \cdot p,$$

gdzie

$$a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{jest ustaloną funkcją gładką,}$$

a kropka (tu i dalej) oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$. Równanie (14.1) przyjmuje wówczas postać

$$a(x) \cdot Du(x) = a_1(x)u_{x_1}(x) + \dots + a_n(x)u_{x_n}(x) = 0. \quad (14.3)$$

Oznacza to, że wektor gradientu $Du(x)$ jest w każdym punkcie $x \in \Omega$ prostopadły do danego wektora $a(x)$. Gradient $Du(x)$ jest w punkcie x prostopadły do poziomicy funkcji u , zatem wektor $a(x)$ musi być w tym punkcie do niej styczny. Stąd wynika, że trajektorie pola wektorowego a leżą na poziomicy funkcji u . Zatem, zamiast wyznaczać bezpośrednio funkcję u , znajdziemy najpierw jej poziomice. Utkamy je z wyliczonych krzywych całkowych pola wektorowego a wypuszczonych z zadanych punktów na brzegu obszaru Ω . W tym celu rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) &= a_1(x(s)) \\ \dot{x}_2(s) &= a_2(x(s)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(s) &= a_n(x(s)) \end{cases}$$

gdzie $x(s)$ jest parametryzacją krzywej całkowej pola a . Układ ten uzupełnimy odpowiednimi warunkami początkowymi (które możemy zadać wykorzystując znajomość wartości brzegowych (14.2) dla funkcji u). Przy założeniu, że funkcje a_i są klasy C^1 układ ten posiada jednoznaczne rozwiązanie. Wyznaczona w ten sposób krzywa całkowa $x(s)$ pola a leży na poziomicy funkcji u , zatem $u(x(s)) = \text{const.} = u(x(0))$, gdzie $x(0) \in \partial\Omega$. Znajomość parametryzacji krzywej $x(s)$ oraz wartości funkcji na tej krzywej pozwala na wyznaczenie wzoru funkcji u , bądź określenie jej w postaci uwikłanej. Krzywą $x(s)$ nazywamy *charakterystyką* lub *krzywą charakterystyczną* równania (14.3), stąd nazwa metody.

Zajmiemy się teraz problemem jak, dla dowolnej funkcji F , wyznaczać krzywe charakterystyczne, czyli inaczej — jak sprowadzać równanie (14.1) do odpowiedniego układu równań zwyczajnych.

14.1 Układ charakterystyczny

Założmy, że funkcja u będąca rozwiązaniem zagadnienia (14.1)-(14.2) jest klasy $C^2(\Omega)$. Przyjmijmy, że krzywa γ opisana jest parametryzacją

$$x(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$$

dla s z pewnego odcinka prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Niech funkcja z opisuje wartości funkcji u na tej krzywej, tzn.

$$z(s) = u(x(s)),$$

a funkcja $p(s) = (p_1(s), \dots, p_n(s))$ — wartości gradientu funkcji u na tej krzywej, tzn.

$$\begin{aligned} p(s) &= Du(x(s)), & \text{gdzie} \\ p_i(s) &= u_{x_i}(x(s)) & \text{dla } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Pochodne funkcji x, z, p względem parametru s będziemy oznaczać $\dot{x}, \dot{z}, \dot{p}$.

Funkcja F jest funkcją $2n + 1$ argumentów. Odpowiednie składowe jej gradientu oznaczmy przez F_x, F_z, F_p . Ściślej mówiąc,

$$\begin{aligned} F_x(x, z, p) &= D_x F(x, z, p) = (F_{x_1}(x, z, p), \dots, F_{x_n}(x, z, p)) \\ F_z(x, z, p) &= D_z F(x, z, p) \\ F_p(x, z, p) &= D_p F(x, z, p) = (F_{p_1}(x, z, p), \dots, F_{p_n}(x, z, p)). \end{aligned}$$

Różniczkując funkcje z oraz p względem parametru s otrzymujemy

$$\dot{z}(s) = Du(x(s)) \cdot \dot{x}(s) = p(s) \cdot \dot{x}(s) \quad (14.4)$$

oraz

$$\dot{p}_i(s) = D_x(u_{x_i})(x(s)) \cdot \dot{x}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x(s)) \dot{x}_j(s) \quad (14.5)$$

dla $i = 1, \dots, n$. Zauważmy, że w ostatnim równaniu pojawiają się drugie pochodne funkcji u . Zróżniczkujmy także wyjściowe równanie (14.1) względem x . Otrzymamy

$$F_{x_i}(x, u, Du) + F_z(x, u, Du) u_{x_i}(x) + \sum_{j=1}^n F_{p_j}(x, u, Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0 \quad (14.6)$$

dla $i = 1, \dots, n$.

Założmy teraz, że γ jest krzywą w zbiorze Ω , której parametryzacja $x(s)$ spełnia równanie

$$\dot{x}(s) = F_p(x(s), z(s), p(s)). \quad (14.7)$$

Wówczas równanie (14.4) przyjmuje postać

$$\dot{z}(s) = p(s) \cdot F_p(x(s), z(s), p(s)). \quad (14.8)$$

Równanie (14.5) możemy przekształcić, korzystając z (14.6), (14.7) i z symetrii drugich pochodnych (przypomnijmy, że zakładamy, że u jest klasy C^2 !), otrzymując

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x(s)) F_{p_j}(x(s), z(s), p(s)) \\ &= -F_{x_i}(x(s), z(s), p(s)) - F_z(x(s), z(s), p(s)) p_i(x(s)). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Łącząc równania (14.7), (14.8), (14.9) otrzymujemy zamknięty układ $2n + 1$ równań zwyczajnych postaci

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_p \\ \dot{z} &= p \cdot F_p \\ \dot{p} &= -F_x - F_z p \end{cases} \quad (14.10)$$

Dla uproszczenia pominęliśmy w zapisie argumenty funkcji, należy jednak pamiętać, że funkcje x, z, p i ich pochodne zależą od parametru s , zaś argumentem funkcji F jest wektor $(x, z, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

Definicja 14.1. Układ (14.10) nazywamy *układem charakterystycznym* równania (14.1).

Pamiętajmy, że układ ten wyprowadzony został przy założeniu, że rozwiązanie równania (14.1) jest klasy $C^2(\Omega)$. Kluczowym pomysłem przy wyprowadzaniu układu charakterystycznego było przyjęcie założenia, że wektor styczny do krzywej γ spełnia równanie (14.7).

Definicja 14.2. Krzywą $x(s)$ otrzymaną jako część rozwiązania układu (14.10) będziemy nazywać *charakterystyką* bądź też *krzywą charakterystyczną* równania (14.1), tzn. równania

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0.$$

Pełne rozwiązanie układu (14.10), to znaczy krzywą $(x(s), z(s), p(s))$ położoną w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$, będziemy nazywać *wstęgą charakterystyczną* równania (14.1).

Uwaga terminologiczna. W niektórych źródłach, np. w podręczniku Evansa [8], termin *charakterystyka* ma nieco inne znaczenie: odnosi się do pełnego rozwiązania układu (14.10), czyli do krzywej całkowitej $(x(s), z(s), p(s))$ położonej w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$, zaś samą krzywą $x(s)$ w zbiorze Ω określa się jako *zrzuconą charakterystykę* na przestrzeń zmiennych niezależnych $\mathbb{R}^n$.

W niektórych przypadkach szczególnych układ charakterystyczny (14.10) ma prostą formę. Dzieje się tak np. wtedy, gdy funkcja F , definiująca równanie (14.1) jest liniowa względem zmiennej p .

Przykład 14.1 (Funkcja F jest liniowa¹). Załóżmy, że funkcja F jest funkcją liniową drugiej i trzeciej zmiennej, tzn. F jest postaci

$$F(x, z, p) = a(x)z + b(x) \cdot p + c(x),$$

gdzie $a : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami gładkimi. Równanie (14.1) przyjmuje wówczas postać

$$b_1(x)u_{x_1}(x) + \dots + b_n(x)u_{x_n}(x) + a(x)u(x) + c(x) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega. \quad (14.11)$$

Wypisując pierwsze $n + 1$ równań układu charakterystycznego otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s)) \\ \dot{z}(s) = b(x(s)) \cdot p(s) \\ \quad = -a(x(s))z(s) - c(x(s)) \end{cases} \quad \text{z równania (14.11).} \quad (14.12)$$

Dostaliśmy układ zamknięty; nie trzeba wypisywać dodatkowego równania na p . Do wyznaczenia krzywej charakterystycznej wystarczy rozwiązać uproszczony układ charakterystyczny (14.12).

¹Jest tu pewna nieścisłość terminologiczna – w zasadzie funkcja postaci $f(z, p) = az + bp + c$ jest funkcją liniową tylko dla $c = 0$, a dla $c \neq 0$ jest funkcją afiniczną, ale utarło się (szczególnie w praktyce szkolnej) mieszać te dwa pojęcia i nazywać funkcje afiniczne liniowymi.

Przykład 14.2. Załóżmy teraz, że F jest funkcją liniową tylko względem zmiennej oznaczającej pochodną Du , tzn. F jest postaci

$$F(x, z, p) = a(x, z) \cdot p + c(x, z),$$

gdzie $a : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $c : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami gładkimi. Równanie (14.1) przyjmuje postać

$$a_1(x, u) u_{x_1}(x) + \dots + a_n(x, u) u_{x_n}(x) + c(x, u) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega. \quad (14.13)$$

Wypisując podobnie jak poprzednio pierwsze $n + 1$ równań układu charakterystycznego otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = a(x(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) = a(x(s), z(s)) \cdot p(s) \\ \quad = -c(x(s), z(s)) \end{cases} \quad \text{z równania (14.13).} \quad (14.14)$$

Ponownie dostajemy układ zamknięty bez konieczności wypisywania równania na p . Zatem również w przypadku, gdy funkcja F jest liniowa tylko względem zmiennej p do wyznaczenia krzywej charakterystycznej wystarczy uproszczony układ charakterystyczny (14.14).

14.2 Dopuszczalność warunków początkowych

Aby układ (14.10) miał jednoznaczne rozwiązanie, trzeba go uzupełnić odpowiednimi warunkami początkowymi.

W dalszej części wykładu będziemy dla uproszczenia zakładać, że brzeg Γ zbioru Ω w pobliżu punktu $x_0 \in \Gamma$ jest zawarty w hiperpłaszczyźnie $\{x_n = 0\}$, a zbiór Ω zawarty jest w półprzestrzeni $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Taką sytuację można uzyskać przekształcając dyfeomorficznie obszar Ω i wyjściowe zagadnienie w otoczeniu punktu x_0 .

Niech punkt x_0 będzie dowolnym punktem na hiperpowierzchni Γ , na której zadany jest warunek brzegowy (14.2). Układ (14.10) chcemy uzupełnić o warunki początkowe

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ z(0) &= z_0, \\ p(0) &= p_0. \end{aligned}$$

Wartości brzegowe funkcji u na Γ zadane są funkcją g , przyjmujemy więc

$$z(0) = z_0 = g(x_0). \quad (14.15)$$

Pojawia się natomiast problem jak określić punkt początkowy p_0 , skoro warunek brzegowy (14.2) nic nie mówi o wartości gradientu funkcji u .

Zauważmy, że skoro przyjęliśmy założenie, że $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$, to warunek brzegowy (14.2) możemy zapisać w postaci

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Różniczkując u względem x_i (w kierunkach stycznych do Γ) otrzymujemy

$$u_{x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g_{x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1.$$

Kładziemy zatem

$$p_i(0) = g_{x_i}(x_0) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1. \quad (14.16)$$

Otrzymaliśmy $(n-1)$ warunków określających pierwsze $(n-1)$ współrzędnych wektora $p(0)$. Potrzebujemy jeszcze jednego warunku pozwalającego określić ostatnią współrzędną. W tym celu skorzystamy z równania (14.1). Wstawiając do niego wartości $x(0)$, $z(0)$ oraz $p_i(0)$ dla $i = 1, \dots, n-1$ otrzymujemy równanie

$$F(x_0, g(x_0), g_{x_1}(x_0), \dots, g_{x_{n-1}}(x_0), p_n(0)) = 0, \quad (14.17)$$

w którym jedyną niewiadomą jest $p_n(0)$ i w ten sposób otrzymujemy ostatnie, n -te równanie określające warunek początkowy dla funkcji $p(s)$.

Zauważmy, że równanie (14.17) jest w ogólności równaniem nieliniowym, co oznacza, że wektor p_0 spełniający warunki (14.16) oraz (14.17) może w ogóle nie istnieć, albo nie być jednoznacznie wyznaczony.

Równania (14.15), (14.16), (14.17) będziemy nazywać *warunkami zgodności*.

Definicja 14.3. Mówimy, że wektor danych początkowych $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ jest *dopuszczalny* dla układu charakterystycznego (14.10) związanego z zagadnieniem brzegowym (14.1)–(14.2), tzn. zagadnieniem

$$\begin{aligned} F(x, u, Du) &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ u &= g \quad \text{na } \Gamma \subseteq \partial\Omega, \end{aligned}$$

jeśli $x_0 \in \Gamma$ oraz spełnione są warunki zgodności (14.15), (14.16), (14.17), tzn.

$$\begin{aligned} z_0 &= g(x_0), \\ p_0 &= (g_{x_1}(x_0), \dots, g_{x_{n-1}}(x_0), p_n(0)), \\ F(x_0, z_0, p_0) &= 0. \end{aligned}$$

14.3 Niecharakterystyczność danych początkowych

Wiemy już jakimi warunkami początkowymi należy uzupełnić układ charakterystyczny (14.10), aby wyznaczyć charakterystykę $x(s)$ przecinającą Γ w punkcie x_0 oraz wartości funkcji u na charakterystyce. Aby rozwiązać zagadnienie (14.1)–(14.2) lokalnie w otoczeniu punktu $x_0 \in \Gamma$, musimy jednak umieć rozwiązać układ charakterystyczny dla warunków początkowych leżących blisko x_0 . Inaczej mówiąc, trzeba sprawdzić, czy małe zaburzenie wektora (x_0, z_0, p_0) zachowuje warunki zgodności.

Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 14.1. Załóżmy, że wektor danych początkowych (x_0, z_0, p_0) jest dopuszczalny oraz, że pochodna cząstkowa funkcji F względem ostatniej zmiennej wektora $p \in \mathbb{R}^n$ jest różna od zera w punkcie (x_0, z_0, p_0) , tzn.

$$F_{p_n}(x_0, z_0, p_0) \neq 0.$$

Istnieje wówczas otoczenie U punktu $x_0 \in \Gamma$ o tej własności, że dla dowolnego punktu $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in U \cap \Gamma$ układ n równań dla niewiadomych $b_1, \dots, b_n$

$$\begin{cases} b_1 = g_{x_1}(y) \\ \vdots \\ b_{n-1} = g_{x_{n-1}}(y) \\ F(y, g(y), b_1, \dots, b_{n-1}, b_n) = 0 \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie.

Na mocy powyższego możemy zdefiniować funkcję

$$\begin{aligned} q : U \cap \Gamma &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ q_i(y) &= b_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

która ma tę własność, że $q(x_0) = p_0$ i która pozwala nam “produkować” dopuszczalne dane początkowe dla układu (14.10) w pewnym otoczeniu punktu x_0 . W związku z tym wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 14.4. Powiemy, że wektor danych początkowych $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ jest *niecharakterystyczny*, jeśli spełniony jest warunek

$$F_{p_n}(x_0, z_0, p_0) \neq 0, \quad (14.18)$$

gdzie F jest funkcją definiującą równanie (14.1).

Uwaga 14.1. W przypadku ogólnym, gdy brzeg Γ nie jest płaski w otoczeniu x_0 , tzn. nie jest zawarty w hiperpłaszczyźnie $\{x_n = 0\}$, warunek niecharakterystyczności danych początkowych przyjmuje postać

$$D_p F(x_0, z_0, p_0) \cdot \nu(x_0) \neq 0,$$

gdzie $\nu(x_0)$ oznacza wektor normalny zewnętrzny do brzegu $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ w punkcie x_0 .

14.4 Rozwiązania lokalne

Przejdziemy teraz do zasadniczego celu naszych rozważań, tj. do konstrukcji (lokalnego) rozwiązania zagadnienia (14.1)–(14.2). Lokalność oznacza, że chcemy znaleźć rozwiązanie przynajmniej w pobliżu brzegu Γ , niekoniecznie w całym zbiorze Ω .

Założmy, że wektor danych początkowych $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ jest dopuszczalny i niecharakterystyczny. Zgodnie z lematem 14.1 istnieje funkcja $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że $p_0 = q(x_0)$, a

ponadto wektor $(\alpha, g(\alpha), q(\alpha))$ dla wszystkich wartości α z pewnego otoczenia punktu x_0 na Γ określa dane dopuszczalne. Dla każdego takiego punktu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ rozwiązujemy układ charakterystyczny (14.10)

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_p \\ \dot{z} &= p \cdot F_p \\ \dot{p} &= -F_x - F_z p \end{cases}$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha, \\ z(0) &= g(\alpha), \\ p(0) &= q(\alpha), \end{aligned} \tag{14.19}$$

otrzymując wstęgę charakterystyczną, czyli krzywą $(x(s), z(s), p(s))$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$. Zależy ona oczywiście od punktu początkowego. Aby zaznaczyć tę zależność, będziemy czasem uwzględniać parametr α jako argument, zapisując pełne rozwiązanie układu jako

$$(x(\alpha, s), z(\alpha, s), p(\alpha, s)).$$

Przypomnijmy, że dla uproszczenia założyliśmy, że $\Gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, a $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 14.2. *Założmy, że (x_0, z_0, p_0) jest wektorem dopuszczalnych i niecharakterystycznych danych początkowych. Istnieją wówczas: przedział otwarty $I \subset \mathbb{R}$ zawierający zero, otoczenie $W \subseteq \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ punktu x_0 oraz otoczenie $V \subset \mathbb{R}^n$ punktu x_0 , o tej własności, że dla każdego $y \in V$ istnieje dokładnie jedna para $(\alpha, s) \in W \times I$ spełniająca warunek*

$$y = x(\alpha, s),$$

gdzie $x(\alpha, \cdot)$ oznacza charakterystykę startującą z punktu $\alpha \in W$. Ponadto odwzorowania

$$\begin{aligned} y &\mapsto s(y) \\ y &\mapsto \alpha(y) \end{aligned}$$

są klasy C^2 .

Skoro na mocy powyższego lematu przez każdy punkt $x \in V$ przechodzi dokładnie jedna charakterystyka startująca z pewnego punktu $\alpha \in W$, możemy zdefiniować funkcję u , kładąc

$$u(x) = z(\alpha(x), s(x)), \tag{14.20}$$

gdzie $\alpha(x) \in W$ oraz $s(x) \in I$ są takie jak w lemacie 14.2, a funkcja $z(\alpha, s)$ jest częścią rozwiązania układu charakterystycznego (14.10) z warunkami (14.19).

Twierdzenie 14.1. Załóżmy, że (x_0, z_0, p_0) jest wektorem dopuszczalnych i niecharakterystycznych danych początkowych. Funkcja u zdefiniowana wzorem (14.20) jest klasy C^2 i spełnia równanie różniczkowe cząstkowe

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \text{dla } x \in V \subset \Omega$$

z warunkiem brzegowym

$$u(x_0) = g(x_0) \quad \text{dla } x_0 \in W \subset \Gamma,$$

gdzie zbiory W i V są takie jak w lemacie 14.2.

Zauważmy, że twierdzenie to mówi o istnieniu rozwiązań *lokalnych*, tzn. takich, które są określone w pewnym (być może małym) otoczeniu tych punktów brzegowych, które generują dopuszczalne i niecharakterystyczne dane początkowe dla układu charakterystycznego. Aby znaleźć odpowiedź na pytanie o istnienie rozwiązania w całym zbiorze Ω , trzeba badać innymi metodami przedłużalność otrzymanych rozwiązań lokalnych.

Problem rozwiązania układu charakterystycznego bywa poważnym wyzwaniem. W przypadkach szczególnych, np. gdy F jest funkcją liniową, jest to zadanie dość proste. Jednak w ogólnym przypadku znalezienie rozwiązania może wymagać użycia metod numerycznych. W dalszej części rozwiążemy kilka przykładów, a później zobaczymy, jak metoda charakterystyk działa w praktyce.

14.5 Przykłady

Dla ułatwienia śledzenia rozwiązań przypominamy ogólną postać układu charakterystycznego:

$$\begin{cases} \dot{x} &= F_p, \\ \dot{z} &= p \cdot F_p, \\ \dot{p} &= -F_x - F_z p. \end{cases}$$

Pierwsze cztery przykłady dotyczą równania quasiliniowego, tzn. takiego, w którym funkcja F jest funkcją liniową zmiennej p . Jest to sytuacja, gdy układ charakterystyczny ma prostszą postać — do jego zamknięcia nie potrzeba wypisywać równania na $\dot{p}$. Niemniej, nawet w takiej sytuacji sformułowane wyżej twierdzenie mówi o istnieniu rozwiązań lokalnych. Otrzymawszy zatem rozwiązanie, trzeba zawsze zbadać na jakim obszarze jest ono dobrze określone.

Zadanie 14.1. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x u_x + y u_y = 2 \quad \text{w zbiorze } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \quad (14.21)$$

spełniające warunek

$$u(1, y) = 3y^2. \quad (14.22)$$

Rozwiązanie. To zagadnienie nie jest ściśle rzecz biorąc zagadnieniem brzegowym, gdyż prosta $(1, y) \in \mathbb{R}^2$ nie stanowi brzegu obszaru Ω . Możemy jednak rozważyć obszary $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ oraz $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$. Wtedy warunek (14.22) zadany jest na całym brzegu obszaru Ω_1 oraz na kawałku Γ brzegu obszaru Ω_2 .

Założmy, że $(x, y) \in \Omega_1$. Funkcja F definiująca równanie (14.21) jest postaci

$$F(x, y, z, p) = x p_1 + y p_2 - 2.$$

Jest to funkcja liniowa względem $p = (p_1, p_2)$, więc układ charakterystyczny nie wymaga równania dla $p(s)$. Przyjmuje on postać

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= x(s), \\ \dot{y}(s) &= y(s), \\ \dot{z}(s) &= x(s) p_1(s) + y(s) p_2(s) = 2, \end{cases}$$

wraz z warunkiem początkowym

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ y(0) &= \alpha, \\ z(0) &= 3\alpha^2. \end{aligned}$$

Parametr α określa położenie punktu początkowego na brzegu obszaru. Rozwiązując ten prosty układ dostajemy

$$\begin{aligned} x(s, \alpha) &= e^s \\ y(s, \alpha) &= \alpha e^s \\ z(s, \alpha) &= 2s + 3\alpha^2. \end{aligned}$$

Charakterystyka wypuszczona z punktu $(1, \alpha)$ opisana jest parametryzacją

$$(x(s, \alpha), y(s, \alpha)) = (e^s, \alpha e^s).$$

Ponieważ

$$u(x(s, \alpha), y(s, \alpha)) = z(s, \alpha) = 2s + 3\alpha^2,$$

to odwracając parametryzację (jest to możliwe zarówno w obszarze Ω_1 jak i Ω_2) otrzymujemy wzór na funkcję u :

$$u(x, y) = 2 \ln x + 3 \frac{y^2}{x^2} \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega_1.$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten określa rozwiązanie także w obszarze Ω_2 i że rozwiązania te sklejają się do funkcji gładkiej na całym obszarze Ω . $\diamond$

Zadanie 14.2. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} x_1 u_{x_1} + (x_1 + x_2) u_{x_2} + (x_1 + x_3) u_{x_3} &= x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{dla } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x_1, x_2, 0) &= x_1 - x_2 \quad \text{dla } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Funkcja F definiująca równanie jest postaci

$$F(x, z, p) = x_1 p_1 + (x_1 + x_2) p_2 + (x_1 + x_3) p_3 - x_1 - x_2 - x_3.$$

Ponieważ jest ona liniowa względem zmiennej p , układ charakterystyczny upraszcza się do układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) &= x_1(s) \\ \dot{x}_2(s) &= x_1(s) + x_2(s) \\ \dot{x}_3(s) &= x_1(s) + x_3(s) \\ \dot{z}(s) &= x_1(s) + x_2(s) + x_3(s). \end{cases}$$

Korzystając z warunku brzegowego nakładamy warunki początkowe postaci

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \alpha, \\ x_2(0) &= \beta, \\ x_3(0) &= 0, \\ z(0) &= \alpha - \beta, \end{aligned}$$

gdzie α, β są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Rozwiązaniem powyższego układu są funkcje

$$\begin{aligned} x_1(s, \alpha, \beta) &= \alpha e^s, \\ x_2(s, \alpha, \beta) &= \beta e^s + \alpha s e^s, \\ x_3(s, \alpha, \beta) &= \alpha s e^s, \\ z(s, \alpha, \beta) &= (\beta - \alpha)(e^s - 2) + 2\alpha s e^s. \end{aligned}$$

Niech $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Szukamy charakterystyki przechodzącej przez ten punkt.

Jeśli $x_1 \neq 0$, to $\alpha \neq 0$ i dostajemy

$$\begin{aligned} s &= \frac{x_3}{x_1} \\ \alpha &= x_1 e^{-\frac{x_3}{x_1}} \\ \beta &= (x_2 - x_3) e^{-\frac{x_3}{x_1}}. \end{aligned}$$

Funkcja u zadana jest zatem wzorem

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3 - x_1) + 2(x_1 - x_2 + x_3) e^{-\frac{x_3}{x_1}} \quad \text{dla } x_1 \neq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0. \quad (14.23)$$

Jeśli natomiast $x_1 = 0$, to $\alpha = 0$ i dane początkowe są niecharakterystyczne. Mamy bowiem

$$F_{p_3}(x(0), z(0), p(0)) = x_1(0) + x_3(0) = 0.$$

Twierdzenie 14.1 o lokalnym istnieniu rozwiązań nic więc nie mówi o rozwiązaniach przechodzących „nad” prostą $(0, x_2, 0) \subset \partial\Omega$.

Otrzymaliśmy zatem dwa kawałki rozwiązania: jeden określony na podzbiorze $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset \Omega$ a drugi na podzbiorze $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset \Omega$. Zastanówmy się, czy można je skleić do rozwiązania określonego na całym zbiorze Ω .

Niestety, patrząc na wzór funkcji u (14.23) widzimy, że rozwiązania nie da się przedłużyć w sposób ciągły do punktu $(0, x_2, x_3)$, dla $x_3 \neq 0$ — granice jednostronne będą różne, gdy będziemy podchodzić od strony $x_1 > 0$ i $x_1 < 0$. Łatwo jest również sprawdzić, że granica rozwiązania nie będzie istnieć w żadnym punkcie brzegowym postaci $(0, x_2, 0)$.

Znaleźliśmy w ten sposób rozwiązanie wyjściowego równania, ale w zbiorze

$$\Omega_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

z warunkiem brzegowym określonym na części brzegu:

$$u(x_1, x_2, 0) = x_1 - x_2 \quad \text{na} \quad \Gamma \subset \partial\Omega_1,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\} \\ \partial\Omega_1 &= \Gamma \cup \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Analogicznie wykazujemy, że istnieje rozwiązanie zagadnienia zadanego na zbiorze

$$\Omega_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

z warunkiem brzegowym określonym również na kawałku Γ brzegu tego zbioru, gdzie

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 < 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\}.$$

◇

Zadanie 14.3. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$u u_x - u_y = u - 1 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$$

spełniające warunek

$$u(x, x) = 2x.$$

Rozwiązanie. Wartości funkcji u określone są na prostej $y = x$, która dzieli całą płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na dwie półpłaszczyzny, formalnie rzecz biorąc nasze teoretyczne rozważania (i twierdzenia) dotyczą dwóch otwartych obszarów, nie ma to jednak wpływu na procedurę wyznaczania rozwiązania.

Równanie jest postaci $F(x, y, u, Du) = 0$, gdzie

$$F(x, y, z, p) = z p_1 - p_2 - z + 1.$$

Przyjmijmy

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x(s), y(s)), \\ z(s) &= u(x(s), y(s)), \\ p(s) &= (u_x(x(s), y(s)), u_y(x(s), y(s))) = (p_1(s), p_2(s)).\end{aligned}$$

Wypisujemy równania charakterystyk:

$$\begin{aligned}\dot{x}(s) &= z(s), \\ \dot{y}(s) &= -1, \\ \dot{z}(s) &= (p_1(s), p_2(s)) \cdot (z, -1) = zp_1 - p_2 = z - 1.\end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, równanie na $p(s)$ nie jest nam potrzebne. Mamy zatem rozwiązać układ

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = z(s) \\ \dot{y}(s) = -1 \\ \dot{z}(s) = z - 1 \end{cases}$$

z odczytanym z warunków brzegowych warunkiem początkowym

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \alpha \\ \dot{y}(0) = \alpha \\ \dot{z}(0) = 2\alpha. \end{cases}$$

Odcałkowując równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}z(s) &= Ae^s + 1, \\ y(s) &= -s + B, \\ x(s) &= Ae^s + s + C,\end{aligned}$$

co po uwzględnieniu warunków początkowych daje

$$\begin{aligned}z(s, \alpha) &= (2\alpha - 1)e^s + 1, \\ y(s, \alpha) &= -s + \alpha, \\ x(s, \alpha) &= (2\alpha - 1)e^s + s + 1 - \alpha.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$u(x, y) = z(x(s, \alpha), y(s, \alpha)) = (2\alpha - 1)e^s + 1 = x + y.$$

◇

Zadanie 14.4 (Niejednorodne równanie Burgersa). Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned}u_t + u u_x &= 1 \quad \text{dla } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= kx \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest zadany parametrem.

Rozwiązanie. Funkcja F jest postaci

$$F(x, t, z, p) = p_2 + zp_1 - 1.$$

Wypiszmy układ charakterystyczny

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{x}(s) = z(s) \\ \dot{z}(s) = 1 \end{cases}$$

oraz warunki początkowe

$$\begin{cases} t(0) = 0 \\ x(0) = \alpha \\ z(0) = k\alpha. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są funkcje

$$\begin{aligned} t(s, \alpha) &= s, \\ x(s, \alpha) &= \frac{1}{2}s^2 + k\alpha s + \alpha, \\ z(s, \alpha) &= s + k\alpha. \end{aligned}$$

Parametr s równy jest zmiennej t , zaś parametr α łatwo możemy wyznaczyć znając współrzędne punktu (x, t) :

$$\alpha = \frac{x - \frac{1}{2}t^2}{kt + 1}.$$

Funkcja u będąca rozwiązaniem naszego zagadnienia jest zatem postaci

$$u(x, t) = t + k \frac{x - \frac{1}{2}t^2}{kt + 1}.$$

Rozwiązanie to zależy oczywiście od parametru k , który jest jedną z danych wyjściowego zagadnienia. Łatwo zauważyć, że dziedzina rozwiązania w istotny sposób zależy od tego parametru.

Charakterystyka startująca z punktu $(\alpha, 0)$ jest opisana parametryzacją

$$\begin{aligned} t(s, \alpha) &= s, \\ x(s, \alpha) &= \frac{1}{2}s^2 + k\alpha s + \alpha. \end{aligned}$$

Dla $k \geq 0$ takie krzywe nie przecinają się w obszarze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Pozwala to na skonstruowanie rozwiązania, które jest dobrze określone na całej półpłaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Dla $k < 0$ charakterystyki przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2k^2}, -\frac{1}{k})$: Nie możemy zatem w sposób jednoznaczny odwrócić parametryzacji. Przedział I w Twierdzeniu 14.1 jest równy $(0, -\frac{1}{k})$. Rozwiązanie naszego wyjściowego zagadnienia brzegowego „wybuchu” do nieskończoności dochodząc do punktów na prostej $\mathbb{R} \times \{-\frac{1}{k}\}$, nie jest zatem określone na całej półpłaszczyźnie.

◇

Zadanie 14.5 (Równanie eikonału). Niech $B(0, 1)$ oznacza otwarte koło jednostkowe w $\mathbb{R}^2$. Rozwiązać zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= 1 & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1) \\ u(x, y) &= 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. To równanie jest w pełni nieliniowe z funkcją F postaci

$$F(x, y, z, p) = p_1^2 + p_2^2 - 1 \quad \text{dla } p = (p_1, p_2).$$

Wypisując układ charakterystyczny otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= 2p_1(s), \\ \dot{y}(s) &= 2p_2(s), \\ \dot{z}(s) &= p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} = 2p_1^2 + 2p_2^2 = 2, \\ \dot{p}_1(s) &= -F_x - F_z p_1 = 0, \\ \dot{p}_2(s) &= -F_y - F_z p_2 = 0. \end{aligned}$$

Teraz trzeba określić warunki początkowe dla tego układu. Parametryzujemy okrąg jednostkowy długością łuku

$$[0, 2\pi) \ni \alpha \mapsto (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(0) &= \cos \alpha, \\ y(0) &= \sin \alpha, \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Trzeba jeszcze określić warunki początkowe dla p_1, p_2 . Przypomnijmy, że

$$p_1(s) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(s), y(s)),$$

zatem

$$p_1(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Różniczkując stronami równanie $u(\cos \alpha, \sin \alpha) = 0$ względem parametru α otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\cos \alpha, \sin \alpha)(-\sin \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}(\cos \alpha, \sin \alpha) \cos \alpha = 0,$$

czyli

$$-p_1(0) \sin \alpha + p_2(0) \cos \alpha = 0.$$

Z równania wiemy ponadto, że

$$p_1^2(0) + p_2^2(0) = 1.$$

Powyższe warunki określają dwa dopuszczalne zestawy danych początkowych dla wektora p :

$$\begin{cases} p_1(0) = \cos \alpha \\ p_2(0) = \sin \alpha \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p_1(0) = -\cos \alpha \\ p_2(0) = -\sin \alpha \end{cases}$$

Sprawdźmy, czy wyznaczone dane początkowe spełniają warunek niecharakterystyczności określony w definicji 14.4. Zauważmy, że parametryzacja okręgu długością łuku odpowiada wprowadzeniu w $\mathbb{R}^2$ współrzędnych biegunowych (α, r) . Taki układ współrzędnych powoduje „wyprostowanie” brzegu obszaru Ω — okrąg $\{x^2 + y^2 = 1\}$ zostaje przekształcony na odcinek $\{\alpha \in [0, 2\pi); r = 1\}$. Łatwiej jest jednak pracować w oryginalnym układzie (x, y) . Ponieważ brzeg obszaru nie jest wtedy prosty, warunek niecharakterystyczności przyjmuje postać

$$F_p(x(0), y(0), z(0), p(0)) \cdot \nu \neq 0,$$

gdzie $\nu = (n_1, n_2)$ jest wektorem normalnym zewnętrznym do brzegu obszaru Ω w punkcie $(x(0), y(0))$. U nas

$$\begin{aligned} n_1 &= -\cos \alpha \\ n_2 &= -\sin \alpha. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$(2p_1(0), 2p_2(0)) \cdot (n_1, n_2) = -2(\pm \cos \alpha, \pm \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = \mp 2,$$

co oznacza, że oba zestawy danych początkowych są niecharakterystyczne. Będziemy pracować z zestawem danych początkowych

$$\begin{aligned} x(0) &= \cos \alpha, \\ y(0) &= \sin \alpha, \\ z(0) &= 0, \\ p_1(0) &= \cos \alpha, \\ p_2(0) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

Rozwiązanie dla drugiego zestawu przebiega w sposób analogiczny. Rozwiązując układ charakterystyczny otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(s, \alpha) &= (2s + 1) \cos \alpha, \\ y(s, \alpha) &= (2s + 1) \sin \alpha, \\ z(s, \alpha) &= 2s, \\ p_1(s, \alpha) &= \cos \alpha, \\ p_2(s, \alpha) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

Niech teraz $(x, y) \in \Omega$. Odwracając parametryzację przechodzącej przez ten punkt krzywej charakterystycznej, dostajemy zależność

$$2s + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stąd wzór na rozwiązanie naszego zagadnienia ma postać

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

Drugi zestaw danych początkowych prowadzi do rozwiązania postaci

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

W szczególności widzimy więc, że rozwiązanie naszego zagadnienia nie jest jednoznaczne.



14.6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 14.6. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 1 & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) &= x & \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Zadanie 14.7. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} y u_x - x u_y &= u & \text{w } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}, \\ u(x, 0) &= x & \text{dla } x \geq 0. \end{aligned}$$

Czy to zagadnienie posiada rozwiązanie określone na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$? Czy jest ono jednoznaczne?

Zadanie 14.8. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} x^2 u_x + y^2 u_y &= (x + y)u & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, \frac{x}{2}) &= 1 & \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Uwaga: W kolejnych zadaniach nie ma sprecyzowanego obszaru, w którym ma być określona funkcja będąca rozwiązaniem danego równania. Należy rozwiązać równanie w możliwie największym obszarze i zbadać przedłużalność tego rozwiązania.

Zadanie 14.9. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x - x u_y = u$$

spełniające warunek

$$u(x, 0) = x.$$

Zadanie 14.10. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x u_x + 2y u_y + u_z = 3u$$

spełniające warunek

$$u(x, y, 0) = x - y.$$

Zadanie 14.11. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_y - uu_x + 2u = 0$$

spełniające warunek

$$u(x, 0) = x.$$

Zadanie 14.12. Znaleźć rozwiązanie równania

$$uu_x + u_y = 1$$

spełniające warunek

$$u(x, x) = \frac{1}{2}x.$$

Zadanie 14.13. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_y + 3u_x = -u^2$$

spełniające warunek

$$u(x, 0) = x^2.$$

Zadanie 14.14. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + u_y = u^2$$

spełniające warunek

$$u(x, -x) = x.$$

Zadanie 14.15. Znaleźć wzór na rozwiązanie równania

$$u_x + u_y = u^2$$

spełniające warunek

$$u(x, 0) = g(x),$$

gdzie g jest zadaną funkcją ciągłą.

Zadanie 14.16. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y = (x^2 - y^2)u$$

spełniające warunek

$$u(x, -x) = 1.$$

Zadanie 14.17. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x^2 - u_y^2 = xu + y$$

spełniające warunek

$$u(x, 0) = -x.$$

Zadanie 14.18. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x^2 - u_y^2 = xu^2$$

spełniające warunek

$$u(x, x) = 1.$$

Zadanie 14.19. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x u_y = u \quad \text{w } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

spełniające warunek

$$u(0, y) = y^2.$$

Zadanie 14.20. Niech $B = B(0, 1)$ oznacza otwarte koło jednostkowe w $\mathbb{R}^2$. Niech funkcja $u \in C^1(\overline{B})$ będzie rozwiązaniem równania

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + u = 0,$$

gdzie a oraz b są zadanymi funkcjami ciągłymi. Wykazać, że jeśli

$$a(x, y)x + b(x, y)y > 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \partial B,$$

to $u \equiv 0$.

Zadanie 14.21. Rozważmy równanie Burgersa bez lepkości

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + uu_x = 0 \quad \text{dla } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$
$$u(x, 0) = u_0(x).$$

1. Przyjmijmy $u_0(x) = \arctg x$ i niech u będzie rozwiązaniem podanego wyżej zagadnienia. Wykazać, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Czy zbieżność ta jest jednostajna względem x ?

2. Zbadać, dla dowolnego u_0 , zachowanie się rozwiązania przy $t \rightarrow \infty$.

Zadanie 14.22. Rozważmy zagadnienie

$$x^3 u_x + y u_y = c(x, y)u \quad \text{w } \mathbb{R}^2$$
$$u(\cos \alpha, \sin \alpha) = g(\alpha) \quad \text{dla } \alpha \in (-\pi, \pi],$$

gdzie g jest funkcją ciągłą na okręgu jednostkowym w $\mathbb{R}^2$, zaś $c \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

1. Znaleźć wzór na funkcję $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$ będącą rozwiązaniem tego zagadnienia w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.
2. Załóżmy, że $c(0, 0) < 0$. Wykazać, że funkcję u można przedłużyć do funkcji klasy $C^1(\mathbb{R}^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \equiv 0$ (co oznacza, że wtedy $u \equiv 0$).
3. Załóżmy, że $c(0, 0) > 0$. Wykazać, że funkcję u można wówczas przedłużyć do funkcji klasy $C^0(\mathbb{R}^2)$.
4. Załóżmy, że $c(0, 0) = 0$. Wykazać, że w ogólności (dla dowolnego c i dowolnego g) nie można przedłużyć funkcji u do funkcji klasy $C^0(\mathbb{R}^2)$.
5. Niech $c(x, y) = y$ oraz załóżmy, że

$$g(0) = g(\pi) = \frac{1}{e}g\left(\frac{\pi}{2}\right) = eg\left(-\frac{\pi}{2}\right) = K$$

dla pewnego $K \in \mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = K \quad \forall \alpha \in (-\pi, \pi].$$

Czy u można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^2$?

6. Niech $c(x, y) = x^2$ oraz załóżmy, że

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Czy u można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 14.23. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t + h(u)u_x &= 0 \quad \text{w } \Omega = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\} \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ oraz $g \in C^0(\mathbb{R})$.

1. Wypisać i rozwiązać układ charakterystyczny dla tego zagadnienia.
2. Załóżmy, że $g \in C^1(\mathbb{R})$. Podać warunek, jaki muszą spełniać funkcje h oraz g , aby istniało jednoznaczne rozwiązanie tego zagadnienia w obszarze $\mathbb{R} \times [0, T]$ dla pewnego dostatecznie małego T . Wyznaczyć maksymalną wartość T_{max} dla T . Wykazać, że rzeczywiście istnieje jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T_{max}])$ dla g oraz h spełniających podany warunek.
3. Załóżmy, że

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Podać warunek na funkcję h , aby krzywe charakterystyczne $(x(s), t(s))$ się nie przecinały.

Rozdział 15

Zagadnienia hiperboliczne

Równania hiperboliczne i hiperboliczne układy równań mają to do siebie, że opisują zjawiska, w których zaburzenie ośrodka, np. sygnał świetlny, rozchodzi się ze skończoną prędkością. Co więcej, ilość kierunków owej propagacji jest „maksymalna”.

Typowym przedstawicielem równania hiperbolicznego drugiego rzędu¹ jest równanie falowe,

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (15.1)$$

uzupełnione o warunki początkowe i brzegowe. Szczególnym przypadkiem (15.1), gdy $n = 1$ jest równanie drgającej struny o długości l ,

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R}_+. \quad (15.2)$$

W tym przykładzie $u(x, t)$ jest odchyleniem struny od położenia równowagowego $u \equiv 0$, w miejscu x i w chwili t . Wtedy u_{tt} jest przyspieszeniem. Wyprowadzenie równania (15.1) można znaleźć w [8, Rozdz. 2.4].

Z fizycznego punktu widzenia jest rzeczą jasną, że należy uzupełnić (15.2), a w ogólnym przypadku także (15.1), o początkowe położenie struny, $u(x, 0) = u_0(x)$ i jej prędkość początkową $u_t(x, 0) = u_1(x)$. Musimy też określić, w jaki sposób trzymamy strunę: np. czy jest zamocowana na stałe, $u(0, t) = 0 = u(l, t)$, dla $t > 0$, czy może któryś z końców jest swobodny, np. $u_x(0, t) = 0$. W powyższych równaniach $c > 0$ jest stałą materiałową nazywaną prędkością dźwięku, albo prędkością światła, gdy (15.1) opisuje ruch fali elektromagnetycznej w ośrodku jednorodnym i izotropowym. Obszar Ω może być dowolny. W najprostszym przypadku $\Omega = \mathbb{R}^n$; wówczas nie nakładamy warunków brzegowych w sposób jawny.

Naturalne uogólnienie (15.1) polega na dopuszczeniu, by ośrodek był niejednorodny, tj. zależny od położenia w przestrzeni i zmienny w czasie, a także anizotropowy. Dostaniemy wówczas

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}u_{tt} - Lu + gu_t &= f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ \text{warunki brzegowe na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (15.3)$$

¹Nie będziemy się tu zajmować równaniami hiperbolicznymi rzędu innego, niż drugi.

gdzie L jest ogólnym operatorem eliptycznym drugiego rzędu w postaci dywergencji, zależnym od zmiennych przestrzennych i parametru t . To znaczy, jeśli

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=0}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u,$$

gdzie $x_0 = t$ oraz $a_{ij} = a_{ji}$, to zakładamy, że istnieje taka liczba $\theta > 0$, że dla każdego $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2. \quad (15.4)$$

Definicja 15.1. Powiemy, że równanie (15.3) jest *jednostajnie hiperboliczne*, o ile warunek (15.4) jest spełniony dla wszystkich $x \in \Omega$ i $t > 0$ i pewnego dodatniego θ niezależnego od (x, t) .

Niektóre wyrazy niższego rzędu (15.3) mają ładną interpretację fizyczną, np. jeśli $g \geq 0$, to gu_t jest tłumieniem, czyli oporem ruchu proporcjonalnym do prędkości. Wyraz f po prawej stronie jest siłą zewnętrzną.

Naszym pierwszym zadaniem jest rozwiązanie (15.3). W ogólnym przypadku ma zastosowanie metoda Galerkina, patrz Evans [8, Rozdział 7.2], a także Rozdział 11 niniejszego tekstu. W naturalny sposób prowadzi ona do uzyskania rozwiązania słabego. Przykładowo przedstawimy to pojęcie w przypadku warunków Dirichleta.

Definicja 15.2. Powiemy, że funkcja $u \in W^{1,2}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, gdzie obszar Ω ma gładki brzeg, spełniająca warunki $u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$, $u|_{\Omega \times \{0\}} = u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ jest *słabym rozwiązaniem* (15.3) z jednorodnym warunkiem Dirichleta, o ile dla każdej funkcji próbnej $\varphi \in W^{1,2}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, $\varphi|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$ i $\varphi(\cdot, T) = 0$ jest spełniona następująca tożsamość całkowa,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_t \varphi - a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} - L_0 u \varphi) dx dt = \int_{\Omega} u_1 \varphi - \int_0^T \int_{\Omega} f \varphi dx dt,$$

gdzie $u_1 \in L^2(\Omega)$ i $L_0 u = \sum_{i=0}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u$.

Odsyłamy czytelnika do twierdzeń 5.3 i 5.4 z Rozdziału 5 po informacje na temat przestrzeni Sobolewa i po wyjaśnienie, jak właściwie należy rozumieć obcięcie $u \in W^{1,2}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ do $\Omega \times \{t = 0\}$.

Wcześniej widzieliśmy zastosowanie metody Galerkina do równań eliptycznych i parabolicznych (patrz Rozdział 11). Szczególnym przypadkiem tej metody jest metoda Fouriera, czyli rozdzielanie zmiennych; ten temat również został omówiony wcześniej (patrz Rozdział 12).

Dla równania falowego (15.1), które jest szczególnym przypadkiem (15.3), dostępne są narzędzia specjalistyczne. Mamy tu na myśli metodę średnich sferycznych dla nieparzystych wymiarów n (Zadania 15.14, 15.15) i metodę opuszczania, gdy n jest parzyste (Zadanie 15.16). Tym sposobem dostaniemy wzory Kirchhoffa, gdy $n = 3$, i Poissona dla $n = 2$. Wspomniane wzory prowadzą do rozwiązań klasycznych bądź słabych w zależności od gładkości danych. Warto

zauważyć, że wymagają one założenia dużo wyższej gładkości danych, aby dostać rozwiązania w klasie C^2 , aniżeli można by się spodziewać.

Zajmiemy się też prostymi hiperbolicznymi układami równań pierwszego rzędu. Wygodnie jest zapisać je w postaci macierzowej,

$$u_t + \sum_{i=1}^n A_i(x, t) u_{x_i} = f \quad \text{w } \Omega \times (0, T), \quad (15.5)$$

gdzie $u(x, t)$ jest wektorem z $\mathbb{R}^N$, zatem $A_i, i = 1, \dots, n$ są macierzami N na N zależnymi od x i t . Przyjmujemy, że Ω jest obszarem w $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem. Podkreślamy, że n i N nie pozostają w żadnym związku. Oczywiście, układ (15.5) uzupełniamy warunkami początkowymi i, w zależności od sytuacji, brzegowymi.

Definicja 15.3. Powiemy, że układ (15.5) jest *hiperboliczny*, o ile dla każdego $\xi \in \mathbb{R}^n$ i $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ wszystkie wartości własne macierzy $A(x, t, \xi) = \sum_{i=1}^n A_i(x, t) \xi_i$ są rzeczywiste. Dodatkowo, jeśli wszystkie wartości własne $A(x, t, \xi)$ są różne, to powiemy, że układ (15.5) jest *ściśle hiperboliczny*.

Pochodzenie tej definicji i jej związek ze skończoną prędkością rozchodzenia się sygnałów będą wyjaśnione w Zadaniach 15.38, 15.39, 15.40, 15.41, gdzie zostaną wprowadzone fale płaskie. Dzięki nim łatwiejszym jest zrozumienie idei syntezy fourierowskiej.

Będziemy się zajmowali głównie przypadkami szczególnymi gdy macierze A_i są stałe. Zauważmy przy okazji, że pojedyncze równanie $u_t + au_x = f$ jest hiperbolicznym układem równań.

Opowiemy więcej o rozwiązywaniu (15.5) w szczególnej postaci, $u_t + Au_x = 0$, gdy macierz A jest diagonalizowalna. Zobaczymy, że jednowymiarowe równanie falowe sprowadza się do takiego układu.

Do układów hiperbolicznych o stałych współczynnikach można z dobrym skutkiem stosować metodę opartą na transformacie Fouriera, patrz podrozdział 15.4. Transformata Fouriera funkcji całkowalnej jest określona wzorem (15.23) poniżej. W przypadku zmiennych współczynników metoda staje się trudna i mimo jej ogromnego znaczenia teoretycznego nie będziemy jej tu dalej rozwijać. Można ją też stosować do pojedynczego równania hiperbolicznego — patrz podrozdział 15.4.

Na wstępie wspomnieliśmy, że cechą zagadnień hiperbolicznych jest to, że sygnał rozchodzi się ze skończoną prędkością. Fakt ten jest silnie związany z zagadnieniem jedyności rozwiązań. Można do niego podchodzić dwoma sposobami. Pierwszy dotyczy rozwiązań słabych i wiąże się z nierównością Gronwalla (patrz grupa zadań w podrozdziale 15.5). Drugi sposób, bardziej odpowiedni dla rozwiązań klasycznych, jest oparty na nierównościach energetycznych, prowadzących do pojęcia stożka zależności (grupa zadań w podrozdziale 15.5). Jednocześnie w Zadaniach 15.49 i 15.51 pojawi się w sposób naturalny pojęcie powierzchni charakterystycznej.

Osobno zajmiemy się zagadnieniami niejednorodnymi, gdy funkcja f występująca po prawej stronie wzorów (15.3) i (15.5) jest różna od zera. Wyprowadzimy wariant wzoru na uzmiennianie stałych, czyli wzór Duhamela.

15.1 Równanie falowe

Zadanie 15.1. Rozwiązać następujące zagadnienie

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{w } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) && \text{dla } x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (15.6)$$

gdzie u_0 i u_1 są dane. Zbadać gładkość u w zależności od u_0 i u_1 .

Rozwiązanie. Dzięki zamianie zmiennych $t' = ct$ możemy bez zmiany ogólności założyć, że stała c w równaniu (15.6) jest równa 1. Istotnie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial t'}.$$

Wyprowadzając wzór na rozwiązanie, nie będziemy jednak z tego korzystali.

Możemy wskazać trzy sposoby rozwiązania (15.6):

a) Korzystamy we wzoru „skróconego mnożenia”

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u.$$

Ponieważ różniczkowania względem t i x komutują (zakładamy, że u jest klasy C^2), to prawdziwość powyższego wzoru jest łatwa do sprawdzenia. Wobec tego łatwo się przekonać, że $u = \varphi + \psi$ jest rozwiązaniem, o ile

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0.$$

Każdy z uzyskanych operatorów pierwszego rzędu badamy metodą charakterystyk, przedstawioną w Rozdziale 14.

b) Sprowadzamy (15.6) do układu pierwszego rzędu, patrz Zadanie 15.24.

c) Wprowadzamy nowe zmienne,

$$\eta = x + ct, \quad \xi = x - ct.$$

Wówczas,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Zatem (15.6) w nowych zmiennych przyjmie postać:

$$0 = -4 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = -4 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (15.7)$$

Z tego wzoru wnosimy, że $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ nie zależy od η , tj.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi).$$

A następnie widać, że

$$u = \int^{\xi} f(s) ds + \varphi(\eta) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Wstawienie tego wzoru do warunków początkowych daje układ równań,

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) = u_1(x). \end{cases}$$

Różniczkując pierwsze z tych równań, otrzymamy liniowy układ równań na pochodne φ' i ψ' . Rozwiązawszy go, dostaniemy

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds, \quad (15.8)$$

który jest nazywany *wzorem d'Alemberta*.

Przejdźmy do analizy gładkości (15.8). Zauważmy, że jeśli

$$u_0 \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in C^1(\mathbb{R}),$$

to wzór (15.8) zadaje rozwiązanie klasyczne. Natomiast, jeśli

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L^2(\mathbb{R}),$$

to dostaniemy rozwiązanie słabe w sensie definicji 15.2. Uwaga: nie występują tutaj warunki brzegowe. $\diamond$

Zadanie 15.2. Rozwiązać następujące zagadnienie

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{w } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \\ u(0, t) &= 0 && \text{dla } t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) && \text{dla } x > 0, \end{aligned} \quad (15.9)$$

gdzie $u_0 \in C^2$ i $u_1 \in C^1$ są dane. Przeanalizować gładkość rozwiązania.

Szkic rozwiązania. Zastosujemy metodę odbicia. Przedłużymy u na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ za pomocą wzoru

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & x \geq 0, \\ -u(-x, t) & x < 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że jeśli $u_0(0) = 0$, to $\tilde{u}$ jest klasy C^1 . Skoro $u \in C^1$, to warunek brzegowy pociąga $u_1(0) = 0$. Dostaliśmy dodatkowe warunki

$$u_0(0) = 0, \quad u_1(0) = 0,$$

nazywane *warunkami zgodności* (w domyśle: danych brzegowych i początkowych). Bez nich nie pokażemy gładkości rozwiązań.

Zauważmy jeszcze, że $\tilde{u}$ spełnia (15.9) w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, możemy więc posłużyć się wzorem (15.8). Możemy stąd odczytać u ; dodajmy, że badanie gładkości u wymaga przyjrzenia się rozwiązaniu wzdłuż prostej $x = ct$. Jak się później okaże, jest to szczególna prosta, patrz podrozdział 15.5, definicja zbioru C , wzór (15.36).

Zadanie 15.3. Rozwiązać następujące zagadnienie z jednorodnymi warunkami brzegowymi Neumanna,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u &= 0 & \text{w } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 & \text{dla } t > 0; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dla } x > 0, \end{aligned} \quad (15.10)$$

gdzie $u_0 \in C^2$ i $u_1 \in C^1$ są dane. Przeanalizować gładkość rozwiązania.

Wskazówka. Zastosować metodę odbicia.

Zadanie 15.4. Przeprowadzić szczegółowe rachunki dla zagadnienia (15.10), gdy:

- $u_0(x) = \chi_{[0, \pi]}(x) \sin x$, $u_1(x) = 0$, czy rozwiązanie jest klasy C^1 , C^2 ?
- $u_0(x) = \chi_{[0, \pi]}(x) \sin^2 x$, $u_1(x) = 0$ czy rozwiązanie jest klasy C^1 , C^2 ?
- $u_0(x) = \chi_{[0, \pi]}(x) \cos x$, $u_1(x) = 0$, czy rozwiązanie jest ciągłe?
- $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = \sin(x) \chi_{[0, \pi]}(x)$.
- $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = \sin^2(x) \chi_{[0, \pi]}(x)$.
- $u_0(x)$ jest dane wzorem z punktu a), b) lub c), natomiast $u_1(x)$ jest wzięte z punktu d) lub e) (proszę rozważyć różne możliwe kombinacje).

Zadanie 15.5. Rozwiązać następujące zagadnienie z jednorodnymi warunkami brzegowymi Neumanna

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u &= 0 & \text{w } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 & \text{dla } t > 0; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dla } x > 0, \end{aligned} \quad (15.11)$$

gdzie $u_0 \in C^2$ i $u_1 \in C^1$ są dane. Zanalizować gładkość rozwiązania.

Zadanie 15.6. Przeprowadzić szczegółowe rachunki dla zagadnienia (15.11), gdy:

- $u_0(x) = \chi_{[0, \pi]}(x) \sin x$, $u_1(x) = 0$, czy rozwiązanie jest klasy C^1 , C^2 ?
- $u_0(x) = \chi_{[0, \pi]}(x) \sin^2 x$, $u_1(x) = 0$ czy rozwiązanie jest klasy C^1 , C^2 ?
- $u_0(x) = \chi_{[0, \pi]}(x) \cos x$, $u_1(x) = 0$, czy rozwiązanie jest ciągłe?
- $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}\pi]}(x) \cos^2 x$.

Zadanie 15.7. Rozwiązać następujące zagadnienie

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u &= 0 & \text{w } (0, l) \times \mathbb{R}_+; \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t) & \text{dla } t > 0; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dla } x \in (0, l), \end{aligned} \quad (15.12)$$

gdzie $u_0 \in C^2$ i $u_1 \in C^1$ są dane. Zanalizować gładkość rozwiązania.

Zadanie 15.8. Rozwiązać następujące zagadnienie

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u &= 0 & \text{w } (0, l) \times \mathbb{R}_+; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) & \text{dla } t > 0; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dla } x \in (0, l), \end{aligned}$$

gdzie $u_0 \in C^2$ i $u_1 \in C^1$ są dane. Zanalizować gładkość rozwiązania.

Zadanie 15.9. Załóżmy, że $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$. Wykazać, że u jest rozwiązaniem równania

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{w } (0, l) \times \mathbb{R}_+$$

wtedy i tylko wtedy, gdy u dla wszystkich x, t, ξ i η spełnia równanie różnicowe

$$u(x, t) - u(x + c\xi, t + \xi) - u(x - c\eta, t + \eta) + u(x + c\xi - c\eta, t + \xi + \eta) = 0.$$

Zadanie 15.10. Podać interpretację geometryczną równania różnicowego z poprzedniego zadania. Posłużyć się nią do konstrukcji rozwiązania zagadnienia (15.12).

Zadanie 15.11. Załóżmy, że u należy do $C^2((0, l) \times \mathbb{R}_+) \cap C^2([0, l] \times \bar{\mathbb{R}}_+)$ i jest rozwiązaniem zagadnienia (15.12). Wykazać, że

$$\begin{aligned} u_0(0) = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad c^2 u_0''(0) = 0, \\ u_0(l) = 0, \quad u_1(l) = 0, \quad c^2 u_0''(l) = 0. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Uwaga: Warunki takie, jak (15.13) są nazywane warunkami zgodności.

Zadanie 15.12. Załóżmy, że są spełnione warunki zgodności (15.13). Wykazać, że istnieje rozwiązanie klasy C^2 zagadnienia (15.12).

Zadanie 15.13. Rozwiązać następujące zagadnienie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 & \text{w } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3; \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

gdzie dane u_0 i u_1 są sferycznie symetryczne, tj. zależą tylko od $|x|$ i $u_0, u_1 \in C^2(0, \infty)$. Co dodatkowo trzeba założyć o u_0 i u_1 , aby uzyskany wzór określał funkcję klasy C^2 na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$?

Wskazówka: $(ru)_{rr} = u_{rr} + 2ru_r$.

Zadanie 15.14. Załóżmy, że u jest funkcją klasy C^2 w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Rozpatrzmy średnią sferyczną funkcji u po sferze o środku w x i promieniu R , zdefiniowaną wzorem

$$M_u(x, R) = \frac{1}{|S^{n-1}(0, R)|} \int_{S^{n-1}(x, R)} u(y) d\sigma(y).$$

Wykazać, że jeśli u jest rozwiązaniem równania

$$u_{tt} = \Delta u \quad \text{w } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (15.14)$$

to $M_u(x, \cdot)$ jest rozwiązaniem równania

$$v_{tt} = v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r \quad \text{w } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (15.15)$$

Uwaga: M_u trzeba określić dla $R = 0$, kładąc $M_u(x, 0) = u(x)$, a także dla ujemnych promieni, za pomocą wzoru $M_u(x, R) = M_u(x, -R)$.

Zadanie 15.15. Rozwiązać równanie (15.15) uzupełnione o warunki początkowe

$$v(R, 0) = M_{u_0}(x, R), \quad v_t(R, 0) = M_{u_1}(x, R).$$

Zakładając, że $n = 3$, u_0 jest klasy $C^3(\mathbb{R}^3)$, zaś $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, wyprowadzić stąd wzór Kirchhoffa na rozwiązanie równania falowego w $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{S^2(0,1)} u_0(x + ty) d\sigma(y) \right) + \frac{1}{4\pi} t \int_{S^2(0,1)} u_1(x + ty) d\sigma(y).$$

Wskazówka: Wprowadzić najpierw nową zmienną $w(R, t) = R^{n-1}v(R, t)$.

Zadanie 15.16. Załóżmy, że $n = 2$, u_0 jest klasy $C^3(\mathbb{R}^2)$, zaś $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Posługując się wzorem Kirchhoffa, wyprowadzić wzór Poissona na rozwiązanie równania falowego w $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{B(0,1)} \frac{u_0(x + ty)}{(1 - |y|^2)^{1/2}} dy \right) + \frac{t}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{u_1(x + ty)}{(1 - |y|^2)^{1/2}} dy$$

Wskazówka: Zastosować metodę zstępowania, tj. zauważyć, że rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego są rozwiązaniami zagadnienia trójwymiarowego, tyle że nie zależą od trzeciej zmiennej. Skoro tak, to należy wykonać całkowanie względem trzeciej zmiennej we wzorze Kirchhoffa.

Zadanie 15.17. Niech funkcja u będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \\ u(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -xe^{-x^2} & \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wykazać, że u jest funkcją ograniczoną, spełniającą oszacowanie

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{4c}.$$

Dodatkowo, tego oszacowania nie można już poprawić, (tj. przestaje ono być prawdziwe, gdyby przyjąć mniejszą stałą po prawej stronie).

Zadanie 15.18. Załóżmy, że $S(t, s, x)$, gdzie $t > s > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, jest klasy C^2 ze względu na t i x i jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} &= 0 & (t, x) \in (s, \infty) \times \mathbb{R}^n; \\ S(s, s, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} S(s, s, x) = f(s, x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

gdzie f jest funkcją klasy C^2 a s ustalonym parametrem rzeczywistym.

(a) Sprawdzić, czy funkcja $(t, s, x) \mapsto S(t, s, x)$ jest ciągła.

(b) Wykazać, że funkcja

$$u(t, x) = \int_0^t S(t, s, x) ds \tag{15.16}$$

jest rozwiązaniem następującego zagadnienia, gdzie f jest jak wyżej,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \\ u(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (15.17)$$

(c) Rozwiązać zagadnienie (15.17), gdy warunki początkowe są niezerowe, podać ogólny wzór.

Uwaga. Wzór (15.16) nazywamy wzorem Duhamela.

Zadanie 15.19. Wyprowadzić za pomocą transformaty Fouriera jawną postać wzoru Duhamela dla równania falowego w $\mathbb{R}^n$,

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

oraz $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$.

Zadanie 15.20. Rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x^2 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, l); \\ u(t, 0) &= 0 = u(t, l), & t > 0; \\ u(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = 0, & x \in (0, l). \end{aligned}$$

Szkic rozwiązania. W praktyce często łatwiej jest zgadnąć szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego. Zauważmy, że łatwo rozwiązać równanie

$$v_{xx} + x^2 = 0.$$

Dostaniemy wtedy $v(x) = \frac{1}{12}x^4 + ax + b$. Możemy dobrać a i b , aby v spełniało warunki brzegowe, tj.

$$v(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{l^3}{12}x.$$

Wówczas funkcja $w = u - v$ spełnia równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, l); \\ w(t, 0) &= 0 = w(t, l), & t > 0; \\ u(0, x) &= -v(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(0, x) = 0, & x \in (0, l). \end{aligned}$$

Do rozwiązania tego równania stosujemy dowolną z poznanych metod.

Zadanie 15.21. Rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, l); \\ u(t, 0) &= 0 = u(t, l), & t > 0; \\ u(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = 0, & x \in (0, l), \end{aligned}$$

gdy

- (a) $f = 1$;
- (b) $f = \sin(\frac{\pi}{l}x)$;
- (c) $f = t \sin(\frac{\pi}{l}x)$;
- (d) $f = g(t)h(x)$, gdzie g i h są gładkie.

15.2 Hiperboliczne układy równań pierwszego rzędu

Zadanie 15.22. Załóżmy, że A jest ustaloną, rzeczywistą macierzą dwa na dwa, która jest diagonalizowalna. Rozwiązać układ równań,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= 0, \quad \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \\ \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}_0(x), \end{aligned} \quad (15.18)$$

gdzie $\mathbf{u}(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Co można powiedzieć o jego rozwiązalności zakładając, że $\mathbf{u}_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$?

Szkic rozwiązania. Dzięki założeniu diagonalizowalności istnieją takie macierze S i

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

że $SAS^{-1} = D$. Wprowadzamy nową zmienną

$$\mathbf{v} = S\mathbf{u}.$$

Mnożymy (15.18) z lewej strony przez S . Dostaniemy wówczas

$$\mathbf{v}_t = S\mathbf{u}_t = -SAS^{-1}S\mathbf{u}_x = -D\mathbf{v}_x. \quad (15.19)$$

To równanie jest uzupełnione o warunki początkowe $\mathbf{v}_0 = S\mathbf{u}_0$. Zapisawszy układ we współrzędnych dostaniemy dla $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$

$$\begin{aligned} v_t^1 + \lambda_1 v_x^1 &= 0, \\ v_t^2 + \lambda_2 v_x^2 &= 0, \\ v^1(x, 0) &= v_0^1(x), \quad v^2(x, 0) = v_0^2(x) \end{aligned}$$

Powyższe równania nie są sprzężone, więc można je rozwiązać niezależnie (patrz Rozdział 14). Korzystając ze wzoru $v = Su$ znaleźć u . Dlaczego u jest klasy C^1 ?

Zadanie 15.23. Załóżmy, że A jest ustaloną, rzeczywistą macierzą dwa na dwa i taką, że $\det A < 0$. Rozpatrzmy zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \\ \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}_0(x), \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{u}(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać istnienie rozwiązań klasy C^1 zakładając, że $\mathbf{u}_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$.

Wskazówka: Rozpatrzyć podstawienie $\mathbf{v}(t, x) = \exp(\lambda t) \mathbf{u}(t, x)$ dla odpowiednio dobranej liczby λ .

Zadanie 15.24. Zapisać jednowymiarowe równanie falowe w postaci układu równań. Zauważyć, że jest on hiperboliczny. Wyprowadzić wzór d'Alemberta (15.8) za pomocą Zadania 15.22.

Zadanie 15.25. Rozwiązać układ równań

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x),$$

gdy $u_0 \in C^1$ oraz

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 15.26. Rozwiązać układ równań

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x),$$

gdy $u_0 \in C^1$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Można zastosować metodę z poprzednich zadań. Podstawienie (15.19) prowadzi do dwóch sprzężonych równań postaci $w_t + \mu w_x = f$.

Uwaga. Można wykazać jednoznaczność rozwiązań hiperbolicznych układów równań, wykorzystując np. metody zbliżone do tych, które niżej, w podrozdziale 15.5, stosuje się w Zadaniach 15.46, 15.47 i 15.48

15.3 Równania hiperboliczne drugiego rzędu ogólniej

Zadanie 15.27. Załóżmy, że $\Omega = (0, 1)$. Rozpatrzmy równanie

$$u_{tt} + u_t = (a(x)u_x)_x + f \text{ w } \Omega \times (0, T);$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0;$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$
(15.20)

gdzie a jest funkcją gładką, taką, że $a(x) \geq \delta > 0$. Zakładamy, że $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sformułować i wykazać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia (15.20), gdy

(a) $f \equiv 0$.

(b) $f \equiv f(t)$ należy do przestrzeni $C^1([0, T], W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega))$.

Zadanie 15.28. Załóżmy, że Ω jest ograniczonym obszarem $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem, $n \geq 1$. Rozpatrzmy równanie

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t &= \Delta u + f \text{ w } \Omega \times (0, T); \\ u|_{\partial\Omega \times (0, T)} &= 0; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (15.21)$$

(a) Wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (15.21) przy odpowiednich założeniach na u_0 i u_1 , o ile $f \equiv 0$.

(b) Wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (15.21) przy odpowiednich założeniach na u_0, u_1 , o ile $f \equiv f(t)$ spełnia $f \in C^1([0, T], W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega))$.

(c) (trudne) Wykazać, że istnieje $T > 0$ takie, że istnieje jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie zagadnienia (3) na odcinku $[0, T]$, jeśli $f(x, t) = -u^2$. Dobrać odpowiednie założenia na u_0 i u_1 .

(d) (trudne) Czy T z powyższego punktu jest skończone?

15.4 Zastosowanie transformaty Fouriera

Zadanie 15.29. Załóżmy, że $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Znaleźć wzór na rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} u_{tt} &= u_{xx} \quad \text{w } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Zbadać gładkość otrzymanego rozwiązania.

Rozwiązanie. Zaczniemy od przypomnienia definicji transformaty Fouriera $\hat{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, oznaczanej też $\mathcal{F}u$. Jeśli $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to kładziemy

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} u(x) dx, \quad (15.23)$$

gdzie $\xi \cdot x$ oznacza iloczyn skalarny wektorów ξ i x . (Wprawdzie w Rozdziale 3 używaliśmy takiej definicji dla $f \in \mathcal{S}$, ale ma ona sens wtedy, gdy całka po prawej stronie jest zbieżna, czyli dla $f \in L^1$.)

Można wykazać, że jeśli $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, to transformata Fouriera jest izometrią, tj. $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Ten fakt, w połączeniu z gęstością $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ w $L^2(\mathbb{R}^n)$ wystarcza do określenia transformaty na $L^2(\mathbb{R}^n)$, patrz [14], [23].

Przyłożenie $\mathcal{F}u$ do obu stron daje równanie różniczkowe zwyczajne względem t z parametrem ξ ,

$$\hat{u}_{tt} = -4c^2\pi^2|\xi|^2\hat{u}, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi).$$

Natychmiast dostaniemy, $\hat{u}(\xi, t) = C_1 \exp(2\pi c i \xi t) + C_2 \exp(-2\pi c i \xi t)$. Stąd zaś,

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cos(2\pi c t |\xi|) + \hat{u}_1(\xi) \frac{\sin(2\pi c t |\xi|)}{2\pi c |\xi|} \quad (15.24)$$

Z tego wzoru widać natychmiast, że $(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi, t) \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ oraz $\hat{u}_t(\xi, t) \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$, o ile $u_0 \in H^1, u_1 \in L^2$. $\diamond$

Zadanie 15.30. Posługując się metodami poprzedniego zadania, wyprowadzić wzór na transformatę Fouriera rozwiązania zagadnienia

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} &= f \quad \text{w } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \end{aligned} \quad (15.25)$$

gdzie $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^1(\mathbb{R})$ oraz $f \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$. Wykazać, że otrzymane rozwiązanie u należy do przestrzeni

$$C^2((0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, \infty); H^2(\mathbb{R}^n)).$$

Zadanie 15.31. Załóżmy, że $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t &= u_{xx} \quad \text{w } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x). \end{aligned} \quad (15.26)$$

Zadanie 15.32. Załóżmy, że $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Wykazać, że wzór otrzymany w poprzednim zadaniu określa słabe rozwiązanie równania (15.26).

Uwaga: częścią zadania jest samo określenie słabego rozwiązania.

Zadanie 15.33. Wykazać, że istnieje najwyżej jedno słabe rozwiązanie równania (15.26).

Zadanie 15.34. Załóżmy, że $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ i u jest słabym rozwiązaniem równania (15.26). Znaleźć tempo zaniku u w normie L^2 , tj. znaleźć $\alpha > 0$ takie, że

$$\|u(\cdot, t)\|_2 \leq Ct^{-\alpha}.$$

Zadanie 15.35. Załóżmy, że $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ i u jest słabym rozwiązaniem równania (15.25). Wówczas, dla każdego $t > 0$ zachodzi równość

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{c^2} |u_t(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{c^2} |u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 \right) dx.$$

Wskazówka. Wykazać najpierw, że teza zachodzi dla gładkich rozwiązań.

Zadanie 15.36. Rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u - u \quad \text{w } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (15.27)$$

Wykazać, że jeśli dane początkowe u_0 należą do przestrzeni $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, zaś $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, to istnieje taka stała C zależna od $\|u_0\|_{1,2}$, że

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_2 \leq Ct.$$

Zadanie 15.37. Załóżmy, że u jest rozwiązaniem równania (15.27). Wykazać, że istnieje taka stała C , że dla $k = 0, 1$ i $t \geq 1$ jest prawdziwe oszacowanie,

$$\|u(\cdot, t)\|_{k,2} \leq Ce^{-t}.$$

Zadanie 15.38. Załóżmy, że A jest rzeczywistą, symetryczną i nieosobliwą macierzą dwa na dwa (o wyrazach rzeczywistych). Wykazać, że jeśli $u_0 \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, to funkcja u , która jest rozwiązaniem układu

$$\begin{aligned} u_t + Au_x &= 0 & \text{w } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

spełnia warunek

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Wskazówka: jeśli B jest rzeczywistą macierzą symetryczną, to $\exp(iB)$ jest macierzą ortogonalną.

Zadanie 15.39. Załóżmy, że A jest rzeczywistą, symetryczną i nieosobliwą macierzą dwa na dwa, v jest jej wektorem własnym, a λ odpowiadającą wartością własną. Kładziemy

$$w(x, t) = e^{i(x-\lambda t)}v.$$

Wykazać, że w jest rozwiązaniem układu równań

$$u_t + Au_x = 0.$$

Komentarz: Funkcję w nazywamy *falą płaską*. Można powiedzieć, że wzory otrzymane za pomocą transformaty Fouriera, to uogólnione sumy fal płaskich.

Zadanie 15.40. Załóżmy, że $A_i, i = 1, \dots, N$ są rzeczywistymi macierzami symetrycznymi N na N , a układ

$$u_t + \sum_{i=1}^N A_i u_{x_i} = 0 \tag{15.28}$$

jest ściśle hiperboliczny, patrz definicja 15.3. Niech $\xi \in \mathbb{R}^N$ zaś v niech będzie wektorem własnym macierzy $A(\xi) = \sum_{i=1}^N A_i \xi_i$ a λ odpowiadającą mu wartością własną. Kładziemy,

$$w(x, t) = e^{i(\xi \cdot x - \lambda t)}v. \tag{15.29}$$

Wykazać, w jest rozwiązaniem układu (15.28).

Zadanie 15.41. Załóżmy, że $A_i, i = 1, \dots, N$ oraz B są rzeczywistymi macierzami symetrycznymi N na N , a układ

$$u_t + \sum_{i=1}^N A_i u_{x_i} + Bu = 0 \tag{15.30}$$

jest silnie hiperboliczny. Niech wektor $\xi \in \mathbb{R}^N$ będzie dany. Jaki warunek muszą spełniać wektor v i liczba zespolona λ , aby fala płaska dana wzorem (15.29) była rozwiązaniem (15.30)? Wykazać, że $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Znaleźć na tej podstawie oszacowanie na tempo gaśnięcia w , gdy t dąży do nieskończoności.

Zadanie 15.42. Załóżmy, że A jest rzeczywistą, symetryczną i dodatnio określoną macierzą N na N . Niech $v \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem własnym A , a λ^2 odpowiadającą mu wartością własną. Wykazać, że fale płaskie

$$w^-(x, t) = e^{i(v \cdot x - \lambda t)}, \quad w^+(x, t) = e^{i(v \cdot x + \lambda t)}$$

są rozwiązaniami równania

$$u_{tt} - \operatorname{div} A \nabla u = 0.$$

15.5 Oszacowania energetyczne i jednoznaczność

Zadanie 15.43. Załóżmy, że A jest rzeczywistą symetryczną i dodatnio określoną macierzą N na N . Załóżmy też, że u jest gładkim rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div} A \nabla u &= 0 & \text{w } \Omega \times (0, +\infty), \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (15.31)$$

Wykazać, że dla każdego $t > 0$ mamy

$$\int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + A \nabla u(x, t) \cdot \nabla u(x, t)) dx = \int_{\Omega} (u_1^2(x) + A \nabla u_0(x) \cdot \nabla u_0(x)) dx. \quad (15.32)$$

Wynioskować stąd jedyność rozwiązań.

Rozwiązanie. Oznaczmy symbolem $I(t)$ lewą stronę wzoru (15.32). Ponieważ u jest z założenia funkcją gładką, to dzięki twierdzeniu o różniczkowaniu całki z parametrem wnosimy, że I jest gładką funkcją argumentu t . Różniczkowanie I daje

$$\frac{dI}{dt}(t) = 2 \int_{\Omega} (u_{tt} u_t + A \nabla u \cdot \nabla u_t) dx.$$

Całkowanie przez części drugiego wyrazu w połączeniu ze spostrzeżeniem $u_t = 0$ na $\partial\Omega \times (0, +\infty)$ daje

$$\frac{dI}{dt}(t) = 2 \int_{\Omega} (u_{tt} - \operatorname{div} A \nabla u) u_t dx = 0.$$

W ostatecznym rachunku skorzystaliśmy z tego, że u jest rozwiązaniem (15.31). I jest też funkcją ciągłą na $[0, \infty)$, zatem dla każdego $t > 0$ mamy $I(t) = I(0)$, stąd (15.32).

Założmy, że mamy dwa rozwiązania u^1 i u^2 równania (15.31). Niech u będzie ich różnicą, tj. $u = u^2 - u^1$. Wówczas u spełnia (15.31) z zerowymi warunkami początkowymi i $I(0) = 0$. Zatem dla każdego $t > 0$ mamy

$$2 \int_{\Omega} (u_t^2 + A \nabla u \cdot \nabla u) dx = 0.$$

Skoro A jest macierzą dodatnio określoną, to oznacza to, że dla wszystkich $t \geq 0$ mamy $u_t^2 = 0$ i $A \nabla u \cdot \nabla u = 0$. Ponownie powołując się na dodatnią określoność A dostaniemy

$$\nabla u = 0, \quad \text{oraz} \quad u_t = 0,$$

czyli u musi być stałe, a stąd jest równe 0. Ostatecznie $0 = u^2 - u^1$.

◇

Zadanie 15.44. Załóżmy, że A jest rzeczywistą symetryczną i dodatnio określoną macierzą N na N . Załóżmy też, że f jest funkcją gładką, a $b \in \mathbb{R}$. Wykazać, że niezależnie od znaku stałej b zagadnienie

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div} A \nabla u + bu &= f & \text{w} & \Omega \times (0, +\infty), \\ u &= 0 & \text{na} & \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) &= u_1(x). \end{aligned} \quad (15.33)$$

ma co najwyżej jedno gładkie rozwiązanie.

Rozwiązanie. Załóżmy, że mamy dwa rozwiązania u^1 i u^2 równania (15.33). Funkcja $u = u^2 - u^1$ spełnia wtedy równanie

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div} A \nabla u + bu &= 0 & \text{w} & \Omega \times (0, +\infty), \\ u &= 0 & \text{na} & \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Pomnóżmy (15.34) przez u_t i scałkujemy wynik względem x na Ω . Dostaniemy

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx - \int_{\Omega} u_t \operatorname{div} A \nabla u dx = -b \int_{\Omega} u u_t dx.$$

Drugi wyraz po lewej stronie całkujemy przez części. Wynik całkujemy względem czasu od 0 do T . Dostaniemy wówczas

$$\int_{\Omega} u_t^2(x, T) dx + \int_{\Omega} A \nabla u(x, T) \cdot \nabla u(x, T) dx \leq |b| \int_0^T \int_{\Omega} (u^2 + u_t^2)(x, t) dx dt.$$

Po drodze skorzystaliśmy najpierw (przekształcając lewą stronę) z tożsamości

$$\frac{d}{dt} (A \nabla u \cdot \nabla u) = 2A \nabla u \cdot \nabla u_t,$$

prawdziwej dla wszystkich macierzy symetrycznych o stałych wyrazach, później zaś (szacując prawą stronę) z nierówności $2ab \leq a^2 + b^2$. Zauważmy, że na mocy warunków brzegowych i nierówności Poincarégo mamy

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Ponadto, dodatnia określoność macierzy A daje oszacowanie

$$A \nabla u \cdot \nabla u \geq \mu |\nabla u|^2.$$

Jeśli położymy

$$a(t) = \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + |\nabla u|^2(x, t)) dx,$$

to dostaniemy następującą nierówność,

$$a(T) \leq \frac{\max\{|b|, C(\Omega)\}}{\min\{1, \mu\}} \int_0^T a(s) ds. \quad (15.35)$$

Zastosowanie do (15.35) nierówności Gronwalla daje

$$a(T) \leq a(0) \exp\left(\frac{\max\{|b|, C(\Omega)\}}{\min\{1, \mu\}} T\right).$$

Skoro $a(0) = 0$, to dla każdego $T \in (0, +\infty)$ mamy $a(T) = 0$. Wnosimy więc, że $0 \equiv u = u^2 - u^1$.

◇

Zadanie 15.45. Załóżmy, że $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: jeśli $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $t_1 < t_0$, to kładziemy

$$\begin{aligned} C(x_0, t_0) &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x - x_0| \leq |t_0 - t|\}, \\ D(x_0, t_1, t_0) &:= (\mathbb{R}^n \times [0, t_1]) \cap C(x_0, t_0). \end{aligned} \quad (15.36)$$

Niech ∇ oznacza gradient względem zmiennych przestrzennych, tzn. $Du = (\nabla u, u_t)$, a ponadto $|Du|^2 = |\nabla u|^2 + |u_t|^2$.

(a) Połóżmy $X = (X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$, gdzie

$$X_i = 2u_t u_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad X_{n+1} = -(|\nabla u|^2 + |u_t|^2).$$

Sprawdzić, że

$$-2u_t(u_{tt} - \Delta u) = \operatorname{div} X,$$

gdzie

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} X_{n+1}.$$

(b) Wykazać, że jeśli $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $t_1 < t_0$, to

$$\int_{D(x_0, t_1, t_0)} \operatorname{div} X dx dt \leq \int_{B(x_0, t_0) \times \{0\}} |Du|^2 dx - \int_{B(x_0, t_0 - t_1) \times \{t_1\}} |Du|^2 dx$$

Zadanie 15.46. Załóżmy, że $u \in C^2$ spełnia równanie

$$u_{tt} = \Delta u \quad \text{w } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (15.37)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

(a) Dodatkowo dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $t_0 > 0$ funkcje u_0 i u_1 tożsamościowo znikają w kuli $B(x_0, t_0)$. Wykazać, że u jest tożsamościowo równe zero w stożku $C(x_0, t_0) \cap \{0 \leq t \leq t_0\}$. Co wystarczy zrobić, aby wykazać analogiczną tezę w przypadku gdy $c \neq 1$?

(b) Załóżmy, że $v_1, v_2 \in C^2$ spełniają równanie (15.37) oraz

$$v_1(x, 0) = v_2(x, 0), \quad \frac{\partial}{\partial t} v_1(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} v_2(x, 0)$$

w kuli $B(x_0, t_0)$. Wykazać, że $v_1 = v_2$ w stożku $C(x_0, t_0) \cap \{0 \leq t \leq t_0\}$.

Zadanie 15.47. Wykazać tę samą tezę, co w zadaniu poprzednim, zakładając, że v_1 i v_2 są słabymi rozwiązaniami.

Uwaga: Stożek $C(x_0, t_0) \cap \{0 \leq t \leq t_0\}$ nazywamy stożkiem zależności.

Zadanie 15.48. Załóżmy, że A jest stałą dodatnio określoną macierzą symetryczną i wprowadźmy oznaczenia analogiczne do tych w zadaniu 15.45, tzn. połóżmy

$$\begin{aligned} C(A, x_0, t_0) &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (A(x - x_0), (x - x_0)) \leq |t_0 - t|^2\}, \\ D(A, x_0, t_1, t_0) &:= (\mathbb{R}^n \times [0, t_1]) \cap C(A, x_0, t_0). \end{aligned}$$

Niech teraz A będzie macierzą diagonalną, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_i > 0$ dla wszystkich i . Załóżmy, że $u \in C^2$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \text{div}(A \nabla u), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (15.38)$$

Wykazać, że jeśli u_0 i u_1 są równe zero w przecięciu stożka zależności z hiperpłaszczyzną $\{t = 0\}$, to $u = 0$ w $D(A, x_0, t_1, t_0)$ dla dowolnego $t_1 < t_0$.

Znaczenie zbiorów $C(A, x_0, t_0)$ będzie wskazane niżej.

Definicja 15.4. (Patrz Evans [8, 4.6.1.b]). Powiemy, że gładka hiperpowierzchnia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ z polem wektorów normalnych $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n+1})$ jest *powierzchnią charakterystyczną dla równania*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i(x) u_{x_i} + cu = f \quad \text{w } \Omega,$$

o ile

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(x) \nu_i(x) \nu_j(x) = 0$$

dla każdego $x \in \Omega \cap \mathcal{M}$.

Zauważmy, że gdy $\mathcal{M}$ jest poziomica funkcji φ i $\nabla \varphi \neq 0$ na $\mathcal{M}$, to w powyższej definicji możemy przyjąć $\nu = \nabla \varphi$. Pojęcie powierzchni charakterystycznej można wprowadzić dla równań nieliniowych a także dla układów równań.

Zadanie 15.49. Niech $C(x_0, t_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie zbiorem wprowadzonym w Zadaniu 15.45. Wykazać, że $C(x_0, t_0)$ jest powierzchnią charakterystyczną dla równania falowego

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{w } \mathbb{R}^{n+1}. \quad (15.39)$$

Zadanie 15.50. Niech $C(A, x_0, t_0)$ będzie zbiorem wprowadzonym w Zadaniu 15.48. Wykazać, że $C(A, x_0, t_0)$ jest powierzchnią charakterystyczną dla równania

$$u_{tt} - \operatorname{div}(A \nabla u) = 0 \quad \text{w } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Zadanie 15.51. Załóżmy, że $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka i $\nabla \varphi \neq 0$ na $\mathcal{M} = \{\varphi(x, t) = 0\}$. Przyjmijmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest ograniczonym obszarem z gładkim brzegiem. Wprowadźmy zbiory

$$\Omega^+ = \{(x, t) \in \Omega : \varphi(x, t) > 0\}, \quad \Omega^- = \{(x, t) \in \Omega : \varphi(x, t) < 0\}.$$

Załóżmy też, że funkcja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ należy do przestrzeni $C(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}^+) \cap C^2(\overline{\Omega}^-)$ i jest słabym rozwiązaniem (15.39).

(a) Wykazać, że $\mathcal{M}$ jest powierzchnią charakterystyczną.

(b) Jeśli $(x_0, t_0) \in \mathcal{M}$, to kładziemy

$$[\nabla u](x_0, t_0) = \lim_{\substack{(x,t) \in \Omega^+ \\ (x,t) \rightarrow (x_0,t_0)}} \nabla u(x, t) - \lim_{\substack{(x,t) \in \Omega^- \\ (x,t) \rightarrow (x_0,t_0)}} \nabla u(x, t).$$

Wykazać, że $[\nabla u](x_0, t_0)$ jest wektorem prostopadłym do $\mathcal{M}$.

Komentarz bibliograficzny. Zadania tego rozdziału przeważnie nie są oryginalne, bo często przedstawiają zagadnienia klasyczne. Inspiracja pochodziła z książek zamieszczonych w bibliografii, ale nie ogranicza się do nich. Warto podkreślić, że w bardzo przystępnie napisanej książce Alinhaca [2] omówiona została szeroka gama zagadnień dotyczących równań hiperbolicznych. Z książeczki [5] do niniejszego rozdziału pasuje rozdział *Równanie falowe*. Zadanie 15.9 na równanie różnicowe pochodzi z książki Johna [11]. Transformata Fouriera dokładnie omówiona jest w książkach [23], [14]; w drugiej z nich stosowane są oznaczenia zgodne z naszymi.

Bibliografia

- [1] A. Alexiewicz, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 1969.
- [2] S. Alinhac, *Hyperbolic Partial Differential Equations*. Springer, Dodrecht 2009.
- [3] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.
- [4] A. W. Bicadze, D. F. Kaliniczenko, *Zbiór zadań z fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1984.
- [5] P. Biler (red.), *Warsztaty z równań różniczkowych cząstkowych*. Centrum Badań Nieliniowych im. J. Schaudera, Toruń 2003.
- [6] A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2002.
- [7] B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov. *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*. Wydanie 2. Springer-Verlag, New York, 1992. (Książka ma oryginał rosyjski).
- [8] L. C. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- [9] H. Gajewski, K. Zacharias, Global behaviour of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis. *Math. Nachr.* **195** (1998), 77–114.
- [10] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic PDEs of second order*. 2nd edition, Springer-Verlag, New York 1983
- [11] F. John, *Partial differential equations*. Przedruk czwartego wydania, Springer-Verlag, Nowy Jork, 1991
- [12] S. Krantz, *Teoria funkcji wielu zmiennych zespolonych*, PWN, Warszawa 1991.
- [13] P. Lax, On the existence of Green's function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1952), 526–531.
- [14] E. Lieb, M. Loss, *Analysis*. AMS, Providence 2001.
- [15] H. Marcinkowska, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1986. (Książka zawiera podstawy podejścia klasycznego, opartego o teorię potencjału, które w niniejszym skrypcie jest w znacznym stopniu pominięte).

- [16] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*. PWN, Warszawa 1989.
- [17] J. Rauch, *Partial Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics 128, Springer-Verlag, New York 1991.
- [18] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa 1998.
- [19] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 2002.
- [20] L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*. Tom I i II. PWN, Warszawa 1980.
- [21] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. I–V (2nd edition). Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [22] P. Strzelecki, *Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 2006.
- [23] Z. Szmydt, *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*. PWN, Warszawa, 1972
- [24] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations*. Tom I, II, III. Applied Mathematical Sciences, vol. 115–117. Springer-Verlag, New York, 1996–97.
- [25] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. With an appendix by F. Thomasset. Third edition. Studies in Mathematics and its Applications, 2. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.
- [26] V. S. Vladimirov, *Zbiór zadań z równań fizyki matematycznej*. Nauka, Moskwa 1982.