

Matematyka stosowana

Rynki kapitałowe (Matematyka finansowa I)

Piotr Władysław Jaworski
P.Jaworski@mimuw.edu.pl

Krystyna Maria Jaworska
kjaworskaster@gmail.com

Uniwersytet Warszawski, 2011



Streszczenie. Celem wykładu jest zapoznanie słuchaczy z podstawowymi pojęciami związanymi z rynkiem akcji i instrumentów dłużnych oraz wyabstrahowanie pojęć matematycznych koniecznych do ich opisu.

Wersja internetowa wykładu:

<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=rka>

(może zawierać dodatkowe materiały)



Niniejsze materiały są dostępne na [licencji Creative Commons 3.0 Polska](#):
Uznanie autorstwa — Użycie niekomercyjne — Bez utworów zależnych.

Copyright © P.Jaworski, K.Jaworska, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011. Niniejszy plik PDF został utworzony 7 grudnia 2011.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego.



Skład w systemie L^AT_EX, z wykorzystaniem m.in. pakietów **beamer** oraz **listings**. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

0. Informacje wstępne	6
0.1. Cele modelowania matematycznego w finansach	6
0.2. Ogólny schemat wykładu	6
0.3. Zalecana literatura	6
1. Rynek kapitałowy, wiadomości wstępne	7
1.1. Rynek finansowy	7
1.2. Giełdy	9
1.2.1. Akcje	9
1.2.2. Obligacje	9
1.3. Ćwiczenia – Plany spłaty długów: metoda amortyzacji	10
2. Pieniądz	16
2.1. Opis inwestycji finansowych	16
2.1.1. Ujęcie „globalne”	16
2.1.2. Ujęcie „lokalne”	17
2.2. Przykłady procesów akumulacji	18
2.2.1. Odsetki proste (procent prosty)	18
2.2.2. Odsetki złożone (procent złożony)	18
2.2.3. Okresowa kapitalizacja odsetek	19
2.2.4. Kapitalizacja ciągła	19
2.2.5. Roczna skala czasowa	20
2.2.6. Nominalna i efektywna stopa procentowa	20
2.2.7. Porównanie stopy nominalnej i stopy efektywnej	23
2.2.8. Rachunek czasu w matematyce finansowej	24
2.2.9. Dyskonto	24
2.3. Inflacja i realna stopa zwrotu	26
2.4. Ćwiczenia	26
3. Struktura terminowa stóp procentowych	31
3.1. Wprowadzenie	31
3.2. Interpretacja $\bar{R}(t)$ i $\delta(t)$	32
3.3. Przykłady struktur terminowych	33
3.3.1. Struktura terminowa płaska	34
3.3.2. Struktura terminowa kawałkami płaska	35
3.3.3. Wzór Stoodleya	35
3.3.4. Wzór Nelsona-Siegela	35
3.3.5. Wzór Vasička	37
3.3.6. Wzór CIR	38
3.4. Instrumenty pochodne	39
3.4.1. Kontrakty FRA	39
3.4.2. Kontrakty IRS	40
3.4.3. Opcje na stopę procentową	41
3.5. Ćwiczenia	41
4. Podstawowe instrumenty dłużne na przykładzie Polski	43
4.1. Ogólna charakterystyka instrumentów dłużnych	43
4.2. Referencyjne stopy rynku międzybankowego	46
4.2.1. WIBOR – WIBID	46

4.2.2.	LIBOR	47
4.2.3.	EURIBOR	47
4.3.	Obligacje	47
4.3.1.	Cena rozliczeniowa i kurs obligacji	48
4.4.	Ćwiczenia	48
5.	Wyznaczanie struktury terminowej stóp zwrotu	50
5.1.	Wyznaczanie struktury terminowej stóp zwrotu	50
5.1.1.	Stopy międzybankowe	50
5.1.2.	Obligacje zerokuponowe i bony	50
5.1.3.	Obligacje kuponowe o stałym oprocentowaniu	50
5.1.4.	Wyznaczanie struktury terminowej w oparciu o kontrakty FRA	51
5.2.	Ćwiczenia	51
6.	Analiza instrumentów dłużnych	55
6.1.	Wartość obecna – Present Value (PV)	55
6.1.1.	Definicja	55
6.1.2.	Zależność struktury terminowej od procesu akumulacji	56
6.1.3.	Dyskontowanie za pomocą płaskiej struktury terminowej	58
6.1.4.	Zastosowanie PV	58
6.2.	Ćwiczenia	60
7.	Analiza instrumentów dłużnych – cd	67
7.1.	Wewnętrzna stopa zwrotu	67
7.1.1.	Definicja <i>IRR</i>	67
7.1.2.	Istnienie <i>IRR</i>	68
7.1.3.	Jednoznaczność <i>IRR</i>	69
7.1.4.	Kryterium inwestycyjne oparte na <i>IRR</i>	71
7.1.5.	<i>IRR</i> a <i>YTM</i>	72
7.1.6.	Rzeczywista roczna stopa oprocentowania	73
7.1.7.	Uogólnienia	73
7.2.	Ćwiczenia	74
8.	Zarządzanie portfelem instrumentów dłużnych	77
8.1.	Duration – średni czas życia i convexity – wypukłość	77
8.2.	Równoległe przesunięcia struktur terminowych	78
8.3.	Przypadek płaskiej struktury czasowej	82
8.4.	Future Value i immunizacja portfela obligacji	83
8.5.	Ćwiczenia	85
9.	Giełda. Rynek akcji	91
9.1.	Giełdy, notowane instrumenty	91
9.1.1.	Akcje	91
9.1.2.	Krótką sprzedaż	92
9.1.3.	Prawa poboru i prawa do akcji	92
9.1.4.	Obligacje	93
9.1.5.	Certyfikaty inwestycyjne	93
9.1.6.	Kontrakty terminowe futures	93
9.1.7.	Opcje	93
9.1.8.	Produkty strukturyzowane	93
9.1.9.	Jednostki indeksowe	94
9.2.	Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie	94
9.2.1.	Historia	94
9.2.2.	Struktura	97
9.2.3.	Systemy notowań	99
9.3.	Ćwiczenia - renty	101
10.	Giełda. Rynek akcji – cd	107

10.1. Wyznaczanie kursu jednolitego	107
10.1.1. Kurs równowagi	107
10.1.2. Wolumen obrotu	109
10.1.3. Niezrealizowane transakcje	110
10.1.4. Wyznaczanie kursu jednolitego	111
10.2. Notowania ciągłe	112
10.2.1. Arkusz zleceń	113
10.3. Ćwiczenia	113
11.Giełda. Rynek akcji – cd	117
11.1. Indeksy giełdowe	117
11.1.1. Wprowadzenie	117
11.1.2. Typy indeksów	118
11.1.3. Indeksy na GPW w Warszawie	118
11.2. Ćwiczenia – Kolokwium	125
12.Giełda. Rynek akcji – cd	126
12.1. Instrumenty pochodne	126
12.1.1. Wprowadzenie	126
12.1.2. Kontrakty terminowe – forward i futures	126
12.1.3. Wycena kontraktów forward i futures	129
12.1.4. Opcje	137
12.1.5. Wycena opcji europejskich	138
12.2. Ćwiczenia	142
13.Metody stochastyczne w finansach	144
13.1. Strategie inwestycyjne	144
13.1.1. Relacje quasi-porządku	144
13.2. Podejście mikroekonomiczne	145
13.2.1. Oczekiwana użyteczność	145
13.2.2. Własności oczekiwanej użyteczności	148
13.3. Ćwiczenia	152
14.Metody stochastyczne w finansach - cd	155
14.1. Dominacja stochastyczna	155
14.2. Własności dominacji stochastycznej	160
14.3. Dochód i ryzyko	165
14.3.1. Oczekiwany dochód i miary ryzyka	165
14.3.2. Model Markowitza	166
14.4. Ćwiczenia	168
15.Metody stochastyczne w finansach – cd	171
15.1. Value at Risk – inne spojrzenie na ryzyko finansowe	171
15.1.1. Wprowadzenie i definicja	171
15.1.2. Alokacja kapitału	173
15.2. Teoretyczne podstawy pomiaru ryzyka dla inwestycji finansowych.	176
15.2.1. Miary dyspersji.	176
15.2.2. Miary monotoniczne – zgodne z dominacją stochastyczną.	177
15.2.3. Miary efektywności	179
15.3. Ćwiczenia	179
Literatura	181
Bibliografia	181
Literatura	183

0. Informacje wstępne

0.1. Cele modelowania matematycznego w finansach

Podstawowe cele matematycznego modelowania finansów, w szerokim rozumieniu tego słowa, można pokrótce ująć w trzech punktach:

1. Wprowadzenie przejrzystego i jednocześnie precyzyjnego języka opisu inwestycji finansowych.
2. Opracowanie narzędzi matematycznych ułatwiających:
 - ocenę opłacalności inwestycji,
 - ocenę ryzyka inwestycji,
 - wycenę instrumentów finansowych.
3. Prognozowanie kursów giełdowych, stóp procentowych, wskaźników makro i mikroekonomicznych.

0.2. Ogólny schemat wykładu

1. Wprowadzenie pojęć podstawowych. Arytmetyka finansowa. Matematyka aktuarialna.
2. Informacje o giełdzie. Instrumenty pochodne i ich wycena.
3. Wprowadzenie do efektywnego inwestowania. Podstawy modelowania stochastycznego.

0.3. Zalecana literatura

Jaworski P., Micał J.: Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach, Poltext, 2005.

Höglund T.: Mathematical Asset Management, Wiley-Interscience 2008.

Sopoćko A.: Rynkowe instrumenty finansowe, Wyd. WSPiZ, Warszawa 2003.

1. Rynek kapitałowy, wiadomości wstępne

Liczba godzin 2.

Zakres materiału:

Giełda na przykładzie GPW. Uczestnicy rynku: instytucje finansowe, biura maklerskie, skarb państwa. Rynek OTC. Rodzaje instrumentów finansowych. Korzyści dla emitenta oraz dla właścicieli akcji i obligacji.

1.1. Rynek finansowy

Rynkiem finansowym (*Financial Market*) nazywamy rynek, na którym towarami są instrumenty finansowe. Opisuując rynek finansowy, zazwyczaj bierze się pod uwagę pewne jego cechy, stanowiące podstawę klasyfikacji na różne kategorie. Najczęściej występującymi kryteriami są: A. typy instrumentów finansowych, B. horyzont czasowy, C. forma sprzedaży, D. forma organizacji rynku. Poniżej przedstawiamy schematy ogólne podziałów rynku finansowego w zależności od wybranej cechy.

A. PODZIAŁ RYNKU FINANSOWEGO ZE WZGLĘDU NA INSTRUMENTY:

- **Rynek pieniężny** (*Money Market*):
 - transakcje krótkoterminowe (do jednego roku),
 - instrumenty finansowe o dużej płynności:
 - bony skarbowe, bony komercyjne,
 - certyfikaty depozytowe,
 - czeki,
 - weksle,
 - umowy typu REPO¹.
- **Rynek kapitałowy** (*Capital Market*):
 - instrumenty finansowe o charakterze własnościowym lub wierzycielskim:
 - akcje,
 - obligacje.
- **Rynek walutowy** (*Forex*):
 - kupno i sprzedaż walut.
- **Rynek instrumentów pochodnych** (*Derivatives Market*):
 - kontrakty pochodne:
 - futures,

¹ Repurchase agreement – transakcja sprzedaży z obietnicą odkupienia po ustalonej cenie i w ustalonym terminie.

opcje,
jednostki indeksowe itp.

B. PODZIAŁ RYNKU FINANSOWEGO ZE WZGLĘDU NA HORYZONT CZASOWY:

- **Rynek natychmiastowy zwany też gotówkowym** (*Spot Market*):
 - wymiana towarów, tzn. rozliczenie kontraktu, następuje w czasie do dwóch lub trzech dni od chwili zawarcia kontraktu.
- **Rynek terminowy** (*Forward Market*):
 - od chwili zawarcia kontraktu do momentu dostarczenia towaru, rozliczenia kontraktu, może upłynąć kilka lat.

C. PODZIAŁ RYNKU FINANSOWEGO ZE WZGLĘDU NA FORMĘ SPRZEDAŻY:

- **Rynek pierwotny** (*Primary Market*):
 - rynek, na którym emitenci nowych instrumentów finansowych, dopiero co wyemitowanych, sprzedają je za pośrednictwem instytucji finansowych.
- **Rynek wtórny** (*Secondary Market*):
 - rynek, na którym następuje dalszy obrót instrumentami finansowymi.

D. PODZIAŁ RYNKU FINANSOWEGO ZE WZGLĘDU NA FORMĘ ORGANIZACJI:

- **Rynek publiczny:**
 - giełdy (*Stock Exchange*),
 - regulowany rynek pozagiełdowy (np. BondSpot S.A w Warszawie (dawniej CTO²)).
- **Rynek prywatny (nieformalny):**
 - np. rynek międzybankowy.

Istotną rolę w funkcjonowaniu rynku odgrywają jego uczestnicy: czyli inwestorzy, wśród których można wyodrębnić kilka różnych grup, oraz pośrednicy.

Uczestnicy rynku:

- inwestorzy indywidualni;
- inwestorzy instytucjonalni:
 - banki,
 - fundusze emerytalne,
 - zakłady ubezpieczeniowe,
 - fundusze powiernicze *),
 - inne instytucje finansowe.
- pośrednicy:
 - maklerzy (biura maklerskie – *brokers*).

*)Na rynku finansowym spotykamy **fundusze powiernicze** dwojakiego rodzaju: otwarte i zamknięte. **Fundusz otwarty** emituje jednostki uczestnictwa. Wartość takiej jednostki wyznacza się jako iloraz wartości netto aktywów funduszu do liczby wydanych jednostek. Zysk uczestnika jest związany ze wzrostem wartości jednostki uczestnictwa. **Fundusz zamknięty**

² Centralna Tabela Ofert.

emituje akcje lub certyfikaty inwestycyjne. Uczestnik posiadający akcje funduszu otrzymuje **dywidendę**. Natomiast certyfikaty są odkupywane przez fundusz po cenie wyznaczonej tak, jak dla jednostek uczestnictwa.

1.2. Giełdy

Giełdy stanowią specyficzną formę wymiany towarów i zawierania transakcji. W zależności od rodzaju towarów wyróżnia się:

- giełdy towarowe (np. energii elektrycznej, produktów rolnych, surowców itp.),
- giełdy terminowe,
- giełdy papierów wartościowych.

Funkcjonowanie giełdy papierów wartościowych opiszemy na przykładzie Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie, gdzie notowane są następujące papiery wartościowe: akcje, prawa do akcji, prawa poboru, obligacje, certyfikaty inwestycyjne oraz instrumenty pochodne: futures, opcje, warranty i jednostki indeksowe. Zaczniemy od omówienia pokrótce podstawowych kontraktów finansowych, będących przedmiotem obrotu giełdowego, czyli akcji i obligacji.

1.2.1. Akcje

Akcja (*stock, share*), to dokument stwierdzający udział jej posiadacza, czyli akcjonariusza, w majątku spółki akcyjnej. Akcjonariusz ma zapewnione:

- prawo do dywidendy;
- prawo do uczestnictwa w walnym zgromadzeniu akcjonariuszy;
- prawo do udziału w majątku spółki w przypadku jej likwidacji.

Akcje dzielimy na zwykłe i uprzywilejowane. Uprzywilejowanie zazwyczaj dotyczy:

- głosu na zebraniu akcjonariuszy,
- pierwszeństwa w wypłacaniu dywidendy,
- pierwszeństwa w podziale majątku spółki w przypadku jej likwidacji.

Na giełdzie inwestor może zakupić akcje dopuszczone do obrotu giełdowego, sprzedać posiadane akcje i dokonać krótkiej sprzedaży akcji (patrz. § 9.1.2).

1.2.2. Obligacje

Obligacja, to papier wartościowy poświadczający wierzytelność na określoną sumę. Emisja obligacji następuje seriami, przy czym w jednej serii wszystkie obligacje mają tę samą wartość nominalną, ten sam termin wykupu i ten sam sposób naliczania odsetek (tzw. kupony). Z punktu widzenia modelowania ważne jest, czy obligacja ma stałe czy zmienne oprocentowanie oraz kto jest jej emitentem.

Obligacje o stałym oprocentowaniu dzielą się na:

- kuponowe;

na giełdzie warszawskiej są w obrocie: dwudziestoletnie – WSmrr, dziesięcioletnie – DSmrr, pięcioletnie – SPmrr i PSmrr³.

³ rr i mm to dwie ostatnie cyfry roku i numer miesiąca wykupu.

- zerokuponowe (bezodsetkowe);
na giełdzie warszawskiej są w obrocie dwuletnie OKmmrr.

Obligacje o zmiennym oprocentowaniu dzielą się na:

- *floating, adjustable* – wysokość oprocentowania jest ustalana na początku okresu oprocentowania;
na giełdzie warszawskiej są w obrocie: WZmmrr (wieloletnie), DZmmrr (dziesięcioletnie) i TZmmrr (trzyletnie).
- indeksowane – wysokość oprocentowania jest ustalana na koniec okresu oprocentowania, np. w zależności od wskaźnika inflacji.

Uwaga. W sierpniu 2004 roku Ministerstwo Finansów wyemitowało indeksowane obligacje skarbowe o nazwie skróconej IZ0816 i terminie wykupu w dniu 24 sierpnia 2016 roku, które zostały dopuszczone do obrotu giełdowego. Ich oprocentowanie jest stałe i wynosi 3% w skali rocznej. Natomiast wartość nominalna jest zmienna i podlega comiesięcznej indeksacji w oparciu o miesięczny wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych GUS. Odsetki (kupony), od wartości nominalnej zindeksowanej na dzień wypłaty, wypłacane są raz w roku (24 sierpnia). W związku z powyższym kwoty odsetek są zmienne.

1.3. Ćwiczenia – Plany spłaty długów: metoda amortyzacji

Na ćwiczeniach zostanie omówiona podstawowa metoda spłaty kredytu zwana metodą amortyzacji.

Metoda amortyzacji opiera się na podziale czasu życia kredytu (długu) na okresy odsetkowe (na ogół równe). Odsetki nalicza się na koniec każdego okresu na podstawie zadłużenia z początku okresu. Przepływy gotówki (spłaty, raty, kupony itp.) w trakcie okresu są kumulowane i dlatego zazwyczaj odbywają się tylko na końcu okresu.

W każdej zapłaconej racie wyodrębnia się dwie kwoty – spłacającą kapitał i spłacającą odsetki. Zarobione przez pożyczkodawcę odsetki podlegają opodatkowaniu. Jeśli, w którymś okresie nie następuje przepływ gotówki lub nie wystarcza on na pokrycie odsetek, to powiększa się kwota zadłużenia (saldo długu). Wówczas mamy do czynienia z amortyzacją negatywną.

Okresy odsetkowe, stopy zwrotu, wielkości spłat mogą być, ale nie muszą, ustalone w momencie zawarcia umowy. Na przykład według US-rule okresy odsetkowe wyznaczane są przez spłaty kredytobiorcy. Jeśli suma wpłat w danym okresie przewyższy narosłe odsetki, okres ten zostaje uznany za zakończony.

Schemat powyższy naszkicowany jest oczywiście bardzo ogólnie.

Na konkretnym przykładzie, prześledzimy teraz jak wygląda plan spłaty kredytu zgodnie z metodą amortyzacji. Ograniczymy się do kredytu z jednorazową wypłatą bez prowizji i kosztów manipulacyjnych.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

K – wysokość zaciągniętego kredytu,

n – liczba okresów, na które podzielono czas życia kredytu,

r_i – stopa procentowa w i -tym okresie, $i = 1, 2, \dots, n$,

O_i – odsetki naliczone w i -tym okresie, $i = 1, 2, \dots, n$,

CF_i – przepływ gotówki na koniec i -tego okresu, $i = 1, 2, \dots, n$,

T_i – rata kapitałowa na koniec i -tego okresu, $i = 1, 2, \dots, n$,

S_i – stan zadłużenia w i -tym okresie, $i = 1, 2, \dots, n+1$, $S_1 = K$, $S_{n+1} = 0$.

Zakładamy, że wszystkie salda S_i i stopy r_i są nieujemne.

Wysokość odsetek wyznaczona jest przez stan zadłużenia i stopę procentową

$$O_i = r_i \cdot S_i.$$

Zazwyczaj zaokrągla się je do dwóch miejsc dziesiętnych czyli dla kredytów denominowanych w złotych, do jednego grosza.

Zmiana stanu zadłużenia zależy od przepływu gotówki i od kwoty odsetek

$$S_{i+1} = S_i + O_i - CF_i.$$

Zauważmy, że z warunku nieujemności S_{i+1} wynika następujące oszacowanie dla CF_i

$$CF_i \leq S_i + O_i.$$

Ponadto, jeśli zsumujemy powyższe równości po wszystkich i , to otrzymamy, że suma płatności jest równa kwocie kredytu powiększonej o sumę naliczonych odsetek.

$$\sum_{j=1}^n CF_j = K + \sum_{j=1}^n O_j.$$

Rata kapitałowa stanowi część przepływu gotówki. Gdy wszystkie spłaty CF_i wystarczają na pokrycie aktualnych odsetek O_i , to

$$T_i = CF_i - O_i.$$

W przeciwnym przypadku, gdy niektóre CF_i są mniejsze od O_i , to niespłacone części odsetek są pokrywane z następnych spłat. Ogólnie, wielkość rat opisuje następujący wzór:

$$T_i = \max(0, CF_i - O_i - (S_i + \sum_{j=1}^{i-1} T_j - K)).$$

Sprawdźmy, że zgodnie z nazwą, raty kapitałowe „spłacają” kredyt.

Ćwiczenie 1.1. Pokazać, że suma rat kapitałowych T_i jest równa kwocie kredytu K

$$\sum_{j=1}^n T_j = K.$$

Rozwiązanie.

Najpierw pokażemy, że suma rat T_i nie przewyższa kwoty kredytu, tzn. że dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^i T_j \leq K.$$

Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Dla $i = 1$ teza jest oczywista

$$T_1 = \max(0, CF_1 - O_1) = \max(0, K - S_2) \leq K.$$

Założmy, że dla $i - 1$ oszacowanie zostało udowodnione. Mamy

$$\begin{aligned} T_i &= \max(0, CF_i - O_i - (S_i + \sum_{j=1}^{i-1} T_j - K)) = \\ &= \max(0, S_i - S_{i+1} - (S_i + \sum_{j=1}^{i-1} T_j - K)) = \max(0, K - \sum_{j=1}^{i-1} T_j - S_{i+1}) \leq K - \sum_{j=1}^{i-1} T_j. \end{aligned}$$

Po przeniesieniu sumy na lewą stronę otrzymujemy tezę indukcyjną.

Aby zakończyć dowód, należy zauważyć, że $S_{n+1} = 0$. Zatem na mocy udowodnionej już nierówności otrzymujemy

$$T_n = \max(0, CF_n - O_n - (S_n + \sum_{j=1}^{n-1} T_j - K)) = \max(0, K - \sum_{j=1}^{n-1} T_j) = K - \sum_{j=1}^{n-1} T_j.$$

Omówione powyżej wielkości wygodnie jest przedstawiać w postaci tabeli zwanej schematem amortyzacji kredytu:

okres	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
i	S_i	r_i	O_i	T_i	CF_i
<i>suma</i>			$\sum O_i$	$\sum T_i$	$\sum CF_i$

Ćwiczenie 1.2. Wyznaczyć schematy amortyzacji dla kredytu o:

kwocie 1000 zł,

czasie trwania – 4 lata,

okresie odsetkowym – 1 rok,

stopie procentowej stałej 10%,

wypłacie jednorazowej (w jednej transzy),

dla następujących sposobów spłaty kapitału i odsetek:

1. jednorazowa spłata kapitału i odsetek po 4 latach,
2. jednorazowa spłata kapitału po 4 latach i odsetki płatne po każdym okresie,
3. równe raty kapitałowe i odsetki płatne po każdym okresie,
4. równe spłaty, czyli rata kapitałowa + odsetki = const.

Odpowiedź.

1. Jednorazowa spłata kapitału i odsetek po 4 latach.

okres	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	1000	0,1	100	0	0
2	1100	0,1	110	0	0
3	1210	0,1	121	0	0
4	1331	0,1	133,1	1000	1464,1
<i>suma</i>			464,1	1000	1464,1

2. Jednorazowa spłata kapitału po 4 latach i odsetki płatne po każdym okresie.

okres	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	1000	0,1	100	0	100
2	1000	0,1	100	0	100
3	1000	0,1	100	0	100
4	1000	0,1	100	1000	1100
suma			400	1000	1400

3. Równe raty kapitałowe i odsetki płatne po każdym okresie.

okres	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	1000	0,1	100	250	350
2	750	0,1	75	250	325
3	500	0,1	50	250	300
4	250	0,1	25	250	275
suma			250	1000	1250

4. Równe spłaty.

okres	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	1000	0,1	100	215,47	315,47
2	784,53	0,1	78,45	237,02	315,47
3	547,51	0,1	54,75	260,72	315,47
4	286,79	0,1	28,68	286,79	315,47
suma			261,88	1000	1261,88

Ćwiczenie 1.3. Opracować schemat amortyzacji w przypadku rocznego kredytu w wysokości 10 000 zł, spłacanego w równych ratach płatnych na koniec każdego z czterech kwartałów, przy stopie procentowej nominalnej 24% (stopę kwartalną wyznaczamy zgodnie z zasadą równych miesięcy).

Rozwiązanie. Mamy $K = 10000$, $n = 4$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0.24/4 = 0.06$, $CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 \pm \varepsilon$, gdzie ε jest resztą wynikającą z zaokrągleń ($0 \leq \varepsilon < 0,01 \cdot \frac{n}{2}$). CF_1 wyznaczamy ze wzoru

$$CF_1 = K \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

gdzie $r = r_i = 0,06$, a $n = 4$. Po zaokrągleniu otrzymujemy $CF_1 = 2885,91$ zł. Tyle samo wynoszą kolejne dwie spłaty. Ostatnią spłatę należy powiększyć o 2 grosze. Ponieważ spłaty przewyższają odsetki, to raty kapitałowe wyznaczamy ze wzoru

$$T_i = CF_i - O_i.$$

Odpowiedź.

kwartał	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	10000	0,06	600	2285,91	2885,91
2	7714,09	0,06	462,85	2423,06	2885,91
3	5291,03	0,06	317,46	2568,45	2885,91
4	2722,58	0,06	163,35	2722,58	2885,93
suma			1543,66	10000	11543,66

Ćwiczenie 1.4. Sporządzić schemat amortyzacji rocznego długu w wysokości 10 000 zł, spłacanego w czterech równych ratach kapitałowych przy oprocentowaniu zmiennym. W pierwszym półroczu oprocentowanie nominalne wynosiło 20%, a w drugim 24% (stopy kwartalne wyznaczono zgodnie z zasadą równych miesięcy).

Rozwiązanie. Mamy $K = 10000$, $n = 4$, $r_1 = r_2 = 0,2/4 = 0,05$, $r_3 = r_4 = 0,24/4 = 0,06$, $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = K/4 = 2500$. Spłaty wyznaczamy jako sumy rat kapitałowych i odsetek

$$CF_i = T_i + O_i.$$

Odpowiedź.

kwartał	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	10000	0,05	500	2500	3000
2	7500	0,05	375	2500	2875
3	5000	0,06	300	2500	2800
4	2500	0,06	150	2500	2650
suma			1325	10000	11325

Ćwiczenie 1.5. Klient zaciągnął na 12 miesięcy kredyt w wysokości 1000 zł, przy nominalnej stopie procentowej 12%. Wiemy, że na koniec 3 miesiąca klient zapłacił 200 zł, a na koniec 8 miesiąca 300 zł. Obliczyć, ile (zgodnie z zasadą równych miesięcy) klient musi zapłacić na koniec 12 miesiąca oraz ile wyniosą raty kapitałowe:

1. przy miesięcznej kapitalizacji odsetek,
2. stosując US-rule.

Rozwiązanie.

1. Mamy

$$K = 1000, \quad n = 12, \quad r_1 = \dots = r_{12} = 0,12/12 = 0,01, \quad CF_3 = 200, \quad CF_8 = 300.$$

Szukamy CF_{12} . Pozostałe CF_i są zerowe.

Salda S_i wyznaczamy w następujący sposób

$$S_1 = K = 1000,$$

$$S_{i+1} = S_i + O_i - CF_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, 11.$$

Szukane CF_{12} otrzymujemy z warunku

$$0 = S_{12} + O_{12} - CF_{12}.$$

Raty kapitałowe są spłacane w 3, 8 i 12 miesiącu. Wynoszą one

$$T_3 = CF_3 - O_1 - O_2 - O_3,$$

$$T_8 = CF_8 - O_4 - O_5 - O_6 - O_7 - O_8,$$

$$T_{12} = CF_{12} - O_9 - O_{10} - O_{11} - O_{12}.$$

Co daje następujący schemat amortyzacji:

miesiąc	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	1000	0,01	10	0	0
2	1010	0,01	10,1	0	0
3	1020,1	0,01	10,2	169,7	200
4	830,3	0,01	8,3	0	0
5	838,6	0,01	8,39	0	0
6	846,99	0,01	8,47	0	0
7	855,46	0,01	8,55	0	0
8	864,01	0,01	8,64	257,65	300
9	572,65	0,01	5,73	0	0
10	578,38	0,01	5,78	0	0
11	584,16	0,01	5,84	0	0
12	590	0,01	5,9	572,65	595,9
suma			95,9	1000	1095,9

2. Mamy

$$K = 1000, \quad n = 3, \quad r_1 = 0,12/4 = 0,03, \quad r_2 = 0,12 \cdot 5/12 = 0,05, \quad r_3 = 0,12/3 = 0,04,$$

$$CF_1 = 200, \quad CF_2 = 300.$$

Szukamy CF_3 .

Otrzymujemy następujący schemat amortyzacji:

okres	zadłużenie	stopa %	odsetki	rata kapitałowa	spłata
1	1000	0,03	30	170	200
2	830	0,05	41,5	258,5	300
3	571,5	0,04	22,86	571,5	594,36
suma			94,36	1000	1094,36

Odpowiedź. Przy miesięcznej kapitalizacji odsetek ostatnia wpłata wynosi 595,90 zł, a zgodnie z US-rule 594,36 zł. Jak widać, przy tej samej stopie nominalnej dłuższe okresy kapitalizacji zmniejszają koszt kredytu. W obu przypadkach mamy trzy raty kapitałowe, które wynoszą odpowiednio 169,70 zł, 257,65 zł i 572,65 zł oraz 170 zł, 258,50 zł i 571,50 zł.

2. Pieniądz

Liczba godzin 2.

Zakres materiału:

Proces bogactwa. Proces akumulacji. Stopa zwrotu. Inflacja i realna stopa zwrotu. Metoda strumieni pieniężnych. Współczynnik dyskonta. Rodzaje kapitalizacji: prosta, składana, ciągła. Struktura liczenia dni (tzw. day count). Inflacja i realna stopa zwrotu

2.1. Opis inwestycji finansowych

2.1.1. Ujęcie „globalne”

Rozważmy inwestycję finansową w okresie $\langle T_0, T_1 \rangle$. $T = T_1 - T_0$ nazywa się „czasem życia inwestycji” lub „horyzontem czasowym”.

Inwestycję modelujemy za pomocą **procesu bogactwa** (*wealth process*)

$$K : \langle T_0, T_1 \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle,$$

gdzie $K(t)$ interpretujemy jako stan posiadania inwestora w chwili t .

W szczególności:

$K = K(T_0)$ oznacza **kapitał początkowy inwestora**,

$K(t) = 0$ dla pewnego t oznacza **bankructwo inwestora w chwili t** .

Jeżeli dodatkowo założymy, że funkcja $K(t)$ jest rosnąca, to mówimy o **procesie akumulacji**. Taki proces wykorzystuje się na przykład do modelowania rachunku oszczędnościowego a vista, którego posiadacz nie dokonywał wypłat. Gdy porównujemy wartości procesu akumulacji w dwóch momentach t_1 i t_2 , $t_1 < t_2$, to mówimy, że kwota $K(t_1)$ zakumulowała się do kwoty $K(t_2)$ lub że wartość skumulowana kwoty $K(t_1)$ (zainwestowanej w chwili t_1) w chwili t_2 wyniosła $K(t_2)$.

Zysk to różnica wartości procesu bogactwa w dwóch momentach czasu.

$$Z(t_2, t_1) = K(t_2) - K(t_1), \quad t_2 > t_1.$$

Jeśli t_1 jest momentem rozpoczęcia inwestycji ($t_1 = T_0$), to zwyczajowo opuszczamy jeden argument funkcji Z .

$$Z(t) = Z(t, T_0) = K(t) - K.$$

Uwaga 2.1. Gdy Z przyjmuje wartość ujemną, wówczas mówimy o **stracie**.

Jeśli $K(t_1) > 0$, to możemy określić stopę zwrotu w okresie $\langle t_1, t_2 \rangle$ (względny przyrost procesu bogactwa $K(t)$)

$$r(t_2, t_1) = \frac{Z(t_2, t_1)}{K(t_1)} = \frac{K(t_2)}{K(t_1)} - 1,$$

$$r(t) = r(t, T_0) = \frac{K(t) - K}{K}.$$

Gdy modelowany proces jest „mierzony” w pewnych jednostkach monetarnych, to stopa zwrotu mówi nam, ile wynosi zysk z jednej jednostki monetarnej. Jak łatwo zauważyć, stopy zwrotu wyznaczają proces bogactwa. Mamy

$$K(t) = (1 + r(t))K, \quad K(t_2) = (1 + r(t_2, t_1))K(t_1).$$

Warto zwrócić uwagę na zależność „wielookresowej” stopy zwrotu od stóp zwrotu w poszczególnych okresach.

Lemat 2.1. Niech $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Jeżeli w okresie $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ stopa zwrotu wynosi r_i , $i = 1, \dots, n$, to stopa zwrotu w okresie $\langle t_0, t_n \rangle$ wyniesie

$$r = \prod_{i=1}^n (1 + r_i) - 1.$$

Dowód.

Korzystamy z zależności

$$K(t_i) = K(t_{i-1})(1 + r(t_i, t_{i-1})) = K(t_{i-1})(1 + r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Mnożąc powyższe równości stronami, a następnie skracając, otrzymujemy

$$K(t_n) = K(t_0)(1 + r_1) \dots (1 + r_n).$$

Zatem

$$r = r(t_n, t_0) = \frac{K(t_n) - K(t_0)}{K(t_0)} = (1 + r_1) \dots (1 + r_n) - 1.$$

2.1.2. Ujęcie „lokalne”

Z każdą inwestycją związane są **przepływy gotówki** (*cash flows*), zwane też przepływami (strumieniami) pieniężnymi

$$CF_0, CF_1, \dots, CF_n,$$

które mają miejsce w chwili $t_i \in \langle T_0, T_1 \rangle$,

$$T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n.$$

Niekiedy będziemy stosowali zapis uproszczony

$$CF_{t_0}, CF_{t_1}, \dots, CF_{t_n}.$$

Ujemna wartość CF_i (lub CF_t) oznacza wydatki, a dodatnia przychody. Zysk z inwestycji wyznaczamy według następującego wzoru:

$$Z = CF_0 + CF_1 + \dots + CF_n.$$

Gdy rozpatrujemy inwestycję jednookresową ($n = 1$), taką, że $CF_0 < 0$, a $CF_1 > 0$ (najpierw inwestujemy), to wzór na stopę zwrotu jest następujący:

$$r = \frac{CF_1 + CF_0}{|CF_0|} = \frac{CF_1}{|CF_0|} - 1.$$

Przykład

Inwestor kupił za 100 zł roczną obligację. Po roku wypłata wyniosła 110 zł.

Mamy następujące dane:

czas życia inwestycji 1 rok, zatem $t \in \langle 0, 1 \rangle$;

$$K(0) = 100,$$

$$K(1) = 110.$$

Dla $t \in (0, 1)$ $K(t)$ jest wartością rynkową obligacji w momencie t .

Zysk i stopa zwrotu wynoszą odpowiednio

$$Z = 110 - 100 = 10, \quad r = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Alternatywny opis wygląda następująco:

$$CF_0 = -100, \quad CF_1 = 110.$$

Zatem zysk i stopa zwrotu wynoszą odpowiednio

$$Z = -100 + 110 = 10, \quad r = \frac{10}{|-100|} = 0,1.$$

Podsumowanie:

Proces bogactwa opisuje stan posiadania inwestora, a przepływy gotówki tylko stan jego rachunku bankowego.

2.2. Przykłady procesów akumulacji

2.2.1. Odsetki proste (procent prosty)

Rachunek oszczędnościowy a vista, z odsetkami naliczanymi proporcjonalnie do czasu utrzymywania lokaty, jest opisywany następującym procesem akumulacji:

$$K(t) = K \cdot (1 + tr), \quad \text{gdzie } t \text{ kolejny okres lub jego część, } t \in \langle 0, T \rangle, \quad K = \text{const.}$$

Stopa zwrotu dla takiego procesu wynosi

$$r(1) = r, \quad r(t) = \frac{K(t) - K}{K} = tr.$$

2.2.2. Odsetki złożone (procent złożony)

Inna metoda naliczania odsetek opisana jest za pomocą funkcji wykładniczej zależnej od czasu

$$K(t) = K \cdot (1 + r)^t, \quad \text{gdzie } t \text{ kolejny okres, } t \in \langle 0, T \rangle, \quad K = \text{const.}$$

Stopa zwrotu dla takiego procesu wynosi

$$r(1) = r, \quad r(t) = \frac{K(t) - K}{K} = (1 + r)^t - 1 = tr + \frac{t(t-1)}{2}r^2 + \dots$$

Jak widać, różnica między stopami zwrotu powyższych procesów jest rzędu r^2 .

2.2.3. Okresowa kapitalizacja odsetek

W praktyce stosuje się połączenie obu sposobów oprocentowania. Pomiedzy pełnymi okresami nalicza się odsetki w sposób prosty, a następnie dodaje się odsetki do kapitału (kapitalizacja odsetek).

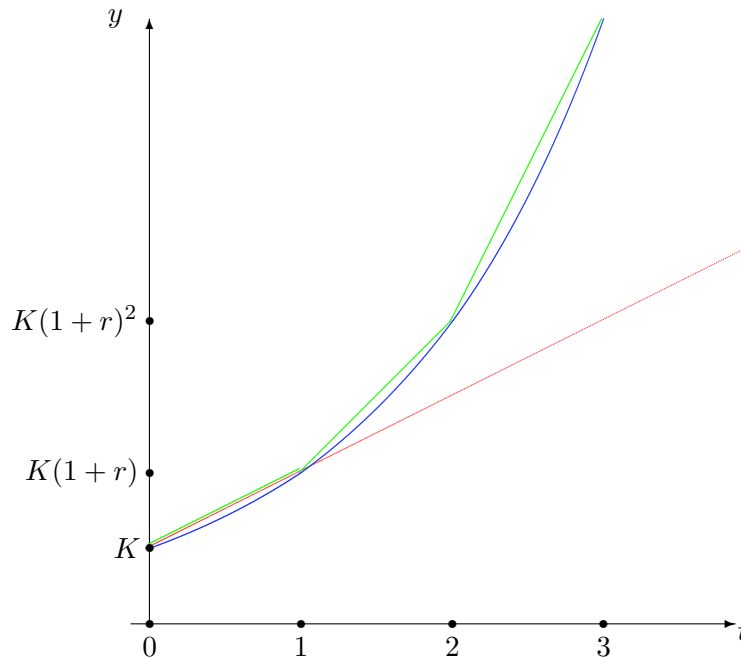
$$K(t) = K \cdot (1 + r)^{[t]} \cdot (1 + (t)r), \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad K = \text{const.}$$

$[t]$ część całkowita, (t) część ułamkowa (czyli $t = [t] + (t)$, gdzie $[t] \in \mathbb{Z}$, $(t) \in \langle 0, 1 \rangle$). Zauważmy, że

$$r(1) = r, \quad r(t) = \frac{K(t) - K}{K} = (1 + r)^{[t]} \cdot (1 + (t)r) - 1.$$

Poniżej (rys. 2.1) przedstawione są wykresy opisanych powyżej trzech procesów akumulacji:

$$y = K(1 + tr), \quad y = K(1 + r)^t \quad \text{oraz} \quad y = K \cdot (1 + r)^{[t]} \cdot (1 + (t)r).$$



Rysunek 2.1. Porównanie procesów akumulacji.

2.2.4. Kapitalizacja ciągła

Czasami wygodniej jest zapisywać proces akumulacji opisujący procent złożony za pomocą funkcji wykładniczej o podstawie e .

$$K(t) = K \cdot e^{t\gamma}, \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad K = \text{const.}$$

Mówimy wówczas o kapitalizacji ciągłej. Wielkość oznaczoną literą γ będziemy nazywać intensywnością oprocentowania. Łatwo wyrazić ją za pomocą stopy procentowej (procent złożony)

$$\gamma = \ln(1 + r), \quad r = e^\gamma - 1.$$

Uwaga 2.2. W niektórych „źródłach” γ nazywa się „chwilową stopą procentową”.

Aby porównywać różne procesy akumulacji, należy dokonać wyboru wspólnej jednostki czasu i ustalić wzorcowy typ procesu.

2.2.5. Roczna skala czasowa

Od tej chwili jako jednostkę czasu przyjmujemy rok kalendarzowy. Niech τ – długość okresu mierzona w latach (np. miesiąc, kwartał, ...) r – stopa zwrotu jednookresowa (miesięczna, kwartalna, ...), a $\hat{r} = r\tau^{-1}$ – stopa zwrotu w skali rocznej. Wówczas proces akumulacji opisujący procent prosty przyjmuje następującą postać

$$K(t) = K \cdot \left(1 + r \frac{t}{\tau}\right) = K \cdot (1 + t\hat{r}).$$

Natomiast dla procentu złożonego mamy

$$K(t) = K \cdot (1 + r)^{\frac{t}{\tau}} = K \cdot (1 + \tau\hat{r})^{\frac{t}{\tau}}.$$

Jeżeli długość okresu maleje do 0, to otrzymamy w granicy kapitalizację ciągłą z intensywnością równą $\hat{r}$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} K \cdot (1 + \tau\hat{r})^{\frac{t}{\tau}} = Ke^{t\hat{r}}.$$

Stąd też nazwa – **kapitalizacja ciągła**.

Uwaga 2.3. W matematyce aktuarialnej, dla podkreślenia, że stopa procentowa podana jest w skali rocznej, stosuje się symbol $i^{(m)}$. Oznacza on stopę procentową (dla procentu prostego) dla okresu $\frac{1}{m}$ roku w skali rocznej. Jeśli r oznacza oprocentowanie okresowe, to

$$i^{(m)} = m \cdot r \quad \text{ i } \quad r = \frac{i^{(m)}}{m}.$$

Na przykład w ćwiczeniu 2.8 mamy $i^{(4)} = 0,08$ i $r = 0,02$.

Uwaga 2.4. W dalszym ciągu będziemy oznaczać stopy zwrotu i stopy procentowe wymiennie literami r i i . Symbol r pochodzi od angielskiego *rate of return* i chętnie jest używany w finansach, a i od *interest rate* (lub *rate of interest*) i używany jest przez aktuariuszy.

2.2.6. Nominalna i efektywna stopa procentowa

Jak już wspominaliśmy, aby móc porównywać różne procesy akumulacji, należy wybrać typ *wzorcowy* procesu. Wybór oprocentowania prostego prowadzi do stopy nominalnej, a oprocentowania złożonego do stopy efektywnej.

Niech $K(t)$ będzie pewnym procesem akumulacji.

Stopa nominalna w okresie $\langle t, t+h \rangle$ (t czas w latach)

$$i_n = i_n(h, t)$$

to taka stopa procentowa, że

$$K(t+h) = K(t) \cdot (1 + hi_n(h, t)),$$

czyli

$$i_n(h, t) = \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)}.$$

Stopa efektywna w okresie $\langle t, t+h \rangle$ (t czas w latach)

$$i_{ef} = i_{ef}(h, t)$$

to taka stopa procentowa, że

$$K(t+h) = K(t) \cdot (1 + i_{ef}(h, t))^h,$$

czyli

$$i_{ef}(h, t) = \sqrt[h]{\frac{K(t+h)}{K(t)}} - 1.$$

Podobnie określa się **efektywną intensywność oprocentowania** w okresie $\langle t, t+h \rangle$

$$\gamma_{ef} = \gamma_{ef}(h, t).$$

Jest to taka intensywność, że

$$K(t+h) = K(t) \cdot e^{h\gamma_{ef}(h, t)},$$

czyli

$$\gamma_{ef}(h, t) = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{K(t+h)}{K(t)}\right) = \ln(1 + i_{ef}(h, t)).$$

Porównamy teraz graniczne wartości efektywnej intensywności i stopy nominalnej. Okazuje się, że jeżeli istnieją, to są sobie równe.

Lemat 2.2. *Dla ustalonego momentu t następujące warunki są równoważne:*

1. *Prawostronna pochodna K w punkcie t istnieje i jest równa k*

$$k = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{K(t+h) - K(t)}{h};$$

2. *Efektywna intensywność $\gamma_{ef}(h, t)$ ma w punkcie $h = 0$ granicę $\frac{k}{K(t)}$;*

3. *Stopa nominalna $i_n(h, t)$ ma w punkcie $h = 0$ granicę $\frac{k}{K(t)}$.*

Dowód.

1 $\Rightarrow$ 2.

Jeśli K ma w t prawostronną pochodną, to również ma ją złożenie $\ln \circ K$. Zatem

$$\gamma_{ef}(h, t) = \frac{\ln(K(t+h)) - \ln(K(t))}{h} \longrightarrow \ln(K(t))' = \frac{k}{K(t)}.$$

2 $\Rightarrow$ 3.

Przedstawimy i_n jako iloczyn dwóch funkcji posiadających granicę gdy $h \rightarrow 0$.

$$i_n(h, t) = \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} = \frac{e^{h\gamma_{ef}(h, t)} - 1}{h} = \frac{e^{h\gamma_{ef}(h, t)} - 1}{h\gamma_{ef}(h, t)} \cdot \gamma_{ef}(h, t).$$

Zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} i_n(h, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h\gamma_{ef}(h, t)} - 1}{h\gamma_{ef}(h, t)} \lim_{h \rightarrow 0^+} \gamma_{ef}(h, t) = 1 \cdot \frac{k}{K(t)}.$$

3 $\Rightarrow$ 1.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{K(t+h) - K(t)}{h} = K(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} =$$

$$= K(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} i_n(h, t) = K(t) \frac{k}{K(t)} = k.$$

Przykład

Odsetki proste $K(t) = (1 + tr)K$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

$$\begin{aligned} i_n(h, t) &= \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} = \frac{(1 + (t+h)r)K - (1 + tr)K}{h(1 + tr)K} = \\ &= \frac{hr}{h(1 + tr)} = \frac{r}{(1 + tr)}. \end{aligned}$$

Jak widać, stopa nominalna nie zależy od długości okresu h i maleje wraz z upływem czasu. Największa wartość przyjmowana jest w momencie początkowym

$$i_n(h, 0) = r.$$

$$\begin{aligned} i_{ef}(h, t) &= \sqrt[h]{\frac{K(t+h)}{K(t)}} - 1 = \sqrt[h]{\frac{1 + (t+h)r}{1 + tr}} - 1 = \\ &= \left(1 + \frac{hr}{1 + tr}\right)^{\frac{1}{h}} - 1 \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla okresów długości 1 stopa efektywna i nominalna są równe.

$$i_{ef}(1, t) = \left(1 + \frac{r}{1 + tr}\right) - 1 = \frac{r}{1 + tr} = i_n(1, t).$$

Efektywna intensywność wynosi

$$\gamma_{ef}(h, t) = \ln(1 + i_{ef}(h, t)) = \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{hr}{1 + tr}\right).$$

A więc ona również maleje w miarę upływu czasu.

Przykład

Odsetki złożone $K(t) = (1 + r)^t K$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

$$i_n(h, t) = \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} = \frac{(1 + r)^h - 1}{h}.$$

Zauważmy, że stopa nominalna nie zależy od t . Dla okresów długości 1 wynosi ona

$$i_n(1, t) = r.$$

$$i_{ef}(h, t) = \left(\frac{K(t+h)}{K(t)}\right)^{1/h} - 1 = ((1 + r)^h)^{1/h} - 1 = r$$

A zatem stopa efektywna jest stała. Podobnie efektywna intensywność

$$\gamma_{ef}(h, t) = \ln(1 + r).$$

Przykład

Kapitalizacja ciągła $K(t) = e^{rt} K$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

$$i_n(h, t) = \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} = \frac{1}{h}(e^{rh} - 1).$$

Zauważmy, że stopa nominalna nie zależy od t .

$$i_{ef}(h, t) = \left(\frac{K(t+h)}{K(t)} \right)^{1/h} - 1 = (e^{rh})^{\frac{1}{h}} - 1 = e^r - 1$$

Jak widać, stopa efektywna jest stała. Podobnie efektywna intensywność

$$\gamma_{ef}(h, t) = \ln(1 + i_{ef}(h, t)) = r.$$

Uwaga 2.5. W praktyce bankowej dla okresów do jednego roku stosuje się zazwyczaj stopę nominalną, a dla dłuższych efektywną.

2.2.7. Porównanie stopy nominalnej i stopy efektywnej

Niech $K(t)$ będzie dowolnym procesem akumulacji. Okazuje się, że to, która ze stóp, nominalna czy efektywna, jest większa, zależy tylko od długości okresu h .

Lemat 2.3. *Dla ustalonego procesu akumulacji $K(t)$ i dowolnego czasu $t \geq 0$ zachodzą następujące implikacje*

$$\begin{aligned} 0 < h < 1 &\Rightarrow i_n(h, t) < i_{ef}(h, t), \\ h = 1 &\Rightarrow i_n(h, t) = i_{ef}(h, t), \\ h > 1 &\Rightarrow i_n(h, t) > i_{ef}(h, t). \end{aligned}$$

Dowód.

Korzystamy ze wzoru na stopę nominalną

$$i_n(h, t) = \frac{K(t+h) - K(t)}{hK(t)} = \frac{1}{h} \left(\frac{K(t+h)}{K(t)} - 1 \right).$$

Ale jak wcześniej wyliczyliśmy

$$\frac{K(t+h)}{K(t)} = (i_{ef} + 1)^h = e^{h\gamma_{ef}}.$$

Zatem

$$i_n = \frac{1}{h} (e^{h\gamma_{ef}} - 1).$$

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

dla $x > 0$. Można ją rozwinąć w szereg potęgowy zbieżny na całej prostej rzeczywistej.

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Pierwszy wyraz rozwinięcia jest stały, a wszystkie pozostałe są ściśle rosnące dla $x > 0$. Zatem f też jest ściśle rosnąca. Zauważmy, że

$$i_n = f(h\gamma_{ef}) \cdot \gamma_{ef}.$$

Dla $h = 1$ mamy $i_n = f(\gamma_{ef}) \cdot \gamma_{ef} = e^{\gamma_{ef}} - 1 = i_{ef}$.

Dla $0 < h < 1$ mamy $i_n < f(\gamma_{ef}) \cdot \gamma_{ef} = e^{\gamma_{ef}} - 1 = i_{ef}$.

Dla $h > 1$ mamy $i_n > f(\gamma_{ef}) \cdot \gamma_{ef} = e^{\gamma_{ef}} - 1 = i_{ef}$.

Możemy teraz przeformułować uwagę 2.5 z poprzedniego podrozdziału. W praktyce bankowej do określenia wysokości oprocentowania kredytów i lokat używa się $\min(i_n, i_{ef})$.

2.2.8. Rachunek czasu w matematyce finansowej

Jak ustaliliśmy wcześniej, czas mierzymy w latach. W związku z tym zachodzi pytanie, jak przeliczać dni na lata. Najprościej byłoby podzielić liczbę dni przez długość roku. Problem pojawia się, gdy następuje zmiana roku zwykłego na przestępny lub odwrotnie?

Metody stosowane przez banki.

1. Dokładna liczba dni:

$$t = \frac{m_1}{365} + \frac{m_2}{366},$$

gdzie: m_1 – liczba dni w roku zwykłym, a m_2 – w przestępnym. Procent prosty obliczony w oparciu o dokładną liczbę dni nazywa się „dokładnym procentem prostym” (*exact simple interest*).

Metoda ta jest dość skomplikowana rachunkowo, dlatego stosuje się też inne, prostsze.

2. Zasada równych miesięcy.

Przyjmujemy, że każdy miesiąc ma równą liczbę dni – 30, a rok ma ich 360.

$$t = \frac{m}{360},$$

gdzie: m – pomnożona przez 30 liczba pełnych kalendarzowych miesięcy, powiększona o liczbę dni z „napoczętego” miesiąca.

$$m = (D_2 - D_1) + 30 \cdot (M_2 - M_1) + 360 \cdot (R_2 - R_1),$$

$D_1M_1R_1$ oznacza datę rozpoczęcia inwestycji, a $D_2M_2R_2$ datę zakończenia inwestycji. Procent prosty obliczony w oparciu o zasadę równych miesięcy nazywa się „zwykłym procentem prostym” (*ordinary simple interest*).

3. Reguła bankowa (*Banker's rule*).

$$t = \frac{m}{360},$$

gdzie: m – dokładna liczba dni.

2.2.9. Dyskonto

O dyskoncie mówimy, gdy opłata za korzystanie z cudzych pieniędzy jest pobrana z „góry”. **Stopą dyskonta** nazywamy stosunek zysku (zwanego wtedy dyskontem) do końcowej wielkości kapitału.

$$D(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(t)}.$$

W skali rocznej stopa ta wynosi

$$\hat{D}(t) = \frac{K(t) - K(0)}{tK(t)},$$

gdzie: t – czas w latach. Stopa dyskonta jest ściśle związana ze stopą zwrotu.

Lemat 2.4.

$$(1 - D(t))(1 + r(t)) = 1$$

Dowód.

$$D(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(t)} = 1 - \frac{K(0)}{K(t)},$$

$$r(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(0)} = \frac{K(t)}{K(0)} - 1.$$

Zatem

$$(1 - D(t))(1 + r(t)) = (1 - (1 - \frac{K(0)}{K(t)}))(1 + (\frac{K(t)}{K(0)} - 1)) = \frac{K(0)}{K(t)} \frac{K(t)}{K(0)} = 1.$$

Uwaga. W matematyce aktuarialnej, aby podkreślić, że stopa dyskonta podana jest w skali rocznej, stosuje się symbol $d^{(m)}$. Oznacza on stopę dyskonta dla okresu $\frac{1}{m}$ roku w skali rocznej. Jeśli $d = D(\frac{1}{m})$ oznacza okresową stopę dyskonta, to

$$d^{(m)} = \hat{D}(\frac{1}{m}) = m \cdot d \quad \text{ i } \quad d = \frac{d^{(m)}}{m}.$$

Okazuje się, że dla krótkiego okresu czasu (czyli dużego m) i „gładkiego” procesu akumulacji $d^{(m)}$ mało różni się od $i^{(m)}$ (wprowadzonego w §1.3.5).

Lemat 2.5. *Jeżeli proces akumulacji $K(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$, ma prawostronną pochodną w „0” równą k , to*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \frac{k}{K(0)}.$$

Dowód.

$$i^{(m)} = m \frac{K(\frac{1}{m}) - K(0)}{K(0)} = \frac{1}{K(0)} \frac{K(\frac{1}{m}) - K(0)}{\frac{1}{m}}.$$

Zatem gdy $\frac{1}{m}$ zbiega do zera, to otrzymujemy w granicy $\frac{k}{K(0)}$. Podobnie

$$d^{(m)} = m \frac{K(\frac{1}{m}) - K(0)}{K(\frac{1}{m})} = \frac{1}{K(\frac{1}{m})} \frac{K(\frac{1}{m}) - K(0)}{\frac{1}{m}}.$$

Zatem

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{K(\frac{1}{m})} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K(\frac{1}{m}) - K(0)}{\frac{1}{m}} = \frac{k}{K(0)}.$$

Przykład

Rozważmy proces akumulacji „kapitalizacja ciągła” $K(t) = K(0)e^{\gamma t}$. $K(t)$ jest różniczkowalny w „0” i $K'(0) = K(0)\gamma$. Zatem

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \gamma.$$

2.3. Inflacja i realna stopa zwrotu

Za pomocą procesu bogactwa można też modelować „inflację”, czyli spadek wartości wybranej jednostki monetarnej – JM.

Ustalamy pewien koszyk dóbr konsumpcyjnych. Na podstawie cen tych dóbr w chwili t wyznaczamy $CPI(t)$ – indeks cenowy konsumenta (*consumer price index*), czyli wartość koszyka w chwili t wyrażoną w JM. **Stopa inflacji** w okresie $\langle t_1, t_2 \rangle$, to względny przyrost CPI

$$r_{CPI}(t_2, t_1) = \frac{CPI(t_2) - CPI(t_1)}{CPI(t_1)}.$$

Niech $K(t)$ będzie pewnym procesem bogactwa. Jeżeli chcemy ocenić, ile dóbr konsumpcyjnych można nabyć za $K(t)$ JM w chwili t , to musimy przeliczyć $K(t)$ na „koszyki”, czyli wyznaczyć wielkość zwaną jego realną wartością

$$K_{real}(t) = \frac{K(t)}{CPI(t)}.$$

Stopę zwrotu procesu bogactwa K_{real} nazywamy „realną stopą zwrotu”. Można ją łatwo wyznaczyć, znając stopę zwrotu procesu $K(t)$ i stopę inflacji.

Lemat 2.6. Wzór Fishera.

$$r_{real}(t_2, t_1) = \frac{r(t_2, t_1) - r_{CPI}(t_2, t_1)}{1 + r_{CPI}(t_2, t_1)}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} r_{real}(t_2, t_1) &= \frac{K_{real}(t_2)}{K_{real}(t_1)} - 1 = \frac{K(t_2)}{K(t_1)} \cdot \frac{CPI(t_1)}{CPI(t_2)} - 1 = \\ &= \frac{1 + r(t_2, t_1)}{1 + r_{CPI}(t_2, t_1)} - 1 = \frac{r(t_2, t_1) - r_{CPI}(t_2, t_1)}{1 + r_{CPI}(t_2, t_1)}. \end{aligned}$$

Uwaga. Dla odróżnienia od realnej stopy zwrotu stopę $r(t_2, t_1)$ nazywa się „nominalną stopą zwrotu”.

2.4. Ćwiczenia

Ćwiczenie 2.1. Rozważmy proces bogactwa $K(t) = t^2 + 2t + 3$, gdzie $t \in \langle 0, 1000 \rangle$ – czas w miesiącach,

- sprawdzić, czy jest to proces akumulacji,
- obliczyć miesięczny zysk Z_n dla n -tego miesiąca,
- obliczyć miesięczną stopę zwrotu r_n dla n -tego miesiąca.

Rozwiązanie.

- Dla $t \geq 0$ funkcja kwadratowa $K(t) = t^2 + 2t + 3$ jest ściśle rosnąca, zatem K jest procesem akumulacji.
- $Z_n = K(n) - K(n-1) = n^2 + 2n + 3 - (n-1)^2 - 2(n-1) - 3 = 2n + 1$.
- $r_n = \frac{K(n) - K(n-1)}{K(n-1)} = \frac{2n+1}{n^2+2}$.

Odpowiedź. K jest procesem akumulacji. W n -tym miesiącu zysk wynosi $2n + 1$, a stopa zwrotu $\frac{2n+1}{n^2+2}$.

Ćwiczenie 2.2. Wiadomo, że proces akumulacji $K(t)$ ma postać $a \cdot t^2 + b$, gdzie $t \in \langle 0, 100 \rangle$ – czas w latach. Wyznaczyć stopę zwrotu w okresie $\langle 5, 10 \rangle$, jeżeli wiadomo, że 100 jednostek monetarnych zainwestowanych w chwili 0 akumuluje się do 172 po 3 latach.

Rozwiązanie. Z warunku $K(0) = 100$, wynika, że $b = 100$. Mamy także $K(3) = 172$, co oznacza, że $a \cdot 3^2 + 100 = 172$ czyli $a = 8$. Zatem

$$K(5) = 8 \cdot 5^2 + 100 = 300, \quad K(10) = 8 \cdot 10^2 + 100 = 900,$$

$$r(5, 10) = \frac{K(10) - K(5)}{K(5)} = \frac{900 - 300}{300} = 2.$$

Odpowiedź. Stopa zwrotu w okresie $\langle 5, 10 \rangle$ wynosi 200%, tzn. w ciągu tych pięciu lat kapitał uległ potrojeniu.

Ćwiczenie 2.3. Inwestor zainwestował na giełdzie 1024 zł. W pierwszym miesiącu poniósł stratę, stopa zwrotu wyniosła -50% . Natomiast w kolejnych miesiącach stopy zwrotu wyniosły $+25\%$.

- a) Wyznaczyć stopę zwrotu z pierwszego półrocza.
- b) Wyznaczyć wartość inwestycji po pół roku.
- c) Po ilu miesiącach inwestycja zaczęła przynosić zysk?

Rozwiązanie. Jako jednostkę czasu przyjmujemy miesiąc.

$$r(6) = (1 - 0.5)(1 + 0.25)^5 - 1 = \frac{5^4}{2 \cdot 4^5} - 1 = \frac{3125}{2048} - 1 = 0.52588.$$

Zatem

$$K(6) = K(0)(1 + r(6)) = 1024 \frac{3125}{2048} = 1562.5.$$

Ponadto zauważmy, że

$$r(4) = (1 - 0.5)(1 + 0.25)^3 - 1 = \frac{125}{128} - 1 = -0.023 < 0,$$

$$r(5) = (1 - 0.5)(1 + 0.25)^4 - 1 = \frac{625}{512} - 1 = 0.221 > 0.$$

Odpowiedź. Stopa zwrotu za pierwsze półrocze wyniosła 52.59%. Inwestycja po pół roku była warta 1562.5 zł, ale zysk przyniosła dopiero w piątym miesiącu od momentu zainwestowania pieniędzy.

Ćwiczenie 2.4. Bank udzielił pożyczki w wysokości 1000 zł. Pożyczkobiorca spłacił ją w trzech ratach. Po pół roku wpłacił 500 zł, po 7 miesiącach 300, a po roku kolejne 300. Wyznaczyć łączną kwotę odsetek pobranych przez bank.

Rozwiązanie. Przeanalizujemy zadanie z punktu widzenia banku. Mamy cztery przepływy gotówki

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = 500, \quad CF_2 = 300, \quad CF_3 = 300.$$

Zatem zysk banku (odsetki) wynosi

$$Z = CF_0 + CF_1 + CF_2 + CF_3 = -1000 + 500 + 300 + 300 = 100.$$

Odpowiedź. Bank pobrał 100 zł odsetek.

Ćwiczenie 2.5. Obliczyć wartość skumulowaną 2000 EUR zainwestowanych na pół roku na procent prosty, przy stopie procentowej 8% rocznie.

Rozwiązanie. Na podstawie definicji procentu prostego mamy

$$K(0.5) = 2000(1 + 0.5 \cdot 0.08) = 2000 \cdot 1.04 = 2080.$$

Odpowiedź. Po pół roku inwestor otrzymał 2080 EUR.

Ćwiczenie 2.6. Obliczyć wartość skumulowaną 2000 EUR zainwestowanych na cztery lata na procent składany przy stopie procentowej 8% rocznie.

Rozwiązanie. Na podstawie definicji procentu składanego mamy

$$K(4) = 2000(1.08)^4 = 2000 \cdot 1.36049 = 2720.98.$$

Odpowiedź. Po czterech latach inwestor otrzymał 2720.98 EUR.

Ćwiczenie 2.7. Obliczyć wartość skumulowaną 2000 EUR zainwestowanych na cztery i pół roku przy stopie procentowej 8% rocznie i rocznej kapitalizacji odsetek.

Rozwiązanie. Roczna kapitalizacja odsetek oznacza, że

$$\begin{aligned} K(4.5) &= 2000(1 + 0.08)(1 + 0.08)(1 + 0.08)(1 + 0.08)(1 + 0.5 \cdot 0.08) = \\ &= 2000 \cdot 1.08^4 \cdot 1.04 = 2000 \cdot 1.41491 = 2829.82. \end{aligned}$$

Odpowiedź. Po czterech i pół roku inwestor otrzymał 2829.82 EUR.

Ćwiczenie 2.8. Obliczyć wartość skumulowaną kwoty 500 zł zainwestowanej na pięć lat na 8% (w skali rocznej) składane kwartalnie.

Rozwiązanie.

$$K(5) = 500\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4 \cdot 5} = 500(1.02)^{20} = 742.97$$

Odpowiedź. Po pięciu latach inwestor otrzyma 742.97 zł.

Ćwiczenie 2.9. Rozważmy proces akumulacji $K(t)$, gdzie $t \in \langle 0, 20 \rangle$ czas w latach. Niech r_n roczna stopa zwrotu w n -tym roku. Pokazać, że $r_n = i_{ef}(1, n - 1)$.

Rozwiązanie. Z definicji efektywnej 1 rocznej ($h = 1!$) stopy procentowej w n -tym roku mamy

$$K(n) = K(n-1)(1 + i_{ef}(1, n-1)).$$

Zatem

$$r_n = \frac{K(n)}{K(n-1)} - 1 = \frac{K(n-1)(1 + i_{ef}(1, n-1))}{K(n-1)} - 1 = i_{ef}(1, n-1).$$

Ćwiczenie 2.10. Obliczyć wysokość odsetek, jakie zarobił kapitał 2000 USD zdeponowany w banku 17 czerwca 1999 roku, jeśli pieniądze zostały wypłacone 10 września tego samego roku, a stopa procentu prostego wynosiła 8%. Zastosować trzy metody *obliczania czasu*.

Rozwiązanie. Dokładne oprocentowanie proste. Dokładna liczba dni inwestycji wynosi 85. Zatem otrzymujemy

$$2000 \cdot 0.08 \frac{85}{365} = 37.26$$

Reguła równych miesięcy. Formuła na obliczanie przybliżonej liczby dni daje wynik

$$360(0) + 30(9 - 6) + (10 - 17) = 83$$

Stąd

$$2000 \cdot 0.08 \frac{83}{360} = 36.89$$

Natomiast reguła bankiera daje następujący wynik

$$2000 \cdot 0.08 \frac{85}{360} = 37.78.$$

Odpowiedź. Odsetki obliczone według *dokładnej liczby dni* wyniosły 37.26 USD, zgodnie z zasadą *równych miesięcy* 36.89 USD, a według reguły bankowej 37.78 USD.

Ćwiczenie 2.11. Porównujemy dwie roczne inwestycje o tej samej stopie zwrotu i tej samej stopie dyskonta. Wiemy o nich, co następuje:

- Inwestycja A. Zysk płatny na końcu roku z zainwestowania kwoty K na jeden rok wynosi 336.
- Inwestycja B. Dyskonto dla wypłaty K wynosi 300.

Obliczyć wielkość kwoty K , roczną stopę zwrotu r i roczną stopę dyskonta d .

Rozwiązanie. Na podstawie warunków zadania mamy

$$K(1 + r) = K + 336$$

oraz

$$(K - 300)(1 + r) = K.$$

Wstawiając $1 + r$ z pierwszego równania do drugiego, dostajemy

$$(K - 300) \frac{K + 336}{K} = K.$$

Mnożąc stronami przez K , mamy

$$(K - 300)(K + 336) = K^2$$

co sprowadza się do równania

$$36 \cdot K = 300 \cdot 336$$

stąd $K = 2800$. Ponadto otrzymujemy

$$r = \frac{336}{K} = 0.12, \quad d = \frac{300}{K} = 0.1071.$$

Odpowiedź. Kwota K wynosi 2800. Natomiast stopy zwrotu i dyskonta wynoszą odpowiednio 12% i 10.71%.

Ćwiczenie 2.12. Bank proponuje swoim klientom roczną lokatę o oprocentowaniu stałym 8%. Wyznaczyć realną stopę zwrotu z tej lokaty, jeśli roczna stopa inflacji π wyniesie a) 5%, b) 7%, c) 10%.

Rozwiązanie.

$$r_{real} = \frac{r - \pi}{1 + \pi},$$

Zatem

$$r_a = \frac{0.08 - 0.05}{1 + 0.05} = 0.0286,$$

$$r_b = \frac{0.08 - 0.07}{1 + 0.07} = 0.0093,$$

$$r_c = \frac{0.08 - 0.1}{1 + 0.1} = -0.0182.$$

Odpowiedź. Realna stopa zwrotu wyniesie odpowiednio 2.86%, 0.93% i -1.82%.

3. Struktura terminowa stóp procentowych

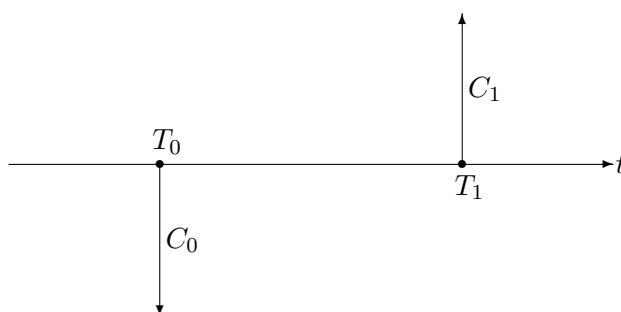
Liczba godzin 2.

Zakres materiału:

Wartość pieniądza w czasie. Struktura terminowa stóp procentowych. Stopy spotowe i terminowe. Kontrakty FRA i opcje.

3.1. Wprowadzenie

Rozważmy inwestycję o dwu przepływach gotówki $C_0 < 0$ w momencie T_0 i $C_1 > 0$ w T_1 , $T_1 = T_0 + t$ (rys. 1.2).



Rysunek 3.1. Przepływy gotówki.

Efektywność takiej inwestycji daje się opisać na kilka sposobów. Na przykład możemy pytać o następujące wielkości:

1. Ile kosztuje w chwili T_0 1 jednostka monetarna (np. 1 zł), płatna w chwili T_1 ?

$$B = \frac{|C_0|}{C_1}$$

B nazywamy czynnikiem dyskontującym. Zauważmy, że $B = 1 - D$, gdzie D stopa dyskonta.

2. Jaka jest (efektywna) stopa zwrotu?

$$R = \left(\frac{C_1}{|C_0|} \right)^{\frac{1}{t}} - 1.$$

3. Jaka jest (efektywna) intensywność oprocentowania?

$$\bar{R} = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{C_1}{|C_0|} \right).$$

Powyższe wielkości są ze sobą powiązane:

$$\begin{aligned} B &= e^{-\bar{R}t} = \frac{1}{(1+R)^t}; \\ \bar{R} &= -\frac{\ln(B)}{t}; \\ R &= e^{\bar{R}} - 1 = B^{-1/t} - 1. \end{aligned}$$

Struktura terminowa to relacja między efektywnością opisaną powyżej inwestycji, a czasem pozostałym do momentu zapadalności. $R(t)$ i $\bar{R}(t)$,

$$R, \bar{R} : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle,$$

opisują strukturę terminową stóp zwrotu (stóp procentowych). Ich wykresy nazywa się „krzywą dochodowości” lub „krzywą zwrotów” (*yield curve*). Natomiast $B(t)$,

$$B : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle.$$

opisuje strukturę terminową czynnika dyskontującego.

Mamy następujące ograniczenia (warunki brzegowe) na funkcję B :

$$B(0) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0.$$

Ponadto $B(t)$ jest ściśle malejąca.

Rzeczywiście, gdyby dla pewnych $t_1 < t_2$, $B(t_1) \leq B(t_2)$, to prościej byłoby otrzymać 1 jednostkę monetarną w momencie t_1 i przechować ją do momentu t_2 .

Rynek dostarcza nam informacje tylko o wartościach B w skończonej liczbie punktów. Dlatego, bez ograniczania ogólności rozważań, w modelowaniu przyjmuje się, że B jest funkcją klasy C^1 (być może poza skończoną liczbą punktów) i ma w punkcie 0 pochodną prawostronną. Pozwala to zdefiniować chwilową stopę (intensywność) spot $\delta(0)$ i chwilowe stopy (intensywności) forward $\delta(t)$, $t > 0$.

$$\delta(t) = -\frac{d \ln B(t)}{dt} = -\frac{B'(t)}{B(t)}, \quad \delta(0) = -B'(0^+).$$

Zauważmy, że skoro B jest ściśle malejąca, to δ jest prawie wszędzie dodatnia. Ponadto

$$B(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(s) ds\right), \quad \bar{R}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \delta(s) ds.$$

3.2. Interpretacja $\bar{R}(t)$ i $\delta(t)$

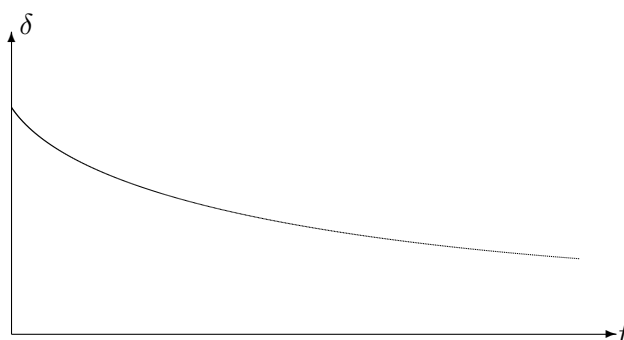
$\bar{R}(t)$ jest średnią z $\delta(s)$ dla $0 \leq s \leq t$. Dlatego też krzywe będące wykresami $\bar{R}(t)$ i $\delta(t)$ mają „podobny kształt”. Spośród wszystkich możliwych kształtów tych krzywych wyróżnia się cztery *typowe* ([13] s. 120, [19] §3.4).

$\delta(t)$ – funkcja stała. Płaska struktura terminowa. Rynek w równowadze. Rys. 3.2.

$\delta(t)$ – funkcja malejąca. Rynek oczekuje spadku stóp procentowych (oczekiwany jest spadek inflacji lub spadek zapotrzebowania na kapitał związany ze spadkiem aktywności gospodarczej).



Rysunek 3.2. Płaska struktura terminowa.

Rysunek 3.3. $\delta(t)$ malejąca.

Rys. 3.3.

$\delta(t)$ – funkcja rosnąca. Rynek oczekuje wzrostu stóp procentowych (oczekiwany jest wzrost inflacji lub wzrost zapotrzebowania na kapitał wynikający ze wzrostu aktywności gospodarczej). Rys. 3.4.

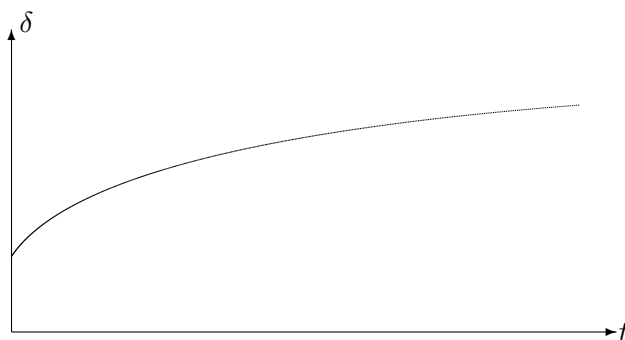
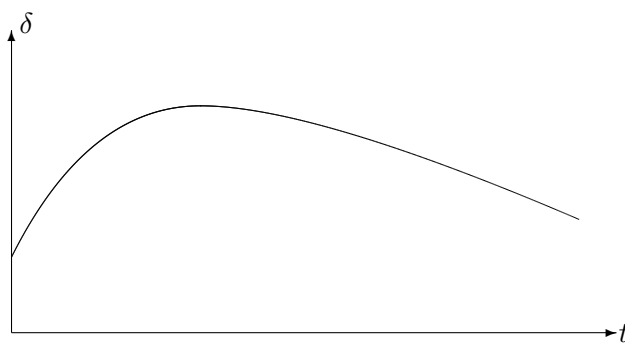
$\delta(t)$ – posiada maksimum tzw. garb (*hump*). Rynek oczekuje spadku stóp procentowych w dalszej przyszłości, ale równocześnie jest duży popyt na papiery krótkoterminowe. Rys. 3.5.

Powyższe rysunki są ilustracją tzw. faktów stylizowanych, tzn. pewnych uproszczeń sytuacji, z którymi spotykamy się w życiu. Strukturę terminową modelujemy za pomocą rodziny funkcji zależnych od parametrów. Dobry model powinien opisywać fakty stylizowane.

3.3. Przykłady struktur terminowych

Dla większej czytelności zapisu wprowadzimy nową funkcję

$$Y(t) = -\ln B(t) = \int_0^t \delta(s) ds.$$

Rysunek 3.4. $\delta(t)$ rosnąca.

Rysunek 3.5. Garb.

Niektórzy autorzy nazywają ją funkcją dochodowości (yield function).

3.3.1. Struktura terminowa płaska

$\delta(t) = \delta$ – funkcja stała. Wówczas:

$$Y(t) = t \cdot \delta, \quad \bar{R}(t) = \delta, \quad B(t) = e^{-t\delta}, \quad R(t) = e^\delta - 1.$$

Zauważmy, że wartości $B(t)$, dla $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, są ważonymi średnimi geometrycznymi wartości początkowej i końcowej.

Lemat 3.1. *Jeśli $0 < t_1 < t < t_2$ to*

$$B(t) = B(t_1)^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} B(t_2)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} & B(t_1)^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} B(t_2)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} = \\ & = \exp\left(-t_1\delta \frac{t_2-t}{t_2-t_1} - t_2\delta \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) = \exp(-t\delta) = B(t). \end{aligned}$$

3.3.2. Struktura terminowa kawałkami płaska

$\delta(t)$ – funkcja kawałkami stała.

$$\delta(t) = \delta_i \text{ gdy } t \in [t_{i-1}, t_i],$$

gdzie $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = +\infty$. Wówczas dla $t \in [t_{i-1}, t_i]$ mamy:

$$Y(t) = Y(t_{i-1}) + (t - t_{i-1})\delta_i, \quad B(t) = B(t_1) \exp(-(t - t_{i-1})\delta_i), \quad \bar{R}(t) = \delta_i + \frac{t_{i-1}}{t}(\bar{R}(t_{i-1}) - \delta_i), \quad \bar{R}(0) = \delta_1.$$

Lemat 3.2. Dla $i < n$ i $t \in [t_{i-1}, t_i]$ zachodzi:

$$\delta_i = \frac{\ln(B(t_i)) - \ln(B(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}},$$

$$B(t) = B(t_{i-1})^{\frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}}} B(t_i)^{\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}}.$$

Strukturę kawałkami płaską stosujemy gdy znamy tylko skończoną liczbę wartości $B(t)$, a w pozostałych punktach interpolujemy B za pomocą średniej geometrycznej ważonej.

3.3.3. Wzór Stoodleya

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}}, \quad p, r, s > 0.$$

Wówczas

$$Y(t) = \int_0^t \delta(s) ds = (p + s)t - \ln\left(\frac{1 + re^{st}}{1 + r}\right).$$

$$\bar{R}(t) = p + s - \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1 + re^{st}}{1 + r}\right).$$

$$B(t) = \frac{1}{1 + r} e^{-(p+s)t} + \frac{r}{1 + r} e^{-pt}.$$

Jak widać z powyższego, $B(t)$ jest średnią ważoną czynników dyskontujących wyznaczonych przez płaskie struktury terminowe. Wzór Stoodleya stosuje się, gdy inwestor oczekuje, że w przyszłości będzie obowiązywać jedna z dwu płaskich struktur terminowych, ale nie wie która.

Własności funkcji δ .

Funkcja δ jest ściśle malejąca.

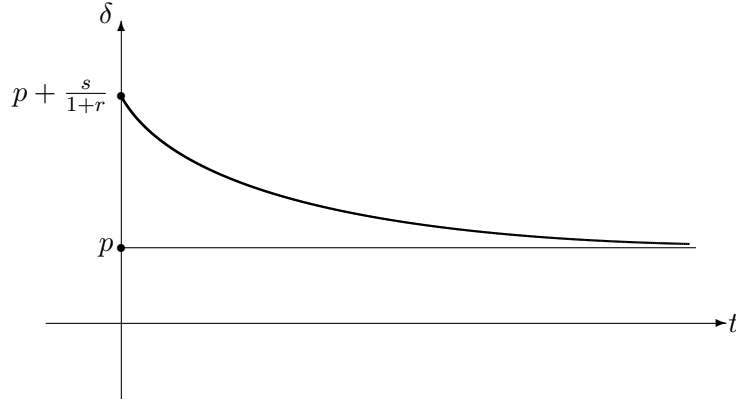
$$\delta(0) = p + \frac{s}{1 + r}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = p.$$

3.3.4. Wzór Nelsona-Siegela

Wzór Nelsona-Siegela ([25, §15.4]) jest często używany do przybliżonego opisu struktury terminowej.

$$\delta(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \beta_2 \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

$$\tau > 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_0 + \beta_1 \geq 0, \quad (\beta_2 < 0 \wedge \beta_2 < \beta_1) \Rightarrow \beta_0 + \beta_2 \exp\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - 1\right) \geq 0.$$



Rysunek 3.6. Wykres funkcji Stoodleya.

Wówczas

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= \int_0^t \delta(s) ds = (\beta_0 s - \tau \beta_1 \exp(-\frac{s}{\tau}) - \tau \beta_2 (\frac{s}{\tau} + 1) \exp(-\frac{s}{\tau}))|_0^t = \\
 &= \beta_0 t - \tau \beta_1 \exp(-\frac{t}{\tau}) - \tau \beta_2 (\frac{t}{\tau} + 1) \exp(-\frac{t}{\tau}) + \tau \beta_1 + \tau \beta_2 = \\
 &= \beta_0 t - \tau(\beta_1 + \beta_2)(\exp(-\frac{t}{\tau}) - 1) - \beta_2 t \exp(-\frac{t}{\tau}), \\
 \bar{R}(t) &= \frac{Y(t)}{t} = \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \frac{\exp(-\frac{t}{\tau}) - 1}{\frac{t}{\tau}} - \beta_2 \exp(-\frac{t}{\tau}).
 \end{aligned}$$

Zaletą wzoru Nelsona-Siegela jest liniowa zależność $\bar{R}$ od parametrów β . Co przy ustalonym parametrze skali τ pozwala je wyznaczyć (na podstawie danych empirycznych) za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Zauważmy, że:

$$\bar{R}(0) = \delta(0) = \beta_0 + \beta_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{R}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \beta_0.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
 \delta'(t) &= -\beta_1 \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) + \beta_2 (1 - \frac{t}{\tau}) \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) = \\
 &= \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) (-\beta_1 + \beta_2 - \beta_2 \frac{t}{\tau}).
 \end{aligned}$$

Czyli pochodna δ' zeruje się i zmienia znak, gdy

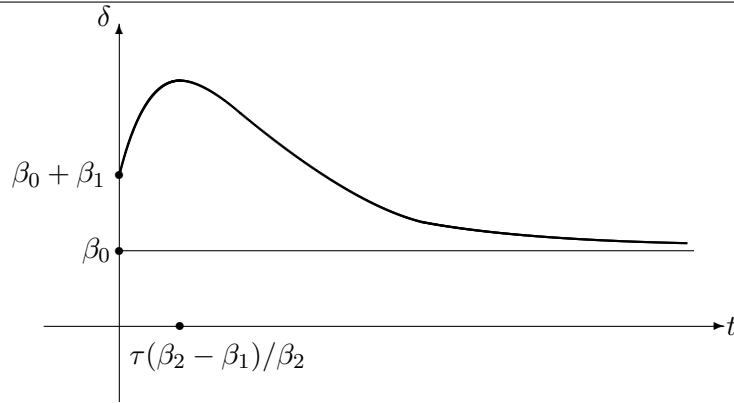
$$\frac{t}{\tau} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} = 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Zatem intensywność $\delta(t)$ posiada ekstremum, gdy

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} < 1.$$

Dla parametru β_2 dodatniego jest to maksimum, a dla ujemnego minimum. Maksymalna i odpowiednio minimalna intensywność wynoszą

$$\delta(\tau(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2})) = \beta_0 + \beta_2 \exp(\frac{\beta_1}{\beta_2} - 1).$$

Rysunek 3.7. Wykres funkcji Nelsona-Siegela dla $\beta_1 = \beta_0$ i $\beta_2 = 5\beta_0$.

3.3.5. Wzór Vasička

W tym przypadku wzór na funkcję dochodowości $Y(t)$ jest końcowym wnioskiem ze stochastycznego modelu struktury terminowej, znanego jako model Vasička ([20, §5.2], [25, §7.4.1]). Model Vasička zależy od czterech dodatnich parametrów a , b , σ i r . Ponadto musi być spełniony warunek $2ab \geq \sigma^2$. Najprostszy opis otrzymamy wprowadzając dwie funkcje pomocnicze $A_1(t)$ i $A_2(t)$ takie, że

$$Y(t) = A_1(t) + A_2(t)r \quad \text{i} \quad \begin{cases} A_2' = 1 - aA_2, & A_2(0) = 0, \\ A_1' = bA_2 - \frac{1}{2}\sigma^2 A_2^2, & A_1(0) = 0. \end{cases}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$A_2(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}),$$

$$A_1(t) = \frac{\sigma^2 - 2ab}{2a^2}(A_2(t) - t) + \frac{\sigma^2}{4a}A_2^2(t).$$

Funkcja A_2 jest ściśle rosnąca, $A_2(0) = 0$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} A_2(t) = \frac{1}{a}$.

Chwilową intensywność otrzymujemy, różniczkując $Y(t)$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = Y'(t) &= A_1'(t) + A_2'(t)r = \\ &= (1 - aA_2)r + (bA_2 - \frac{1}{2}\sigma^2 A_2^2) = r + (b - ar)A_2 - \frac{1}{2}\sigma^2 A_2^2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\delta(0) = r$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \frac{2ab - \sigma^2}{2a^2}$. Co jest uzasadnieniem warunku $2ab \geq \sigma^2$ (funkcja $\delta(t)$ powinna być nieujemna dla wszystkich dodatnich t).

Okazuje się, że dobierając odpowiednio parametry, możemy otrzymać funkcję δ monotoniczną lub z jednym maksimum.

Lemat 3.3. *Jeżeli $b - ar \leq 0$, to funkcja δ jest ściśle malejąca.*

Jeżeli $0 < b - ar < \frac{\sigma^2}{a}$, to funkcja δ początkowo rośnie, a potem maleje.

Jeżeli $\frac{\sigma^2}{a} \leq b - ar$, to funkcja δ jest ściśle rosnąca.

Dowód.

Funkcję δ możemy zapisać w postaci funkcji złożonej

$$\delta(t) = P(A_2(t)), \quad P(x) = r + (b - ar)x - \frac{\sigma^2}{2}x^2.$$

Trójmian kwadratowy $P(x)$ przyjmuje maksimum w punkcie $x_m = \frac{b-ar}{\sigma^2}$. Badamy monotoniczność $P(x)$ w przedziale $\langle 0, \frac{1}{a} \rangle$, czyli domknięciu obrazu funkcji $A_2(t)$.

Gdy x_m należy do przedziału otwartego $(0, \frac{1}{a})$, to trójmian $P(x)$ ma „garb”, najpierw rośnie, a potem maleje. Gdy x_m leży na lewo od tego przedziału ($x_m \leq 0$), to trójmian P jest ściśle malejący, a gdy na prawo ($x_m \geq \frac{1}{a}$), to ściśle rosnący. Ponieważ funkcja $A_2(t)$ jest ściśle rosnąca, to samo dotyczy funkcji δ .

Interpretacja parametrów modelu:

r – chwilowa stopa procentowa,

σ – wielkość zaburzeń losowych,

$\frac{b}{a}$ – położenie równowagi, do którego „dąży” model (nie osiągnięte ze względu na zaburzenia),

a – szybkość reakcji modelu na zaburzenia.

3.3.6. Wzór CIR

Tym razem wzór na funkcję dochodowości $Y(t)$ jest końcowym wnioskiem ze stochastycznego modelu struktury terminowej, znanego jako model Coxa, Ingersolla, Rosa ([20, §5.2], [25, §7.4.2]). Model ten zależy od czterech dodatnich parametrów a , b , σ i r . Podobnie jak poprzednio, najprościej opisać go, wprowadzając dwie funkcje pomocnicze $A_1(t)$ i $A_2(t)$ takie, że

$$Y(t) = A_1(t) + A_2(t)r \quad \text{ i } \quad \begin{cases} A_2' = 1 - aA_2 - \frac{1}{2}\sigma^2 A_2^2, & A_2(0) = 0, \\ A_1' = bA_2, & A_1(0) = 0. \end{cases}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$A_2(t) = \frac{\sinh(\gamma t)}{\gamma \cosh(\gamma t) + \frac{a}{2} \sinh(\gamma t)}, \quad 2\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

$$A_1(t) = -\frac{2b}{\sigma^2} \ln\left(\frac{\gamma \exp(\frac{at}{2})}{\gamma \cosh(\gamma t) + \frac{a}{2} \sinh(\gamma t)}\right).$$

Funkcja A_2 jest ściśle rosnąca, $A_2(0) = 0$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} A_2(t) = \alpha = \frac{2}{a+2\gamma}$.

Chwilową intensywność otrzymujemy, różniczkując $Y(t)$.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= Y'(t) = A_1'(t) + A_2'(t)r = \\ &= bA_2 + (1 - aA_2 - \frac{1}{2}\sigma^2 A_2^2)r = r + (b - ar)A_2 - \frac{1}{2}\sigma^2 r A_2^2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\delta(0) = r$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = b\alpha$. Okazuje się, że tak jak w modelu Vasička, dobierając odpowiednio parametry, możemy otrzymać funkcję δ monotoniczną lub z jednym maksimum. Stosując podobne rozumowanie jak w poprzednim podrozdziale, pokazujemy, że:

Lemat 3.4. *Jeżeli $b - ar \leq 0$, to funkcja δ jest ściśle malejąca.*

Jeżeli $0 < b - ar < \sigma^2 ar$, to funkcja δ początkowo rośnie, a potem maleje.

Jeżeli $\sigma^2 ar \leq b - ar$, to funkcja δ jest ściśle rosnąca.

Interpretacja parametrów jest identyczna jak w modelu Vasička.

3.4. Instrumenty pochodne

3.4.1. Kontrakty FRA

FRA (ang. Forward Rate Agreement) to umowa pomiędzy dwoma kontrahentami, którzy ustalają wysokość stopy procentowej mającej obowiązywać w przyszłości dla określonej kwoty wyrażonej w walucie transakcji dla z góry ustalonego okresu.

W kontrakcie FRA są dwie strony transakcji:

1. Długa pozycja (ang. long position — a FRA buyer) otrzymuje przepływ determinowany przez stawkę referencyjną, w zamian za stawkę stałą kontraktu (co niekiedy, w celu uniknięcia popełnienia błędu, bywa zapisywane jako: RECEIVE floating and PAY fixed),
2. Krótka pozycja (ang. short position — a FRA seller) otrzymuje przepływ stały (którego wysokość w rzeczywistości jest ustalona w dniu zawarcia transakcji) w zamian za stawkę referencyjną (RECEIVE fixed and PAY floating).

W kontrakcie FRA występuje:

1. Data zawarcia transakcji (ang. transaction date) T_t ,
2. Data ustalenia stawki referencyjnej (ang. fixing date) T_f ,
3. Data rozpoczęcia okresu odsetkowego obowiązywania stawki referencyjnej (ang. start date) T_s ; przeważnie jest to data spot (tzn. drugi kolejny dzień roboczy) od dnia fixingu stawki,
4. Data zakończenia okresu odsetkowego obowiązywania stawki referencyjnej (ang. end date) T_e .

$$T_t < T_f < T_s < T_e$$

Stopy (stawki) r_{ref} i r_{FRA} podawane są w skali rocznej.

Rozliczenie kontraktu następuje w drugim kolejnym dniu roboczym po ustaleniu stawki $T_m = T_f + spot$, który przeważnie pokrywa się z datą rozpoczęcia okresu odsetkowego obowiązywania stawki referencyjnej. Podczas rozliczania kontraktu nie dochodzi do rzeczywistej wymiany odsetek a jedynie do transferu zdyskontowanej różnicy stóp $|r_{ref} - r_{FRA}| \cdot (T_e - T_s)$ w odpowiednim kierunku. A zatem, gdy $T_m = T_s$, to wypłaty (tzw. kwoty kompensacyjne) wynoszą

$$CF_{buyer} = K \frac{(r_{ref} - r_{FRA})(T_e - T_s)}{1 + r_{ref}(T_e - T_s)} = -CF_{seller},$$

gdzie K kwota kontraktu (umowna kwota kapitału, na który opiewa kontrakt), a czas jest liczony w latach (por. [4, §8.1.2.3]).

Stawki r_{FRA} są ściśle powiązane ze strukturą terminową stóp procentowych w dniu zawarcia transakcji.

Lemat 3.5.

$$r_{FRA} \cdot (T_e - T_s) = \frac{B(T_s - T_t)}{B(T_e - T_t)} - 1.$$

Dowód.

Rozważmy dwie inwestycje:

A. Sprzedaż kontraktu FRA na okres $\langle T_s, T_e \rangle$ na kwotę 1 i kupno 1 obligacji płaćcej 1 w chwili T_s .

B. Kupno obligacji płaćcych 1 w chwili T_e za kwotę $B(T_s - T_t)$ i ich sprzedaż w chwili T_f .

Rozliczenie.

W chwili zawarcia transakcji mamy:

$$CF_{A,T_t} = -B(T_s - T_t) = CF_{B,T_t}.$$

Rozliczenie obu transakcji nastąpi w chwili $T_s = T_f + spot$.

$$CF_{A,T_s} = 1 + \frac{(r_{FRA} - r_{ref})(T_e - T_s)}{1 + r_{ref}(T_e - T_s)},$$

$$CF_{B,T_s} = \frac{B(T_s - T_t)}{B(T_e - T_t)(1 + r_{ref}(T_e - T_s))}.$$

Po przyrównaniu obydwu wypłat otrzymujemy

$$(1 + r_{ref}(T_e - T_s)) + (r_{FRA} - r_{ref})(T_e - T_s) = \frac{B(T_s - T_t)}{B(T_e - T_t)}.$$

Co po uproszczeniu daje tezę lematu.

3.4.2. Kontrakty IRS

Swap stopy procentowej, IRS (ang. interest rate swap), to kontrakt wymiany płatności odsetkowych, jeden z podstawowych instrumentów pochodnych, będący przedmiotem obrotu na rynku międzybankowym. IRS jest umową pomiędzy dwiema stronami, na podstawie której strony wypłacają sobie wzajemnie (w określonych odstępach czasu w trakcie trwania kontraktu) odsetki od umownego nominalu kontraktu, naliczane według odmiennie zdefiniowanych stóp procentowych. Transakcja IRS może być traktowana jako seria kontraktów FRA, albo jako wymiana odsetek od dwóch obligacji kuponowych.

Obecnie w coraz większym zakresie transakcje IRS zawierane są przez korporacje. Dokonują tego m.in. w celu zapewnienia sobie stałego kosztu finansowania (receive floating rate and pay fixed), albo pozyskania tańszego finansowania w walucie obcej (receive foreign fixed rate vs. pay domestic fixed rate).

W rodzinie IRS można wyróżnić:

1. Prosty (waniliowy) swap stopy procentowej (ang. plain vanilla IRS) – strony wymieniają się przepływami uzależnionymi od stopy stałej i zmiennej (fixed rate vs. floating rate).
2. Basis swap - obie strony płacą odsetki wg różnej stopy zmiennej, np. WIBOR 3-miesięczny w zamian za WIBOR 6-miesięczny (floating rate vs. floating rate).
3. Walutowy swap stopy procentowej (ang. currency IRS, CIRS) – strony wymieniają się płatnościami denominowanymi w różnych walutach. Nie należy go mylić ze swapem walutowym.

W waniliowej transakcji IRS wyróżnia się dwie pozycje, przy czym to kierunek płatności stawki zmiennej określa jaką pozycję zajmuje kontrahent w transakcji IRS:

1. Kontrahent A zajmuje długą pozycję w stopie zmiennej – referencyjnej, gdy otrzymuje przepływ wyznaczony przez stawkę zmienną w zamian za ustaloną stawkę stałą (RECEIVE floating and PAY fixed).
2. Kontrahent B zajmuje krótką pozycję w stopie zmiennej (ang. short position), gdy płaci odsetki określone przez stawkę zmienną, a w zamian otrzymuje płatności determinowane przez stawkę stałą (RECEIVE fixed and PAY floating).

W charakterze stopy zmiennej występuje zazwyczaj stopa "rynkowa" (LIBOR, EURIBOR, WIBOR lub inna, zależnie od rynku). Wysokość stopy stałej dla standardowych kontraktów jest kwotowana przez banki i zwana stopą swapową (ang. swap rate). Jest ona dobrana w taki sposób, by początkowa wartość kontraktu była zerowa.

Należy zwrócić uwagę, że wysokość stopy zmiennej płaconej w danym okresie odsetkowym standardowo ustalana jest z góry na początku tego okresu (tak jak dla lokat bankowych). Niekiedy spotykane są kontrakty, w których stopa ta ustalana jest z dołu (tzw. ang. LIA swap lub Libor in arrears swap). Należą one jednak do grupy skomplikowanych w wycenie, tzw. egzotycznych instrumentów pochodnych.

3.4.3. Opcje na stopę procentową

Opcja na górny pułap stopy procentowej (interest rate cap) jest instrumentem służącym do ochrony różnego rodzaju zobowiązań głównie długoterminowych przed wzrostem stopy procentowej. Przedmiotem zabezpieczenia mogą być na przykład długoterminowe kredyty lub różnego rodzaju instrumenty finansowe, których oprocentowanie jest zmienne i ustalane na bazie danej stawki referencyjnej. Opcja cap jest wielookresowym odpowiednikiem opcji call. W wyniku zawarcia transakcji cap nabywca opcji otrzymuje gwarancję od sprzedawcy, którym jest najczęściej bank, że wzrost stopy procentowej ponad poziom uzgodniony w umowie zostanie zrekompensowany przez sprzedającego.

Opcja na dolny pułap stopy procentowej (interest rate floor) jest instrumentem służącym do ochrony różnego rodzaju należności długoterminowych (choć nie tylko) przed spadkiem stopy procentowej. Przedmiotem tego zabezpieczenia mogą być długoterminowe lokaty lub różnego rodzaju instrumenty finansowe, których oprocentowanie jest zmienne i ustalane na bazie danej stawki referencyjnej. Opcja floor jest wielookresowym odpowiednikiem opcji put. W wyniku zawarcia transakcji typu floor nabywca opcji otrzymuje od sprzedawcy, którym jest najczęściej bank, gwarancję, że spadek stopy procentowej poniżej uzgodnionego w umowie pułapu zostanie zrekompensowany przez sprzedającego. Kompensata polega na przekazaniu przez wystawcę floor kwoty stanowiącej różnicę pomiędzy referencyjną stopą procentową, a stopą procentową ustaloną w transakcji opcyjnej zwaną pułapem. Wystawca płaci ją na początku każdego podokresu wówczas, gdy różnica pomiędzy powyższymi kwotami jest ujemna. W każdym innym przypadku nie dochodzi do żadnej płatności.

3.5. Ćwiczenia

Ćwiczenie 3.1. Rozważamy strukturę terminową stóp procentowych opisaną przez chwilową intensywność

$$\delta(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Inwestor zainwestował 1 JM na okres n lat. Obliczyć, ile wynosi wypłata i efektywna stopa zwrotu R .

Rozwiązanie. Niech K oznacza wypłatę inwestora po n latach. Wiemy, że $1 = K \cdot B(n)$. Zatem

$$K = B(n)^{-1} = \exp\left(\int_0^n \delta(t) dt\right) = \exp\left(\int_0^n \frac{1}{1+t} dt\right) = \exp\left(\ln(1+t)\Big|_0^n\right) = 1+n.$$

Ponadto

$$R = \sqrt[n]{K} - 1 = \sqrt[n]{n+1} - 1.$$

Odpowiedź. Wypłata jest równa $n+1$, a efektywna stopa zwrotu $\sqrt[n]{n+1} - 1$.

Ćwiczenie 3.2. Udowodnić lemat 3.4.

Ćwiczenie 3.3. Wyznaczyć stopę r_{FRA} dla półrocznego okresu odsetkowego, który rozpocznie się za dwa lata

- dla płaskiej struktury terminowej.
- dla struktury terminowej opisanej wzorem Stoodleya.
- dla struktury terminowej opisanej wzorem Nelsona-Siegela.

d. dla struktury terminowej opisanej wzorem Vasička.

Zakładamy, że $T_m = T_s$.

Ćwiczenie 3.4. Struktura terminowa jest wyznaczona przez chwilową stopę $\delta(t)$. Niech $r_{FRA}(h, t)$ oznacza stopę FRA dla okresu odsetkowego o długości h , który rozpocznie się za t lat. Zakładamy, że $T_m = T_s$, wyznaczyć

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} r_{FRA}(h, t).$$

4. Podstawowe instrumenty dłużne na przykładzie Polski

Liczba godzin 2.

Zakres materiału:

Depozyty i kredyty bankowe, kredyty banku centralnego, depozyty i pożyczki międzybankowe, referencyjne stopy rynku międzybankowego (LIBOR, WIBOR). Bony skarbowe, obligacje stałokuponowe i zmiennokuponowe emitowane przez państwo. Cena czysta i brudna obligacji kuponowej. Obligacje komercyjne. Ryzyko kredytowe. Różne stopy procentowe (zależne od emitenta).

4.1. Ogólna charakterystyka instrumentów dłużnych

W tym rozdziale przedstawione zostaną pokrótce podstawowe informacje o klasycznych kontraktach finansowych (kredyty, obligacje, lokaty itp.), czyli obiektach, które zamierzamy modelować. Uwagę skupimy na cechach, istotnych z punktu widzenia modelowania, natomiast pominiemy aspekty prawne. Więcej szczegółów czytelnik może znaleźć np. w [9] §2.1.

1. Czas trwania umowy – „czas życia”:

- a) umowa na **czas nieokreślony**: np. lokata a vista, rachunek debetowy;
- b) umowa na **czas określony**: np. lokata terminowa, obligacje, większość kredytów.

Czas trwania umowy jest wyznaczony przez:

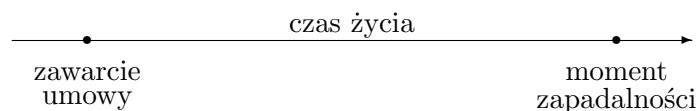
- moment zawarcia umowy (emisji obligacji, ...),
- moment zapadalności (rozliczenia).

Patrz rys. 4.1.

2. Sposoby wypłaty i spłaty kredytu, zakupu i wykupu obligacji.

2.1. Określenie kwoty zobowiązania.

- a) kwota nominalna (wartość nominalna, nominal) – cena, która widnieje w dokumentach;
- b) kwota wypłaty (cena zakupu, cena emisyjna) – suma przepływów gotówki w „jedną stronę”;
- c) kwota spłaty (cena wykupu) – suma przepływów gotówki w „drugą stronę”



Rysunek 4.1. Czas życia kontraktu finansowego.

(z pominięciem oprocentowania, prowizji itp).

Spośród powyższych trzech wielkości zazwyczaj dwie są sobie równe. Jeżeli wypłacana suma jest wyższa niż nominalna, to różnicę nazywa się **agio**, a gdy jest niższa mówimy o **disagio**. Taką terminologię stosuje się również przy emisji akcji. W przypadku obligacji na ogół cena wykupu jest równa cenie nominalnej, a różnica między ceną wykupu a ceną emisyjną to **dyskonto** (gdy cena emisyjna jest niższa) lub **premia** (gdy jest na odwrót). Podobnie w odniesieniu do weksli (jest to szczególny rodzaj kredytu) mówimy o dyskoncie. W przypadku kredytów należy uwzględnić dodatkowo koszty manipulacyjne i prowizje płatne przy zawarciu umowy oraz możliwość częściowego umorzenia kredytu.

2.2. Typy wypłat:

- a) wypłata jednorazowa;
- b) wypłata w transzach.

2.3. Sposoby spłaty:

- a) spłata jednorazowa, np. typowe obligacje;
- b) spłata ratalna:
 - b1) raty kapitałowe o stałej wysokości,
 - b2) raty kapitałowe o zmiennej wysokości,
 - np. spłata annuitetowa, gdzie suma raty kapitałowej i odsetek jest stała ale proporcje zmieniają się w czasie.

3. Oprocentowanie i prowizja, czyli opłaty za korzystanie z cudzych pieniędzy.

3.1. **Prowizje i opłaty manipulacyjne** są zwykle pobierane w momencie zawarcia umowy. W przypadku kredytów 0% określają one cały koszt kredytu.

3.2. Stopa procentowa:

W umowie lub prospekcie emisyjnym precyzuje się sposób wyznaczania stóp procentowych dla poszczególnych okresów odsetkowych, na które podzielony jest czas życia kontraktu finansowego. Z punktu widzenia modelowania istotne jest kiedy znana jest ich wysokość. Rozróżniamy dwa przypadki:

- a) stopy sztywne – ustalone w momencie zawarcia umowy lub emisji, np. obligacje o stałym oprocentowaniu (DSmmrr, SPmmrr, PSmmrr) i obligacje zerokuponowe (OKmmrr)¹;
- b) stopy zmienne – ustalenie wysokości odsetek następuje w trakcie trwania umowy. Stosowane są dwa sposoby ustalania *nowej* stopy procentowej:
 - na początku okresu np. obligacje serii TZmmrr i WZmmrr

¹ Sześciocyfrowy kod obligacji skarbu państwa *rozszyfrowuje* się w następujący sposób: mmrr – miesiąc i rok wykupu; DS, TZ, OK, ... – nazwa serii obligacji; S oznacza oprocentowanie stałe, a Z zmienne.

i w trakcie trwania okresu (np. z uwzględnieniem inflacji).

3.3. Terminy naliczania i spłacania odsetek – zwykle się pokrywają, ale nie jest to regułą.

3.4. Wielkość odniesienia jest kwotą, w oparciu o którą obliczane są odsetki. Najczęściej przyjmuje się, że jest to pozostała do spłacenia część długu. Jeżeli spłaty następują w trakcie okresu odsetkowego, może to być albo średnie saldo zadłużenia albo stan zadłużenia na początku okresu odsetkowego lub (bardzo rzadko!) stan zadłużenia na koniec okresu odsetkowego. W przypadku obligacji wielkość odniesienia to zwykle wartość nominalna. Warto zauważyć, że dla niektórych serii obligacji (np. IZmmrr) podlega ona rewaloryzacji. Co powoduje, że wielkość wypłacanych odsetek nie jest znana w momencie emisji obligacji.

Przykład

Rozważmy cztery kredyty różniące się tylko sposobem spłaty kapitału i odsetek.

Czas trwania – 4 lata.

Okres odsetkowy – 1 rok.

Stopa procentowa stała 10%.

Kwota kredytu 1000 zł. Wypłata jednorazowa.

Przeanalizujemy przepływy gotówki przy różnych sposobach spłaty kapitału i odsetek. Dla ustalenia znaków przyjmiemy punkt widzenia kredytodawcy.

1. Jednorazowa spłata kapitału i odsetek.

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0, \quad CF_4 = 1000 \cdot (1 + 0,1)^4 = 1464,1.$$

2. Jednorazowa spłata kapitału ale odsetki płatne po każdym okresie.

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0,1 \cdot 1000 = 100, \\ CF_4 = 1000 \cdot (1 + 0,1) = 1100.$$

3. Równe raty kapitałowe i odsetki płatne po każdym okresie.

$$CF_0 = -1000, \\ CF_1 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 1000) = 350, \\ CF_2 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 750) = 325, \\ CF_3 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 500) = 300, \\ CF_4 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 250) = 275.$$

4. Równe spłaty (rata kapitałowa + odsetki = const).

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 315,47.$$

Rzeczywiście, niech S_i oznacza kwotę zadłużenia w i -tym roku, $S_1 = 1000$, $S_5 = 0$. Mamy

$$CF = (S_i - S_{i+1}) + 0,1 \cdot S_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4.$$

Zatem

$$S_4 = \frac{CF}{1,1},$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{CF + S_4}{1,1} = CF(1,1^{-1} + 1,1^{-2}), \\
S_2 &= \frac{CF + S_3}{1,1} = CF(1,1^{-1} + 1,1^{-2} + 1,1^{-3}), \\
S_1 &= \frac{CF + S_2}{1,1} = CF(1,1^{-1} + 1,1^{-2} + 1,1^{-3} + 1,1^{-4}) = \\
&= CF \cdot \frac{1,1^4 - 1}{0,1 \cdot 1,1^4} = \frac{CF}{0,31547}.
\end{aligned}$$

4.2. Referencyjne stopy rynku międzybankowego

Ze względu na cenotwórczą rolę rynku lokat międzybankowych zaistniała potrzeba określenia stóp referencyjnych, które wiarygodnie odzwierciedlałyby aktualne stopy rynkowe. Rolę tę pełnią w Polsce stopy referencyjne WIBOR i WIBID.

4.2.1. WIBOR – WIBID

WIBOR (ang. Warsaw Interbank Offered Rate), to stopa oprocentowania pożyczek na polskim rynku międzybankowym, istniejąca od 1991 roku. Od roku 1993 WIBOR ustalany jest w każdy dzień roboczy o godzinie 11.00, na fixingu organizowanym przez ACI - Stowarzyszenie Dealerów (dawniej Forex Polska), na podstawie ofert złożonych przez 13 banków, po odrzuceniu dwóch najwyższych i dwóch najniższych wielkości.

WIBID (ang. Warsaw Interbank Bid Rate), to roczna stopa procentowa, jaką płać banki za środki przyjęte w depozyt od innych banków. Stopa ta, podobnie jak WIBOR, ustalana jest codziennie o godz. 11:00.

W ciągu 15 minut od publikacji indeksów ustalonych podczas fixingu, uczestniczące w nim banki zobowiązane są do zawierania między sobą transakcji według stawek nie gorszych od zgłoszonych tego dnia.

Obie stopy funkcjonują w odniesieniu do transakcji jednodniowych (ON i TN) oraz tygodniowych (SW), a także dłuższych.

ON (ang. overnight) - lokata otwierana w dniu zawarcia transakcji (wysokość rocznej stopy procentowej, jaką banki zapłacą za środki przyjęte na jeden dzień).

TN (ang. tomorrow/next) - lokata otwierana w pierwszym dniu roboczym po zawarciu transakcji (wysokość rocznej stopy procentowej, jaką banki zapłacą za środki pożyczzone od jutra na jeden dzień).

SW (ang. spot week) - środki pożyczzone na jeden tydzień od momentu dostawy, która następuje po dwóch dniach roboczych.

Okresy dłuższe to:

2 tygodnie (2SW),

1 miesiąc (1M),

3 miesiące (3M),

6 miesięcy (6M),

9 miesięcy (9M),

1 rok (1Y).

Stopa WIBOR jest wyższa od stopy WIBID, gdyż w przeciwnym wypadku banki traciłyby na pożyczaniu sobie pieniędzy.

Aktualne notowania stóp procentowych WIBOR i WIBID znajdują się pod adresem:
<http://www.money.pl/pieniadze/depozyty/zlotowe/>

4.2.2. LIBOR

LIBOR (ang. London Interbank Offered Rate), to stopa procentowa kredytów oferowanych na rynku międzybankowym w Londynie przez cztery główne banki: Bankers Trust, Bank of Tokyo, Barclays i National Westminster. Określana jest o godzinie 11:00 GMT. Stanowi bazową stopę procentową dla ustalania oprocentowania kredytów i depozytów na rynku międzybankowym oraz kredytów typu "roll-over".

Wysokość stopy procentowej LIBOR zmienia się w sposób ciągły w zależności od warunków ekonomicznych. Jednomiesięczną stopą LIBOR jest oprocentowanie depozytów jednomiesięcznych w danym momencie oferowane przez bank innemu bankowi, trzymiesięczna stopa LIBOR, to oprocentowanie depozytów trzymiesięcznych etc. Jeśli oprocentowanie pożyczki ustanowiono na poziomie jednomiesięcznej stopy LIBOR, to stopę procentową tej pożyczki uaktualnia się w kolejnych okresach miesięcznych według stopy LIBOR, a odsetki płacone są z dołu. Stopy LIBOR dla innych okresów definiuje się analogicznie.

Przykład analizy pożyczki sześciomiesięcznej oprocentowanej na poziomie sześciomiesięcznej stopy LIBOR + 0,5% w skali rocznej.

Czas na jaki zaciągnięto pożyczkę, dzielony jest na okresy sześciomiesięczne. Dla każdego okresu oprocentowanie oblicza się dodając 0,5% do poziomu sześciomiesięcznej stopy LIBOR (w skali rocznej) dla początku okresu. Oprocentowanie płacone jest na końcu okresu.

4.2.3. EURIBOR

EURIBOR (ang. Euro Interbank Offered Rate), to stopa procentowa kredytów w strefie euro oferowanych przez jeden bank innemu bankowi. EURIBOR jest średnim notowaniem z 57 największych banków strefy euro - ustalonym przez Fédération Bancaire de L'Union Européenne (FBE) w Brukseli.

4.3. Obligacje

Obligacja, to papier wartościowy poświadczający wierzytelność na określoną sumę. Emisja obligacji następuje seriami, przy czym w jednej serii wszystkie obligacje mają tę samą wartość nominalną, ten sam termin wykupu i ten sam sposób naliczania odsetek (tzw. kupony). Z punktu widzenia modelowania ważne jest, czy obligacja ma stałe czy zmienne oprocentowanie oraz kto jest jej emitentem.

Obligacje o stałym oprocentowaniu dzielą się na:

- kuponowe;
na giełdzie warszawskiej są w obrocie: dwudziestoletnie – WSmmrr, dziesięcioletnie – DSmmrr, pięcioletnie – SPmmrr i PSmmrr².
- zerokuponowe (bezodsetkowe);
na giełdzie warszawskiej są w obrocie dwuletnie OKmmrr.

Obligacje o zmiennym oprocentowaniu dzielą się na:

- *floating, adjustable* – wysokość oprocentowania jest ustalana na początku okresu oprocentowania;
na giełdzie warszawskiej są w obrocie: WZmmrr (wieloletnie), DZmmrr (dziesięcioletnie) i TZmmrr (trzyletnie).

² rr i mm to dwie ostatnie cyfry roku i numer miesiąca wykupu.

- indeksowane – wysokość oprocentowania jest ustalana na koniec okresu oprocentowania, np. w zależności od wskaźnika inflacji.

Uwaga. W sierpniu 2004 roku Ministerstwo Finansów wyemitowało indeksowane obligacje skarbowe o nazwie skróconej IZ0816 i terminie wykupu w dniu 24 sierpnia 2016 roku, które zostały dopuszczone do obrotu giełdowego. Ich oprocentowanie jest stałe i wynosi 3% w skali rocznej. Natomiast wartość nominalna jest zmienna i podlega comiesięcznej indeksacji w oparciu o miesięczny wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych GUS. Odsetki (kupony), od wartości nominalnej zindeksowanej na dzień wypłaty, wypłacane są raz w roku (24 sierpnia). W związku z powyższym kwoty odsetek są zmienne.

Emitenci

Od wiarygodności emitenta zależy ryzyko inwestowania w obligacje. Im mniej wiarygodny emitent tym wyższe oprocentowanie, gdyż inwestor, który podejmuje większe ryzyko oczekuje większej premii.

Emitent	nazwa	czas życia
Skarb państwa	obligacje skarbowe (T-bonds)	≥ 1 rok
Skarb państwa	bony skarbowe (T-bills)	< 1 rok
Samorządy terytorialne	obligacje komunalne	
Przedsiębiorstwa	obligacje korporacyjne	

Uwaga.

Obligacje skarbu państwa notowane na warszawskiej giełdzie mają sześciocyfrowe kody, np. „TZ0203”, gdzie litery oznaczają typ obligacji – TZ to trzyletnie o zmiennym oprocentowaniu, a cyfry termin zapadalności – 02 to numer miesiąca, a 03 to rok.

Obligacje korporacyjne notowane na warszawskiej giełdzie mają dziewięciocyfrowe kody np. „BPHOB1204”, gdzie litery oznaczają emitenta BPH (Bank Przemysłowo-Handlowy) i typ obligacji – OB, a cyfry termin zapadalności – 12 to numer miesiąca, a 04 to rok.

4.3.1. Cena rozliczeniowa i kurs obligacji

Ceną czystą obligacji nazywamy jej wartość nominalną pomnożoną przez kurs, który wyrażany jest w procentach. Natomiast cena rozliczeniowa obligacji to tzw. cena brudna czyli suma ceny czystej i wartości odsetek obowiązującej na dzień, w którym powinno nastąpić rozliczenie transakcji (zwykle jest to dzień drugiej kolejnej sesji giełdowej). Narosłe odsetki nalicza się w sposób liniowy (procent prosty), zaokrąglając do groszy.

$$\text{cena brudna} = \text{kurs obligacji} * \text{wartosc nominalna} + \text{narosle odsetki}.$$

4.4. Ćwiczenia

Ćwiczenie 4.1. W dniu 27.08.2004 inwestor zakupił 28 obligacji SP1207 po kursie 93,42. Wiemy, że wartość nominalna tej obligacji wynosi 100 zł, kupon o wartości 5,50 zł jest wypłacany 2 grudnia, a biuro maklerskie pobiera 0,19% prowizji. Wyznaczyć cenę rozliczeniową, koszt transakcji bez prowizji i koszt transakcji z prowizją.

Rozwiązanie. Cena czysta 1 obligacji wyniosła $0,9342 \cdot 100 \text{ zł} = 93,42 \text{ zł}$. Okres odsetkowy trwał 366 dni, a transakcja miała miejsce w piątek, w 269 dniu. Zatem wartość odsetek dla 1 obligacji to

$$O = \frac{269 + 4}{366} \cdot 5,5 \text{ zł} \approx 4,10 \text{ zł}.$$

Co daje nam cenę rozliczeniową równą $97,52 \text{ zł}$. Koszt transakcji bez prowizji otrzymujemy, mnożąc cenę rozliczeniową przez liczbę zakupionych obligacji $28 \cdot 97,52 = 2730,56 \text{ zł}$. Prowizja biura maklerskiego stanowi $0,19\%$ tej kwoty

$$0,0019 \cdot 2730,56 \text{ zł} \approx 5,19 \text{ zł}.$$

Po dodaniu prowizji otrzymujemy, że koszt zakupu 28 obligacji wyniósł $2735,75 \text{ zł}$.

Odpowiedź. Cena rozliczeniowa wyniosła $97,52 \text{ zł}$, koszt transakcji bez prowizji $2730,56 \text{ zł}$, a koszt z prowizją $2735,75 \text{ zł}$.

5. Wyznaczanie struktury terminowej stóp zwrotu

Liczba godzin 2.
Zakres materiału:
Tworzenie struktury stóp procentowych.

5.1. Wyznaczanie struktury terminowej stóp zwrotu

Empiryczną strukturę terminową wyznaczamy na podstawie następujących danych: stóp referencyjnych na rynku międzybankowym, cen, kuponów i kwot wykupu obligacji zerokuponowych i kuponowych o stałym oprocentowaniu oraz kontraktów FRA.

Przypomnijmy, że przez B oznaczona została funkcja opisująca strukturę terminową czynnika dyskontującego.

5.1.1. Stopy międzybankowe

Niech r_t oznacza stopę procentową na okres t wyrażony w latach. Wówczas przyjmujemy

$$B(t) = (1 + tr_t)^{-1}.$$

5.1.2. Obligacje zerokuponowe i bony

Mamy do czynienia z dwoma przepływami pieniężnymi: zakupem i wykupem obligacji. Niech P oznacza cenę zakupu, C_t – kwotę otrzymaną po wykupieniu obligacji, a t – czas życia obligacji. Wówczas kładziemy

$$B(t) = \frac{P}{C_t}.$$

Ta metoda ma istotne ograniczenie. A mianowicie, obligacje zerokuponowe, będące w obrocie rynkowym, mają zwykle krótki termin do wykupienia. W szczególności czas życia bonów skarbowych nie przekracza jednego roku.

5.1.3. Obligacje kuponowe o stałym oprocentowaniu

Obligacja, z której n rotnie wypłacane są odsetki (n -kuponowa) daje $n + 1$ przepływów pieniężnych. Niech P – cena zakupu obligacji, $C_1, \dots, C_{n-1}$ – kupony, C_n – ostatni kupon i kwota otrzymana po wykupieniu obligacji. Kolejne przepływy gotówki następują po czasie

$t_1, \dots, t_n$.

Stosuje się dwie metody:

- A. Wyznacza się Yield to Maturity (YTM) – stopę zwrotu liczoną do momentu zapadalności.
- B. Oblicza się $B(t)$ w momentach kolejnych przepływów finansowych w sposób łańcuchowy.

Yield to Maturity – stopa zwrotu liczona do momentu zapadalności

Założenie toretyczne:

Reinwestujemy otrzymane odsetki $C_1, \dots, C_{n-1}$ z tą samą efektywną stopą zwrotu.

Czyli szukamy takiej efektywnej stopy zwrotu YTM , że

$$P(1 + YTM)^{t_n} = C_1(1 + YTM)^{t_n - t_1} + \dots + C_{n-1}(1 + YTM)^{t_n - t_{n-1}} + C_n.$$

Lub po podzieleniu przez $(1 + YTM)^{t_n}$

$$P = \frac{C_1}{(1 + YTM)^{t_1}} + \dots + \frac{C_{n-1}}{(1 + YTM)^{t_{n-1}}} + \frac{C_n}{(1 + YTM)^{t_n}}.$$

Następnie wyznaczamy $B(t_n)$ z wzoru

$$B(t_n) = \frac{1}{(1 + YTM)^{t_n}}.$$

Zauważmy, że jest to równoważne przyjęciu, że efektywna stopa zwrotu jest równa stopie zwrotu liczonej do momentu zapadalności

$$R(t_n) = YTM.$$

Metoda łańcuchowa

Jeśli znamy $B(t)$ dla $t = t_1, \dots, t_{n-1}$, to $B(t_n)$ wyznaczamy ze wzoru

$$P = C_1 \cdot B(t_1) + C_2 \cdot B(t_2) + \dots + C_n \cdot B(t_n).$$

Stosując jedną lub drugą metodę, otrzymujemy wartości $B(t)$ dla skończonej ilości punktów $t_1, t_2, \dots, t_n$. Następnie należy skonstruować funkcję malejącą, która przedłuży naszą empiryczną $B(t)$ określoną dla $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, albo dobrać funkcję „modelową”, która przybliży empiryczne $B(t_i)$.

5.1.4. Wyznaczanie struktury terminowej w oparciu o kontrakty FRA

Korzystamy ze wzoru z lematu 3.5. Jeśli znamy stopę FRA na okres $[t + T_s, t + T_e]$ oraz $B(T_s)$, to wówczas

$$B(T_e) = \frac{B(T_s)}{1 + r_{FRA} \cdot (T_e - T_s)}.$$

5.2. Ćwiczenia

Ćwiczenie 5.1. W dniu 27 sierpnia 2004 roku na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie było notowanych pięć serii obligacji zerokuponowych OKmmrr, wszystkie o nominale 1000 zł. Wyznaczyć strukturę terminową.

Rozwiązanie

W poniższej tabeli podane są ich terminy zapadalności obligacji i ceny, po jakich można było je zakupić. Na tej podstawie wyznaczone zostały: czas życia t , $B(t)$, $\bar{R}(t)$ i $R(t)$. Dla uproszczenia przyjęliśmy, że 1 dzień, to $\frac{1}{365}$ część roku.

seria	OK1204	OK0405	OK0805	OK0406	OK0806
termin	12.12.	12.04.	12.08.	12.04.	12.08.
zapadalności	2004	2005	2005	2006	2006
cena					
w zł (P)	980,5	957	934,8	888,5	866,4
czas życia					
w latach (t)	0,2932	0,6247	0,9589	1,6247	1,9589
$B(t)$	0,9805	0,957	0,9348	0,8885	0,8664
$\bar{R}(t)$	0,06718	0,07036	0,07031	0,07277	0,07321
$R(t)$	0,06948	0,07290	0,07284	0,07548	0,07595

Ćwiczenie 5.2. Rozważmy obligację WS0922. Jest to obligacja o stałym oprocentowaniu 5,75% (w skali roku) i terminie zapadalności 2022-09-23. Nominał wynosi 1000 zł. Odsetki wypłacane są co roku we wrześniu. W dniu 11 sierpnia 2004 na GPW w Warszawie za tę obligację płacono 890,90 zł. Wyznaczyć stopę zwrotu liczoną do momentu zapadalności (YTM).

Rozwiązanie

Stosujemy metodę YTM. Mamy 19 okresów odsetkowych ($n = 19$). Z pierwszego pozostało tylko 43 dni, pozostałe są jednoroczne.

$$P = 890,9, \quad C_1 = C_2 = \dots = C_{18} = 57,5, \quad C_{19} = 1057,5.$$

Czas życia obligacji wynosił

$$t_{19} = 18 + \frac{43}{366} = 18,117.$$

YTM wyznaczamy z równania

$$P(1 + YTM)^{t_{19}} = \sum_{i=1}^{18} C_{19-i}(1 + YTM)^i + C_{19}.$$

Po wstawieniu wartości liczbowych równanie to wygląda następująco:

$$890,9 \cdot (1 + YTM)^{18,117} = \sum_{i=1}^{18} 57,5 \cdot (1 + YTM)^i + 1057,5.$$

Jego jedynym dodatnim pierwiastkiem jest

$$YTM = 0,07375.$$

Zatem

$$B(t_{19}) = B(18,117) = (1 + 0,07375)^{-18,117} = 0,2755.$$

Ćwiczenie 5.3. Rozważmy obligację WS0437. Jest to obligacja o stałym oprocentowaniu 5% (w skali roku) i terminie zapadalności 2037-04-25. Nominał wynosi 1000 zł. Odsetki wypłacane są co roku w kwietniu. W dniu 21 listopada 2011 na GPW w Warszawie kurs tej obligacji wynosił 89. Wyznaczyć stopę zwrotu liczoną do momentu zapadalności (YTM).

Rozwiązanie

Stosujemy metodę YTM. Mamy 26 okresów odsetkowych ($n = 26$). Z pierwszego pozostało tylko 156 dni, pozostałe są jednoroczne. Naliczone odsetki wynoszą (po zaokrągleniu do groszy)

$$50 \cdot \frac{210}{366} = 28,69.$$

Otrzymujemy

$$P = 918,69, \quad C_1 = C_2 = \dots = C_{25} = 50, \quad C_{26} = 1050.$$

Czas życia obligacji wynosił

$$t_{26} = 25 + \frac{156}{366} = 25,42623.$$

YTM wyznaczamy z równania

$$P(1 + YTM)^{t_{26}} = \sum_{i=1}^{25} C_{26-i}(1 + YTM)^i + C_{26}.$$

Po wstawieniu wartości liczbowych równanie to wygląda następująco:

$$918,69 \cdot (1 + YTM)^{25,42623} = \sum_{i=1}^{25} 50 \cdot (1 + YTM)^i + 1050.$$

Jego jedynym dodatnim pierwiastkiem jest

$$YTM = 0,058382.$$

Ćwiczenie 5.4. Rozważmy grudniowe obligacje z serii SP: SP1206, SP1207 i SP1208. Są to obligacje o stałym oprocentowaniu, odpowiednio 9,0%, 5,5% i 6,6% (w skali roku), o terminach zapadalności 2006-12-03, 2007-12-02 i 2008-12-01. Nominał wynosi 100 zł. Odsetki wypłacane są co roku na początku grudnia. W dniu 27 sierpnia 2004 na GPW w Warszawie za te obligacje płacono odpowiednio 109,06 zł, 98,09 zł i 100,35 zł.

Wyznaczyć strukturę terminową.

Rozwiązanie

Stosujemy metodę łańcuchową. Dla uproszczenia przyjmujemy, że okresy odsetkowe kończą się 2 grudnia. Wówczas

$$t_1 = 97/366 \approx 0,27, \quad t_2 \approx 1,27, \quad t_3 \approx 2,27, \quad t_4 \approx 3,27, \quad t_5 \approx 4,27.$$

Wartości $B(t_1)$ i $B(t_2)$ nie możemy określić za pomocą notowań obligacji serii SP. Przybliżymy, je korzystając z notowań obligacji zerokuponowych z przykładu 1.8.1.

$$B(t_1) = 0,9821, \quad B(t_2) = 0,9130.$$

$B(t_3)$, $B(t_4)$ i $B(t_5)$ wyznaczamy metodą łańcuchową.

$$109,06 = 9 \cdot 0,9821 + 9 \cdot 0,9130 + 109 \cdot B(t_3).$$

Zatem $B(t_3) \approx 0,8441$.

$$98,09 = 5,5 \cdot 0,9821 + 5,5 \cdot 0,9130 + 5,5 \cdot 0,8441 + 105,5 \cdot B(t_4).$$

Czyli $B(t_4) \approx 0,7870$.

$$100,35 = 6,6 \cdot 0,9821 + 6,6 \cdot 0,9130 + 6,6 \cdot 0,8441 + 6,6 \cdot 0,7870 + 106,6 \cdot B(t_5).$$

Otrzymujemy $B(t_5) \approx 0,7231$.

Uzyskane wyniki są zebrane w poniższej tabeli.

seria	SP1206	SP1207	SP1208
termin zapadalności	2006-12-03	2007-12-02	2008-12-01
kupony	9,00	5,50	6,60
cena w zł	109,06	98,09	100,35
czas życia w latach (t)	2,27	3,27	4,26
$B(t)$	0,8441	0,7870	0,7231
$R(t)$	0,0776	0,0761	0,0790
$\bar{R}(t)$	0,0747	0,0734	0,0760

Ćwiczenie 5.5. Przedłużamy funkcję $B(t)$ jako funkcję kawałkami wykładniczą (kawałkami płaska struktura terminowa). Przyjmujemy, że $t_0 = 0$ i $B(t_0) = 1$, a dla $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, wyznaczamy $B(t)$ jako ważoną średnią geometryczną $B(t_{i-1})$ i $B(t_i)$. Kładziemy

$$\begin{aligned}
 B(t) &= B(t_{i-1})^{\frac{t_i-t}{t_i-t_{i-1}}} B(t_i)^{\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}} = \\
 &= B(t_{i-1})^{\frac{t_i}{t_i-t_{i-1}}} B(t_i)^{\frac{-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}} \exp\left(\frac{\ln(B(t_i)) - \ln(B(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} t\right).
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że taka metoda przedłużania „zachowuje” płaską strukturę czasową. Jeśli $B(t_i) = e^{-\delta t_i}$ dla $i = 1, \dots, n$ $B(t_i) = e^{-\delta t_i}$ to po przedłużeniu $B(t) = e^{-\delta t}$ dla dowolnego $t \in \langle 0, t_n \rangle$.

W oparciu wartości $B(t_i)$ wyznaczone w ćwiczeniach 5.1 i 5.3 wyznaczyć łączną strukturę terminową.

Rozwiązanie

Mamy

$$\begin{aligned}
 B(t_1) &= 0,9805, B(t_2) = 0,957, B(t_3) = 0,9348, B(t_4) = 0,8885, \\
 B(t_5) &= 0,8664, B(t_6) = 0,8441, B(t_7) = 0,7870, B(t_8) = 0,7231,
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 0,29, \quad t_2 = 0,62, \quad t_3 = 0,96, \quad t_4 = 1,62, \\
 t_5 &= 1,96, \quad t_6 = 2,27, \quad t_7 = 3,27, \quad t_8 = 4,26.
 \end{aligned}$$

Po przedłużeniu otrzymujemy:

$$B(t) = \begin{cases} \exp(-0,0674t) & \text{dla } t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ 1,002 \exp(-0,0732t) & \text{dla } t \in \langle t_1, t_2 \rangle \\ 1,000 \exp(-0,0702t) & \text{dla } t \in \langle t_2, t_3 \rangle \\ 1,006 \exp(-0,0763t) & \text{dla } t \in \langle t_3, t_4 \rangle \\ 1,004 \exp(-0,0754t) & \text{dla } t \in \langle t_4, t_5 \rangle \\ 1,022 \exp(-0,0843t) & \text{dla } t \in \langle t_5, t_6 \rangle \\ 0,990 \exp(-0,0703t) & \text{dla } t \in \langle t_6, t_7 \rangle \\ 1,038 \exp(-0,0847t) & \text{dla } t \in \langle t_7, t_8 \rangle \end{cases}$$

6. Analiza instrumentów dłużnych

Liczba godzin 4.
Zakres materiału:
Wartość obecna, dyskontowanie (tzw. metoda przepływów). Wewnętrzna stopa zwrotu (IRR).

6.1. Wartość obecna – Present Value (PV)

6.1.1. Definicja

Truizmem jest stwierdzenie, że wartość pieniądza zmienia się w czasie. Wartość obecna (Present Value) przyszłej kwoty K to wartość tej kwoty w chwili obecnej wyznaczona przez porównanie z lokatą bankową lub inną *wzorcową* inwestycją. Zatem jest to kwota pieniędzy, jaką dzisiaj należy:

- ulokować w banku na stały procent
- albo*
- zainwestować w bezpieczną inwestycję
- tak, aby w przyszłości otrzymać kwotę K .

Proces *przekształcania* przyszłej wartości pieniądza w wartość obecną nazywa się **dyskontowaniem**. Pozwala on porównać ze sobą kontrakty finansowe o przepływach gotówki w różnych momentach czasu. Stosuje się dwie metody dyskontowania:

A. Dyskontujemy za pomocą struktury terminowej stóp procentowych

$$PV = \sum_{i=0}^n CF_i \cdot B(t_i),$$

gdzie: $B(t)$ – czynnik dyskontujący, a t_i – czas, po którym nastąpi i -ty przepływ gotówki CF_i .

B. Dyskontujemy za pomocą wybranego procesu akumulacji $K(t)$ (np. rachunku bankowego *a vista*),

$$PV = \sum_{i=0}^n \frac{CF_i \cdot K(T)}{K(T + t_i)},$$

gdzie: T – moment dyskontowania (np. moment zawarcia transakcji).

W zastosowaniach praktycznych częściej stosuje się metodę A, a w rozważaniach teoretycznych – B.

Uwaga. Czasami wygodniej jest modelować badaną inwestycję za pomocą ciągłego strumienia płatności z zadaną gęstością $g(t)$, $t > T_0 = 0$. Co oznacza, że wypłatę w okresie od t_1 do t_2 liczymy wg wzoru

$$C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt.$$

Wówczas wartość obecna też wyraża się za pomocą całki

$$PV = \int_0^{\infty} g(t) B(t) dt.$$

W pewnym sensie oprocentowanie i dyskontowanie są procesami odwrotnymi.

6.1.2. Zależność struktury terminowej od procesu akumulacji

W klasycznych modelach przyjmuje się, że proces akumulacji $K(t)$ jest znany w chwili T i wyznacza strukturę terminową w chwili T

$$B_T(t) = \frac{K(T)}{K(T+t)}.$$

Przy tych założeniach nie ma znaczenia, czy wartość obecną liczymy w oparciu o strukturę terminową, czy o proces akumulacji. Obie metody dają ten sam wynik

W nowszym ujęciu modeluje się $K(t)$ jako proces stochastyczny, na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{M}, P)$, która opisuje wszystkie możliwe decyzje ekonomiczne i finansowe oraz wydarzenia mające wpływ na ekonomię i finanse. Zdarzeniami elementarnymi (elementami Ω) są ciągi decyzji podejmowanych w kolejnych momentach czasu i wydarzeń mających miejsce w kolejnych momentach czasu. $\mathcal{M}$ jest rodziną zbiorów decyzji i wydarzeń. Jeżeli A należy do $\mathcal{M}$, to $P(A)$ jest prawdopodobieństwem, że zostanie podjęta któraś z decyzji ze zbioru A lub nastąpi wydarzenie należące do A . Na przykład możemy postawić pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo, że na swoim najbliższym posiedzeniu Rada Polityki Pieniężnej podniesie stopę referencyjną, albo jakie jest prawdopodobieństwo, że w Japonii w przyszłym roku będzie trzęsienie ziemi. Następnie przyjmuje się, że struktura terminowa w chwili T wynosi

$$B_T(t) = E_Q\left(\frac{K(T)}{K(T+t)} \middle| \mathcal{H}_T\right),$$

gdzie Q jest pewną miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{M})$, na ogół tylko równoważną mierze P ,

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0,$$

a $\mathcal{H}_T$ jest σ -ciałem zawartym w $\mathcal{M}$, które określa zasób informacji dostępny w chwili T . Zatem $\mathcal{H}_T$ to rodzina zbiorów decyzji i wydarzeń znanych w chwili T . Zauważmy, że jeżeli wartość pewnej zmiennej losowej X będzie znana w chwili T , to jest ona $\mathcal{H}_T$ -mierzalna. W szczególności $K(t)$ są $\mathcal{H}_T$ -mierzalne dla $t \leq T$. Takie założenia gwarantują, że wartość obecna liczona w oparciu o strukturę terminową jest równa wartości oczekiwanej wartości obecnej, liczonej za pomocą procesu akumulacji.

Niestety ta zgodność nie występuje dla stóp zwrotu. W modelach deterministycznych stopa zwrotu wyznaczona przez strukturę terminową $B(t)$ jest równa stopie zwrotu z procesu akumulacji $K(t)$. Natomiast w modelach stochastycznych mogą one być istotnie różne.

Lemat 6.1. Stopa zwrotu wyznaczona przez strukturę terminową jest niewiększa niż wartość oczekiwana (względem miary Q) stopy zwrotu z procesu akumulacji

$$\frac{1 - B_T(t)}{B_T(t)} \leq E_Q\left(\frac{K(T+t) - K(T)}{K(T)} \mid \mathcal{H}_T\right).$$

Ponadto równość zachodzi tylko wtedy, gdy warunkowy rozkład $K(T+t) \mid \mathcal{H}_T$ jest jednopunktowy (tzn. gdy $K(T+t)$ jest znane w momencie T).

Dowód – ćwiczenie 6.3

Przykłady:

1. Deterministyczny proces akumulacji typu „procent składany”

$$K(t) = k \cdot (1+r)^t, \quad k, r > 0, \quad t \in (0, +\infty)$$

indukuje płaską strukturę terminową

$$B_T(s) = (1+r)^{-s},$$

która ponadto nie zmienia się wraz z upływem czasu (nie zależy od T).

2. Stochastyczny proces akumulacji

$$K(t) = \begin{cases} k(1+r)^t & \text{dla } 0 \leq t \leq t^*, \\ k(1+r)^{t^*}(1+r+\gamma r^*)^{t-t^*} & \text{dla } t^* < t, \end{cases}$$

gdzie: k, r, r^* stałe, $k, r, r+r^* > 0$, a γ zero-jedynkowa zmienna losowa

$$Q\{\gamma = 0\} = p, \quad Q\{\gamma = 1\} = 1-p, \quad 0 < p < 1.$$

Wartość γ zależy od decyzji, która zostanie podjęta w chwili $t^* \in (0, +\infty)$, zatem γ jest $\mathcal{H}_t$ -mierzalna dla $t > t^*$. Ponadto, dla uproszczenia zakładamy, że w mierze Q , γ jest niezależna od $\mathcal{H}_t$ dla $t \leq t^*$.

Niech $0 \leq T \leq t^*$, wówczas

$$B_T(s) = \begin{cases} (1+r)^{-s} & \text{dla } 0 \leq s < t^* - T, \\ (1+r)^{T-t^*} (p(1+r)^{-T-s+t^*} + (1-p) \cdot (1+r+r^*)^{-T-s+t^*}) & \text{dla } t^* - T \leq s, \end{cases}$$

Proszę zwrócić uwagę, że w przypadku $T = t^*$ jest to wzór Stoodleya.

Dla $T > t^*$ otrzymujemy wzór analogiczny do wzoru z poprzedniego przykładu. W chwili T wartość γ jest już znana (γ jest $\mathcal{H}_T$ -mierzalna) zatem

$$B_T(s) = (1+r+\gamma r^*)^{-s}.$$

Bardziej skomplikowane procesy stochastyczne prowadzą do omówionych wcześniej wzorów Vasička i CIR. W obu modelach

$$K(t) = \exp\left(\int_0^t r(t)dt\right),$$

gdzie intensywność $r(t)$, zwana „natychmiastową chwilową stopą procentową”, jest procesem stochastycznym spełniającym stochastyczne równanie różniczkowe. W modelu Vasička równanie to ma postać

$$dr = (b - ar)dt + \sigma dW_t,$$

a w modelu CIR

$$dr = (b - ar)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t.$$

6.1.3. Dyskontowanie za pomocą płaskiej struktury terminowej

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy chwilowa intensywność jest stała, $\delta(t) = \delta > 0$. Wówczas czynnik dyskontujący ma postać

$$B(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad r = e^\delta - 1 > 0.$$

Ponadto przyjmijmy, że czas życia kontraktu wynosi n lat, a przepływy gotówki mają miejsce raz w roku.

CF_0 w momencie zawarcia kontraktu,

CF_1 po 1 roku,

CF_2 po 2 latach,

.....

CF_n po n latach.

Dyskontujemy kolejne przepływy

$$PV_0 = \frac{CF_0}{(1+r)^0} = CF_0,$$

$$PV_1 = \frac{CF_1}{1+r}, \quad PV_2 = \frac{CF_2}{(1+r)^2}, \quad \dots, \quad PV_n = \frac{CF_n}{(1+r)^n}.$$

Wartość obecna całego kontraktu jest równa sumie wartości obecnych wszystkich przepływów gotówki

$$PV = \sum_{t=0}^n PV_t = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t}.$$

Zauważmy, że identyczne wzory otrzymamy, dyskontując za pomocą *deterministycznego* procesu akumulacji o stałej (efektywnej) stopie zwrotu.

Uwaga. Przy regularnych przepływach gotówki powyższy wzór można zapisać w postaci łańcuchowej

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} = \\ &= (\dots((CF_n \cdot (1+r)^{-1} + CF_{n-1}) \cdot (1+r)^{-1} + CF_{n-2}) \dots)(1+r)^{-1} + CF_0. \end{aligned}$$

6.1.4. Zastosowanie PV

Kryterium opłacalności inwestycji.

Rozważmy inwestycję, w czasie trwania której ma miejsce $n+1$ przepływów gotówki $CF_0, CF_1, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Wówczas wartość obecna wynosi

$$PV = \sum_{i=0}^n CF_i \cdot B(t_i).$$

Gdy $PV < 0$, to badana inwestycja jest niekorzystna, gdyż tempo pomnażania kapitału będzie mniejsze niż w przypadku lokat (i kredytów) ze strukturą terminową opisaną przez $B(t)$ i podobnie będzie mniejsze niż w przypadku zainwestowania posiadanych środków w deterministyczny proces akumulacji $K(T+t) = K(T) B^{-1}(t)$.

Gdy $PV > 0$, to badana inwestycja jest korzystna, gdyż tempo pomnażania kapitału będzie większe niż w przypadku lokat (i kredytów) ze strukturą terminową opisaną przez $B(t)$ i również

będzie większe niż w przypadku zainwestowania posiadanych środków w deterministyczny proces akumulacji $K(T+t) = K(T) B^{-1}(t)$.

Kryterium opłacalności zakupu kontraktu.

Rozważmy inwestycję (kontrakt), w czasie trwania której będzie miało miejsce n przepływów gotówki $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$, (np. obligację n -kuponową o stałym oprocentowaniu). Rynkowa cena inwestycji wynosi P . Porównując wartość obecną

$$PV = \sum_{i=1}^n CF_i \cdot B(t_i)$$

z ceną możemy stwierdzić, czy inwestycja jest opłacalna.

Gdy $PV < P$, to badana inwestycja jest niekorzystna, a gdy $PV > P$, korzystna. Kryterium to wynika z poprzedniego, gdy przyjmiemy $CF_0 = -P$.

Wycena inwestycji.

Rozważmy inwestycję, w czasie trwania której będzie miało miejsce n przepływów gotówki $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$, (np. obligację n -kuponową o stałym oprocentowaniu). Wartość teoretyczną takiej inwestycji wyznacza jej wartość obecna.

$$PV = \sum_{i=1}^n CF_i \cdot B(t_i).$$

Wynika to z faktu, że gdy cena jest równa wartości obecnej, to poprzednie kryterium nie daje żadnych wskazówek co do kupna lub sprzedaży.

Wycena dywidendy płaconej posiadaczowi akcji.

Posiadacz akcji (akcjonariusz) otrzymuje co roku wypłatę części zysku spółki tzw. dywidendę. Wyznamy jej wartość obecną przy założeniu, że struktura terminowa jest płaska

$$B(t) = (1+r)^{-t}.$$

- Przypadek stałej rocznej dywidendy D . (Pierwsza wypłata za rok.)

$$CF_t = D, \quad t = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

$$PV = \frac{D}{r}.$$

Patrz ćwiczenie 6.9.

- Przypadek stałego wzrostu wielkości dywidendy, $D_{t+1} = (1+a)D_t$, $r > a > 0$ (**model Gordona**).

$$CF_1 = D, CF_2 = (1+a)D, \dots, CF_n = (1+a)^{n-1}D, \dots,$$

$$PV = \frac{D}{r-a}.$$

Jak widać, gdy stopa wzrostu wielkości dywidendy a dąży do r , to wartość dywidendy rośnie do nieskończoności. Patrz ćwiczenie 6.10.

• Przypadek, gdy dywidenda wzrasta w postępie arytmetycznym, za rok płacona jest dywidenda D , a następnie co rok wzrasta o R .

$$CF_1 = D, CF_2 = D + R, \dots, CF_n = D + (n - 1)R, \dots,$$

$$PV = \frac{D}{r} + \frac{R}{r^2}.$$

Niezależnie od tego, jak duży jest roczny wzrost wartości dywidendy, jej wartość obecna jest skończona. Patrz ćwiczenie 6.11.

6.2. Ćwiczenia

Ćwiczenie 6.1. Jaka kwota musi być zainwestowana na 9% rocznie przy oprocentowaniu składowym, by wypłata po trzech latach wyniosła 1000 zł? Ile wynosi czynnik dyskontujący?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez K szukaną kwotę. Mamy

$$K \cdot (1 + 0,09)^3 = 1000.$$

Zatem

$$K = \frac{1000}{(1,09)^3} = 1000 \cdot 0,777218 = 772,18.$$

Odpowiedź. Należy zainwestować 772,18 zł, a czynnik dyskontujący wynosi 0,77218.

Ćwiczenie 6.2. Jaka kwota musi być zainwestowana na 9% rocznie przy oprocentowaniu prostym, by wypłata po trzech latach wyniosła 1000 zł? Ile wynosi czynnik dyskontujący?

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez K szukaną kwotę. Mamy

$$K \cdot (1 + 3 \cdot 0,09) = 1000.$$

Zatem

$$K = \frac{1000}{1 + 0,09 \cdot 3} = 1000 \cdot 0,78740 = 787,4.$$

Odpowiedź.

Należy zainwestować 787,4 zł, a czynnik dyskontujący wynosi 0,78740.

Ćwiczenie 6.3. Udowodnić lemat 6.1.

Rozwiązanie.

Pokażemy, że $E_Q(\frac{K(T+t)}{K(T)}|\mathcal{H}_T) \geq B_T(t)^{-1}$. Wykorzystamy w tym celu nierówność Jensena.

$$E_Q(\frac{K(T+t)}{K(T)}|\mathcal{H}_T) = E_Q((\frac{K(T)}{K(T+t)})^{-1}|\mathcal{H}_T) \geq$$

$$\geq (E_Q(\frac{K(T)}{K(T+t)}|\mathcal{H}_T))^{-1} = B_T(t)^{-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} E_Q(\frac{K(T+t) - K(T)}{K(T)}|\mathcal{H}_T) &= E_Q(\frac{K(T+t)}{K(T)}|\mathcal{H}_T) - 1 \geq \\ &\geq \frac{1}{B_T(t)} - 1 = \frac{1 - B_T(t)}{B_T(t)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że funkcja $f(x) = x^{-1}$ jest ściśle wypukła, zatem w przypadku, gdy rozkład nie jest jednopunktowy, to w nierówności Jensena pojawi się nierówność *ostra*.

Ćwiczenie 6.4. Wyznaczyć strukturę terminową indukowaną przez deterministyczny proces akumulacji

$$K(t) = k \cdot (1+r)^t, \quad k, r > 0, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Rozwiązanie.

$K(t) = k \cdot (1+r)^t$. Zatem

$$B_T(s) = \frac{K(T)}{K(T+s)} = \frac{k \cdot (1+r)^T}{k \cdot (1+r)^{s+T}} = (1+r)^{-s}.$$

Odpowiedź.

Proces akumulacji typu „procent składany” indukuje płaską strukturę terminową $B_T(s) = (1+r)^{-s}$, która ponadto nie zmienia się wraz z upływem czasu (nie zależy od T).

Ćwiczenie 6.5. Wyznaczyć strukturę terminową indukowaną przez stochastyczny proces akumulacji

$$K(t) = \begin{cases} k(1+r)^t & \text{dla } 0 \leq t \leq t^* \\ k(1+r)^{t^*}(1+r+\gamma r^*)^{t-t^*} & \text{dla } t^* < t, \end{cases}$$

gdzie: k, r, r^* stałe, $k, r, r+r^* > 0$, a γ zero-jedynkowa zmienna losowa

$$Q\{\gamma = 0\} = p, \quad Q\{\gamma = 1\} = 1-p, \quad 0 < p < 1.$$

Wartość γ zależy od decyzji, która zostanie podjęta w chwili t^* , zatem γ jest $\mathcal{H}_t$ -mierzalna dla $t > t^*$. Ponadto, dla uproszczenia zakładamy, że w mierze Q , γ jest niezależna od $\mathcal{H}_t$ dla $t \leq t^*$.

Rozwiązanie.

Niech $0 \leq T \leq t^*$, wówczas dla $s < t^* - T$ otrzymujemy

$$B_T(s) = E_Q(\frac{K(T)}{K(T+s)}|\mathcal{H}_T) = E_Q((1+r)^{-s}|\mathcal{H}_T) = (1+r)^{-s},$$

a dla $s \geq t^* - T$

$$\begin{aligned} B_T(s) &= E_Q(\frac{K(T)}{K(T+s)}|\mathcal{H}_T) = \\ &= E_Q((1+r)^{T-t^*}(1+r+\gamma r^*)^{-T-s+t^*}|\mathcal{H}_T) = \\ &= (1+r)^{T-t^*}(p(1+r)^{-T-s+t^*} + (1-p) \cdot (1+r+r^*)^{-T-s+t^*}). \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że dla $T = t^*$ jest to wzór Stoodleya.

Dla $T > t^*$ otrzymujemy wzór analogiczny do wzoru z poprzedniego przykładu. W chwili T wartość γ jest już znana (γ jest $\mathcal{H}_T$ -mierzalna) zatem

$$B_T(s) = (1 + r + \gamma r^*)^{-s}.$$

Odpowiedź.

Niech $0 \leq T \leq t^*$. Wówczas

$$B_T(s) = \begin{cases} (1+r)^{-s} & \text{dla } 0 \leq s < t^* - T, \\ (1+r)^{T-t^*} (p(1+r)^{-T-s+t^*} + (1-p) \cdot (1+r+r^*)^{-T-s+t^*}) & \text{dla } t^* - T \leq s, \end{cases}$$

Dla $T > t^*$ otrzymujemy wzór analogiczny do wzoru z poprzedniego przykładu. W chwili T wartość γ jest już znana (γ jest $\mathcal{H}_T$ -mierzalna) zatem

$$B_T(s) = (1 + r + \gamma r^*)^{-s}.$$

Ćwiczenie 6.6. Wyznaczyć PV dla czteroletnich kredytów opisanych w przykładzie z punktu 3 podrozdziału 4.1. Rozpatrzyć trzy przypadki: rynkowa stopa procentowa r równa efektywnej stopie procentowej kredytu, mniejsza od niej i większa.

Rozwiązanie.

A. $r = 0, 1$.

1. Jednorazowa spłata kapitału i odsetek.

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0, \quad CF_4 = 1000 \cdot (1 + 0,1)^4 = 1464,1;$$

$$PV_0 = -1000, \quad PV_1 = PV_2 = PV_3 = 0, \quad PV_4 = \frac{1464,1}{(1 + 0,1)^4} = 1000;$$

$$PV = PV_0 + PV_4 = 0.$$

2. Jednorazowa spłata kapitału, odsetki płatne po każdym okresie.

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0,1 \cdot 1000 = 100,$$

$$CF_4 = 1000 \cdot (1 + 0,1) = 1100;$$

$$PV = -1000 +$$

$$+(((1100 \cdot (1 + 0,1)^{-1} + 100)(1 + 0,1)^{-1} + 100)(1 + 0,1)^{-1} + 100)(1 + 0,1)^{-1} =$$

$$= (((1000 + 100) \cdot 1,1^{-1} + 100) \cdot 1,1^{-1} + 100) \cdot 1,1^{-1} - 1000 =$$

$$= ((1000 + 100) \cdot 1,1^{-1} + 100) \cdot 1,1^{-1} - 1000 =$$

$$= (1000 + 100) \cdot 1,1^{-1} - 1000 = 10000 - 10000 = 0.$$

3. Równe raty kapitałowe, odsetki płatne po każdym okresie.

$$CF_0 = -1000, \quad CF_1 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 1000) = 350,$$

$$CF_2 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 750) = 325,$$

$$CF_3 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 500) = 300,$$

$$CF_4 = (0,25 \cdot 1000 + 0,1 \cdot 250) = 275.$$

$$PV = -1000 +$$

$$\begin{aligned} &+(((275 \cdot (1 + 0,1)^{-1} + 300)(1 + 0,1)^{-1} + 325)(1 + 0,1)^{-1} + 350)(1 + 0,1)^{-1} = \\ &= (((250 + 300) \cdot 1,1^{-1} + 325) \cdot 1,1^{-1} + 350) \cdot 1,1^{-1} - 1000 = \\ &= ((500 + 325) \cdot 1,1^{-1} + 350) \cdot 1,1^{-1} - 1000 = \\ &= (750 + 350) \cdot 1,1^{-1} - 1000 = 1000 - 1000 = 0. \end{aligned}$$

4. Równe spłaty (rata kapitałowa + odsetki = const).

$$\begin{aligned} CF_0 &= -1000, \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 315,47. \\ PV &= -1000 + \frac{315,47}{1 + 0,1} + \frac{315,47}{(1 + 0,1)^2} + \frac{315,47}{(1 + 0,1)^3} + \frac{315,47}{(1 + 0,1)^4} = \\ &= -1000 + \frac{315,47}{1,1} \cdot \frac{1 - 1,1^{-4}}{1 - 1,1^{-1}} = -1000 + \frac{315,47}{0,31547} = 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z oczekiwaniami, gdy stopa rynkowa jest równa stopie efektywnej kredytu, to wartość obecna wszystkich przepływów jest równa 0. Można to sformułować następująco: wartość obecna spłat jest równa kwocie kredytu.

B. $r = 0,09$.

1. Jednorazowa spłata kapitału i odsetek.

$$PV = -1000 + \frac{1464,1}{(1 + 0,09)^4} = 37,2054$$

2. Jednorazowa spłata kapitału, odsetki płatne po każdym okresie.

$$PV = -1000 + \frac{100}{1 + 0,09} + \frac{100}{(1 + 0,09)^2} + \frac{100}{(1 + 0,09)^3} + \frac{1100}{(1 + 0,09)^4} = 32,3972$$

3. Równe raty kapitałowe, odsetki płatne po każdym okresie.

$$PV = -1000 + \frac{350}{1 + 0,09} + \frac{325}{(1 + 0,09)^2} + \frac{300}{(1 + 0,09)^3} + \frac{275}{(1 + 0,09)^4} = 21,1189$$

4. Równe spłaty (rata kapitałowa + odsetki = const).

$$PV = -1000 + \frac{315,47}{1 + 0,09} + \frac{315,47}{(1 + 0,09)^2} + \frac{315,47}{(1 + 0,09)^3} + \frac{315,47}{(1 + 0,09)^4} = 22,0344$$

Zgodnie z oczekiwaniami, gdy stopa rynkowa jest mniejsza od stopy efektywnej kredytu, to wartość obecna wszystkich przepływów jest dodatnia. Można to sformułować następująco: wartość obecna spłat jest większa niż kwota kredytu. Różnica między oprocentowaniem kredytu a stopą rynkową nazywa się *marżą*. Interpretuje się ją jako wynagrodzenie kredytodawcy za poniesione ryzyko.

C. $r = 0,11$.

1. Jednorazowa spłata kapitału i odsetek.

$$PV = -1000 + \frac{1464,1}{(1 + 0,11)^4} = -35,5520$$

2. Jednorazowa spłata kapitału, odsetki płatne po każdym okresie.

$$PV = -1000 + \frac{100}{1 + 0,11} + \frac{100}{(1 + 0,11)^2} + \frac{100}{(1 + 0,11)^3} + \frac{1100}{(1 + 0,11)^4} = -31,0245$$

3. Równe raty kapitałowe, odsetki płatne po każdym okresie.

$$PV = -1000 + \frac{350}{1 + 0,11} + \frac{325}{(1 + 0,11)^2} + \frac{300}{(1 + 0,11)^3} + \frac{275}{(1 + 0,11)^4} = -20,3990$$

4. Równe spłaty (rata kapitałowa + odsetki = const).

$$PV = -1000 + \frac{315,47}{1 + 0,11} + \frac{315,47}{(1 + 0,11)^2} + \frac{315,47}{(1 + 0,11)^3} + \frac{315,47}{(1 + 0,11)^4} = -21,2715$$

Zgodnie z oczekiwaniami, gdy stopa rynkowa jest większa od stopy efektywnej kredytu, to wartość obecna wszystkich przepływów jest ujemna. Czyli wartość obecna spłat jest mniejsza niż kwota kredytu.

Ćwiczenie 6.7. Pokazać, że cztery kredyty rozważane w poprzednim ćwiczeniu są opłacalne dla banku wtedy, gdy stopa efektywna oprocentowania kredytu jest większa niż stopa rynkowa.

Ćwiczenie 6.8. Rozważmy 4 inwestycje o przepływach gotówki, takich jak spłaty kredytów w przykładzie z punktu 3 podrozdziału 4.1.

$$\begin{aligned} I1 : \quad & CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0, \quad CF_4 = 1464,1. \\ I2 : \quad & CF_1 = CF_2 = CF_3 = 100, \quad CF_4 = 1100. \\ I3 : \quad & CF_1 = 350, \quad CF_2 = 325, \quad CF_3 = 300, \quad CF_4 = 275. \\ I4 : \quad & CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 315,47. \end{aligned}$$

Przepływy gotówki mają miejsce na koniec roku, czyli $t_i = i$.

Wycenić te inwestycje zgodnie z płaską strukturą terminową

$$B(t) = (1 + r)^{-t},$$

dla stopy rynkowej r równej odpowiednio 9%, 10% i 11% oraz zgodnie ze wzorem Stoodleya

$$B(t) = 0,5(1,09)^{-t} + 0,5(1,11)^{-t}.$$

Odpowiedź.

Otrzymujemy następujące wartości teoretyczne:

	$r = 0,09$	$r = 0,1$	$r = 0,11$	Stoodley
$I1$	1037,2054	1000	964,4480	1000,8267
$I2$	1032,3972	1000	968,9755	1000,6864
$I3$	1021,1189	1000	979,6010	1000,3600
$I4$	1022,0344	1000	978,7285	1000,3815

Podsumowując, gdy stopa rynkowa jest równa stopie efektywnej oprocentowania, to wartość teoretyczna spłat kredytu jest równa kwocie kredytu. Natomiast, gdy stopa rynkowa jest mniejsza, to wartość teoretyczna jest większa. Na odwrót – gdy stopa rynkowa jest większa, to wartość teoretyczna jest mniejsza. Wycena według wzoru Stoodleya jest nieznacznie większa niż kwota kredytu. Wynika to z wypukłości funkcji $r \rightarrow (1+r)^{-t}$. Średnia z wycen jest większa niż wycena według średniej stopy rynkowej.

Ćwiczenie 6.9. W oparciu o płaską strukturę terminową $B(t) = (1+r)^{-t}$ dokonać wyceny stałej rocznej dywidendy D . (Pierwsza wypłata za rok.)

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} CF_t &= D, \quad t = 1, 2, \dots, n, \dots, \\ PV &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = \\ &= \frac{D}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r}. \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość teoretyczna stałej rocznej dywidendy wyznaczona za pomocą płaskiej struktury terminowej wynosi $\frac{D}{r}$.

Ćwiczenie 6.10. W oparciu o płaską strukturę terminową $B(t) = (1+r)^{-t}$ dokonać wyceny rocznej dywidendy o stałej stopie wzrostu a

$$D_{t+1} = (1+a)D_t, \quad r > a > 0$$

(model Gordona).

Rozwiązanie.

$$CF_1 = D, CF_2 = (1+a)D, \dots, CF_n = (1+a)^{n-1}D, \dots,$$

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+a)^{t-1}D}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1+a)^t}{(1+r)^t} = \\ &= \frac{D}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+a}{1+r}} = \frac{D}{r-a}. \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość teoretyczna rocznej dywidendy o stałej stopie wzrostu wyznaczona za pomocą płaskiej struktury terminowej wynosi $\frac{D}{r-a}$.

Ćwiczenie 6.11. W oparciu o płaską strukturę terminową $B(t) = (1+r)^{-t}$ dokonać wyceny rocznej dywidendy wzrastającej w postępie arytmetycznym. Za rok płacona jest dywidenda D , a następnie co rok wzrasta o R .

Rozwiązanie.

$$CF_1 = D, CF_2 = D + R, \dots, CF_n = D + (n-1)R, \dots,$$

$$\begin{aligned}
 PV &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(D + (t-1)R)}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} + R \frac{d}{dr} \left(- \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \right) = \\
 &= \frac{D}{1+r} \left(1 + \frac{1}{r} \right) - R \frac{d}{dr} \left(1 + \frac{1}{r} \right) = \frac{D}{r} + \frac{R}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość teoretyczna rocznej dywidendy wzrastającej w postępie arytmetycznym wyznaczona za pomocą płaskiej struktury terminowej wynosi $\frac{D}{r} + \frac{R}{r^2}$.

Ćwiczenie 6.12. Zmarły ojciec zostawił dwóm synom będącym obecnie w wieku 8 i 15 lat lokatę 100 000 USD z zastrzeżeniem, że każdy odbierze swoją część w rocznicę śmierci ojca po osiągnięciu wieku 21 lat. Przyjmując stałą efektywną stopę 8% w ciągu 13 przyszłych lat obliczyć, wysokości tych kwot, jeśli synowie sprawiedliwie podzielią się spadkiem.

Wskazówka: sprawiedliwie oznacza, że wartości obecne obu kwot są równe.

Odpowiedź.

Konkretne kwoty zależą od sposobu w jaki bank zaokrągla odsetki. Jeśli przy wypłacie odsetki będą zaokrąglone w dół do 1 USD to młodszy syn otrzyma 135 981 USD, a starszy 79 343 USD.

Ćwiczenie 6.13. Kupiec ma beczkę wina, którą może teraz sprzedać za K złotych lub też może ją przechować przez okres czasu t (liczony w latach), po czym sprzedać za sumę $K \exp(\sqrt{t}/2)$. Załóżmy, że struktura terminowa jest płaska, a intensywność oprocentowania wynosi 0.05 (w skali rocznej). Wyznaczyć moment najkorzystniejszej dla kupca sprzedaży wina, tzn. t takie, że wartość obecna ceny beczki przechowanej przez okres czasu t jest największa.

Odpowiedź.

Optimalny moment sprzedaży wynosi 25 lat.

7. Analiza instrumentów dłużnych – cd

7.1. Wewnętrzna stopa zwrotu

7.1.1. Definicja IRR

Rozważmy ciąg płatności $CF_0, CF_1, \dots, CF_n$ mających miejsce odpowiednio w momentach $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Na przykład
 CF_0 – zakup obligacji ($CF_0 < 0$),
 CF_i – odsetki (kupony) $i = 1, \dots, n-1$ ($CF_i > 0$),
 CF_n – odsetki i wykup obligacji ($CF_n > 0$).

Dla płaskiej struktury terminowej mamy

$$PV = \sum_{i=0}^n \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} = CF_0 + \frac{CF_1}{(1+r)^{t_1}} + \dots + \frac{CF_n}{(1+r)^{t_n}},$$

lub jeśli zastąpimy stopę procentową r intensywnością δ

$$PV = \sum_{i=0}^n CF_i e^{-t_i \delta}, \quad e^\delta = r + 1.$$

Pytanie: Przy jakiej stałej stopie procentowej r (intensywności δ) inwestycja jest opłacalna, tzn. $PV > 0$?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, wprowadza się pojęcie wewnętrznej stopy zwrotu.

Definicja 7.1. Wewnętrzną stopą zwrotu – IRR (Internal Rate of Return) nazywamy dodatni pierwiastek r „równania wartości”

$$\sum_{i=0}^n \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} = 0.$$

Natomiast wewnętrzną intensywnością nazywamy dodatnią liczbę δ , dla której

$$\sum_{i=0}^n CF_i e^{-t_i \delta} = 0.$$

Jak łatwo zauważyć, wewnętrzna stopa zwrotu, to taka stopa procentowa, przy której wartość obecna wpływów z inwestycji jest równa wartości obecnej nakładów inwestycyjnych. Podobnie wewnętrzna intensywność, to taka intensywność oprocentowania, przy której wartość obecna wpływów z inwestycji jest równa wartości obecnej nakładów inwestycyjnych.

Oczywiście obie te wielkości są związane zależnością

$$IRR = e^\delta - 1.$$

Zilustrujemy definicje na przykładzie.

Przykład 7.1. Rozważmy pięcioletni projekt inwestycyjny:

Rok	Nakłady	Przychody	CF_i
0	5000	0	-5000
1	2000	0	-2000
2	1000	2000	1000
3	1000	3000	2000
4	1000	4000	3000
5	1000	5000	4000

Zgodnie z danymi z tabelki mamy

$$PV(r) = -5000 - \frac{2000}{1+r} + \frac{1000}{(1+r)^2} + \frac{2000}{(1+r)^3} + \frac{3000}{(1+r)^4} + \frac{4000}{(1+r)^5}.$$

Jedynym dodatnim miejscem zerowym jest 0,10193. Zatem $IRR = 10,193\%$.

7.1.2. Istnienie IRR

W ogólnym przypadku funkcja $PV(r)$ może nie mieć miejsc zerowych lub może się zerować w kilku punktach.

Rozważmy następujący przykład:

Inwestor wpłaca 100 natychmiast i 132 na koniec dwóch lat w zamian za 230 otrzymane na koniec pierwszego roku. Równanie wartości dla tej transakcji ma postać

$$100(1+r)^2 + 132 = 230(1+r)$$

lub

$$(1+r)^2 - 2,3(1+r) + 1,32 = 0.$$

Po sprowadzeniu do postaci iloczynu mamy

$$[(1+r) - 1,1][(1+r) - 1,2] = 0.$$

Stąd stopą zwrotu jest 10% lub 20%.

Wprawdzie nie jest rzeczą łatwą pogodzić się z faktem, że istnieją transakcje z wieloma stopami zwrotu, jednak gdy zaobserwujemy, że funkcja $PV(r) = \sum_{t=0}^n v^t R_t$ po pomnożeniu przez $(1+r)^n$ jest wielomianem n -tego stopnia zmiennej r , to staje się oczywiste, że posiada ona – licząc pierwiastki zespolone i pierwiastki wielokrotne – n miejsc zerowych.

Można sobie wyobrazić przypadki jeszcze bardziej niezwykle:

Przykład 7.2. Inwestor A może pożyczyć 1000 od inwestora B na rok na 8% oraz natychmiast zainwestować tę kwotę na rok na 10%. Jaka jest stopa zwrotu inwestora A?

Odpowiedź. Zysk inwestora A w ciągu roku wynosi 20, ale kwota, którą zainwestował rzeczywiście A, wynosi 0. Tak więc jego stopa zwrotu jest nieskończona.

Przykład 7.3. Jaka jest stopa zwrotu z transakcji, w której inwestor płaci 100 natychmiast oraz 101 na końcu dwóch lat w zamian za 200 otrzymane na koniec roku?

Odpowiedź. Równaniem wartości jest

$$100(1+r)^2 + 101 = 200(1+r)$$

co oznacza, że

$$100r^2 = -1.$$

W tym przypadku wewnętrzna stopa zwrotu nie istnieje.

Pokażemy, że dla w miarę naturalnych ograniczeń na przepływy gotówki IRR istnieje. Wystarczy, że suma wypłat przewyższa sumę wpłat i pierwsza jest wpłata.

Lemat 7.1. Jeżeli $CF_0 < 0$ i $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$ to istnieje IRR .

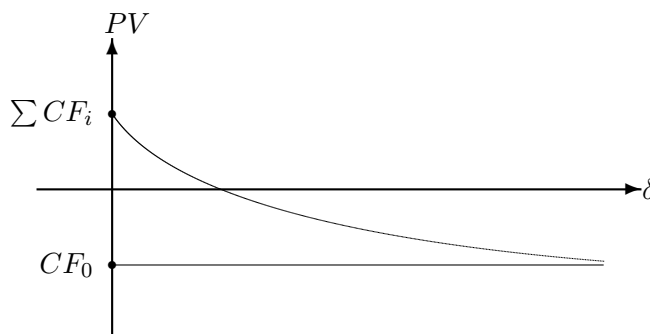
Dowód.

Rozważmy funkcję $PV(\delta)$

$$PV(\delta) = \sum_{i=0}^n CF_i e^{-t_i \delta}.$$

$$PV(0) = \sum_{i=0}^n CF_i > 0, \text{ i } \lim_{\delta \rightarrow +\infty} PV(\delta) = C_0 < 0.$$

Funkcja $PV(\delta)$ jest ciągła i ponadto zmienia znak. Zatem, musi istnieć punkt, w którym przyjmuje wartość zero (Rys. 7.1.2).



Rysunek 7.1. Wykres funkcji $PV(\delta)$.

Teza lematu pozostanie prawdziwa, gdy pierwszy przepływ gotówki (wpłata) ma miejsce w momencie $t_1 > 0$.

Lemat 7.2. Jeżeli $CF_0 = 0$, $CF_1 < 0$ i $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$ to istnieje IRR .

Dowód patrz ćwiczenie 7.1

7.1.3. Jednoznaczność IRR

Warunki gwarantujące jednoznaczność nie są już tak oczywiste. Najprostszy przypadek to „najpierw wpłaty, a potem wypłaty”. W szczególności obejmuje to przypadek inwestycji w obligacje, kiedy mamy jedną wpłatę, a następnie same wypłaty.

Lemat 7.3. *Jeżeli $CF_0, CF_1, \dots, CF_k < 0$, $CF_{k+1}, \dots, CF_n > 0$ i $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$ to istnieje dokładnie jedna IRR.*

Dowód.

Niech t_* „rozdziela” wpłaty i wypłaty

$$t_* = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}.$$

Wyłączamy czynnik wykładniczy $e^{-t_*\delta}$ z PV .

$$PV(\delta) = \sum_{i=0}^n CF_i e^{-t_i\delta} = e^{-t_*\delta} \sum_{i=0}^n CF_i e^{(t_*-t_i)\delta}$$

Następnie rozkładamy sumę na część dodatnią i ujemną. Zauważmy, że funkcja

$$A(\delta) = \sum_{i=0}^k CF_i e^{(t_*-t_i)\delta}$$

jest ściśle malejąca. Rzeczywiście dla $i = 0, \dots, k$ $CF_i < 0$ i $t_* - t_i > 0$. Ponadto

$$A(0) = \sum_{i=0}^k CF_i < 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} A(\delta) = -\infty.$$

Również funkcja

$$B(\delta) = \sum_{i=k+1}^n CF_i e^{(t_*-t_i)\delta}$$

jest ściśle malejąca. Rzeczywiście dla $i = k+1, \dots, n$ $CF_i > 0$ i $t_* - t_i < 0$. Ponadto

$$B(0) = \sum_{i=k+1}^n CF_i > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} B(\delta) = 0.$$

Zatem funkcja $A(\delta) + B(\delta) = e^{t_*\delta} PV(\delta)$ jest ciągła, ściśle malejąca i zmienia znak

$$A(0) + B(0) = \sum_{i=0}^n CF_i > 0; \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} A(\delta) + B(\delta) = -\infty.$$

Ponieważ czynnik wykładniczy nigdzie się nie zeruje, to istnieje dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji $PV(\delta)$.

Powyższy lemat można uogólnić na przypadek, gdy pierwsza wpłata następuje po czasie $t_1 > 0$.

Lemat 7.4. *Jeżeli $CF_0 = 0$, $CF_1, \dots, CF_k < 0$, $CF_{k+1}, \dots, CF_n > 0$ i $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$ to istnieje dokładnie jedna IRR.*

Bardziej skomplikowany przypadek to „jedna zmiana znaku skumulowanego przepływu”. Oznaczmy przez Q skumulowany przepływ.

$$Q_t = \sum_{t_i \leq t} CF_i, \quad t \geq 0.$$

Lemat 7.5. *Jeżeli $Q_t < 0$, dla $t < t_*$ i $Q_t > 0$, dla $t > t_*$ i ponadto t_i są wymierne, to istnieje dokładnie jedna IRR.*

Dowód.

Niech N wspólny mianownik $t_1, \dots, t_n$. Oznaczmy przez C_j przepływ gotówki w momencie $t = \frac{j}{N}$. $j = 0, 1, \dots$

$$C_j = \begin{cases} CF_i & \text{gdy } t_i = \frac{j}{N} \\ 0 & \text{gdy } t_i \neq \frac{j}{N} \end{cases}$$

Zacniemy od dowodu pomocniczego faktu.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} Q_{k/N} e^{-\delta \frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k C_j \right) e^{-\delta \frac{k}{N}} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} e^{-\delta \frac{k}{N}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{-\delta \frac{j}{N}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta \frac{k}{N}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{-\delta \frac{j}{N}} \cdot \frac{1}{1 - \exp(-\frac{\delta}{N})}. \end{aligned}$$

Zatem, gdy

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{-\delta \frac{j}{N}} = \sum_{j=0}^{Nt_n} C_j e^{-\delta \frac{j}{N}} = 0,$$

to

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_{k/N} e^{-\delta \frac{k}{N}} = 0.$$

Dalej powtarzamy rozumownie z poprzedniego lematu i pokazujemy, że istnieje dokładnie jedna IRR .

7.1.4. Kryterium inwestycyjne oparte na IRR

Założmy, że istnieje dokładnie jedna IRR , $CF_0 < 0$ i $\sum_i CF_i > 0$. Możemy wówczas przeformułować kryterium inwestycyjne oparte na PV (2.1.4) obliczonej dla płaskiej struktury terminowej. Niech $B(t) = (1+r)^{-t}$ – czynnik dyskontujący.

Lemat 7.6. *Jeżeli $IRR > r$, to inwestycja jest opłacalna, a gdy $IRR < r$, to nieopłacalna.*

Dowód.

$PV(r)$ zmienia znak w IRR z „+” na „-”. Zatem gdy $IRR > r$, to $PV(r) > 0$, a gdy $IRR < r$, to $PV(r) < 0$.

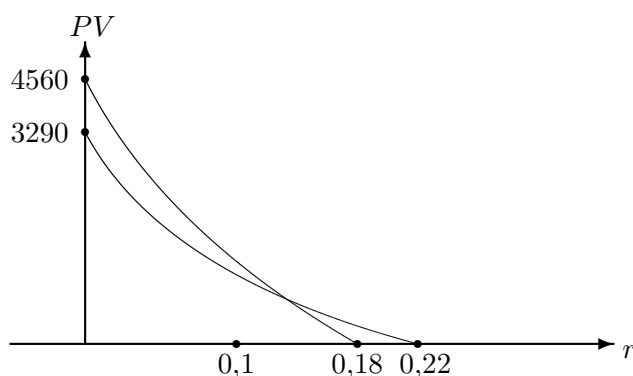
Uwaga. Gdy $IRR > r$ to $IRR - r$ wyznacza tzw. „margines bezpieczeństwa”.

Gdy IRR nie jest wyznaczone jednoznacznie (istnieje kilka miejsc zerowych), ale $CF_0 < 0$ i $\sum_i CF_i > 0$, to można sformułować jedynie dużo słabsze kryterium: Jeżeli $IRR_{min} > r$, to inwestycja jest opłacalna, a gdy $IRR_{max} < r$, to nieopłacalna.

Przykład 7.4. Rozważmy dwa wykluczające się projekty. W projekcie A nakłady inwestycyjne wynoszą 7000 zł, natomiast wpływy 3430 zł, płatne na koniec każdego z trzech lat. W projekcie B nakłady inwestycyjne wynoszą 12000 zł, a wpływy 5520 zł, płatne na koniec każdego z trzech lat. Przy założeniu, że koszt kapitału wynosi 10% rocznie (rynkowa stopa procentowa), stosując

kryterium PV oraz IRR , rozstrzygnąć, który projekt należy wybrać.

Rozwiązanie. Dla projektu A mamy $IRR = 22,05\%$, a dla projektu B $IRR = 18,01\%$. Obie te stopy są wyższe od stopy rynkowej, zatem obie inwestycje są opłacalne. Na pytanie, którą z nich wybrać, nie ma jednoznacznej odpowiedzi. Inwestycja A ma wyższą wewnętrzną stopę zwrotu, czyli większy margines bezpieczeństwa. Za to inwestycja B ma wyższą wartość obecną. Rzeczywiście dla $r = 0,1$ mamy $PV_A = 1529,9$ i $PV_B = 1772,42$. Oznacza to, że gdy porównujemy dwie opłacalne inwestycje, to nasze kryteria mogą dawać sprzeczne wnioski (Rys. 7.1.4).



Rysunek 7.2. Wykresy funkcji $PV_A(r)$ i $PV_B(r)$.

7.1.5. IRR a YTM

Rozważmy obligację, z której n rotnie wypłacane są odsetki (obligacja n -kuponowa), co daje $n + 1$ przepływów pieniężnych. Niech $P = -CF_0$ – cena zakupu, $CF_1, \dots, CF_{n-1}$ – kupony, CF_n – ostatni kupon i kwota otrzymana po wykupieniu obligacji. Kolejne przepływy gotówki następują, odpowiednio, po czasie $t_1, \dots, t_n$.

Dla takiej obligacji stopa zwrotu liczona do momentu zapadalności (YTM) jest wyznaczona przez równanie

$$P(1 + YTM)^{t_n} = CF_1(1 + YTM)^{t_n - t_1} + \dots + CF_{n-1}(1 + YTM)^{t_n - t_{n-1}} + CF_n.$$

Lub po podzieleniu przez $(1 + YTM)^{t_n}$

$$0 = CF_0 + \frac{CF_1}{(1 + YTM)^{t_1}} + \dots + \frac{CF_{n-1}}{(1 + YTM)^{t_{n-1}}} + \frac{CF_n}{(1 + YTM)^{t_n}}.$$

To samo równanie wyznacza wewnętrzną stopę zwrotu.

Wniosek 7.1.

$$YTM = IRR$$

Ponadto spełnione są założenia lematu 2.2.3. Zatem YTM jest wyznaczona jednoznacznie.

7.1.6. Rzeczywista roczna stopa oprocentowania

Wewnętrzna stopa zwrotu znalazła swoje miejsce w obowiązujących w Polsce aktach prawnych dotyczących kredytów. W ustawie o kredycie konsumenckim ([46, 47]) ustawodawca wprowadził wymóg informowania kredytobiorcy o „rzeczywistej rocznej stopie oprocentowania”, którą dla kredytów o stałym oprocentowaniu wyznacza się jako wewnętrzną stopę zwrotu dla wszystkich przepływów gotówki wynikających z danej umowy kredytowej. Zatem jest to stopa procentowa i , która spełnia następujące równanie

$$\sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+i)^{t_k}} = 0,$$

gdzie,

$k = 1, \dots, n$ – numer kolejnego przepływu gotówki;

t_k – czas wyrażony w latach, pomiędzy pierwszą wypłatą i k -tym przepływem gotówki ($t_1 = 0$), wyznaczony zgodnie z zasadą „dokładnej liczby dni” (patrz podrozdział 1.3.8);

CF_k – k -ty przepływ gotówki;

$$CF_k = -K_k + RK_k + OD_k + P_k.$$

Transze kredytu (K_k) bierzemy ze znakiem minus, a raty kredytowe (RK_k), zapłacone odsetki OD_k , prowizje i inne opłaty (P_k) ze znakiem plus.

Zgodnie z ustawą, rzeczywistą roczną stopę oprocentowania podaje się z dokładnością co najmniej do 1 promila.

7.1.7. Uogólnienia

1. Przypadek nieskończonej liczby płatności.

Równanie wartości ma postać

$$\sum_{i=0}^{\infty} CF_i e^{-\delta t_i} = 0.$$

Zadanie jest dobrze postawione, gdy szereg jest zbieżny.

2. Przypadek ciągłego strumienia płatności.

Równanie wartości ma postać

$$P = \int_0^{+\infty} g(s) e^{-\delta s} ds,$$

gdzie: P cena (koszt inwestycji) ($P = -CF_0$), $g(t)$ gęstość płatności.

Oznaczmy przez $Q(t)$ skumulowany przepływ gotówki

$$Q(t) = -P + \int_0^t g(s) ds.$$

Lemat 7.7. *Jeżeli $Q(t) < 0$, dla $t < t_*$ i $Q(t) > 0$, dla $t > t_*$ i ponadto funkcja $Q(t)$ jest ograniczona i $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q_\infty > 0$, to istnieje dokładnie jedna IRR.*

Dowód.

Rozważmy funkcję $PV(\delta)$,

$$PV(\delta) = -P + \int_0^{+\infty} g(s) e^{-\delta s} ds.$$

Jak łatwo zauważyć, zmienia ona znak $PV(0) = Q_\infty > 0$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} PV(t) = Q(0) < 0$. Ponieważ jest ciągła, to posiada miejsca zerowe.

Po scałkowaniu przez części otrzymamy

$$\begin{aligned} PV(\delta) &= -P + \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\delta s} ds = -P + Q(s)e^{-\delta s} \Big|_0^\infty + \delta \int_0^{+\infty} Q(s)e^{-\delta s} ds = \\ &= \delta e^{-\delta t_*} \int_0^{+\infty} Q(s)e^{\delta(t_*-s)} ds = \\ &= \delta e^{-\delta t_*} \left(\int_0^{t_*} Q(s)e^{\delta(t_*-s)} ds + \int_{t_*}^{+\infty} Q(s)e^{\delta(t_*-s)} ds \right). \end{aligned}$$

Ponieważ obie otrzymane całki są funkcjami malejącymi zmiennej δ , to PV zeruje się tylko w jednym punkcie.

7.2. Ćwiczenia

Ćwiczenie 7.1. Udowodnić lemat 7.2.

Rozwiązanie.

Mamy $CF_0 = 0$, zatem

$$PV(\delta) = \sum_{i=1}^n CF_i e^{-t_i \delta} = e^{t_1 \delta} \cdot \sum_{i=1}^n CF_i e^{(t_1 - t_i) \delta}.$$

Oznaczmy drugi czynnik przez $FV(\delta)$,

$$FV(\delta) = \sum_{i=1}^n CF_i e^{(t_1 - t_i) \delta}.$$

Ponieważ $CF_1 < 0$ i $\sum_{i=1}^n CF_i > 0$, to

$$FV(0) = \sum_{i=1}^n CF_i > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} FV(\delta) = CF_1 < 0.$$

Funkcja $FV(\delta)$ jest ciągła i ponadto zmienia znak. Zatem, istnieje punkt δ_0 taki, że $FV(\delta_0) = 0$.

Ćwiczenie 7.2. Udowodnić lemat 7.4.

Ćwiczenie 7.3. Zainwestowane 200 zł zwracają 120 zł po roku i 110 zł po dwóch latach. Wyznaczyć wewnętrzną stopę zwrotu dla tej inwestycji.

Rozwiązanie.

Równanie wartości ma postać

$$-200 + \frac{120}{1+r} + \frac{110}{(1+r)^2} = 0.$$

Skracamy współczynniki przez 10, podstawiamy $X = 1 + r$ i mnożymy równanie przez X^2 . Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$20X^2 - 12X - 11 = 0.$$

Δ wynosi 1024 czyli 32^2 . Zatem pierwiastek większy od 1 to

$$X_+ = \frac{12 + 32}{2 \cdot 20} = 1,1.$$

Czyli $IRR = X_+ - 1 = 0,1$.

Odpowiedź.

Wewnętrzna stopa zwrotu rozpatrywanej inwestycji wynosi 10%.

Ćwiczenie 7.4. Która z poniższych inwestycji ma wyższą wewnętrzną stopę zwrotu?

Inwestycja A.

Zakup za 900 zł czteroletniej kuponowej obligacji o wartości nominalnej 1 000 zł o stałym rocznym oprocentowaniu 20% (odsetki płatne po upływie kolejnego roku).

Inwestycja B.

Zakup za 800 zł zerokuponowej rocznej obligacji o wartości nominalnej 1 000 zł.

Rozwiązanie.

Wewnętrzna stopa zwrotu dla zerokuponowej rocznej obligacji o wartości nominalnej 1 000 zł i cenie 800 zł jest równa „zwykłej” stopie zwrotu i wynosi

$$IRR_B = \frac{1000 - 800}{800} = 0,25.$$

Wyznaczamy Present Value inwestycji A dla $r = IRR_B = 0,25$.

$$PV_A(0,25) = -900 + \frac{200}{1,25} + \frac{200}{1,25^2} + \frac{200}{1,25^3} + \frac{1200}{1,25^4} = -18,08.$$

Ponieważ $PV_A(r)$ jest funkcją malejącą to jej miejsce zerowe (IRR_A) leży na lewo od 0,25.

Odpowiedź.

Inwestycja B ma wyższą wewnętrzną stopę zwrotu.

Ćwiczenie 7.5. Kredytobiorca otrzymał kredyt 10 tys. zł wypłacony w dwóch równych transzach w odstępie rocznym. W kolejnych latach kredytobiorca spłacił kredyt w czterech równych ratach po 3000 zł. Spłaty miały miejsce po dwóch, trzech, czterech i pięciu latach od dnia wypłaty pierwszej transzy. Ponadto przy wypłacie pierwszej transzy pobrano prowizję w wysokości 500 zł. Ile wyniosła rzeczywista roczna stopa oprocentowania?

Rozwiązanie. Mamy sześć przepływów gotówki $n = 6$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, ..., $t_6 = 5$.

$$CF_1 = -5000 + 500 = -4500,$$

$$CF_2 = -5000,$$

$$CF_3 = CF_4 = CF_5 = CF_6 = 3000.$$

Z lematu 2.2.3 wynika, że dla powyższych przepływów gotówki wewnętrzna stopa zwrotu, a więc i rzeczywista roczna stopa oprocentowania i są wyznaczone jednoznacznie. Zatem i jest jedynym dodatnim pierwiastkiem równania

$$-4500 - \frac{5000}{1+i} + \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{3000}{(1+i)^3} + \frac{3000}{(1+i)^4} + \frac{3000}{(1+i)^5} = 0.$$

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$i \approx 0,082882057.$$

Odpowiedź.

Rzeczywista roczna stopa oprocentowania wynosi 8,3%.

Ćwiczenie 7.6. Sklep z artykułami gospodarstwa domowego proponuje swoim klientom „kredyt 0%”. Należność za nabyty towar klient płaci w 12 równych miesięcznych ratach. Ponadto za udzielenie kredytu pobierana jest prowizja, która wynosi 5% kwoty kredytu. Wiedząc, że pierwsza rata ma miejsce po miesiącu od zawarcia umowy kredytowej (i zakupu towaru), a prowizja jest pobierana w dniu zawarcia umowy, wyznacz rzeczywistą roczną stopę oprocentowania.

Rozwiązanie.

Mamy trzynastcie przepływów gotówki $n = 13$. Dla uproszczenia przyjmijmy zasadę równych miesięcy $t_j = (j - 1)/12$. Niech K oznacza kwotę kredytu.

$$CF_1 = -K + 0,05K = -0,95K;$$

$$CF_j = \frac{K}{12}, \quad j = 2, \dots, 13.$$

Zatem rzeczywista roczna stopa oprocentowania i jest jedynym dodatnim pierwiastkiem równania

$$-0,95K + \sum_{j=2}^{13} \frac{K}{12} (1+i)^{-\frac{j-1}{12}} = 0.$$

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$i \approx 0,100088186852655.$$

Odpowiedź.

Rzeczywista roczna stopa oprocentowania wynosi 10%.

Ćwiczenie 7.7. Inwestor zakupił za 100 JM rentę o ciągłym stałym strumieniu płatności o gęstości 10 w skali roku. Płatności zaczną się za rok i będą trwały nieprzerwanie 11 lat. Wyznaczyć wewnętrzną stopę zwrotu.

Rozwiązanie.

Równanie wartości ma postać

$$100 = \int_1^{12} 10e^{-\delta t} dt = -\frac{10}{\delta} (e^{-12\delta} - e^{-\delta}).$$

Jego pierwiastek to $\delta \approx 0,0148$.

Zatem $IRR = e^{\delta} - 1 \approx 0,0149$.

Odpowiedź.

Wewnętrzna intensywność wynosi 0,0148, a wewnętrzna stopa zwrotu 0,0149.

8. Zarządzanie portfelem instrumentów dłużnych

Liczba godzin 2.

Zakres materiału:

Czas trwania (duration) i zmodyfikowany czas trwania. Wypukłość. Uodpornianie (immunizacja) portfela. Znaczenie duration.

8.1. Duration – średni czas życia i convexity – wypukłość

Rozważmy inwestycję, w czasie trwania której będzie miało miejsce n nieujemnych przepływów gotówki $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$, (np. obligację n -kuponową o stałym oprocentowaniu lub portfel zawierający kilka obligacji). Założmy, że jej wartość obecna jest dodatnia (tzn. przynajmniej jeden przepływ gotówki jest niezerowy).

Definicja 8.1. Duration, to średni czas życia danej inwestycji ważony udziałem wartości obecnej kolejnych przepływów gotówki w wartości obecnej całej inwestycji

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{t_i PV_i}{PV} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i CF_i B(t_i).$$

Convexity (wypukłość), to średni kwadrat czasu życia danej inwestycji

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2 PV_i}{PV} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i^2 CF_i B(t_i).$$

Uwaga. Warto zauważyć, że duration i convexity zdefiniowane zostały za pomocą analogicznych formuł jak pierwszy i drugi moment zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym. A stąd wynika, że dla duration i convexity zachodzą podobne zależności jak dla momentów.

Jako przykład wykorzystania tej analogii pokażemy, że średni kwadrat C jest większy od kwadratu średniej D^2 .

Lemat 8.1. Dla dowolnej inwestycji o dodatnich przepływach gotówki

$$C \geq D^2.$$

Ponadto równość zachodzi tylko wtedy, gdy ma miejsce dokładnie jeden niezerowy przepływ gotówki (np. $n = 1$).

Dowód.

Rozważmy średni kwadrat odchylenia od średniej. Mamy

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (t_i - D)^2 \frac{PV_i}{PV} = \sum_{i=1}^n (t_i^2 - 2Dt_i + D^2) \frac{PV_i}{PV} =$$

$$= \sum_{i=1}^n t_i^2 \frac{PV_i}{PV} - 2D \sum_{i=1}^n t_i \frac{PV_i}{PV} + D^2 = C - D^2.$$

8.2. Równoległe przesunięcia struktur terminowych

Z obserwacji rynku wynika, że struktura terminowa stóp procentowych nie jest stała, lecz zmienia się wraz z upływem czasu. Najczęściej obserwowane zmiany polegają na zwiększeniu lub zmniejszeniu średniej efektywnej intensywności o stałą, co wizualnie odpowiada przesunięciu równoległemu jej wykresu. Okazuje się, że wpływ takich zmian na wartość obecną portfela obligacji dobrze charakteryzuje się używając duration i convexity.

Definicja 8.2. Jednoparametrowa rodzina struktur terminowych czynnika dyskontującego

$$B(x, t) = e^{-xt} B_o(t), \quad t \geq 0, \quad x > x_0,$$

gdzie $B_o: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ustalona nierosnąca funkcja taka, że $B_o(0) = 1$, nazywa się równoległym przesunięciem $B_o(t)$.

Przykład 8.1. Gdy funkcja B_o jest stała, to znaczy

$$\forall t \geq 0 \quad B_o(t) = 1,$$

to $B(x, t)$, $x > 0$ jest rodziną wszystkich płaskich struktur terminowych.

Przykład 8.2. Gdy funkcja B_o jest zadane przez intensywność $\delta(t)$,

$$B_o(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(s) ds\right),$$

to intensywność $B(x, t)$ wynosi

$$\delta(t) + x.$$

Ponieważ czynnik dyskontujący jest ściśle malejący, to otrzymujemy następujące oszacowanie x_0

$$x_0 \geq -\inf\{\delta(t) : t \geq 0\}.$$

Jak w podrozdziale 8.1 rozważamy inwestycję, w czasie trwania której będzie miało miejsce n przepływów gotówki $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$. Zakładamy, że wszystkie CF_i są dodatnie.

Oznaczmy przez $PV(x)$, $D(x)$ i $C(x)$ wartość obecną, duration i convexity wyznaczone zgodnie ze strukturą terminową $B(x, t)$.

Lemat 8.2.

$$PV'(x) = -PV(x) \cdot D(x), \quad PV''(x) = PV(x) \cdot C(x), \quad D'(x) = D(x)^2 - C(x).$$

Dowód.

$$PV'(x) = \sum_{i=1}^n (CF_i e^{-xt_i} B_o(t_i))' = \sum_{i=1}^n (-t_i) CF_i e^{-xt_i} B_o(t_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^n t_i PV_i(x) = -PV(x)D(x). \\
PV''(x) &= \sum_{i=1}^n (CF_i e^{-xt_i} B_o(t_i))'' = \sum_{i=1}^n t_i^2 CF_i e^{-xt_i} B_o(t_i) = \\
&= \sum_{i=1}^n t_i^2 PV_i(x) = PV(x)C(x).
\end{aligned}$$

Ostatnią równość otrzymamy po zróźniczkowaniu pierwszej.

$$\begin{aligned}
PV(x)C(x) &= PV''(x) = (-PV(x)D(x))' = \\
&= -PV'(x)D(x) - PV(x)D'(x) = PV(x)D(x)^2 - PV(x)D'(x).
\end{aligned}$$

Po skróceniu przez $PV(x)$ otrzymujemy

$$C(x) = D(x)^2 - D'(x).$$

Z lematu 8.1 wynika, że w przypadku, gdy mamy co najmniej dwa dodatnie przepływy gotówki, to pochodna duration jest ujemna. Zatem

Wniosek 8.1. *Gdy $n \geq 2$ to duration $D(x)$ jest ściśle malejącą funkcją zmiennej x . Przy przesunięciu równoległym w górę średni czas życia maleje, a przy przesunięciu w dół rośnie.*

Z punktu widzenia praktyka duration mierzy liniową część zależności wartości teoretycznej (czyli PV) od przesunięcia równoległego (czyli od „czynnika ryzyka” x), a convexity część kwadratową tej zależności. Rzeczywiście po zastosowaniu wzoru Taylora otrzymujemy:

Wniosek 8.2. *Dla małych h*

$$PV(x+h) = PV(x)(1 - hD(x) + \frac{1}{2}h^2C(x)) + O(h^3).$$

Rozważmy teraz ogólniejsze inwestycje, w których mamy do czynienia zarówno z wypłatami, jak i z wpłatami (przychodami i rozchodami), tzn. przepływy gotówki mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne. Niech I oznacza inwestycję, w czasie trwania której będzie miało miejsce n przepływów gotówki $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$. Zakładamy, że przynajmniej jeden przepływ jest dodatni i przynajmniej jeden ujemny.

Przedstawimy I jako różnicę dwóch inwestycji o przepływach nieujemnych I^+ i I^- . W czasie trwania I^+ (I^-) będzie miało miejsce n przepływów gotówki CF_i^+ (CF_i^-), odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$,

$$CF_i^+ = (CF_i)^+ = \max(0, CF_i), \quad CF_i^- = (CF_i)^- = \max(0, -CF_i).$$

Oznaczmy przez $PV^\pm(x)$, $D^\pm(x)$ i $C^\pm(x)$ wartość obecną, duration i convexity wyznaczone zgodnie ze strukturą $B(x, t)$ dla inwestycji $I^\pm$.

Lemat 8.3. *Wartość obecna $PV(x)$ inwestycji I jest różnicą wartości obecnych inwestycji $I^\pm$*

$$PV(x) = PV^+(x) - PV^-(x).$$

Dowód.

Rzeczywiście dla każdego i

$$CF_i = \max(0, CF_i) - \max(0, -CF_i) = CF_i^+ - CF_i^-.$$

Zatem

$$\begin{aligned} PV(x) &= \sum_{i=1}^n CF_i B(x, t_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n CF_i^+ B(x, t_i) - \sum_{i=1}^n CF_i^- B(x, t_i) = PV^+(x) - PV^-(x). \end{aligned}$$

Założmy dodatkowo, że dla pewnego $x_* > x_0$ wartości obecne obu inwestycji $I^\pm$ są równe P , $P > 0$,

$$PV^+(x_*) = PV^-(x_*) = P.$$

Wówczas wartość obecna inwestycji I $PV(x_*)$ jest równa 0. Natomiast dla x bliskich x_* wartość obecna $PV(x)$ zależy od duration i convexity $I^\pm$.

Lemat 8.4. *Dla małych h*

$$PV(x_* + h) = P(h(D^-(x_*) - D^+(x_*)) + \frac{1}{2}h^2(C^+(x_*) - C^-(x_*)) + O(h^3)).$$

Dowód.

Korzystamy z lematu 8.3 i wniosku 8.2.

$$\begin{aligned} PV(x_* + h) &= PV^+(x_* + h) - PV^-(x_* + h) = \\ &= PV^+(x_*)(1 - hD^+(x_*) + \frac{1}{2}h^2C^+(x_*)) - PV^-(x_*)(1 - hD^-(x_*) + \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2C^-(x_*)) + O(h^3) = \\ &= P(h(D^-(x_*) - D^+(x_*)) + \frac{1}{2}h^2(C^+(x_*) - C^-(x_*)) + O(h^3)). \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy duration są równe, to część liniowa się zeruje i x_* jest punktem krytycznym $PV(x)$. Jeśli dodatkowo convexity są różne, to w x_* mamy ekstremum lokalne.

Wniosek 8.3. *Niech $D^+(x_*) = D^-(x_*)$ i $PV^+(x_*) = PV^-(x_*)$. Wówczas gdy $C^+(x_*) < C^-(x_*)$, to $PV(x)$ ma w x_* maksimum lokalne, a gdy $C^+(x_*) > C^-(x_*)$, to $PV(x)$ ma w x_* minimum lokalne.*

Jeżeli dodatkowo ograniczymy przemienność wpłat i wypłat, to okaże się, że w punkcie x_* jest ekstremum globalne. Na przykład, jeśli najpierw mamy serię wypłat, potem serię wpłat i na koniec znowu serię wypłat, to w x_* $PV(x)$ ma globalne minimum.

Twierdzenie 8.1. *Jeżeli CF_i zmieniają dwukrotnie znak*

$$CF_1, \dots, CF_k > 0, \quad CF_{k+1}, \dots, CF_m < 0, \quad CF_{m+1}, \dots, CF_n > 0,$$

oraz $D^+(x_) = D^-(x_*)$ i $PV^+(x_*) = PV^-(x_*)$, to $PV(x)$ ma w punkcie x_* silne minimum globalne*

$$\forall x > x_0 \quad x \neq x_* \Rightarrow PV(x) > 0 = PV(x_*).$$

Dowód.

Niech a i b rozdzielają momenty przychodów i wydatków

$$t_k < a < t_{k+1}, \quad t_m < b < t_{m+1}.$$

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujące oszacowania wariancji „czasu życia” inwestycji $I^\pm$.

Lemat 8.5. *Dla każdego x większego od x_0*

$$C^-(x) - D^-(x)^2 < (D^-(x) - a)(b - D^-(x)),$$

$$C^+(x) - D^+(x)^2 > (D^+(x) - a)(b - D^+(x)).$$

Dowód lematu.

Zauważmy, że momenty czasu t_i , w których mają miejsce wydatki spełniają oszacowanie

$$a < t_i < b$$

zatem

$$\begin{aligned} C^-(x) - D^-(x)^2 - (D^-(x) - a)(b - D^-(x)) &= C^-(x) - (a + b)D^-(x) + ab = \\ &= \sum_{i=k+1}^m \frac{-PV_i(x)}{PV^-(x)}(t_i^2 - (a + b)t_i + ab) = \sum_{i=k+1}^m \frac{-PV_i(x)}{PV^-(x)}(t_i - a)(t_i - b) < 0. \end{aligned}$$

Natomiast momenty czasu t_i , w których mają miejsce przychody, spełniają oszacowanie

$$t_i < a < b, \quad \text{lub} \quad a < b < t_i,$$

zatem

$$C^+(x) - D^+(x)^2 - (D^+(x) - a)(b - D^+(x)) = \sum \frac{PV_i(x)}{PV^+(x)}(t_i - a)(t_i - b) > 0.$$

Dowód twierdzenia cd.

Zamiast różnicy PV^+ i PV^- będziemy badać ich iloraz. Niech

$$F(x) = \frac{PV^+(x)}{PV^-(x)}, \quad x > x_0.$$

Z założenia $PV^+(x_*) = PV^-(x_*)$ wynika, że $F(x_*) = 1$. Pokażemy, że funkcja F ma w tym punkcie silne minimum globalne.

$$F'(x) = \frac{PV^+(x)'PV^-(x) - PV^+(x)PV^-(x)'}{PV^-(x)^2} = \frac{PV^+(x)}{PV^-(x)}(-D^+(x) + D^-(x)).$$

Z założenia $D^+(x_*) = D^-(x_*)$ wynika, że $F'(x_*) = 0$. Pokażemy, że jest to jedyny punkt, w którym pochodna F się zeruje.

Niech $G(x) = D^-(x) - D^+(x)$. Oczywiście $G(x_*) = 0$. Z lematu 8.2 otrzymujemy

$$G'(x) = -(C^-(x) - D^-(x)^2) + (C^+(x) - D^+(x)^2).$$

Z oszacowania wariancji czasu życia wynika, że gdy dla pewnego x $D^+(x) = D^-(x)$ (czyli $G(x) = 0$), to $G'(x) > 0$. Ponieważ G jest funkcją ciągłą, to z powyższego wynika, że zeruje się

ona tylko w punkcie x_* i co więcej – zmienia w tym punkcie znak z „-” na „+”. Obie wartości obecne są nieujemne, zatem to samo zachodzi dla F' ,

$$x < x_* \Rightarrow F'(x) < 0, \quad x > x_* \Rightarrow F'(x) > 0.$$

Czyli F ma w punkcie x_* silne minimum globalne. Zatem

$$\forall x \neq x_* \quad \frac{PV^+(x)}{PV^-(x)} = F(x) > F(x_*) = 1.$$

Co kończy dowód.

Powyższe fakty są wykorzystywane w praktyce bankowej przy tworzeniu tzw. **regulacji ostrożnościowych**, które najczęściej sprowadzają się do ustalenia limitów na moduł różnicy duration dla pasywów i aktywów (tzw. *duration gap*) oraz dla różnicy convexity. Ponadto wymaga się, aby present value pasywów i present value aktywów były równe.

8.3. Przypadek płaskiej struktury czasowej

Rozważmy płaską strukturę terminową, opisaną poprzez zależność od stopy procentowej r

$$B(t) = (1 + r)^{-t}, \quad r > 0.$$

Biorąc pod uwagę, że rodzinę płaskich struktur terminowych można przedstawić jako rodzinę przesunięć równoległych

$$B(t) = e^{-xt}, \quad x = \ln(1 + r),$$

to wyniki z poprzedniego podrozdziału stosują się również do tego przypadku. Co najwyżej należy skorzystać z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej, aby opisać zależność PV od r .

Jak poprzednio rozważmy inwestycję, w czasie trwania której będzie miało miejsce n dodatkowych przepływów gotówki $CF_1, CF_2, \dots, CF_n$, odpowiednio w momentach $0 < t_1 < \dots < t_n$. Oznaczmy przez $PV(r)$, $D(r)$ i $C(r)$ odpowiednio wartość obecną, duration i convexity wyznaczone zgodnie ze strukturą $B(t) = (1 + r)^{-t}$.

Lemat 8.6.

$$PV'(r) = -PV(r) \cdot \frac{D(r)}{1 + r}, \quad PV''(r) = PV(r) \cdot \frac{C(r) + D(r)}{(1 + r)^2},$$

$$D'(r) = \frac{D(r)^2 - C(r)}{1 + r}.$$

Dowód - patrz ćwiczenie 8.2.

Uwaga. Iloraz

$$d = \frac{D}{1 + r}.$$

nazywa się **zmodyfikowanym duration** (w odróżnieniu od D zwanego **duration Macaulaya**).

Na podstawie lematu 8.1 wnioskujemy, że gdy co najmniej dwa przepływy gotówki są dodatnie, to pochodna duration jest ujemna. Zatem

Wniosek 8.4. Gdy $n \geq 2$ to duration $D(r)$ jest ściśle malejącą funkcją r . Gdy rynkowa stopa procentowa r rośnie, to średni czas życia maleje i na odwrót, gdy r maleje, to średni czas życia rośnie.

Wniosek 8.5. Gdy $n \geq 2$ to duration $D(r)$ przyjmuje wartości większe niż czas pierwszej wypłaty t_1 i mniejsze niż średni czas wypłat ważony udziałem kolejnych wypłat w ich sumie

$$\{D(r) : r \in (0, \infty)\} = (t_1, \frac{\sum t_i CF_i}{\sum CF_i}).$$

Dowód - patrz ćwiczenie 8.3.

Z punktu widzenia praktyka duration mierzy część liniową zależności wartości teoretycznej (czyli PV) od „czynnika ryzyka” r , a suma duration i convexity część kwadratową tej zależności. Rzeczywiście po zastosowaniu wzoru Taylora otrzymujemy:

Wniosek 8.6. Dla małych h prawdziwy jest wzór

$$PV(r+h) = PV(r)(1 - hD(r)(1+r)^{-1} + \frac{1}{2}h^2(C(r) + D(r))(1+r)^{-2}) + O(h^3).$$

8.4. Future Value i immunizacja portfela obligacji

Niech PV_I oznacza wartość obecną inwestycji I .

Future Value ozn. FV_t (wartość przyszła) to wielkość przepływu gotówki po czasie t , którego wartość obecna jest równa PV_I .

$$PV_I = FV_t B(t), \quad \text{czyli} \quad FV_t = \frac{PV_I}{B(t)} = \sum CF_i \frac{B(t_i)}{B(t)}.$$

W szczególności, jeżeli I generuje tylko jeden przepływ gotówki CF , który ma miejsce w momencie t , to

$$FV_t = CF.$$

W modelach opartych na istnieniu deterministycznego procesu akumulacji $K(t)$, Future Value interpretuje się jako wartość inwestycji I w chwili t . A dokładniej, jest to suma następujących dwóch kwot: kwoty otrzymanej przez reinwestowanie przepływów gotówki CF_i dla $t_i < t$ i kwoty równej wartości obecnej pozostałych przepływów gotówki liczonej po upływie czasu t . Niech T oznacza chwilę obecną, a F wartość zreinwestowanej inwestycji I w momencie $T+t$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{t_i < t} CF_i \frac{K(T+t)}{K(T+t_i)} + \sum_{t_i \geq t} CF_i B(T+t, t_i-t) = \\ &= \sum CF_i \frac{K(T)}{K(T+t_i)} \frac{K(T+t)}{K(T)} = \frac{PV}{B_T(t)} = FV_t. \end{aligned}$$

Na ogół w modelach stochastycznych powyższy wzór nie zachodzi. Co więcej może się okazać, że wartość oczekiwana F jest różna od FV_t .

Przeanalizujmy jak zmienia się FV_t przy przesunięciu równoległym struktury terminowej. Niech CF_s oznacza przepływ gotówki w momencie s , a $FV_t(x)$ Future Value inwestycji I liczoną według struktury terminowej $B(x, t) = B_o(t) \exp(-xt)$.

$$FV_t(x) = \sum_{i=1}^n CF_{t_i} \frac{B(x, t_i)}{B(x, t)} = \sum_{i=1}^n CF_{t_i} \frac{B_o(t_i)}{B_o(t)} e^{-x(t_i-t)} =$$

$$= \sum_{t_i < t} \frac{CF_{t_i} B_o(t_i)}{B_o(t)} e^{x(t-t_i)} + CF_t + \sum_{t_i > t} \frac{CF_{t_i} B_o(t_i)}{B_o(t)} e^{-x(t_i-t)}.$$

Zauważmy, że gdy x rośnie, to rośnie pierwszy składnik i maleje ostatni; na odwrót, gdy x maleje, to maleje pierwszy składnik i rośnie ostatni.

Zachodzi pytanie, w jaki sposób FV_t zależy od x . Okazuje się, że w ogólnym przypadku odpowiedź można sformułować, wykorzystując duration $D(x)$. Dla ułatwienia ograniczymy się do takich inwestycji, w których wszystkie przepływy gotówki są dodatnie i liczba przepływów jest nie mniejsza od dwóch.

Twierdzenie 8.2. *Jeżeli wszystkie przepływy gotówki inwestycji I są dodatnie*

$$CF_1, \dots, CF_n > 0, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad n \geq 2,$$

oraz $D(x_) = t$, $x_* > x_0$, to $FV_t(x)$ ma w punkcie x_* silne minimum globalne*

$$\forall x > x_0 \quad x \neq x_* \Rightarrow FV_t(x) > FV_t(x_*).$$

Dowód.

Rozważamy nową inwestycję I_1 złożoną z inwestycji I oraz inwestycji I^- o jednym ujemnym przepływie gotówki

$$CF^- = -FV_t(x_*),$$

który ma miejsce po upływie czasu t . Zgodnie z twierdzeniem 8.1 Present Value inwestycji I_1 $PV^1(x)$ ma silne globalne minimum w punkcie x_*

$$PV^1(x_*) = 0, \quad PV^1(x) > 0 \text{ dla } x \neq x_*.$$

Ponieważ Future Value jest liniowa ze względu na inwestycje, to

$$FV_t(x) = FV_t^1(x) + FV_t(x_*) = \frac{1}{B(x, t)} PV^1(x) + FV_t(x_*).$$

Zatem dla $x \neq x_*$ zachodzi ostra nierówność $FV_t(x) > FV_t(x_*)$.

W przypadku, gdy zachodzi tylko jeden niezerowy przepływ gotówki w chwili t_1 , to FV_{t_1} nie zależy od x , a dla $t < t_1$ (odpowiednio $t > t_1$) $FV_t(x)$ jest ściśle malejącą (odp. ściśle rosnącą) funkcją x .

Uwaga. Dobór składu portfela obligacji o stałym oprocentowaniu taki, że średni czas życia portfela pokrywa się z momentem t , dla którego wyznaczamy Future Value, nazywa się **immunizacją**, czyli uodpornieniem portfela. Według klasycznej teorii, należy tak dobierać skład portfela, aby był on uodporniony na przesunięcie równoległe struktury terminowej.

8.5. Ćwiczenia

Ćwiczenie 8.1. Rozważmy, podobnie jak w zadaniu 6.8, 4 inwestycje o przepływach gotówki, takich jak spłaty kredytów w przykładzie z punktu 3 podrozdziału 4.1.

$$\begin{aligned} I1 : \quad & CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0, \quad CF_4 = 1464,1. \\ I2 : \quad & CF_1 = CF_2 = CF_3 = 100, \quad CF_4 = 1100. \\ I3 : \quad & CF_1 = 350, \quad CF_2 = 325, \quad CF_3 = 300, \quad CF_4 = 275. \\ I4 : \quad & CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 315,47. \end{aligned}$$

Przepływy gotówki mają miejsce na koniec roku, czyli $t_i = i$.

Wyznamy duration i convexity tych inwestycji na 4 sposoby. Zgodnie z płaską strukturą terminową

$$B(t) = (1 + r)^{-t}$$

dla stopy rynkowej r równej odpowiednio 9%, 10% i 11% oraz zgodnie ze wzorem Stoodleya

$$B(t) = 0,5(1,09)^{-t} + 0,5(1,11)^{-t}.$$

Odpowiedź.

Otrzymujemy następujące wartości duration:

	$r = 0,09$	$r = 0,1$	$r = 0,11$	Stoodley
$I1$	4	4	4	4
$I2$	3,4956	3,4869	3,4781	3,4871
$I3$	2,2940	2,2829	2,2719	2,2832
$I4$	2,3925	2,3812	2,3700	2,3815

i convexity:

	$r = 0,09$	$r = 0,1$	$r = 0,11$	Stoodley
$I1$	16	16	16	16
$I2$	13,1651	13,1187	13,0720	13,1201
$I3$	6,4804	6,4264	6,3731	6,4278
$I4$	6,9662	6,9104	6,8552	6,9119

Ćwiczenie 8.2. Udowodnij lemat 8.6

Rozwiązanie.

Niech $x(r) = \ln(1 + r)$. Wówczas

$$\frac{dPV}{dr} = \frac{dPV}{dx} \frac{dx}{dr} = -PV(r)D(r)(1 + r)^{-1}.$$

$$\frac{d^2PV}{dr^2} = \frac{d^2PV}{dx^2} \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \frac{dPV}{dx} \frac{d^2x}{dr^2} = PV(r)C(r)(1 + r)^{-2} + PV(r)D(r)(1 + r)^{-2}.$$

$$\frac{dD}{dr} = \frac{dD}{dx} \frac{dx}{dr} = (D(r)^2 - C(r))(1 + r)^{-1}.$$

Ćwiczenie 8.3. Udowodnij wniosek 8.5

Rozwiązanie.

Zauważmy, że granice $D(r)$ wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} D(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum t_i CF_i (1+r)^{-t_i}}{\sum CF_i (1+r)^{-t_i}} = \frac{\sum t_i CF_i}{\sum CF_i} = \bar{t}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} D(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum t_i CF_i (1+r)^{-t_i}}{\sum CF_i (1+r)^{-t_i}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum t_i CF_i (1+r)^{t_1-t_i}}{\sum CF_i (1+r)^{t_1-t_i}} = \frac{t_1 CF_1}{CF_1} = t_1.\end{aligned}$$

Ćwiczenie 8.4. Zakładając, że wypłaty następują na koniec roku oraz że struktura terminowa jest płaska i stopa procentowa r wynosi (w skali rocznej) 10%, obliczyć średni czas życia (duration) i wypukłość (convexity) następujących obligacji w dniu emisji (pięć lat przed wykupem):

1. pięcioletnia obligacja z kuponem zerowym.
2. pięcioletnia obligacja z kuponem 10%.
3. pięcioletnia obligacja z kuponem 8%.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez K wartość nominalną obligacji.

1. Ponieważ jest tylko jedna płatność w przyszłości

$$CF_5 = K, \quad CF_i = 0 \text{ dla } i \neq 5.$$

$$PV = PV_5 = \frac{K}{(1+r)^5}.$$

Zatem

$$D = 5 \frac{PV_5}{PV} = 5 \text{ i } C = 5^2 \frac{PV_5}{PV} = 25.$$

2. Mamy pięć płatności.

$$CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 0,1K, \quad CF_5 = 1,1K.$$

Wzór na wartość obecną przybierze postać

$$\begin{aligned}PV &= \frac{0,1K}{1,1} + \frac{0,1K}{1,1^2} + \frac{0,1K}{1,1^3} + \frac{0,1K}{1,1^4} + \frac{1,1K}{1,1^5} = \\ &= \frac{0,1K}{1,1} + \frac{0,1K}{1,1^2} + \frac{0,1K}{1,1^3} + \frac{1,1K}{1,1^4} = \dots = \frac{1,1K}{1,1} = K.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}D &= \frac{0,1K}{1,1K} + 2 \frac{0,1K}{1,1^2K} + 3 \frac{0,1K}{1,1^3K} + 4 \frac{0,1K}{1,1^4K} + 5 \frac{1,1K}{1,1^5K} = \\ &= \frac{0,1}{1,1} + \frac{0,2}{1,1^2} + \frac{0,3}{1,1^3} + \frac{0,4}{1,1^4} + \frac{5,5}{1,1^5} = 4,1699. \\ C &= 1^2 \frac{0,1K}{1,1K} + 2^2 \frac{0,1K}{1,1^2K} + 3^2 \frac{0,1K}{1,1^3K} + 4^2 \frac{0,1K}{1,1^4K} + 5^2 \frac{1,1K}{1,1^5K} = \\ &= \frac{0,1}{1,1} + \frac{0,4}{1,1^2} + \frac{0,9}{1,1^3} + \frac{1,6}{1,1^4} + \frac{27,5}{1,1^5} = 19,2658.\end{aligned}$$

3. Jak poprzednio, mamy pięć płatności.

$$CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 0,08K, \quad CF_5 = 1,08K.$$

Wzór na wartość obecną przybierze postać

$$PV = \frac{0,08K}{1,1} + \frac{0,08K}{1,1^2} + \frac{0,08K}{1,1^3} + \frac{0,08K}{1,1^4} + \frac{1,08K}{1,1^5} = 0,9242K.$$

Zatem

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{0,08K}{1,1} + 2\frac{0,08K}{1,1^2} + 3\frac{0,08K}{1,1^3} + 4\frac{0,08K}{1,1^4} + 5\frac{1,08K}{1,1^5} \right) : (0,9242K) = \\ &= \left(\frac{0,08}{1,1} + \frac{0,16}{1,1^2} + \frac{0,24}{1,1^3} + \frac{0,32}{1,1^4} + \frac{5,4}{1,1^5} \right) : 0,9242 = 4,2814. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \left(1^2 \frac{0,08K}{1,1} + 2^2 \frac{0,08K}{1,1^2} + 3^2 \frac{0,08K}{1,1^3} + 4^2 \frac{0,08K}{1,1^4} + 5^2 \frac{1,08K}{1,1^5} \right) : (0,9242K) = \\ &= \left(\frac{0,08}{1,1} + \frac{0,32}{1,1^2} + \frac{0,72}{1,1^3} + \frac{1,28}{1,1^4} + \frac{27}{1,1^5} \right) : 0,9242 = 20,0363. \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Średni czas życia i wypukłość wynoszą odpowiednio:

- dla obligacji zerokuponowej: 5 i 25,
- dla obligacji z kuponem 10%: 4,1699 i 19,2658,
- a dla obligacji z kuponem 8%: 4,2814 i 20,0363.

Ćwiczenie 8.5. Zakładając, że wypłaty następują na koniec roku oraz że struktura terminowa jest płaska i stopa procentowa r wynosi (w skali rocznej) 10%, obliczyć średni czas życia (duration) i wypukłość (convexity) następujących inwestycji:

1. pięcioletnia spłata kredytu, raty w równej wysokości zawierają spłatę kapitału i odsetki.
2. renta płacąca odsetki w nieskończoność.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez k kwotę pojedynczej płatności.

1. Mamy pięć płatności

$$CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = CF_5 = k.$$

Wzór na wartość obecną przybierze postać

$$PV = \frac{k}{1,1} + \frac{k}{1,1^2} + \frac{k}{1,1^3} + \frac{k}{1,1^4} + \frac{k}{1,1^5} = \frac{k}{1,1} \cdot \frac{1 - 1,1^{-5}}{1 - 1,1^{-1}} = \frac{1 - 1,1^{-5}}{0,1} k = 3,7908k.$$

Zatem

$$D = \left(\frac{k}{1,1} + 2\frac{k}{1,1^2} + 3\frac{k}{1,1^3} + 4\frac{k}{1,1^4} + 5\frac{k}{1,1^5} \right) : (3,7908k) = 2,8101,$$

$$C = \left(1^2 \frac{k}{1,1} + 2^2 \frac{k}{1,1^2} + 3^2 \frac{k}{1,1^3} + 4^2 \frac{k}{1,1^4} + 5^2 \frac{k}{1,1^5} \right) : (3,7908k) = 9,8734.$$

2. Mamy nieskończenie wiele płatności

$$CF_i = k, \quad i = 1, 2, \dots$$

Wzór na wartość obecną przybierze postać

$$PV = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{1,1^i} = \frac{k}{0,1} = 10k.$$

Zatem

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ki}{1,1^i} : (10k) = \frac{1,1k}{0,1^2 \cdot 10k} = 11.$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ki^2}{1,1^i} : (10k) = \frac{1,1 \cdot 2,1k}{0,1^3 \cdot 10k} = 231.$$

Skorzystaliśmy tutaj z następujących wzorów sumacyjnych dla $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^i}; \quad \frac{x}{(x-1)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{x^i}; \quad \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{x^i}.$$

Odpowiedź.

Średni czas życia i wypukłość wynoszą odpowiednio:

- dla renty pięcioletniej: 2,8101 i 9,8734,
- a dla renty „nieskończonej”: 11 i 231.

Ćwiczenie 8.6. Rozważmy 4 inwestycje o następujących przepływach gotówki:

$$I1 : \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = 0, \quad CF_4 = 1464,1.$$

$$I2 : \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = 100, \quad CF_4 = 1100.$$

$$I3 : \quad CF_1 = 350, \quad CF_2 = 325, \quad CF_3 = 300, \quad CF_4 = 275.$$

$$I4 : \quad CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 315,47.$$

Przepływy gotówki mają miejsce na koniec roku, czyli $t_i = i$.

Wyznaczyć Future Value tych inwestycji na 4 sposoby. Zgodnie z płaską strukturą terminową

$$B(t) = (1+r)^{-t}$$

dla stopy rynkowej r równej odpowiednio 9%, 10% i 11% oraz zgodnie ze wzorem Stoodleya

$$B(t) = 0,5(1,09)^{-t} + 0,5(1,11)^{-t}.$$

Odpowiedź.

Otrzymujemy następujące wartości FV_2 :

	$r = 0,09$	$r = 0,1$	$r = 0,11$	<i>Stoodley</i>
<i>I1</i>	1232,304	1210	1188,296	1210,700
<i>I2</i>	1226,591	1210	1193,875	1210,530
<i>I3</i>	1213,191	1210	1206,966	1210,135
<i>I4</i>	1214,279	1210	1205,891	1210,162

i FV_4 :

	$r = 0,09$	$r = 0,1$	$r = 0,11$	<i>Stoodley</i>
<i>I1</i>	1464,100	1464,1	1464,100	1464,100
<i>I2</i>	1457,313	1464,1	1470,973	1463,895
<i>I3</i>	1441,393	1464,1	1487,103	1463,417
<i>I4</i>	1442,685	1464,1	1485,779	1463,449

Podsumowując, gdy stopa rynkowa jest równa efektywnej stopie oprocentowania kredytu, to future value nie zależy od sposobu spłaty kredytu.

Ćwiczenie 8.7. Inwestor ma do dyspozycji: obligacje 4 letnie, o wartości nominalnej 100 zł i oprocentowane w wysokości 5% rocznie – płatne co rok, oraz roczne bony skarbowe o wartości nominalnej 100 zł. Zakładamy, że struktura terminowa stóp procentowych jest płaska, aktualna stopa procentowa wynosi 5%, a pierwsze wypłaty następują za rok.

- Wyznaczyć Present Value, Duration i Convexity dla obligacji oraz dla bonów.
- Jaki powinien być skład portfela inwestora, aby Future Value dla $T = 3$ lata wynosiła 1 390 252,5 zł i była uodporniona na wahania stopy procentowej?

Rozwiązanie.

- Ponieważ stopa rynkowa jest równa stopie oprocentowania obligacji to Present Value jest równe wartości nominalnej

$$PV_1 = 100.$$

Natomiast Duration i Convexity wynoszą odpowiednio

$$D_1 = \frac{1}{100} \left(\frac{5}{1,05} + 2 \frac{5}{1,05^2} + 3 \frac{5}{1,05^3} + 4 \frac{105}{1,05^4} \right) = 3 + 6698 \cdot 21^{-3} \approx 3,723,$$

$$C_1 = \frac{1}{100} \left(\frac{5}{1,05} + 2^2 \frac{5}{1,05^2} + 3^2 \frac{5}{1,05^3} + 4^2 \frac{105}{1,05^4} \right) = 14 + 4067 \cdot 21^{-3} \approx 14,439,$$

Ponieważ bony generują tylko jeden przyszły przepływ gotówki (po 1 roku) to

$$D_2 = C_2 = 1, \quad PV_2 = \frac{100}{1,05} = 95 \frac{5}{21} \approx 95,238.$$

- Zgodnie z twierdzeniem 8.2 portfel będzie uodporniony gdy jego Duration wyniesie 3 lata ($D = 3$). Zatem aby wyznaczyć liczbę obligacji (k_1) i bonów (k_2) musimy rozwiązać układ równań:

$$(k_1 PV_1 + k_2 PV_2) \cdot 1,05^D = FV,$$

$$k_1 D_1 PV_1 + k_2 D_2 PV_2 = D(k_1 PV_1 + k_2 PV_2).$$

Z drugiego równania otrzymujemy

$$k_1 \cdot 6698 \cdot 21^{-3} = k_2 \cdot 2 \cdot \frac{20}{21}.$$

Czyli

$$k_2 = k_1 \frac{3349}{20 \cdot 21^2}.$$

Po wstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy

$$k_1 \left(100 + 100 \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{3349}{20 \cdot 21^2} \right) \cdot \frac{21^3}{20^3} = 1390252,5.$$

Co po uproszczeniu daje

$$k_1 \cdot 100 \cdot (21^3 + 3349) = 1390252,5 \cdot 20^3,$$

czyli

$$k_1 = 8820 \quad \text{ i } \quad k_2 = 3349.$$

Odpowiedź.

- a. Dla obligacji Present Value, Duration i Covexity wynoszą odpowiednio 100, 3,723 i 14,439, a dla bonów 95,238, 1 i 1.
- b. Portfel spełniający warunki zadania składa się z 8 820 czteroletnich obligacji i 3 349 rocznych bonów.

9. Giełda. Rynek akcji

Liczba godzin 8.

Zakres materiału:

Giełda. Sposób działania, wyznaczanie kursu. Systemy notowań. Notowania ciągle, cena otwarcia, cena zamknięcia. Indeksy giełdowe. Specyfika rynku akcji. Analiza techniczna i fundamentalna. Ryzyko. Akcje = własność firmy. Dywidenda, walne zgromadzenia akcjonariuszy. Krótka sprzedaż. Izby rozliczeniowe. Granie na spadkach. Kontrakty forward i futures. Opcje. Pojęcie arbitrażu. Wycena arbitrażowa.

9.1. Giełdy, notowane instrumenty

Giełdy stanowią specyficzną formę wymiany towarów i zawierania transakcji. W zależności od rodzaju towarów wyróżnia się:

- giełdy towarowe (np. energii elektrycznej, produktów rolnych, surowców itp.),
- giełdy terminowe,
- giełdy papierów wartościowych.

Funkcjonowanie giełdy papierów wartościowych opiszemy na przykładzie Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie, gdzie notowane są następujące papiery wartościowe: akcje, prawa do akcji, prawa poboru, obligacje, certyfikaty inwestycyjne oraz instrumenty pochodne: futures, opcje i jednostki indeksowe. Zaczniemy od ich krótkiej charakterystyki.

9.1.1. Akcje

Akcja (*stock, share*), to dokument stwierdzający udział jej posiadacza, czyli akcjonariusza, w majątku spółki akcyjnej. Akcjonariusz ma zapewnione:

- prawo do dywidend;
- prawo do uczestnictwa w walnym zgromadzeniu akcjonariuszy;
- prawo do udziału w majątku spółki w przypadku jej likwidacji.

Akcje dzielimy na zwykłe i uprzywilejowane. Uprzywilejowanie zazwyczaj dotyczy:

- głosu na zebraniu akcjonariuszy,
- pierwszeństwa w wypłacaniu dywidendy,
- pierwszeństwa w podziale majątku spółki w przypadku jej likwidacji.

Na giełdzie inwestor może zakupić akcje dopuszczone do obrotu giełdowego, sprzedać posiadane akcje i dokonać krótkiej sprzedaży akcji.

9.1.2. Krótka sprzedaż

Krótką sprzedażą nazywamy sprzedaż aktywów, których się nie posiada (tzn. nie ma w swoim portfelu inwestycyjnym), w celu ich późniejszego odkupienia.

Na giełdzie warszawskiej transakcja ta interpretowana jest jako rodzaj pożyczki i podlega regulacjom prawnym zgodnie z Rozporządzeniem Rady Ministrów z 21 grudnia 1999 (Dz.U.99.110.1269). Istotą krótkiej sprzedaży jest zarabianie na spadkach kursów papierów wartościowych, i to takich papierów, których nie mamy w swoim portfelu inwestycyjnym. Aby dokonać krótkiej sprzedaży, należy najpierw pożyczyć papiery wartościowe od biura maklerskiego. Zwykle wymaga to wpłacenia depozytu proporcjonalnego do kwoty pożyczki. Inwestor pożycza określoną liczbę akcji, spodziewając się spadku ich ceny. Jednocześnie zobowiązuje się zwrócić je w określonym terminie, po odkupieniu na giełdzie. Jeżeli kurs danych papierów faktycznie spadnie, odkupienie ich po niższym kursie oznaczać będzie zarobek na różnicy między ceną sprzedaży (gdy kurs był wyższy) a ceną odkupu papierów (gdy kurs był niższy). Oczywiście zysk inwestora zostanie pomniejszony o koszty transakcyjne, koszty pożyczki i koszt utrzymania depozytu.

Transakcje krótkiej sprzedaży podlegają licznym ograniczeniom. Na niektórych rynkach transakcji krótkiej sprzedaży nie można dokonać, gdy kurs danego papieru wartościowego spada. Obowiązują zasady:

- a) *up-tick rule* (tik w górę), która mówi, że transakcja krótkiej sprzedaży może być dokonana po cenie wyższej od ceny poprzedniej transakcji lub
- b) *zero-plus tick*, mówiąca o tym, że transakcja krótkiej sprzedaży może być dokonana po cenie równej cenie transakcji poprzedniej, ale wyższej od ceny ostatniej transakcji dokonanej po cenie różnej od mającej nastąpić transakcji krótkiej sprzedaży.

9.1.3. Prawa poboru i prawa do akcji

Gdy spółka akcyjna potrzebuje kapitału na nowe przedsięwzięcia lub na pokrycie strat i przedłużenie działalności walne zgromadzenie akcjonariuszy może uchwalić nową emisję akcji, albo

- z prawem poboru nowych akcji, czyli pozwalającą zachować procentowe udziały w kapitale spółki dotychczasowym akcjonariuszom, albo
- z wyłączeniem prawa poboru, gdy potrzeby firmy i możliwości finansowe akcjonariuszy skłaniają uczestników walnego zgromadzenia do wyłączenia dotychczasowych akcjonariuszy z prawa poboru. Wówczas emisja kierowana jest do wybranego grona inwestorów, czy też emisja jest publiczna.

Prawo poboru nowych akcji (PPA)

Prawo to ma zastosowanie do nowej emisji akcji przez spółkę. Oznacza ono przywilej pierwszeństwa przy zakupie nowych akcji przez dotychczasowych akcjonariuszy. Prawo to jest o tyle istotne, że w przypadku objęcia (zakup) takiej emisji przez nowy krąg akcjonariuszy nastąpiłoby tzw. rozwodnienie kapitału, czyli procentowe zmniejszenie udziału dotychczasowych akcjonariuszy w stosunku do całkowitej sumy kapitału akcyjnego. Na mocy prawa poboru, aktualni

akcjonariusze mają możliwość zachowania dotychczasowego stanu posiadania w spółce akcyjnej. Ważną cechą prawa poboru jest to, że może być przedmiotem obrotu jako samodzielny papier wartościowy. Dotychczasowi posiadacze starych akcji mogą zrezygnować z prawa objęcia nowych akcji, sprzedając to prawo na giełdzie. Jednocześnie ci, którzy chcieliby nabyć akcje nowej emisji spółki, a przedtem nie byli jej akcjonariuszami, kupując prawa poboru mają taką możliwość.

Prawa do akcji (PDA)

Inwestorzy, którym przydzielono akcje nowej emisji oferowane w publicznej subskrypcji nie mogą ich sprzedać przed faktycznym otrzymaniem. Z kolei wydanie akcji nabywcom, zgodnie z kodeksem handlowym, następuje dopiero po sądowej rejestracji papierów. Następne działania to obowiązkowa rejestracja akcji w Krajowym Depozycie Papierów Wartościowych oraz doprowadzenie do notowania ich na giełdzie. Cała procedura trwa często kilka tygodni, co mogłoby zniechęcić wielu potencjalnych inwestorów do zakupu akcji nowej emisji.

Aby jeszcze przed pierwszym notowaniem akcji stworzyć możliwość wycofania się z dokonanej inwestycji tym, którym przydzielono nowe akcje, i jednocześnie dać możliwość ich nabycia tym, którzy nie dokonali tego w publicznej subskrypcji, GPW wprowadziła do obrotu giełdowego nowy na polskim rynku kapitałowym instrument finansowy – prawo do nowych akcji.

9.1.4. Obligacje

Krótką informacją o obligacjach znajduje się w podrozdziale 4.3.

9.1.5. Certyfikaty inwestycyjne

Certyfikaty inwestycyjne, to papiery wartościowe emitowane przez zamknięte fundusze inwestycyjne. Ponieważ są papierami wartościowymi na okaziciela mogą być notowane na giełdzie. Tak jak inne papiery wartościowe notowane na giełdzie podlegają codziennej wycenie rynkowej na sesjach giełdowych. Innym rodzajem wyceny certyfikatów inwestycyjnych jest ta, której cyklicznie dokonuje ich emitent. Wycena dokonywana jest z częstotliwością określoną w statucie, lecz nie rzadziej niż raz na 3 miesiące, a jej podstawę stanowi oszacowanie wartości instrumentów finansowych, w które zainwestował fundusz. A trzeba dodać, że paleta tych instrumentów jest znacznie większa niż w przypadku funduszy otwartych. Zamknięte fundusze inwestycyjne mogą inwestować m.in. w transakcje terminowe, prawa pochodne, waluty, a nawet udziały spółek z o.o., a więc lokaty niedostępne z mocy prawa dla funduszy otwartych. Możliwość inwestowania w instrumenty pochodne stwarza funduszom znacznie większe możliwości tworzenia zróżnicowanych strategii inwestycyjnych.

9.1.6. Kontrakty terminowe futures

Charakterystyka kontraktów terminowych znajduje się w podrozdziale 12.1.2.

9.1.7. Opcje

Opcje będą omówione w podrozdziale 12.1.4.

9.1.8. Produkty strukturyzowane

W dniu 25 sierpnia 2006 r. w obrocie giełdowym pojawiły się nowe instrumenty - tzw. **produkty strukturyzowane**. Jako pierwsze do obrotu wprowadzone zostały obligacje strukturyzowane Deutsche Bank z Londynu.

Produkty strukturyzowane, to instrumenty finansowe, stanowiące połączenie obligacji zero-kuponowej i opcji, z której wypłata jest uzależniona od wartości określonego wskaźnika rynkowego (np. kursu akcji lub koszyków akcji, wartości indeksów giełdowych, kursów walut). Emitentami produktów strukturyzowanych są instytucje finansowe, najczęściej banki lub domy maklerskie, które zobowiązują się wobec nabywcy (inwestora), do wypłaty w terminie wykupu instrumentu kwoty rozliczenia kalkulowanej wg określonego wzoru.

9.1.9. Jednostki indeksowe

Jednostki indeksowe na indeks giełdowy WIG20 są instrumentami pochodnymi w rozumieniu art. 3 ust. 3 **Ustawy z dnia 21 sierpnia 1997 r. Prawo o publicznym obrocie papierami wartościowymi** (Dz.U. z 1997 r. Nr 118 poz. 754 z późn. zm.). Zgodnie z tym aktem prawnym jednostki indeksowe na indeks giełdowy WIG20 (tzw. MiniWIG20) są papierami wartościowymi (oznaczenie kodowe MW20). Jednostka indeksowa, to prawo, przysługujące nabywcy jednostki wobec wystawcy, do żądania zapłaty kwoty należnej na warunkach określonych w standardzie jednostek indeksowych na indeks giełdowy WIG20. Nabywca jednostki indeksowej płaci jej wystawcy cenę jednostki indeksowej (premię). Wystawca otwierający krótkie pozycje (a więc dokonujący krótkiej sprzedaży) wnosi depozyty zabezpieczające do KDPW. Nabywca jednostek indeksowych nie musi wносить ani utrzymywać depozytów zabezpieczających. Wartość jednej jednostki indeksowej odpowiada wartości indeksu giełdowego WIG20 pomnożonej przez mnożnik wynoszący 0,1 zł. Po nabyciu inwestor może do ostatniego dnia obrotu włącznie zamknąć swoją pozycję na dwa sposoby:

- poprzez sprzedaż (wystawienie) jednostki indeksowej.
- poprzez wykonanie jednostki indeksowej.

Wykonanie jednostek indeksowych odbywa się w oparciu o cenę rozliczeniową równą, wartości otwarcia instrumentu bazowego (indeksu WIG20) ustalonej w pierwszym dniu sesyjnym po wykonaniu jednostki indeksowej pomnożonej przez mnożnik 0,1 zł. Nabywca (inwestor posiadający pozycję długą) ma prawo zgłosić jednostkę do wykonania w dowolnym terminie do dnia poprzedzającego ostatni dzień obrotu – może zażądać wypłaty kwoty należnej równej kwocie rozliczeniowej jednostki indeksowej. Wystawca jednostki indeksowej (inwestor posiadający pozycję krótką), który zostanie wybrany w celu wykonania jednostki, jest zobowiązany do wypłacenia nabywcy kwoty równej kwocie rozliczenia jednostki indeksowej. Wykonanie w ostatnim dniu obrotu (dniu poprzedzającym dzień wygaśnięcia) następuje automatycznie chyba, że posiadacz jednostki zgłosi rezygnację z wykonania jednostki. Dzień wygaśnięcia jednostek indeksowych objętych niniejszymi warunkami przypada na ostatni dzień sesyjny grudnia 2025 r. Po wystawieniu inwestor może zamknąć swoją pozycję poprzez nabycie jednostki indeksowej. Wystawca jednostek indeksowych w momencie zawierania transakcji zobowiązany jest wpłacić depozyt zabezpieczający na zasadach określonych przez KDPW. Zobowiązany jest on również do aktualizowania swoich depozytów na zasadach określonych przez KDPW. Podstawę do wyznaczania depozytów zabezpieczających stanowi kurs odniesienia.

9.2. Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie

9.2.1. Historia

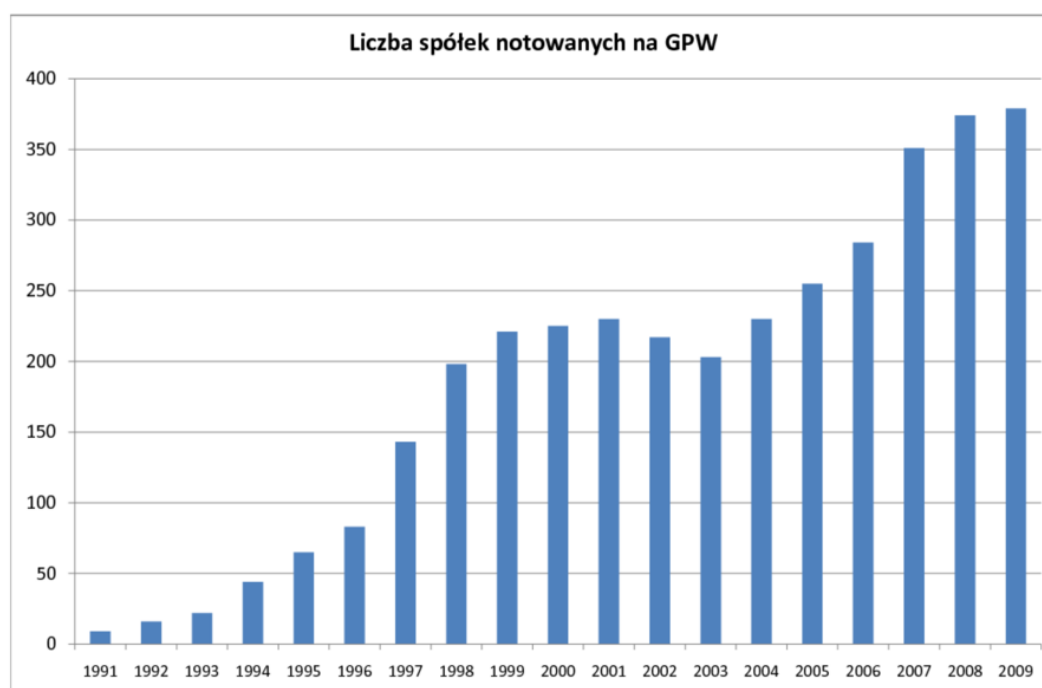
Pierwsza wersja projektu ustawy regulującej publiczny obrót papierami wartościowymi została opracowana w lipcu 1990 r. W dniu 22 marca 1991 r. Sejm uchwalił ustawę **Prawo o publicznym obrocie papierami wartościowymi i funduszach powierniczych**. Powstały

w ten sposób podwaliny prawne głównych instytucji rynku kapitałowego: domów maklerskich, giełdy, funduszy powierniczych, a także Komisji Papierów Wartościowych jako organu administracji rządowej kontrolującego i promującego rynek papierów wartościowych. Wspomniana ustawa określiła, że giełda powinna zapewniać:

- koncentrację podaży i popytu na papiery wartościowe dopuszczone do obrotu giełdowego w celu kształtowania powszechnego kursu;
- bezpieczny i sprawny przebieg transakcji i rozliczeń;
- upowszechnianie jednolitych informacji umożliwiających ocenę aktualnej wartości papierów wartościowych dopuszczonych do obrotu giełdowego.

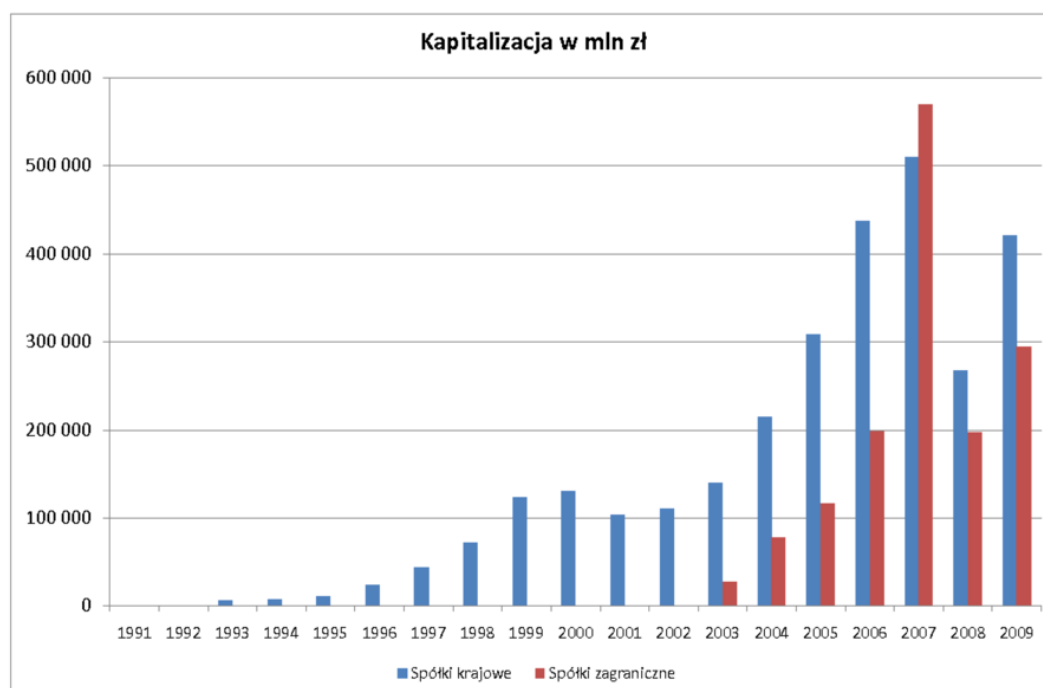
Niecały miesiąc po uchwaleniu przez Sejm Prawa o publicznym obrocie papierami wartościowymi i funduszach powierniczych, dnia 12 kwietnia 1991 roku, Minister Przekształceń Własnościowych i Minister Finansów reprezentujący Skarb Państwa podpisali akt założycielski Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Cztery dni później, 16 kwietnia 1991 roku odbyła się pierwsza sesja giełdowa, z udziałem 7 domów maklerskich, na której notowano akcje 5 spółek. Wpłynęło wówczas 112 zleceń kupna i sprzedaży, a łączny obrót giełdy wyniósł 1.990 zł (2 tys. USD).

W następnych latach dało się zauważyć burzliwy rozwój GPW – patrz wykresy 9.1, 9.2 i 9.3.



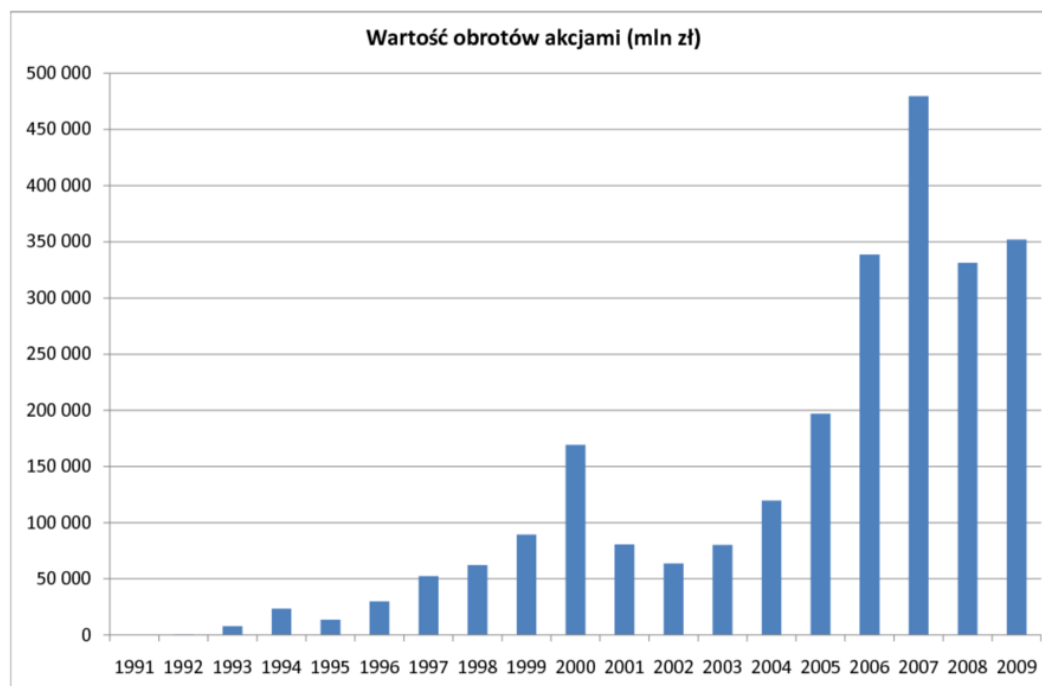
Rysunek 9.1. Liczba spółek notowanych na GPW.

Obecnie Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie działa w oparciu o ustawy z dnia 29 lipca 2005 r.:



Rysunek 9.2. Kapitalizacja w mln zł.

O ofercie publicznej i warunkach wprowadzania instrumentów finansowych do zorganizowanego systemu obrotu oraz o spółkach publicznych (z późn. zm.);
O obrocie instrumentami finansowymi (z późn. zm.);
O nadzorze nad rynkiem kapitałowym (z późn. zm.).



Rysunek 9.3. Obroty akcjami w mln zł.

9.2.2. Struktura

Rynki notowań

Obrót instrumentami finansowymi na Giełdzie Papierów Wartościowych odbywa się na jednym z dwóch rynków: podstawowym lub równoległym, w zależności od spełnienia kryteriów określonych Regulaminem Giełdy.

Przynależność do danego rynku zależy od wielkości spółki i wiąże się z obowiązkiem składania mniej lub bardziej obszernych sprawozdań (raportów) z wyników finansowych spółki.

	Spółki krajowe	Spółki zagraniczne	Razem
Rynek podstawowy	315	24	339
Rynek równoległy	39	0	39
RAZEM	354	24	378

Tabela 9.1. Liczba spółek – 15.01.2010

Segmenty rynku

Wszystkie spółki przydzielone są do jednego z czterech poniższych segmentów rynku:

Segment 250 PLUS - akcje spółek o kapitalizacji przekraczającej 250 mln euro;

Segment 50 PLUS - akcje spółek o kapitalizacji od 50 do 250 mln euro;

Segment 5 PLUS - akcje spółek, których kapitalizacja nie przekracza 50 mln euro;

Segment MINUS 5 - akcje spółek, których kapitalizacja nie przekracza 5 mln euro.

Akcje spółek, których kurs charakteryzuje się wysoką zmiennością lub są w stanie upadłości

	Spółki krajowe	Spółki zagraniczne	Razem
Rynek podstawowy	433625,58	298404,18	732029,76
Rynek równoległy	3194,59	0	3194,59
RAZEM	436820,17	298404,18	735224,35

Tabela 9.2. Kapitalizacja – 15.01.2010

mogą należeć do segmentu LISTA ALERTÓW i wtedy są notowane w systemie kursu jednolitego.

Akcji spółek z segmentów MINUS 5 oraz LISTA ALERTÓW nie uwzględnia się przy ustalaniu indeksów giełdowych.

Sektory gospodarki reprezentowane na Giełdzie

Giełda klasyfikuje spółki do 18 sektorów gospodarki narodowej, zgrupowanych w trzech głównych działach: przemysł, finanse i usługi.

Przemysł:

spożywczy,
lekki,
drzewny,
chemiczny,
farmaceutyczny,
tworzyw sztucznych,
paliwowy,
materiałów budowlanych,
budownictwo,
elektromaszynowy,
metalowy,
motoryzacyjny,
inne.

Finanse:

banki,
ubezpieczenia,
deweloperzy,
inne.

Usługi:

handel hurtowy,
handel detaliczny,
konglomeraty,
informatyka,
telekomunikacja,
media,
energetyka,
hotele i restauracje,
inne.

Podział ten umożliwia obliczanie wskaźników sektorowych dla poszczególnych branż reprezentowanych na Giełdzie i łatwe śledzenie koniunktury panującej w różnych sektorach gospodarki. Sektory o największym znaczeniu dla obrotu giełdowego i największej reprezentacji spółek

mają swoje indeksy zwane subindeksami sektorowymi.

9.2.3. Systemy notowań

Z punktu widzenia inwestora od przypisania do branży dużo ważniejsze jest, w jakim systemie notowań następuje obrót akcjami danej spółki. Na GPW w Warszawie mamy system mieszany: częścią papierów handluje się w systemie ciągłym, a częścią w periodycznym.

Harmonogram notowań w systemie ciągłym (akcje) – styczeń 2011

8.00-9.00	Faza przed otwarciem	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
9.00	Otwarcie – fixing (określenie kursu otwarcia)	Realizacja zleceń po kursie otwarcia
9.00-17.20	Faza notowań ciągłych	Przyjmowanie i realizacja zleceń
17.20-17.30	Faza przed zamknięciem	Przyjmowanie zleceń na zamknięcie
17.30	Zamknięcie – fixing (określenie kursu zamknięcia)	Realizacja zleceń po kursie zamknięcia
17.30-17.35	Dogrywka	Przyjmowanie i realizacja zleceń po kursie zamknięcia

Harmonogram notowań w systemie ciągłym (instrumenty pochodne) – styczeń 2011

8.00-8.30	Faza przed otwarciem	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
8.30	Otwarcie – fixing (określenie kursu otwarcia)	Realizacja zleceń po kursie otwarcia
8.30-17.20	Faza notowań ciągłych	Przyjmowanie i realizacja zleceń
17.20-17.30	Faza przed zamknięciem	Przyjmowanie zleceń na zamknięcie
17.30	Zamknięcie – fixing (określenie kursu zamknięcia)	Realizacja zleceń po kursie zamknięcia
17.30-17.35	Dogrywka	Przyjmowanie i realizacja zleceń po kursie zamknięcia

Harmonogram notowań jednolitych (system periodyczny) – styczeń 2011

8.30-11.00	Faza przed otwarciem	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
11.00	Fixing (określenie kursu jednolitego)	Realizacja zleceń po kursie jednolitym
11.00-11.30	Dogrywka	Przyjmowanie i realizacja zleceń po kursie jednolitym
11.30-15.00	Faza przed otwarciem	Przyjmowanie zleceń na otwarcie
15.00	Fixing (określenie kursu jednolitego)	Realizacja zleceń po kursie jednolitym
15.00-15.30	Dogrywka	Przyjmowanie i realizacja zleceń po kursie jednolitym
15.30-17.35	Faza przed otwarciem	Przyjmowanie zleceń na otwarcie następnej sesji

Zlecenia

Inwestorzy składają zlecenia za pośrednictwem swoich biur maklerskich. Najprostsze zlecenie

zawiera następujące dane:

- informację, czy jest to zlecenie kupna czy sprzedaży,
- termin ważności zlecenia,
- nazwę papieru wartościowego,
- wielkość transakcji (np. liczba akcji),
- limit ceny.

W przypadku zlecenia kupna jest to najwyższa cena, a w przypadku zlecenia sprzedaży najniższa, jaką inwestor jest skłonny zaakceptować. Zlecenia składane w czasie dogrywki mają limit ceny równy kursowi ustalonemu na fixingu.

Ponadto inwestor może złożyć zlecenie bez limitu ceny. Na przykład PKC czyli po każdej cenie; PCR po cenie rynkowej i PCRO po cenie rynkowej na otwarciu. PKC interpretuje się jako zlecenie, w którym limit ceny jest równy odpowiednio górnemu lub dolnemu ograniczeniu wahań kursów.

Fazy sesji giełdowej

Przed otwarciem.

W tej fazie możliwe jest wprowadzanie zleceń do systemu giełdowego. Zlecenia składane przez inwestorów trafiają bezpośrednio do centralnego arkusza zleceń, jednakże nie są zawierane transakcje.

Fixing.

Zostaje wyznaczony kurs otwarcia/zamknięcia (notowania ciągłe) lub kurs jednolity (notowania jednolite) i następuje realizacja po tym kursie jedynie tych wprowadzonych wcześniej zleceń, które mogą być zrealizowane.

Notowania ciągłe.

Możliwe jest wprowadzanie zleceń. Transakcje zawierane są na bieżąco, natychmiast po wprowadzeniu zlecenia, które może być zrealizowane. Zlecenie, które ze względu na limit ceny nie może być zrealizowane, zostaje umieszczone w arkuszu zleceń.

Dogrywka.

Wszyscy uczestnicy rynku mogą składać zlecenia kupna i sprzedaży po wyznaczonym kursie. Transakcje zawierane są na bieżąco.

Widelki – ograniczenia wahań kursów

Widelki to popularna nazwa dla maksymalnych wahań kursów wyznaczanych względem tzw. kursu odniesienia.

Zgodnie z regulaminem Giełdy Warszawskiej (styczeń 2010) mamy następujące ograniczenia:

Notowania ciągłe:

Kurs odniesienia = kurs zamknięcia.

instrument	dopuszczalna zmiana na otwarciu	dopuszczalna zmiana w trakcie sesji
akcje	$\pm 10\%$ od kursu zamknięcia	$\pm 10\%$ od kursu otwarcia
obligacje	$\pm 3\%$ od kursu zamknięcia	$\pm 3\%$ od kursu otwarcia
jednostki indeksowe	$\pm 5 \text{ pp}$ od kursu zamknięcia	$\pm 5 \text{ pp}$ od kursu zamknięcia

Notowania jednolite:

instrument	dopuszczalna zmiana na fixingu
akcje	$\pm 10\%$ od ostatniego fixingu

W uzasadnionych przypadkach przewodniczący sesji może zmienić powyższe limity. W przypadku notowań ciągłych oznacza to przerwę w realizacji zleceń, a następnie przesunięcie pasma dopuszczalnych kursów.

Dokładność określania kursów (styczeń 2010)

W zależności od wysokości kursu akcji i obligacji różna jest dokładność, z jaką papiery wartościowe są notowane na giełdzie.

Kurs akcji podawany jest w złotych.

kurs akcji w zł	krok notowania w zł
≤ 50	0,01
(50, 100]	0,05
(100, 500]	0,1
> 500	0,5

Kurs obligacji określany jest w procentach ich wartości nominalnej z dokładnością do 0,01 punktu procentowego.

Kurs certyfikatów inwestycyjnych podawany w złotych, krok notowania wynosi 0,01 zł.

Kurs instrumentów strukturyzowanych określany jest:

- w przypadku wyznaczania kursu w złotych - z dokładnością do 1 grosza,
- w przypadku wyznaczania kursu w procentach wartości nominalnej - z dokładnością do 0,01 punktu procentowego.

9.3. Ćwiczenia - renty

Rentą nazywamy ciąg płatności dokonywanych w równych odstępach czasu.

Przyjęte ustalenia.

- Kwota płatności jest na ogół stała.
- Renta może być płatna na początku okresu - "z góry" lub na końcu okresu - "z dołu".
- Liczba płatności może być nieskończona, skończona określona lub skończona, ale nieokreślona w momencie zawarcia umowy (np. renta dożywotnia, emerytura).
- W teorii rozpatruje się też renty z ciągłym strumieniem gotówki.

Będziemy wyznaczać wartość obecną renty przy stałej stopie procentowej r i stałej intensywności δ (płaska struktura terminowa)

$$1 + r = e^{\delta}, \quad \delta = \ln(1 + r).$$

Ćwiczenie 9.1. Wyznacz wartość obecną renty płatnej z dołu przez n lat. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie

1 jednostka jest płatna na koniec roku przez n lat.

$$CF_1 = CF_2 = \dots = CF_n = 1$$

$$\begin{aligned}
 PV &= \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} = \\
 &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{1+r}} \right) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}.
 \end{aligned}$$

Alternatywnie, gdy zastąpimy r przez δ , to otrzymamy

$$PV = \sum_{t=1}^n e^{-\delta t} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{e^{\delta} - 1}.$$

Odpowiedź.

Wartość obecna renty wynosi $\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{e^{\delta} - 1}$.

Komentarz.

Aktuariusze ("specjaliści od wyznaczania składek ubezpieczeniowych") stosują symbol $a_{\overline{n}|}$, który oznacza wartość obecną takiej renty

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} = \frac{1 - v^n}{r},$$

gdzie $v = (1+r)^{-1} = e^{-\delta}$.

Ćwiczenie 9.2. Wyznacz wartość obecną renty płatnej z góry przez n lat. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie

1 jednostka jest płatna na początku roku przez n lat.

$$CF_0 = CF_1 = \cdots = CF_{n-1} = 1$$

$$\begin{aligned}
 PV &= 1 + \frac{1}{1+r} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} = \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{1 - v^n}{1 - v}.
 \end{aligned}$$

Alternatywnie, gdy zastąpimy r przez δ , to otrzymamy

$$PV = \sum_{t=0}^{n-1} e^{-\delta t} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{1 - e^{\delta}}.$$

Odpowiedź.

Wartość obecna renty wynosi $\frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{1 - e^{\delta}}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}.$$

Ćwiczenie 9.3. Udowodnij równość

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1}{1+r} \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Ćwiczenie 9.4. Wyznacz wartość obecną renty płatnej z dołu bezterminowo. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie

1 jest płatne na koniec każdego roku ” od dziś do końca świata”.

$$CF_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} PV &= \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} \right) = \frac{1}{r} = \frac{1}{e^\delta - 1}. \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość obecną renty wynosi $\frac{1}{r} = \frac{1}{e^\delta - 1}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$a_{\infty|} = \frac{1}{r}.$$

Ćwiczenie 9.5. Wyznacz wartość obecną renty płatnej z góry bezterminowo. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie

1 jest płatne na początku każdego roku.

$$CF_i = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} PV &= 1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{1+r}{r} = \frac{1}{r} + 1. \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość obecną renty wynosi $\frac{1+r}{r}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$\ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{r} + 1.$$

Ćwiczenie 9.6. Wyznacz wartość obecną ciągłego stałego strumienia wypłat płatnego przez T lat. Wielkość rocznej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie.

1 płatna w ciągu roku przez T lat.

Mamy stałą gęstość płatności $\rho(t) = 1$ dla $0 \leq t \leq T$.

$$PV = \int_0^T e^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \Big|_0^T = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T})$$

Odpowiedź.

Wartość obecną wynosi $\frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T})$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta T}).$$

Ćwiczenie 9.7. Wyznacz wartość obecną ciągłego stałego strumienia wypłat płatnego bezterminowo. Wielkość rocznej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie.

1 płatna w ciągu roku bezterminowo.

Mamy stałą gęstość płatności $\rho(t) = 1$ dla $0 \leq t$.

$$PV = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\delta}$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $\frac{1}{\delta}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$\bar{a}_{\infty|} = \frac{1}{\delta}.$$

Ćwiczenie 9.8. Wyznacz wartość obecną renty odroczonej o k lat płatnej z dołu przez n lat. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie.

1 płatna "z dołu" przez n lat.

$$CF_{k+1} = CF_{k+2} = \dots = CF_{k+n} = 1$$

$$\begin{aligned} PV &= \frac{1}{(1+r)^{k+1}} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{k+n}} = \\ &= \frac{1}{(1+r)^k} \left(\frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} \right) = \frac{1}{(1+r)^k} a_{\overline{n}|} = v^k a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $v^k a_{\overline{n}|}$.

Ćwiczenie 9.9. Wyznacz wartość obecną renty odroczonej o k lat płatnej z dołu bezterminowo. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie

1 płatna "z dołu" bezterminowo.

$$CF_{k+1} = CF_{k+2} = \dots = 1$$

$$PV = \frac{1}{(1+r)^{k+1}} + \dots = \frac{1}{(1+r)^k} a_{\infty|} = v^k a_{\infty|} = \frac{v^k}{r}$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $\frac{v^k}{r}$.

Ćwiczenie 9.10. Wyznacz wartość obecną renty płatnej z dołu m razy w roku przez n lat. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi $1/m$ jednostki.

Rozwiązanie.

$1/m$ płatne "z dołu" przez n lat.

$$CF_{\frac{1}{m}} = CF_{\frac{2}{m}} = \dots = CF_n = \frac{1}{m}$$

$$PV = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} e^{-\delta \frac{t}{m}} = \frac{1}{m} \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{m}} - 1} = \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{v^{\frac{1}{m}} - 1}$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $\frac{1}{m} \frac{1-v^n}{v^{\frac{1}{m}} - 1}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczeń

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{v^{\frac{1}{m}} - 1}$$

$$a_{\infty|}^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{1}{v^{\frac{1}{m}} - 1}.$$

Ćwiczenie 9.11. Wyznacz wartość obecną renty płatnej z góry m razy w roku przez n lat. Wielkość pojedynczej wypłaty wynosi $1/m$ jednostki.

Rozwiązanie.

$1/m$ płatne "z góry" przez n lat.

$$CF_0 = CF_{\frac{1}{m}} = \dots = CF_{\frac{nm-1}{m}} = \frac{1}{m}$$

$$PV = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} e^{-\delta \frac{t}{m}} = \frac{1}{m} \frac{1 - e^{-\delta n}}{1 - e^{-\frac{\delta}{m}}} = \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}}$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $\frac{1}{m} \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczeń

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}},$$

$$\ddot{a}_{\infty|}^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}}.$$

Ćwiczenie 9.12. Wyznacz wartość obecną rewaloryzowanej liniowo renty bezterminowej, płatnej z góry. Rewaloryzacja jest równa pierwszej wypłacie i wynosi 1 jednostkę.

Rozwiązanie.

$$CF_0 = 1, \quad CF_1 = 2, \dots = CF_n = n + 1, \dots$$

Traktujemy tę rentę jak sumę odroczonej rent stałych.

$$\begin{aligned} PV &= 1 + \frac{2}{1+r} + \frac{3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{n}{(1+r)^{n-1}} + \dots = \\ &= \ddot{a}_{\infty|} \left(1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$= \ddot{a}_{\infty|} \cdot \ddot{a}_{\infty|} = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2.$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $(1 + \frac{1}{r})^2$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$(I\ddot{a})_{\infty|} = (\ddot{a}_{\infty|})^2 = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2.$$

Ćwiczenie 9.13. Wyznacz wartość obecną rewaloryzowanej liniowo raz na rok renty bezterminowej, płatnej z góry m razy w roku. Rewaloryzacja jest równa pierwszej wypłacie i wynosi $1/m$ jednostki.

Rozwiązanie.

$$CF_0 = CF_{\frac{1}{m}} = \dots = CF_{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}, \quad CF_1 = CF_{\frac{m+1}{m}} = \dots = CF_{\frac{2m-1}{m}} = \frac{2}{m}, \dots$$

$$\begin{aligned} PV &= \frac{1}{m}(1 + e^{-\frac{1}{m}\delta} + \dots + e^{-\frac{m-1}{m}\delta}) + \frac{2}{m}(e^{-\delta} + e^{-\frac{m+1}{m}\delta} + \dots + e^{-\frac{2m-1}{m}\delta}) + \dots = \\ &= \ddot{a}_{\infty|}^{(m)} \cdot \ddot{a}_{\infty|}. \end{aligned}$$

Odpowiedź.

Wartość obecna wynosi $\ddot{a}_{\infty|}^{(m)} \cdot \ddot{a}_{\infty|}$.

Komentarz.

Aktuariusze używają oznaczenia

$$(I\ddot{a})_{\infty|}^{(m)} = \ddot{a}_{\infty|}^{(m)} \cdot \ddot{a}_{\infty|}.$$

10. Giełda. Rynek akcji – cd

10.1. Wyznaczanie kursu jednolitego

Kurs jednolity, kurs otwarcia i kurs zamknięcia wyznacza się w drodze przetargu (aukcji). Najpierw zbiera się zlecenia kupna i sprzedaży, a potem wyznacza kurs k_j , po którym są zawierane transakcje. Oczywiście nie wszystkie zgłoszone zlecenia można zrealizować. Zlecenia kupna muszą mieć limit ceny nie mniejszy niż k_j , a zlecenia sprzedaży – nie większy. Ponadto liczba sprzedanych papierów musi być równa liczbie kupionych. W przepisach prawnych podkreśla się, że k_j ma maksymalizować wolumen obrotu, czyli liczbę papierów w zrealizowanych transakcjach i minimalizować nadwyżkę papierów spełniających limit ceny. W modelowaniu aukcji wygodniej jest przyjąć, że podstawowym warunkiem jest zrównoważenie rynku.

Wszystkie zlecenia kupna z limitem ceny wyższym oraz wszystkie zlecenia sprzedaży z limitem ceny niższym od k_j muszą być zrealizowane. Zlecenia kupna z limitem ceny niższym oraz zlecenia sprzedaży z limitem ceny wyższym pozostają niezrealizowane. Natomiast zlecenia po kursie k_j mogą być zrealizowane częściowo lub wcale.

Niech K oznacza liczbę papierów w zleceniach kupna z limitem nie mniejszym niż k_j , a S liczbę papierów w zleceniach sprzedaży z limitem nie większym. Biorąc pod uwagę, że liczby zrealizowanych zleceń kupna i sprzedaży są sobie równe, zrealizowanych zostanie $\min(K, S)$ transakcji, a spośród zleceń spełniających limit ceny, $(K - S)^+$ ofert kupna albo $(S - K)^+$ ofert sprzedaży zostanie niezrealizowanych.

To, które zlecenia o limicie ceny równym k_j zostaną zrealizowane, jest określone przez dodatkowe przepisy. W systemie WARSET, stosowanym na GPW w Warszawie od 17.11.2000, pierwszeństwo mają zlecenia złożone wcześniej. Poprzednio dokonywano proporcjonalnej redukcji zleceń. W modelowaniu (np. *Double Auction Model*) dopuszcza się wybór losowy.

10.1.1. Kurs równowagi

Oznaczmy przez K_k i S_k liczbę zleceń kupna i sprzedaży z limitem ceny k , a przez S_k^+ , K_k^+ , S_k^- i K_k^- liczby ofert sprzedaży i kupna z limitem większym lub mniejszym od k .

$$S_k^+ = \sum_{p>k} S_p, \quad K_k^+ = \sum_{p>k} K_p,$$

$$S_k^- = \sum_{p<k} S_p, \quad K_k^- = \sum_{p<k} K_p.$$

Definicja 10.1. Kurs k nazywamy kursem równowagi, gdy

$$\sum_{p \leq k} S_p = S_k + S_k^- \geq K_k^+ = \sum_{p > k} K_p$$

(wszystkie oferty kupna po cenie wyższej niż k mogą być zrealizowane) i

$$\sum_{p \geq k} K_p = K_k^+ + K_k \geq S_k^- = \sum_{p < k} S_p$$

(wszystkie oferty sprzedaży po cenie niższej niż k mogą być zrealizowane).

Oznaczmy przez M zbiór kursów równowagi. Załóżmy, że łącznie zostały złożone oferty kupna m i sprzedaży n akcji, $n, m \geq 1$.

$$m = \sum_p K_p, \quad n = \sum_p S_p$$

Okazuje się, że zbiór kursów równowagi jest domkniętym przedziałem lub punktem. Rzeczywiście: Ustawiamy $n + m$ limitów w ciąg rosnący

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{n+m}.$$

Twierdzenie 10.1.

$$M = [p_m, p_{m+1}]$$

Dowód.

Krok 1. $M \supset [p_m, p_{m+1}]$.

Wybierzmy dowolny punkt k z przedziału $[p_m, p_{m+1}]$. Mamy następujący układ równań i nierówności

$$\begin{aligned} S_k^+ + S_k + S_k^- &= n, \\ K_k^+ + K_k + K_k^- &= m, \\ S_k^- + K_k^- &\leq m, \\ S_k^+ + K_k^+ &\leq n. \end{aligned}$$

Zatem

$$S_k^- \leq m - K_k^- = K_k^+ + K_k, \quad K_k^+ \leq n - S_k^+ = S_k + S_k^-.$$

Czyli k jest kursem równowagi.

Krok 2. $k > p_{m+1} \Rightarrow k \notin M$.

Gdy $k > p_{m+1}$, to

$$S_k^- + K_k^- \geq m + 1.$$

Zatem

$$S_k^- \geq m + 1 - K_k^- = K_k^+ + K_k + 1.$$

A stąd wynika, że nie wszystkie zlecenia sprzedaży z limitem mniejszym od k mogą być zrealizowane.

k nie jest kursem równowagi.

Krok 3. $k < p_m \Rightarrow k \notin M$.

Gdy $k < p_m$, to

$$S_k^+ + K_k^+ \geq n + 1.$$

Zatem

$$K_k^+ \geq n + 1 - S_k^+ = S_k^- + S_k + 1.$$

Stąd nie wszystkie zlecenia kupna z limitem większym od k mogą być zrealizowane. k nie jest kursem równowagi.

W zadaniu 10.1 $m = 17$ i $p_{17} = p_{18} = 20$ (dokładniej $p_{16} = \dots = p_{25} = 20$). Zatem mamy dokładnie jeden kurs równowagi 20 tzn. $M = \{20\}$. Natomiast w zadaniu 10.2 mamy $m = 17$ $p_{17} = 10 < 20 = p_{18}$, zatem $M = [10, 20]$.

10.1.2. Wolumen obrotu

Wolumen obrotu przy ustalonym kursie x jest to liczba transakcji, która może być zawarta po tym kursie. Ponieważ każda transakcja wymaga udziału dwóch stron – kupującego i sprzedającego, to wolumen obrotu jest równy mniejszej z dwóch liczb:

- liczby ofert kupna po cenie nie mniejszej niż x ,
- oraz
- liczby ofert sprzedaży po cenie nie wyższej niż x

$$Vol(x) = \min\left(\sum_{p \geq x} K_p, \sum_{p \leq x} S_p\right).$$

Twierdzenie 10.2. *Każdy kurs równowagi maksymalizuje wolumen obrotu*

$$M \subset \text{Max}(Vol).$$

Dowód.

Niech k kurs równowagi.

Krok 1. $x > k \Rightarrow Vol(x) \leq Vol(k)$.

Ponieważ $x > k$, a k jest kursem równowagi, to mamy następujący układ nierówności:

$$\sum_{p \geq x} K_p \leq \sum_{p > k} K_p \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq \sum_{p \leq k} S_p \leq \sum_{p \leq x} S_p \\ \leq \sum_{p \geq k} K_p. \end{array} \right.$$

Zatem

$$Vol(x) = \min\left(\sum_{p \geq x} K_p, \sum_{p \leq x} S_p\right) = \sum_{p \geq x} K_p \leq \min\left(\sum_{p \geq k} K_p, \sum_{p \leq k} S_p\right) = Vol(k).$$

Krok 2. $x < k \Rightarrow Vol(x) \leq Vol(k)$.

Ponieważ $x < k$, a k jest kursem równowagi, to mamy następujący układ nierówności:

$$\sum_{p \leq x} S_p \leq \sum_{p < k} S_p \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq \sum_{p \geq k} K_p \leq \sum_{p \geq x} K_p \\ \leq \sum_{p \leq k} S_p. \end{array} \right.$$

Zatem

$$Vol(x) = \min\left(\sum_{p \geq x} K_p, \sum_{p \leq x} S_p\right) = \sum_{p \leq x} S_p \leq \min\left(\sum_{p \geq k} K_p, \sum_{p \leq k} S_p\right) = Vol(k).$$

Wniosek 10.1. *Wolumen obrotu jest stały na M .*

W zadaniu 10.1 maksimum wolumenu obrotu wynosi 12 i jest ono przyjmowane na zbiorze $Max(Vol) = [20, 30]$. Natomiast w zadaniu 10.2 maksimum wolumenu obrotu też wynosi 12, ale jest ono przyjmowane na zbiorze $Max(Vol) = [10, 30]$.

10.1.3. Niezrealizowane transakcje

Oznaczmy przez $NK(x)$ i $NS(x)$ odpowiednio liczbę zleceń kupna i sprzedaży spełniających limit ceny x , ale niemożliwych do zrealizowania, ponieważ brakuje zleceń przeciwnego typu,

$$NK(x) = \left(\sum_{p \geq x} K_p - \sum_{p \leq x} S_p \right)^+, \quad NS(x) = \left(\sum_{p \leq x} S_p - \sum_{p \geq x} K_p \right)^+.$$

Powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 10.2, otrzymujemy:

Lemat 10.1. *Niech k kurs równowagi. Jeżeli $x > k$, to $NK(x) = 0$ i $NS(x) \geq 0$. Natomiast jeżeli $x < k$, to $NK(x) \geq 0$ i $NS(x) = 0$.*

Oznaczmy przez $NR(x)$ liczbę wszystkich zleceń spełniających limit ceny x , ale niemożliwych do zrealizowania, ponieważ brakuje zleceń przeciwnego typu,

$$NR(x) = NK(x) + NS(x) = \left| \sum_{p \geq x} K_p - \sum_{p \leq x} S_p \right|.$$

Okazuje się, że kursy równowagi nie muszą minimalizować NR . W przykładzie pierwszym $NR(15) = 2$, podczas gdy dla kursu równowagi $k = 20$ mamy $NR = 8$.

Lemat 10.2. *Jeżeli kurs równowagi r należy do wnętrza przedziału M , to $NR(r) = 0$ i $r \in \text{Min}(NR)$. W ogólnym przypadku kurs równowagi r należy do domknięcia zbioru minimów NR .*

Dowód.

Niech $M = [p_m, p_{m+1}]$ będzie przedziałem i $p_m < k < p_{m+1}$. Oznacza to brak zleceń z limitem k . Wówczas

$$\sum_{p \leq k} S_p = \sum_{p < k} S_p \leq \sum_{p \geq k} K_p = \sum_{p > k} K_p \leq \sum_{p \leq k} S_p.$$

Zatem

$$\sum_{p \leq k} S_p = \sum_{p \geq k} K_p \quad \text{ i } \quad NR(k) = 0.$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że dla $x > p_{m+1}$ (na prawo od M) funkcja $NR(x)$ jest niemalejąca, a dla $x < p_m$ (na lewo) nierosnąca.

Lemat 10.3. *Niech $M = [p_m, p_{m+1}]$, gdzie m liczba akcji w zleceniach kupna. Wówczas:*

- Jeżeli $k \in \text{Max}(Vol)$ i $k > p_{m+1}$ to $NR(k) \geq NR(p_{m+1})$.*
- Jeżeli $k \in \text{Max}(Vol)$ i $k < p_m$ to $NR(k) \geq NR(p_m)$.*

Dowód.

Punkt a.

Wybieramy k_1 , takie, że

- $k > k_1 > p_{m+1}$,
- nie ma zleceń sprzedaży z limitem ceny w przedziale (p_{m+1}, k_1) .

Z i. wynikają następujące nierówności

$$\sum_{p \leq k} S_p \geq \sum_{p < k_1} S_p > \sum_{p \geq k_1} K_p \geq \sum_{p \geq k} K_p.$$

Z ii. wynika równość

$$\sum_{p < k_1} S_p = \sum_{p \leq p_{m+1}} S_p.$$

Zatem

$$\sum_{p \leq p_{m+1}} S_p > \sum_{p \geq k} K_p$$

oraz

$$\sum_{p \leq k} S_p > \sum_{p \geq k} K_p.$$

Ponieważ wolumen obrotu maksymalizuje się zarówno dla k jak i dla p_{m+1} to

$$\min\left(\sum_{p \leq p_{m+1}} S_p, \sum_{p \geq p_{m+1}} K_p\right) = Vol(p_{m+1}) = Vol(k) = \min\left(\sum_{p \leq k} S_p, \sum_{p \geq k} K_p\right).$$

Z powyższych „ostrych” nierówności wynika, że suma $\sum_{p \geq k} K_p$ jest mniejsza niż oba pierwsze argumenty $\min$, zatem jest równa drugiemu argumentowi pierwszego minimum

$$\sum_{p \geq k} K_p = \sum_{p \geq p_{m+1}} K_p.$$

Podsumowując

$$NR(k) = \sum_{p \leq k} S_p - \sum_{p \geq k} K_p \geq \sum_{p \leq p_{m+1}} S_p - \sum_{p \geq p_{m+1}} K_p = NR(p_{m+1}),$$

co kończy dowód implikacji a. Implikację b. dowodzi się analogicznie.

Wniosek 10.2. *Jeżeli zbiór kursów równowagi jest jednoelementowy, to jest on punktem brzegowym zbioru $Max(Vol)$*

$$p_m = p_{m+1} \Rightarrow M \subset \partial Max(Vol).$$

10.1.4. Wyznaczanie kursu jednolitego

Gdy złożone zlecenia kupna i sprzedaży dopuszczają tylko jeden kurs równowagi (M jednopunktowy), to można ustalić go jako kurs jednolity, po którym zawierane są wszystkie transakcje. W przeciwnym przypadku

$$M = [p_m, p_{m+1}], \quad p_m < p_{m+1},$$

wybór kursu jednolitego jest bardziej skomplikowany.

Przykłady możliwych algorytmów wyboru kursu jednolitego k_j .

1. Średnia ważona.

Ustalamy liczbę $k \in [0, 1]$

$$k_j = kp_m + (1 - k)p_{m+1}.$$

Ten schemat jest chętnie wykorzystywany w rozważaniach teoretycznych np. w „k-Double Auction Model”.

2. W zależności od kursu odniesienia.

Jako kurs jednolity wybieramy kurs równowagi najbliższy kursowi odniesienia k_o

$$k_j = \begin{cases} p_m & \text{gdy } k_o \leq p_m, \\ k_o & \text{gdy } p_m < k_o < p_{m+1}, \\ p_{m+1} & \text{gdy } p_{m+1} \leq k_o. \end{cases}$$

Ten algorytm daje ten sam wynik co schemat stosowany na giełdzie we Frankfurcie ([28] §11). Kurs odniesienia to zwykle ostatni kurs jednolity lub kurs ostatniej transakcji. Warto zauważyć, że jeśli ustalimy dyskretny zbiór dopuszczalnych notowań (limitów), to tak wyznaczony kurs równowagi należy do tego zbioru.

3. W zależności od liczby niezrealizowanych zleceń spełniających limit ceny i od kursu odniesienia k_o .

Ustalamy dyskretny zbiór dopuszczalnych notowań Λ . Wybieramy te $k \in M \cap \Lambda$, które minimalizują liczbę niezrealizowanych zleceń spełniających limit ceny. A następnie spośród nich ten, który minimalizuje moduł różnicy kursu jednolitego i kursu odniesienia:

i. $NR(k_j) \rightarrow \min$,

$$M_1 = \{k \in M \cap \Lambda : NR(k) = \min\{NR(x) : x \in M \cap \Lambda\},$$

ii. $|k_j - k_o| \rightarrow \min$,

$$k_j \in M_1 \quad \wedge \quad |k_j - k_o| = \min\{|k - k_o| : k \in M_1\}.$$

WARSET (system komputerowy obsługujący Giełdę Papierów Wartościowych w Warszawie) wyznacza kurs jednolity taki sam jak ostatni z podanych algorytmów.

Algorytm ten może prowadzić do innych wyników niż algorytm zamieszczony w regulaminie giełdy ([37] §136), który nakazuje maklerowi kolejno:

1. Maksymalizować wolumen obrotu.
2. Minimalizować liczbę niezrealizowanych zleceń spełniających limit ceny.
3. Minimalizować moduł różnicy kursu jednolitego i kursu odniesienia.

Z drugiej strony w „szczegółowych zasadach obrotu giełdowego” ([45] §VI.7) jest zapisane, że ma to być kurs równowagi. Niestety nie zawsze kurs wyznaczony zgodnie z punktami 1, 2 i 3, jest kursem równowagi (patrz zadanie 10.4).

Dlatego w opisie WARSET-u ([48]) zaproponowano wprowadzenie czwartego punktu:

4. Wyznaczyć kurs równowagi najbliższy kursowi wyznaczonemu w punkcie 3.

Zauważmy, że alternatywnym rozwiązaniem byłoby dodanie punktu 2’:

- 2’. Spośród kursów wyznaczonych w punktach 1 i 2 wybrać kursy równowagi.

10.2. Notowania ciągłe

W czasie notowań ciągłych kupujący i sprzedający składają zlecenia, które po przekazaniu na giełdę są realizowane na bieżąco, pod warunkiem zgodności cen, lub trafiają do arkusza zleceń i oczekują ofert przeciwnych o odpowiedniej cenie, umożliwiającich zawarcie transakcji. Przy realizacji zleceń obowiązują dwa priorytety: cena i czas złożenia zlecenia. Oznacza to, że w przypadku gdy czekają na realizację dwa zlecenia po identycznej cenie, jako pierwsze realizowane jest to, które zostało przekazane na giełdę wcześniej. Transakcje są zawierane po cenie zlecenia oczekującego.

10.2.1. Arkusz zleceń

Po fazie fixingu na otwarciu wszystkie niezrealizowane zlecenia, które nie zostały wycofane przez inwestorów, są umieszczane w arkuszu zleceń. Po uporządkowaniu zleceń według limitów arkusz wygląda następująco:

Limit	Kupno	Sprzedaż
...	—	...
ls_3	—	s_3
ls_2	—	s_2
ls_1	—	s_1
lk_1	k_1	—
lk_2	k_2	—
lk_3	k_3	—
...	—	...

Założmy, że zostało złożone nowe zlecenie sprzedaży: s akcji z limitem ceny ls .

- Jeżeli limit ceny ls jest większy od najwyższego limitu kupna lk_1 , to zlecenia nie można zrealizować i zostaje ono umieszczone w całości w arkuszu zleceń.
- Jeżeli limit ceny ls jest nie większy od najwyższego limitu kupna lk_1 , to zlecenia zostaje zrealizowane po kursie lk_1 – całkowicie, gdy $s \leq k_1$, lub częściowo, gdy $s > k_1$. Zrealizowane zlecenia kupna zostają usunięte z arkusza. Gdy $s > k_1$, to pozostałą część zlecenia sprzedaży traktuje się jak nowe zlecenie ($s - k_1$ akcji z limitem ceny ls) i powtarza powyższe kroki.

W przypadku zleceń kupna postępuje się podobnie.

10.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 10.1. Złożono dwa zlecenia kupna:

- 5 akcji z limitem ceny 10 zł;
 - 12 akcji z limitem ceny 30 zł;
- oraz trzy zlecenia sprzedaży:
- 10 akcji z limitem ceny 10 zł;
 - 10 akcji z limitem ceny 20 zł;
 - 5 akcji z limitem ceny 30 zł.

Wyznaczyć kurs(y) równowagi, wolumen obrotu i liczbę niezrealizowanych transakcji spośród transakcji spełniających limit ceny. Ponadto sprawdzić, które zlecenia zostaną zrealizowane.

Rozwiązanie.

Porządkujemy zlecenia według limitu ceny.

Limit	Kupno	Sprzedaż
30	12	5
20	—	10
10	5	10
Razem	17	25

Odpowiedź.

Kurs równowagi wynosi 20 zł. Przy tym kursie zlecenia b i c zostają zrealizowane w całości, zlecenie d częściowo (tylko 2 akcje), a zlecenia a i e pozostają niezrealizowane. Wolumen obrotu wyniósł 12 akcji. Liczba niezrealizowanych transakcji spośród transakcji spełniających limit ceny

wyniosła 8 zł.

Ćwiczenie 10.2. Złożono dwa zlecenia kupna:

a) 5 akcji z limitem ceny 10 zł;

b) 12 akcji z limitem ceny 30 zł;

oraz trzy zlecenia sprzedaży:

c) 12 akcji z limitem ceny 10 zł;

d) 10 akcji z limitem ceny 20 zł;

e) 5 akcji z limitem ceny 30 zł.

Wyznaczyć zbiór kursów równowagi.

Rozwiązanie.

Porządkujemy zlecenia według limitu ceny.

Limit	Kupno	Sprzedaż
30	12	5
20	–	10
10	5	12
Razem	17	27

Otrzymujemy $m = 17$,

$$p_1 = \dots p_{17} = 10, \quad p_{18} = \dots = p_{27} = 20, \quad p_{28} = \dots = p_{44} = 30.$$

Odpowiedź.

Zatem $M = [10, 20]$. Każdy kurs z przedziału $[10, 20]$ jest kursem równowagi.

Ćwiczenie 10.3. Kurs odniesienia wynosi 120 zł, krok notowania 0.5 zł. Złożono trzy zlecenia kupna:

– 5 akcji z limitem ceny 119 zł;

– 15 akcji z limitem ceny 121 zł;

– 15 akcji z limitem ceny 122 zł;

oraz dwa zlecenia sprzedaży:

– 20 akcji z limitem ceny 118 zł oraz

– 5 akcji z limitem ceny 119 zł.

Wyznaczyć zbiór kursów równowagi.

Rozwiązanie.

Limit	Kupno	Sprzedaż	Kumulacja
122	15	–	60
121	15	–	45
119	5	5	30
118	–	20	20
Razem	35	25	

Ponieważ łącznie było ofert kupna na 35 akcji, to kurs równowagi jest wyznaczony jednoznacznie i wynosi 121 zł ($p_{35} = p_{36} = 121$).

Odpowiedź.

Kurs równowagi jest wyznaczony jednoznacznie i wynosi 121.

Ćwiczenie 10.4. Dla tych samych zleceń co w zadaniu 10.3, wiedząc, że kurs odniesienia wynosi 120 zł a krok notowania 0.5 zł wyznaczyć kurs jednolity zgodnie z regulaminem giełdy. Sprawdzić, czy jest on kursem równowagi.

Rozwiązanie.

Limit	Kupno	Sprzedaż	Wolumen	NR
	Skumulowane			
122	15	25	15	10
121.5	15	25	15	10
121	30	25	25	5
120.5	30	25	25	5
120	30	25	25	5
119.5	30	25	25	5
119	35	25	25	10
118.5	35	20	20	15
118	35	20	20	15

Zatem wolumen maksymalizują następujące kursy: 119, 119.5, 120, 120.5, 121.

Liczbę niezrealizowanych transakcji minimalizują kursy: 119.5, 120, 120.5, 121.

Spśród nich najbliższy kursowi odniesienia jest 120, który nie jest kursem równowagi.

Odpowiedź.

Kurs jednolity wyznaczony zgodnie z regulaminem giełdy wynosi 120 zł, ale nie jest on kursem równowagi.

Ćwiczenie 10.5. O godzinie 11:00 w arkuszu zleceń było 7 zleceń kupna (w zł)

limit ceny	31	31,3	31,5	31,5	31,5	31,8	31,9
liczba akcji	500	500	415	1000	2000	400	600

i 7 zleceń sprzedaży (w zł)

limit ceny	32	32,3	32,5	32,6	32,7	32,8	33
liczba akcji	19	1650	1451	3986	1200	1000	299

O godzinie 11:05 inwestor X złożył zlecenie kupna 200 akcji z limitem 31,8 zł. Między 11:00 a 12:00, oprócz jego zlecenia, złożone zostały tylko następujące zlecenia:

czas	11:10	11:20	11:30	11:35	11:45
	K	S	S	S	K
limit ceny	32,2	31,9	31,5	31,9	32,5
liczba akcji	50	400	700	200	100

Czy zlecenie inwestora X zostało zrealizowane do godziny 11:55?

Jaki był kurs ostatniej zrealizowanej przed 12:00 transakcji?

Rozwiązanie. O 11:05 najlepszy oczekujący kurs sprzedaży wynosił 32 zł, zatem zlecenie inwestora X nie mogło być zrealizowane i zostało umieszczone w arkuszu zleceń.

Zlecenie kupna z godziny 11:10 zostało zrealizowane częściowo (19 akcji), a pozostała część (31 akcji) została umieszczona w arkuszu zleceń. W efekcie zlecenie inwestora X znalazło się na 4 miejscu po następujących zleceniach kupna: 31 akcji po 32,2 zł, 600 po 31,9 zł i 400 po 31,8 zł.

Zlecenia sprzedaży z godziny 11:20 i 11:30 zostały zrealizowane całkowicie w momencie złożenia. W szczególności o 11:30 zrealizowano część zlecenia inwestora X. Zakupił on 69 akcji po kursie 31,8 zł.

Zlecenie sprzedaży z godziny 11:35 nie mogło być zrealizowane i zostało w całości umieszczone w arkuszu zleceń (jako najlepsze oczekujące zlecenie sprzedaży).

Zlecenie kupna z godziny 11:45 zostało zrealizowane całkowicie po najlepszym oczekującym kursie sprzedaży, czyli po 31,9 zł.

Odpowiedź. Wyniki do godziny 12:00 były następujące:

Zlecenie inwestora X zostało zrealizowane częściowo. Zakupił on tylko 69 akcji.

Natomiast kurs ostatniej transakcji wyniósł 31,9 zł.

11. Giełda. Rynek akcji – cd

11.1. Indeksy giełdowe

11.1.1. Wprowadzenie

Indeks giełdowy jest miernikiem zmian cen papierów wartościowych, obejmującym wszystkie papiery wartościowe danego typu lub ich wybraną grupę. Ma on za zadanie przedstawienie tendencji cenowych na giełdzie. Zwykle jest to wielokrotność średniej z cen wybranej grupy papierów wartościowych.

Dobry indeks giełdowy powinien spełniać następujące warunki:

- wskazywać zmiany jakie zaszły w cenach akcji (papierów wartościowych); tzn. rosnąć, gdy rosną ceny większości akcji, a gdy maleją – maleć;
- opierać się na stosunkowo dużej liczbie akcji, reprezentujących przeważającą część akcji, którymi obraca się na danej giełdzie;
- nie zależeć od cen akcji, a jedynie od ich zmian spowodowanych sytuacją na rynku.

Większość indeksów jest skonstruowana według następującego schematu:

$$I_t = \frac{M_t I_{t_0}}{M_{t_0} K_t}, \quad M_t = \sum n_i P_{i,t},$$

gdzie:

M_t – wartość (kapitalizacja) portfela indeksu w chwili t ,

n_i – liczba akcji i -tej spółki w portfelu indeksu,

$P_{i,t}$ – kurs akcji i -tej spółki w chwili (dniu) t ,

I_{t_0} i M_{t_0} – wartość początkowa (bazowa) indeksu i jego portfela,

K_t – współczynnik (dzielnik) korygujący.

Portfel indeksu może podlegać skokowym zmianom, co nazywamy korektą albo rewizją składu indeksu. Aby zniwelować wpływ tych zmian na wartość indeksu stosuje się współczynnik korygujący. W przypadku niektórych indeksów, współczynnik korygujący niweluje również wpływ wypłat dywidend i realizacji praw poboru na ceny akcji. Nowy współczynnik korygujący wyznacza się tak, by uniknąć skoków indeksu spowodowanych w/w *nierynkowymi* przyczynami. Jeśli t_1 moment ostatniego notowania indeksu przed zmianami, a t_2 pierwszy po zmianach, to

$$K_{t_2} = K_{t_1} \frac{M'_{t_1}}{M_{t_1}},$$

gdzie: M'_{t_1} – wartość w momencie t_1 nowego portfela indeksu (być może po odliczeniu dywidend itp.).

W okresach pomiędzy zmianami współczynnik korygujący pozostaje stały. Zachodzi wówczas proporcja

$$\frac{I_{t_1}}{M_{t_1}} = \frac{I_{t_2}}{M_{t_2}}.$$

Czyli stopa wzrostu indeksu jest taka sama jak stopa zwrotu jego portfela.

11.1.2. Typy indeksów

Indeksy różnią się przede wszystkim sposobem ustalania składu portfela. Na GPW w Warszawie mamy następujące przypadki:

- a. Indeks zawiera akcje wszystkich (liczących się) spółek notowanych na giełdzie – WIG.
- b. Indeks zawiera akcje wszystkich (liczących się) spółek notowanych w danym sektorze – WIG-sektor.
- c. Indeks zawiera akcje określonej liczby spółek wg. rankingu - WIG20, mWIG40, sWIG80.
- d. Indeks zawiera akcje wybrane według innych zasad – RESPECT, DWS-MS.

Wg innej klasyfikacji indeksy dzielimy na dochodowe i cenowe. Indeks nazywa się **dochodowym**, gdy zmiana kursu akcji wchodzących w skład portfela indeksu spowodowana ustaleniem praw do dywidendy jest niwelowana przez zmianę współczynnika korygującego. W przeciwnym przypadku indeks nazywa się **cenowym**.

11.1.3. Indeksy na GPW w Warszawie

Omówimy teraz najważniejsze indeksy stosowane na giełdzie warszawskiej.

WIG – Warszawski Indeks Giełdowy

WIG to główny indeks na GPW w Warszawie, obejmujący wszystkie *liczące* się notowane spółki i wyznaczany od pierwszej sesji Giełdy Warszawskiej w dniu 16 kwietnia 1991 roku.

WIG jest indeksem dochodowym, czyli uwzględniającym dywidendy i prawa poboru. Liczba spółek wchodzących w skład tego indeksu zmienia się *dość nieregularnie*. Przykładowo w dniu 21.07.2004 WIG obejmował 102 spółki, a w dniu 12.11.2002 – 79. W poprzednich latach było ich więcej, np. 96 w roku 1998.

W skład indeksu WIG mogą wejść spółki, które spełnią następujące kryteria podstawowe:

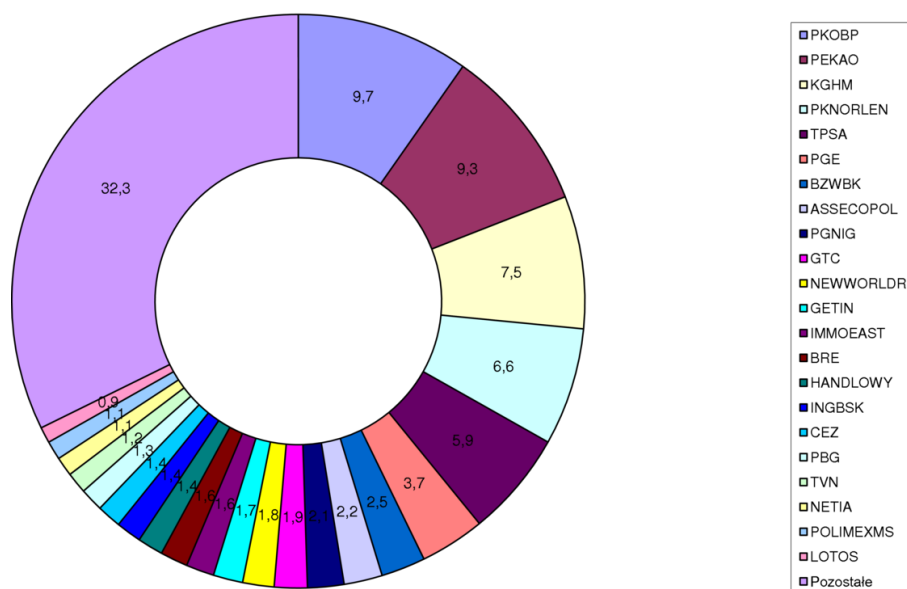
- liczba akcji spółki w wolnym obrocie¹ jest większa od 10%,
- wartość akcji spółki w wolnym obrocie jest większa od 1 mln EUR,
- spółka nie może być oznaczona w sposób szczególny.

Indeks jest ważony wartością rynkową notowanych akcji. Pakiety akcji uczestników wszystkich indeksów wyznaczane są w oparciu o liczbę akcji w wolnym obrocie i zaokrąglane do pełnych tysięcy akcji. Udział pojedynczej spółki jest ograniczany do 10%, a jednego sektora do 30% wartości portfela indeksu (w dniu ustalania składu indeksu). Pakiety spółek, których udziały przekraczają limity są zmniejszane.

Przykładowo skład portfela indeksu w dniu 29 listopada 2002 roku był następujący:

¹ http://www.gpw.pl/pub/files/PDF/opis_indeksow/WIG20/freefloat.pdf

lp.	spółka	wartość rynkowa pakietu (zł)	udział w portfelu (%)
1	TPSA	3 936 842 000	10,31
2	PEKAO	3 881 195 200	10,16
3	PKNORLEN	3 804 664 600	9,96
4	KGHM	2 820 000 000	7,38
5	BPHPBK	2 705 703 000	7,08
6	SWIECIE	1 705 000 000	4,46
7	PROKOM	1 692 817 500	4,43
8	AGORA	1 521 313 000	3,98
9	BZWBK	1 253 296 800	3,28
10	STOMIL	1 026 194 000	2,69
11	BIG	1 003 142 700	2,63
12	INGBSK	946 720 000	2,48
13	ORBIS	840 905 250	2,2
14	ZYWIEC	827 455 000	2,17
15	BUDIMEX	777 994 000	2,04
16	BRE	756 027 900	1,98
17	HANDLOWY	706 428 800	1,85
18	DEBICA	665 304 600	1,74
19	COMPLAND	584 208 400	1,53
20	KETY	508 585 500	1,33
...			...



Rysunek 11.1. Skład indeksu WIG 19.01.2010.

Aktualny skład indeksu WIG jest dostępny na stronie Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie:

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG

Indeks WIG jest wyznaczany według następującej formuły:

$$WIG(t) = \frac{M(t) \cdot WIG(0)}{M(0) \cdot K(t)}.$$

gdzie:

$M(t)$ – kapitalizacja portfela indeksu w trakcie sesji w chwili t ;

$M(0)$ – kapitalizacja portfela indeksu w dniu bazowym (16 kwietnia 91) – 57 140 000 zł;

$WIG(0)$ – wartość indeksu w dniu bazowym – 1000,0 pkt;

$K(t)$ – współczynnik korygujący na sesji t ;

Przykładowy współczynnik korygujący (14 maja 2010): 71,67998658.

Przykładowa wartość indeksu (14 maja 2010, zamknięcie): 41 075,45 pkt.

Zadaniem współczynnika korygującego $K(t)$ jest eliminacja wpływu nierynkowych zmian kapitalizacji na poziom indeksu.

$$K(t+1) = \frac{M'(t)}{M(t)} \cdot K(t), \quad K(0) = K(16.04.91) = 1,00000000.$$

$$M'(t) = M(t) - D(t) - V(t) + Q(t),$$

gdzie:

$D(t)$ – wartość dywidend z akcji, które na sesji t po raz ostatni były notowane z dywidendą,

$V(t)$ – wartość teoretyczna praw poboru z akcji, które na sesji t po raz ostatni były notowane z prawem poboru,

$Q(t)$ – wartość rynkowa akcji wprowadzanych (+), bądź wycofywanych (–) z portfela indeksu po sesji t ; dotyczy to zarówno zwiększania pakietów akcji spółek wcześniej uczestniczących w indeksie, jak i spółek jeszcze nie uczestniczących.

Rewizje kwartalne. Okresowe zmiany w portfelu indeksu (zmiana listy uczestników indeksu oraz wyznaczenie wielkości pakietów akcji) przeprowadza się raz na kwartał w trzeci piątek marca, czerwca, września i grudnia po zakończeniu sesji giełdowej.

WIG20, mWIG40 i sWIG80

Index WIG20 obejmuje 20 najważniejszych spółek notowanych na rynku podstawowym GPW w Warszawie. Wyznacza się go od 16 kwietnia 1994.

Indeks mWIG40 jest obliczany od 31 grudnia 1997 roku i obejmuje 40 średnich spółek notowanych na Giełdzie. Do dnia 16 marca 2007 r. indeks nosił nazwę MIDWIG.

Indeks sWIG80 jest obliczany od 31 grudnia 1994 roku i obejmuje 80 małych spółek notowanych na Giełdzie. Do dnia 16 marca 2007 r. indeks nosił nazwę WIRR.

Wszystkie trzy indeksy są indeksami cenowymi, nie uwzględniającymi dochodów z tytułu dywidend. Prawo poboru wiąże się z usunięciem danej spółki z indeksu na pierwszej sesji „bez prawa poboru”, jeśli kurs akcji notowanych po raz pierwszy „bez prawa poboru” jest niższy niż ostatni kurs zamknięcia.

Ponadto indeksy WIG20 i mWIG40 są instrumentami bazowymi dla kontraktów terminowych, a indeks WIG20 również dla opcji i jednostek indeksowych notowanych na Giełdzie Warszawskiej

Indeksy WIG20, mWIG40 i sWIG80 oblicza się według następującej formuły:

$$WIGX(t) = \frac{M_X(t) \cdot WIGX(0)}{M_X(0) \cdot K_X(t)}, \quad X = 20, 40, 80,$$

gdzie:

$M_X(t)$ – kapitalizacja portfela indeksu w trakcie sesji w chwili t ,

$M_X(0)$ – kapitalizacja portfela indeksu w dniu bazowym:

WIG20 – 16 kwietnia 1994 r, 136 322,90 zł,

mWIG40 – 31 grudnia 1997 r, 2 337 536,00 zł,

sWIG80 – 31 grudnia 1994 r, 30 140,17 zł.

$WIGX(0)$ – wartość indeksu w dniu bazowym, 1000,0 pkt.

$K_X(t)$ – współczynnik korygujący.

Przykładowe wartości (20 maja 2010, zamknięcie):

$WIG20(t) = 2287,07$, $K_{20}(t) = 3,53941059$,

$mWIG40(t) = 2361,87$, $K_{40}(t) = 0,59281164$,

$sWIG80(t) = 11336,49$, $K_{80}(T) = 4,66638928$.

Współczynnik korygujący $K(t)$ wprowadzono w celu wyeliminowania wpływu zmian kompozycji portfela indeksu na poziom indeksu. Wyznacza się go podczas każdej zmiany kompozycji portfela indeksu.

$$K(t+1) = \frac{M'(t)}{M(t)} \cdot K(t), \quad K(0) = 1,00000000.$$

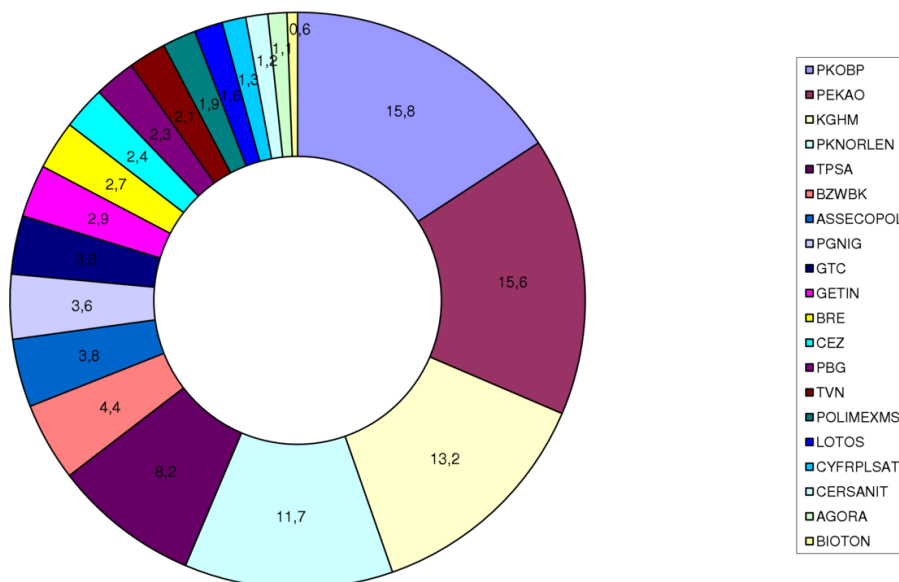
gdzie:

$M'(t)$ – kapitalizacja portfela indeksu po zmianie składu portfela indeksu,

$M(t)$ – kapitalizacja portfela indeksu przed zmianą składu portfela,

$K(t)$ – dotychczasowa wartość współczynnika korygującego,

$K(t+1)$ – nowa wartość współczynnika korygującego, która będzie obowiązywać na następnej sesji.



Rysunek 11.2. Skład indeksu WIG20 19.01.2010.

Aktualny skład indeksów WIG20, mWIG40 i sWIG80 jest dostępny na stronie Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie:

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG20,

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#mWIG40,
http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#sWIG80.

Dla indeksów WIG20, mWIG40 i sWIG80 tworzony jest jeden, wspólny ranking, który obejmuje spółki notowane na podstawowym rynku akcji. Oficjalny ranking sporządzany jest co 3 miesiące i publikowany w Cedule Giełdy Warszawskiej (dostępnej na stronie internetowej GPW).

W rankingu uwzględnia się spółki, które spełniają następujące kryteria podstawowe:

- liczba akcji spółki w wolnym obrocie jest większa od 10%,
- wartość akcji spółki w wolnym obrocie jest większa od 1 mln EUR,
- spółka nie może być oznaczona w sposób szczególny.

Ranking tworzony jest według stanu na ostatni dzień stycznia, kwietnia, lipca i października. Punkty rankingowe spółek oblicza się jako średnią ważoną procentowego udziału spółki w łącznych obrotach oraz jako procentowy udział w łącznej wartości wszystkich spółek uwzględnianych w rankingu.

$$R(i) = 0,60 \cdot ST(i) + 0,40 \cdot SC(i)$$

gdzie:

$R(i)$ – punkty rankingowe spółki i ,

$ST(i)$ – procentowy udział akcji spółki i w łącznych obrotach akcjami spółek uczestniczących w rankingu, obliczany za okres 12 miesięcy dla rewizji i 3 miesięcy dla korekty,

$SC(i)$ – procentowy udział wartości spółki i w wartości spółek uczestniczących w rankingu.

W skład indeksu WIG20 wybiera się 20 spółek o najwyższym rankingu, z zastrzeżeniem, że w indeksie WIG20 nie może uczestniczyć więcej niż 5 spółek z jednego sektora giełdowego. Spośród spółek, które nie weszły w skład indeksu WIG20 kolejno (wg rankingu) wybiera się 40 wchodzących w skład indeksu mWIG40 i 80 wchodzących w skład indeksu sWIG80.

Pakiety akcji uczestników indeksu wyznaczone są w oparciu o liczbę akcji w wolnym obrocie i zaokrąglane do pełnych tysięcy akcji. Ponadto, wielkość pakietu akcji jest redukowana proporcjonalnie na dzień rankingu, jeżeli wartość akcji danej spółki znajdującej się w portfelu indeksu przekracza 10% jego wartości.

Zmiany składów portfeli indeksów WIG20, mWIG40 i sWIG80 (nie licząc korekt nadzwyczajnych) są przeprowadzane cztery razy w roku.

W trzeci piątek marca przeprowadza się operację regulacji udziału spółek w portfelu poprzez zmiany wielkości pakietów akcji dla wszystkich spółek, które uczestniczą w indeksie (**roczna rewizja portfela**). Operacja ta ma na celu dostosowanie udziału spółek w indeksie do udziału w rankingu (zmodyfikowanym) WIG20. Podczas sporządzania rankingu udział spółki w łącznych obrotach obliczany jest za okres 12 miesięcy. Częściowe zmiany – **korekty kwartalne** przeprowadza się w trzeci piątek czerwca, września i grudnia.

Poniżej ranking indeksu WIG20 na dzień 31 października 2002.

Miej- sce	Spółka	Udział w obrotach	Udział w ka- pitalizacji	R(i)	F(i)	Uczestnik indeksu WIG20
1	TPSA	21,77	19,69	20,93	7,5	tak
2	PEKAO	20,03	22,09	20,85	7,5	tak
3	PKNORLEN	16,69	17,18	16,89	7,5	tak
4	BPHPBK	6,26	6,17	6,22	5,61	tak
5	KGHM	6,69	3,12	5,26	5,13	tak
6	BZWBK	4,5	4,59	4,53	4,53	tak
7	AGORA	3,72	5,69	4,51	4,51	tak
8	PROKOM	5,22	3,06	4,36	4,36	tak
9	BRE	4,99	2,67	4,06	4,06	tak
10	COMPLAND	3,11	1,73	2,56	2,56	tak
11	BIG	0,96	2,71	1,66	1,66	tak
12	SOFTBANK	2,06	0,37	1,38	1,38	tak
13	ORBIS	0,66	1,45	0,98	0,98	tak
14	INGBSK	0,25	1,81	0,88	0,88	nie
15	KREDYTB	0,27	1,5	0,76	0,76	nie
16	BUDIMEX	0,61	0,87	0,71	0,71	tak
17	SWIECIE	0,15	1,16	0,55	0,55	tak
18	KETY	0,24	0,94	0,52	0,52	tak
19	DEBICA	0,28	0,7	0,45	0,45	po 20.12.02
20	NETIA	0,54	0,19	0,4	0,4	nie
21	PGF	0,13	0,76	0,38	0,38	tak
22	COMARCH	0,3	0,27	0,29	0,29	tak
23	JELFA	0,12	0,51	0,28	0,28	nie
24	ECHO	0,21	0,2	0,2	0,2	nie
25	POLIFARBC	0,16	0,27	0,2	0,2	nie
26	AMICA	0,08	0,29	0,16	0,16	tak
....	...	...	...	...	...	...

Subindeksy sektorowe

Giełda oblicza wartości następujących subindeksów sektorowych indeksu WIG:
WIG-banki (od 31 grudnia 1998 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-BANKI,

WIG-budownictwo (od 31 grudnia 1998 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-BUDOW,

WIG-chemia (od 19 września 2008 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-CHEMIA,

WIG-deweloperzy (od 15 czerwca 2007 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-DEWEL,

WIG-energia (od 31 grudnia 2009 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-ENERGIA,

WIG-informatyka (od 31 grudnia 1998 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-INFO,

WIG-media (od 31 grudnia 2004 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-MEDIA,

WIG-paliwa (od 31 grudnia 2005 roku),

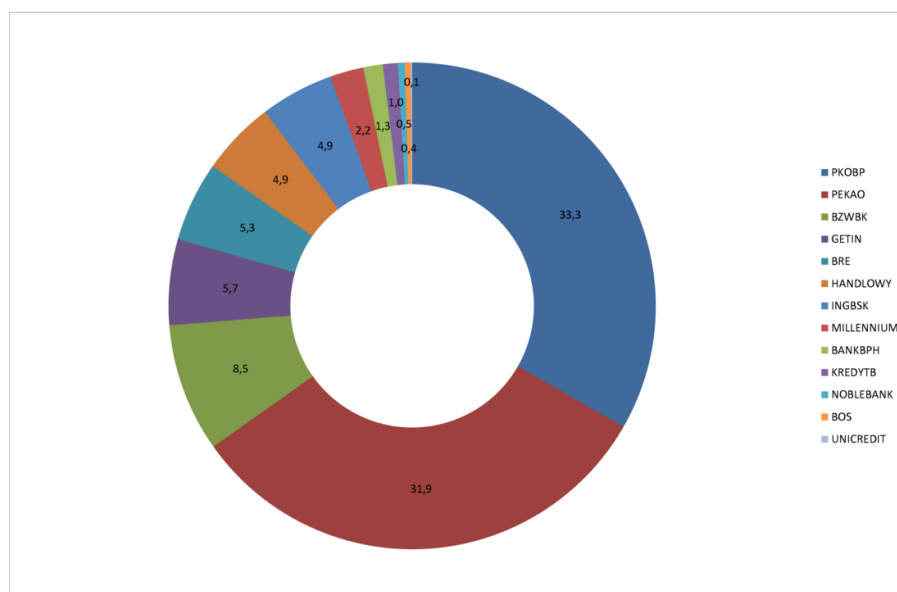
http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-PALIWA,

WIG-spożywczy (od 31 grudnia 1998 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-SPOZYW,

WIG-telekomunikacja (od 31 grudnia 1998 roku),

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#WIG-TELKOM.



Rysunek 11.3. Skład subindeksu WIG-banki 19.01.2010.

W dniu bazowym wartość wszystkich subindeksów była równa ówczesnej wartości indeksu WIG. Wartości subindeksów pozwalają ocenić efektywność inwestowania w spółki z różnych sektorów gospodarczych. W portfelach subindeksów znajdują się takie same pakiety jak w portfelu indeksu WIG, ale wybrane na podstawie kryterium sektorowego. Subindeksy sektorowe opierają się na metodologii indeksu WIG i uwzględniają dochody z tytułu dywidend i praw poboru.

Ponadto notowany jest również indeks RESPECT (od 31 grudnia 2008 roku) obejmujący spółki odpowiedzialne społecznie, które otrzymały oceny z najwyższej klasy RESPECT Rating http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#RESPECT.

DWS MS

Indeks Investor MS (dawniej DWS MS) jest przykładem indeksu *prywatnego*, którego notowania są publikowane przez GPW.

Właścicielem praw do Indeksu Investor MS jest Investors TFI S.A. (dawniej DWS Polska TFI S.A.) z siedzibą w Warszawie. Jego głównym celem jest ocena wyników inwestycyjnych (tzw. *benchmark*) funduszu Investor TOP 25 Małych Spółek FIO (dawniej DWS Polska FIO TOP25 Małych Spółek). Jest to indeks dochodowy, uwzględniający dochody z tytułu dywidend i praw poboru.

Skład portfela indeksu Investor MS jest wyznaczany zgodnie z następującymi regułami:

1. Kryteria selekcji spółek:

- Kapitalizacja spółki jest mniejsza od wartości pierwszego decyla kapitalizacji spółek,

tj. mniejsza od kapitalizacji każdej ze spółek spośród 10% liczby spółek o najwyższej kapitalizacji giełdowej;

- Kapitalizacja spółki jest większa lub równa wartości siódmego decyla, tj. większa od kapitalizacji każdej spośród 30% liczby spółek o najniższej kapitalizacji giełdowej.

Uczestnicy indeksu powinni spełniać dodatkowe kryteria selekcji:

- Akcje w wolnym obrocie (tzw. *free-float*) – akcje spółki znajdujące się w wolnym obrocie zgodnie z metodologią GPW stanowią co najmniej 10% całkowitej liczby jej akcji.
- Sytuacja finansowa – spółka w ostatnim sprawozdaniu finansowym wykazała dodatnią wartość kapitałów własnych i przeciwko niej nie zostało rozpoczęte postępowanie układowe lub upadłościowe.
- Przestrzeganie zasad ładu korporacyjnego (tzw. *Corporate Governance*) i obowiązków informacyjnych – spółki, które nie naruszają zasad ładu korporacyjnego oraz należycie wypełniają obowiązki informacyjne.

Powodem wykluczenia spółki z indeksu może być również nałożenie kary przez Komisję Papierów Wartościowych i Giełd za nieprzestrzeganie obowiązków informacyjnych, stwierdzenie naruszenia zasad ładu korporacyjnego przez Sąd Rynku Kapitałowego lub decyzja Zarządu Giełdy o specjalnym oznaczeniu spółki w Cedule Giełdy Warszawskiej z uwagi na powyższe.

2. Udziały w indeksie:

- Pakiet akcji spółki w portfelu indeksu stanowi liczba akcji znajdujących się w wolnym obrocie (tzw. *free-float*) i wprowadzonych do obrotu giełdowego.
- Udział akcji jednej spółki w portfelu indeksu jest ograniczany do 7,5%.
- Przy ustalaniu udziałów spółek w indeksie nie stosuje się ograniczeń ze względu na dywersyfikację sektorową.

Wartość indeksu obliczana jest na podstawie kapitalizacji portfela indeksu, współczynnika korygującego i *danych* bazowych:

- data bazowa 31 grudnia 2002 r,
- wartość bazowa 1000,0 pkt,
- kapitalizacja bazowa 3 918 159 604,69 zł.

Aktualny skład indeksu Investor MS jest dostępny na stronie Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie:

http://www.gpw.pl/portfele_indeksow#InvestorMS

11.2. Ćwiczenia – Kolokwium

12. Giełda. Rynek akcji – cd

12.1. Instrumenty pochodne

12.1.1. Wprowadzenie

Określenie. Instrument pochodny (*derivative*), to kontrakt finansowy, którego rozliczenie zależy od innego instrumentu zwanego *bazowym*.

Typowe **instrumenty bazowe**:

- akcje,
- indeksy i inne wskaźniki ekonomiczne,
- obligacje,
- stopy procentowe,
- kursy walut,
- ceny towarów,
- inne instrumenty pochodne,
- instrumenty niefinansowe, zależne od pogody lub klęsk żywiołowych,
-

We wrześniu 2010 na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie były notowane następujące instrumenty pochodne:

- kontrakty terminowe – futures:
 - na indeksy giełdowe: WIG20 i mWIG40,
 - na akcje spółek giełdowych,
 - na kursy walut USD i EUR;
- opcje:
 - na indeks WIG20;
- jednostki indeksowe (patrz 9.1.9):
 - na indeks WIG20;
- produkty strukturyzowane (patrz 9.1.8).

12.1.2. Kontrakty terminowe – forward i futures

Określenie kontraktu terminowego forward.

Dwie strony, kupujący i sprzedający, umawiają się w momencie T_0 , że w momencie T_1 w przyszłości dokonają transakcji kupna/sprzedaży określonej z góry ilości towaru lub akcji, po ustalonej z góry cenie.

W finansowych kontraktach terminowych rozliczenie na ogół ma formę pieniężną, tzn. następuje przepływ gotówki, który zależy od różnicy między kursem terminowym ustalonym w dniu T_0 , a aktualnym kursem instrumentu bazowego w dniu T_1 .



Rysunek 12.1. Kontrakt forward – przepływy gotówki.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

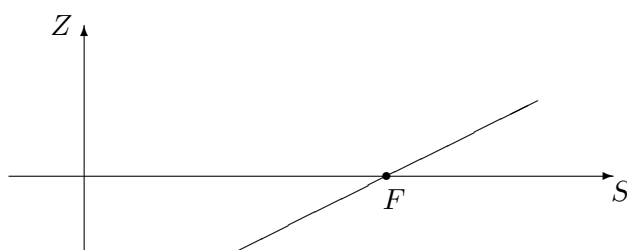
F_{T_0} – kurs terminowy w dniu T_0 ,

S_{T_1} – kurs instrumentu bazowego w dniu T_1 ,

k – liczba jednostek instrumentu bazowego, na którą opiewa kontrakt.

Wówczas zysk (strata) kupującego wynosi:

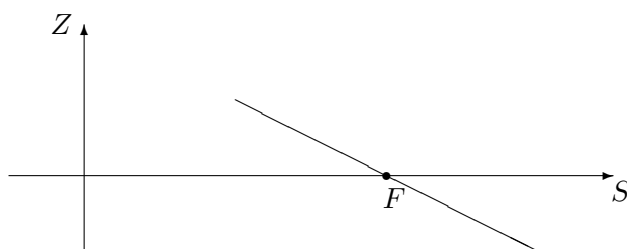
$$Z_K = (S_{T_1} - F_{T_0}) \cdot k,$$



Rysunek 12.2. Kontrakt forward – zysk kupującego.

a zysk (strata) sprzedającego:

$$Z_S = (F_{T_0} - S_{T_1}) \cdot k.$$



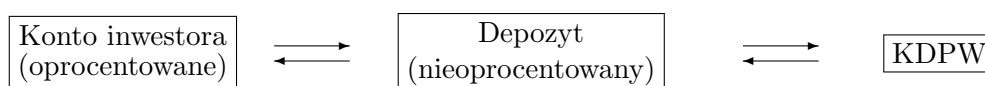
Rysunek 12.3. Kontrakt forward – zysk sprzedającego.

Specyfika kontraktów futures związana jest ze sposobem zabezpieczania wykonania kontraktu, opartym na:

- rozliczeniach dziennych,
- systemie depozytów,
- udziale „trzeciego uczestnika” kontraktu – izby rozrachunkowej (*clearing house*). W Polsce jest to Krajowy Depozyt Papierów Wartościowych (KDPW).

Szczegółowe zasady rozliczeń ustala biuro maklerskie prowadzące rachunek inwestycyjny danego inwestora, w oparciu o wytyczne KDPW. Ogólny schemat jest następujący:

- W momencie zawarcia transakcji inwestor wnosi depozyt proporcjonalny do jej wielkości.
- Po każdej sesji ustala się kurs rozliczeniowy (np. kurs zamknięcia). Na jego podstawie modyfikuje się depozyt.
- Jeśli zmiany są niekorzystne dla inwestora, to musi on uzupełnić depozyt (w terminie do następnej sesji giełdowej).
- Depozyt na ogół jest nieoprocentowany. Koszt utrzymania depozytu (stracone odsetki) w istotny sposób wpływa na opłacalność inwestycji.



Rysunek 12.4. Futures – schemat przepływu gotówki

Przeanalizujmy dokładniej mechanizm rozliczeń dziennych.

Niech F_t oznacza kurs rozliczeniowy w dniu t . Dzienny zysk (strata) nabywcy pojedynczego kontraktu wynosi

$$Z_{K,t} = F_t - F_{t-1}.$$

a dzienny zysk (strata) sprzedawcy

$$Z_{S,t} = F_{t-1} - F_t.$$

Kwoty te zostaną odpowiednio pobrane lub doliczone do depozytu. Stosowane są dwa sposoby uzupełniania depozytu.

I. Ustala się jedną *poprzeczkę* $0 < d \leq 1$. Obowiązkowy depozyt w dniu t wynosi $D_t = dF_t$. Gdy zmienia się kurs rozliczenia, następuje przepływ gotówki między kontem inwestora a depozytem. W przypadku nabywcy pojedynczego kontraktu kwota ta wynosi

$$\begin{aligned} D_t - D_{t-1} - Z_{K,t} &= d(F_t - F_{t-1}) - (F_t - F_{t-1}) = \\ &= -(1 - d)(F_t - F_{t-1}) = -(1 - d)Z_{K,t}. \end{aligned}$$

Gdy $F_t < F_{t-1}$, to musi on uzupełnić depozyt, a gdy $F_t > F_{t-1}$, to pieniądze wpłyną na jego konto. W przypadku sprzedawcy

$$D_t - D_{t-1} - Z_{S,t} = d(F_t - F_{t-1}) + (F_t - F_{t-1}) = (1 + d)(F_t - F_{t-1}) = -(1 + d)Z_{S,t}.$$

Gdy $F_t > F_{t-1}$, to musi on uzupełnić depozyt, a gdy $F_t < F_{t-1}$, to pieniądze wpłyną na jego konto.

II. Ustala się dwie *poprzeczki* $0 < d_1 < d_2 \leq 1$. W przypadku, gdy $D_{t-1} + Z_{*,t} < d_1 F_t$, inwestor musi uzupełnić depozyt do poziomu $d_2 F_t$. Przy znacznym przekroczeniu poziomu $d_2 F_t$ inwestor może pobrać nadwyżkę z depozytu.

Kontrakt futures można zamknąć na dwa sposoby:

- W momencie wygaśnięcia kontraktu, przez rozliczenie.
- W dowolnym momencie, przez zawarcie kontraktu przeciwnego.

Na warszawskiej GPW kontrakty futures mają sześciocyfrowe oznaczenia np.: kontrakt futures na indeks WIG20 rozliczany w grudniu 2002 miał symbol:

FW20Z2.

Poszczególne fragmenty kodu oznaczają:

F – typ kontraktu (futures),

W20 – instrument bazowy (WIG20),

Z – miesiąc wykonania (grudzień),

2 – rok wykonania (2002).

Oznaczenia miesięcy wykonania kontraktów terminowych są następujące:

miesiąc	kod	miesiąc	kod
styczeń	F	lipiec	N
luty	G	sierpień	Q
marzec	H	wrzesień	U
kwiecień	J	październik	V
maj	K	listopad	X
czerwiec	M	grudzień	Z

12.1.3. Wycena kontraktów forward i futures

Ogólne zasady wyceny kontraktów terminowych

Wycena kontraktów terminowych opiera się na dwóch regułach: zasadzie braku arbitrażu i prawie jednej ceny ([34] §1.2).

Niech K_0 oznacza zainwestowane środki, a K_1 przyszłą wypłatę (modelowaną jako zmienna losowa).

Definicja 12.1. Mówimy, że na rynku zachodzi **arbitraż**, gdy jest możliwa inwestycja taka, że

$$K_0 \leq 0, \quad K_1 \geq 0 \text{ (p.n.)}, \quad P(K_1 > 0) > 0.$$

Czyli nie inwestując własnych środków, nie ryzykując straty, można z niezerowym prawdopodobieństwem coś zyskać.

Wniosek 12.1. Na rynku nie ma arbitrażu, gdy zachodzą następujące równoważne warunki: Inwestycja, która na pewno nie przyniesie strat, a może przynieść zysk, wymaga zainwestowania niezerowych środków.

$$(K_1 \geq 0 \text{ (p.n.)} \wedge P(K_1 > 0) > 0) \Rightarrow K_0 > 0,$$

Inwestycja, która nie wymaga żadnych nakładów i na pewno nie przyniesie strat, nie przyniesie również zysku.

$$(K_0 \leq 0 \wedge K_1 \geq 0 \text{ (p.n.)}) \Rightarrow K_1 = 0 \text{ (p.n.)},$$

Definicja 12.2. Mówimy, że na rynku obowiązuje **prawo jednej ceny**, gdy każde dwie inwestycje o tych samych przyszłych przepływach gotówki mają tę samą cenę.

$$K_{1,1} = K_{2,1} \text{ (p.n.)} \Rightarrow K_{1,0} = K_{2,0}$$

Model rynku doskonałego

Kurs **teoretyczny** instrumentów pochodnych najczęściej wyznacza się w oparciu o tzw. model rynku doskonałego ([20] §1.7). Zakładamy mianowicie, że:

1. Stopy procentowe lokat i kredytów bankowych są jednakowe (pomijamy marże).
2. Wysokość zaciąganych przez inwestorów kredytów bankowych nie jest w żaden sposób ograniczona.
3. Wszystkie aktywa są doskonale podzielne. Można kupować i sprzedawać dowolne ilości wszystkich instrumentów (zarówno bardzo małe, jak i bardzo duże). Zapewniona jest więc idealna płynność obrotu.
4. Dopuszczalna jest nieograniczona krótka sprzedaż wszystkich instrumentów (w szczególności akcji). Wszystkie transakcje są odwracalne. Jeżeli dopuszczalna jest transakcja, która generuje przepływy gotówki równe CF_i w chwilach t_i , to dopuszczalna jest też transakcja generująca przepływy gotówki $-CF_i$ w tych samych momentach czasu t_i .
5. Inwestorzy nie ponoszą żadnych dodatkowych kosztów związanych z zawieraniem transakcji i nie są wymagane depozyty zabezpieczające.
6. Zyski z inwestowania w dowolne instrumenty finansowe nie są obciążone podatkami.

Koszty transakcyjne, depozyty i inne ograniczenia odgrywają w modelach rynku finansowego podobną rolę jak tarcie w statyce. Dlatego też rynek doskonały nazywa się rynkiem pozbawionym tarcia (*frictionless market*).

Lemat 12.1. *Na rynku doskonałym z zasady braku arbitrażu wynika prawo jednej ceny.*

Dowód.

Założmy, że na naszym rynku nie obowiązuje prawo jednej ceny. Wówczas dopuszczalne są dwie transakcje A i B, które (prawie na pewno) generują tę samą wypłatę

$$K_{A,1} = K_{B,1},$$

w tym samym momencie czasu t_1 , ale w transakcję A trzeba zainwestować więcej niż w B

$$K_{A,0} > K_{B,0}.$$

Z założenia 4 modelu rynku doskonałego wynika, że dopuszczalna jest transakcja C: Inwestor zawiera transakcję B, transakcję odwrotną do A (krótko sprzedaje A) oraz lokuje w banku kwotę $K_{A,0} - K_{B,0}$. Wówczas

$$K_{C,0} = K_{B,0} - K_{A,0} + (K_{A,0} - K_{B,0}) = 0,$$

czyli nakłady potrzebne do zawarcia C są zerowe.

W momencie t_1 inwestor rozlicza transakcję B, transakcję odwrotną do A i wyjmuje pieniądze z banku wraz z odsetkami (okresowa stopa procentowa r). Zatem, prawie na pewno

$$K_{C,1} = K_{B,1} - K_{A,1} + (1+r)(K_{A,0} - K_{B,0}) = (1+r)(K_{A,0} - K_{B,0}) > 0.$$

Co jest sprzeczne z zasadą braku arbitrażu. Zatem na rynku doskonałym zasada braku arbitrażu pociąga za sobą prawo jednej ceny.

Uwaga. Aczkolwiek na rynku doskonałym z zasady braku arbitrażu wynika prawo jednej ceny, to w bardziej realistycznych modelach prawo jednej ceny może nie obowiązywać.

Wycena kontraktów forward – rynek doskonały

Na początek zajmijmy się wyceną kontraktów forward na rynku doskonałym. Ograniczamy się do dwóch przepływów gotówki: w momencie zawarcia transakcji i w momencie jej rozliczenia. Ponadto zakładamy, że wszystkie rozpatrywane transakcje mają ten sam czas życia T .

Będziemy rozpatrywali następujące transakcje „elementarne”:

- zakup obligacji o stałym oprocentowaniu; r_1 stopa zwrotu po czasie T ;
- zakup akcji spółki ABC; S_0 cena w momencie początkowym, S_1 cena po czasie T ;
- kupno lub sprzedaż kontraktu terminowego na akcje spółki ABC o czasie życia T ; F_0 cena terminowa w momencie początkowym, $F_1 = S_1$ cena w momencie rozliczenia.

W momencie zawarcia transakcji wszystkie wielkości z wyjątkiem S_1 są znane.

Lemat 12.2. *Z prawa jednej ceny wynika, że*

$$F_0 = (1 + r_1)S_0.$$

Dowód.

Będziemy analizować następujące dwie transakcje:

A1. Sprzedaż 1 kontraktu terminowego i kupno 1 akcji.

A2. Zakup obligacji za kwotę B

$$B = \frac{F_0}{1 + r_1}.$$

Rozliczenie.

Przepływy gotówki w momencie zawarcia transakcji A1 i A2

$$CF_{1,0} = -S_0, \quad CF_{2,0} = -B = -\frac{F_0}{1 + r_1}.$$

Przepływy gotówki w momencie rozliczenia A1 i A2

$$CF_{1,1} = (F_0 - S_1) + S_1 = F_0.$$

Rozliczenie kontraktu terminowego, sprzedaż akcji.

$$CF_{2,1} = (1 + r_1)B = F_0.$$

Wykup obligacji plus odsetki.

Zauważmy, że oba przepływy $CF_{1,1}$ i $CF_{2,1}$ są równe. Z prawa jednej ceny wynika, że $CF_{1,0} = CF_{2,0}$. Czyli

$$S_0 = \frac{F_0}{1 + r_1}.$$

Co kończy dowód.

W dalszym ciągu ceny wyznaczone w oparciu o model rynku doskonałego będziemy nazywać cenami teoretycznymi. Uproszczenia modelowe powodują, że mogą się one trochę różnić od cen rynkowych wyznaczonych przez aktualny popyt i aktualną podaż na *rzeczywistym* rynku.

Wycena kontraktów forward – rynek z tarcie

Dla uproszczenia pomijamy koszty transakcyjne. Tak jak poprzednio ograniczamy się do dwóch przepływów gotówki: w momencie zawarcia transakcji i w momencie jej rozliczenia. Ponadto zakładamy, że wszystkie rozpatrywane transakcje mają ten sam czas życia T .

Będziemy rozpatrywali transakcje złożone z następujących transakcji *elementarnych*:

- zakup obligacji; r_1 – stopa zwrotu po czasie T ;
- pożyczka w banku; r_2 – oprocentowanie po czasie T ;
- zakup akcji spółki ABC; S_0 – cena w momencie początkowym, S_1 – cena po czasie T ;
- krótka sprzedaż akcji spółki ABC; d_1 – depozyt, r – oprocentowanie depozytu po czasie T ;
- kupno lub sprzedaż kontraktu terminowego na akcje spółki ABC o czasie życia T ; F_0 – cena terminowa w momencie początkowym, $F_1 = S_1$ – cena w momencie rozliczenia, d – depozyt, r – oprocentowanie depozytu po czasie T .

W momencie zawarcia transakcji wszystkie wielkości z wyjątkiem S_1 są znane. Będziemy analizować następujące dwie pary i dwie pojedyncze transakcje:

A1. Sprzedaż 1 kontraktu terminowego i kupno 1 akcji.

A2. Zakup obligacji za kwotę B

$$B = \frac{(1 + (1 + r)d)F_0}{1 + r_1}.$$

B1. Kupno 1 kontraktu terminowego i zakup obligacji za kwotę B

$$B = \frac{(1 - (1 + r)d)F_0}{1 + r_1}.$$

B2. Kupno 1 akcji.

C. Sprzedaż 1 kontraktu terminowego, kupno 1 akcji i pożyczka z banku kwoty L

$$L = S_0 + dF_0.$$

D. Kupno 1 kontraktu terminowego, krótka sprzedaż 1 akcji i zakup obligacji za kwotę B

$$B = (1 - d_1)S_0 - dF_0$$

(gdyby B okazało się ujemne, należy zastąpić zakup obligacji kredytem).

Pary A i B posłużą jako przykład ewentualnego zastosowania prawa jednej ceny. Natomiast inwestycje C i D – zasady braku arbitrażu.

Rozliczenie A.

Przepływy gotówki w momencie zawarcia transakcji A1 i A2

$$CF_{1,0} = -dF_0 - S_0, \quad CF_{2,0} = -B = -\frac{(1 + (1 + r)d)F_0}{1 + r_1}.$$

Przepływy gotówki w momencie rozliczenia A1 i A2

$$CF_{1,1} = (1 + r)dF_0 + (F_0 - S_1) + S_1 = (1 + (1 + r)d)F_0.$$

Zwrot depozytu wraz z oprocentowaniem, rozliczenie kontraktu terminowego, sprzedaż akcji.

$$CF_{2,1} = (1 + r_1)B = (1 + (1 + r)d)F_0.$$

Wykup obligacji plus odsetki.

Zauważmy, że oba przepływy $CF_{1,1}$ i $CF_{2,1}$ są równe. Gdyby obowiązywało prawo jednej ceny, to mielibyśmy $CF_{1,0} = CF_{2,0}$. Czyli

$$dF_0 + S_0 = \frac{(1 + (1 + r)d)F_0}{1 + r_1}.$$

Oznaczmy przez F_S cenę kontraktu terminowego, spełniającą powyższą równość. Mamy

$$(1 + r_1)S_0 = (1 + (1 + r)d)F_S - (1 + r_1)dF_S,$$

$$F_S = \frac{(1 + r_1)S_0}{1 - (r_1 - r)d}.$$

Podsumowując, gdy $F_0 = F_S$, to rynek jest w równowadze (obowiązuje prawo jednej ceny). W pozostałych przypadkach rynek nie jest w równowadze. Gdy $F_0 > F_S$, to bardziej opłacalna jest inwestycja A1. Oznacza to zwiększoną liczbę ofert sprzedaży kontraktu terminowego, a zatem spadek ceny terminowej F_0 .

Rozliczenie B.

Przepływy gotówki w momencie zawarcia transakcji B1 i B2

$$CF_{1,0} = -dF_0 - B = -(dF_0 + \frac{(1 - (1 + r)d)F_0}{1 + r_1}), \quad CF_{2,0} = -S_0.$$

Przepływy gotówki w momencie rozliczenia B1 i B2

$$\begin{aligned} CF_{1,1} &= (1 + r)dF_0 + (S_1 - F_0) + (1 + r_1)B = \\ &= S_1 + ((1 + r)d - 1 + (1 - (1 + r)d))F_0 = S_1. \end{aligned}$$

Zwrot depozytu wraz z oprocentowaniem, rozliczenie kontraktu terminowego, wykup obligacji plus odsetki.

$$CF_{2,1} = S_1.$$

Sprzedaż akcji.

Zauważmy, że oba przepływy $CF_{1,1}$ i $CF_{2,1}$ są równe. Gdyby obowiązywało prawo jednej ceny, to mielibyśmy $CF_{1,0} = CF_{2,0}$. Czyli

$$dF_0 + \frac{(1 - (1 + r)d)F_0}{1 + r_1} = S_0.$$

Oznaczmy przez F_K cenę kontraktu terminowego spełniającą powyższą równość. Mamy

$$(1 + r_1)S_0 = (1 + r_1)dF_K + (1 - (1 + r)d)F_K,$$

$$F_K = \frac{(1 + r_1)S_0}{1 + (r_1 - r)d}.$$

Podsumowując, gdy $F_0 = F_K$, to rynek jest w równowadze (obowiązuje prawo jednej ceny). W pozostałych przypadkach rynek nie jest w równowadze. Gdy $F_0 < F_K$, to bardziej opłacalna jest inwestycja B1. Oznacza to zwiększoną liczbę ofert kupna kontraktu terminowego, a zatem wzrost ceny terminowej F_0 .

Biorąc pod uwagę, że oprocentowanie depozytu nie może przewyższać oprocentowania obligacji, otrzymujemy nierówność

$$F_S \geq F_K.$$

Gdy powyższa nierówność jest ostra, to prawo jednej ceny nie obowiązuje. Mamy całe pasmo cen *quasi*-równowagi. Równość zachodzi tylko, gdy $d = 0$ (nie ma depozytu) lub $r = r_1$ (depozyt jest oprocentowany na poziomie oprocentowania obligacji). Wówczas prawo jednej ceny wyznacza teoretyczną cenę terminową

$$F_* = (1 + r_1)S_0.$$

Rozliczenie C.

Przepływ gotówki w momencie zawarcia transakcji C

$$CF_0 = -dF_0 - S_0 + L = -dF_0 - S_0 + (S_0 + dF_0) = 0.$$

Przepływ gotówki w momencie rozliczenia

$$CF_1 = (1 + r)dF_0 + (F_0 - S_1) + S_1 - (1 + r_2)L = (1 + (r - r_2)d)F_0 - (1 + r_2)S_0.$$

Zwrot depozytu wraz z oprocentowaniem, rozliczenie kontraktu terminowego, sprzedaż akcji i spłata kredytu wraz z odsetkami.

Oznaczmy przez F_{AS} cenę kontraktu terminowego, dla której zachodzi równość $CF_1 = 0$.

$$F_{AS} = \frac{(1 + r_2)S_0}{1 - (r_2 - r)d}.$$

Zauważmy, że gdy $F_0 > F_{AS}$, to $CF_1 > 0$ i nasza transakcja jest transakcją arbitrażową. Wzmózione zainteresowanie transakcją C oznacza zwiększony popyt na kontrakty sprzedaży, a więc spadek ceny terminowej F_0 .

Gdy $F_0 \leq F_{AS}$, to $CF_1 \leq 0$ i nasza transakcja nie jest transakcją arbitrażową.

Rozliczenie D.

Przepływ gotówki w momencie zawarcia transakcji D

$$CF_0 = -dF_0 + S_0 - d_1S_0 - B = -dF_0 + S_0 - d_1S_0 - (S_0 - d_1S_0 - dF_0) = 0.$$

depozyt kontraktu terminowego, krótka sprzedaż, depozyt zabezpieczający krótką sprzedaż i zakup obligacji.

Przepływ gotówki w momencie rozliczenia

$$\begin{aligned} CF_1 &= (1+r)dF_0 + (S_1 - F_0) + (1+r)d_1S_0 - S_1 + (1+r_1)B = \\ &= (-1 - (r_1 - r)d)F_0 - (1 + r_1 - (r_1 - r)d_1)S_0. \end{aligned}$$

Zwrot depozytu wraz z oprocentowaniem, rozliczenie kontraktu terminowego, sprzedaż akcji i spłata kredytu wraz z odsetkami.

Oznaczmy przez F_{AK} cenę kontraktu terminowego, dla której zachodzi równość $CF_1 = 0$.

$$F_{AK} = \frac{(1 + r_1 - (r_1 - r)d_1)S_0}{1 + (r_1 - r)d}.$$

Zauważmy, że gdy $F_0 < F_{AK}$, to $CF_1 > 0$ i nasza transakcja jest transakcją arbitrażową. Wzmoczone zainteresowanie transakcją D oznacza zwiększony popyt na kontrakty kupna, a więc wzrost ceny terminowej F_0 .

Gdy $F_0 \geq F_{AK}$, to $CF_1 \leq 0$ i nasza transakcja nie jest transakcją arbitrażową.

Zauważmy, że gdy $r_2 \geq r_1 \geq r$, to zachodzą następujące nierówności

$$F_{AK} \leq F_K \leq F_* \leq F_S \leq F_{AS}.$$

Jak widać, pasmo cenowe wyznaczone przez zasadę braku arbitrażu jest szersze niż pasmo cen *quasi-równowagi*.

Natomiast, gdy oprocentowanie obligacji jest takie samo jak oprocentowanie kredytu, $r_1 = r_2$, oraz nie ma depozytu $d = d_1 = 0$, lub jest on oprocentowany na poziomie oprocentowania obligacji $r = r_1$, to

$$F_{AK} = F_K = F_* = F_S = F_{AS}.$$

W takim przypadku zasada braku arbitrażu wyznacza tę samą cenę teoretyczną, co prawo jednej ceny.

Wycena kontraktów futures

Wycena przedstawiona poniżej jest wyceną uproszczoną ([20] §1.7), dokonaną z pominięciem kosztów transakcyjnych, depozytów i marż. Ponadto zakładamy, że inwestor może „wkładać” i „pożyczać” pieniądze z rachunku bankowego, który będzie modelowany za pomocą deterministycznego procesu akumulacji $K(t)$, $t \in \langle T_0, T_1 \rangle$. 1 włożona na rachunek bankowy w chwili t akumuluje do $\frac{K(t_1)}{K(t)}$ w chwili t_1 . Podobnie, aby spłacić 1 pożyczoną w chwili t , trzeba w chwili t_1 wpłacić $\frac{K(t_1)}{K(t)}$.

S_t i F_t oznaczają odpowiednio cenę instrumentu bazowego i kurs terminowy w chwili t . W dalszym ciągu będziemy zakładać, że oba instrumenty są nieskończenie podzielne.

Lemat 12.3. *Z prawa jednej ceny wynika, że kurs terminowy w chwili t wynosi*

$$F_t = S_t \cdot \frac{K(T)}{K(t)},$$

gdzie T – moment zapadalności kontraktu futures.

Dowód.

Niech $t_0 = t \geq T_0$ – moment rozpoczęcia inwestycji, $t_n = T \leq T_1$ – moment zapadalności kontraktu futures, a $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < T$ – momenty rozliczeń dziennych kontraktu.

Aby dokonać wyceny, porównamy dwie strategię.

A. Kupujemy 1 jednostkę instrumentu bazowego (np. 1 akcję) w chwili t_0 i sprzedajemy ją w chwili t_n .

B. Wkładamy na rachunek bankowy kwotę

$$b = \frac{F_t K(t)}{K(T)},$$

w kolejnych momentach $t_i, i = 0, 1, \dots, t_{n-1}$ kupujemy kontrakty terminowe, tak aby po zakupie w chwili t_i posiadać ich następującą ilość:

$$\eta_i = \frac{K(t_{i+1})}{K(t_n)}.$$

Straty z rozliczeń dziennych pokrywamy z rachunku bankowego, a zyski wpłacamy na ten rachunek. W momencie T wyjmujemy pieniądze z rachunku bankowego i rozliczamy kontrakt futures.

Rozliczenie strategii A.

Przepływ gotówki w momencie t_0

$$C_{A,0} = -S_{t_0} = -S_t.$$

Przepływ gotówki w momencie $t_n = T$

$$C_{A,1} = S_T.$$

Rozliczenie strategii B.

Przepływ gotówki w momencie t_0

$$C_{B,0} = -b = -\frac{F_t K(t)}{K(T)}.$$

Przepływ gotówki w momencie $t_n = T$

$$\begin{aligned} C_{B,1} &= b \frac{K(t_n)}{K(t_0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{i-1} (F_{t_i} - F_{t_{i-1}}) \frac{K(t_n)}{K(t_i)} + \eta_{n-1} (S_{t_n} - F_{t_{n-1}}) = \\ &= F_{t_0} + \sum_{i=1}^{n-1} (F_{t_i} - F_{t_{i-1}}) + (S_{t_n} - F_{t_{n-1}}) = S_{t_n} = S_T. \end{aligned}$$

Ponieważ w momencie zapadalności T przepływy gotówki obu inwestycji są identyczne, to z prawa jednej ceny wynika, że w momencie t_0 też są równe

$$CF_{A,1} = CF_{B,1} \implies CF_{A,0} = CF_{B,0}.$$

Zatem

$$S_t = F_t \frac{K(t)}{K(T)}.$$

Czyli

$$F_t = S_t \cdot \frac{K(T)}{K(t)}.$$

Uwaga. Warto zauważyć, że jeżeli przyjmiemy, że stopa zwrotu r_1 z obligacji o terminie zapadalności T zakupionej w chwili t jest wyznaczona przez *deterministyczny* proces akumulacji $K(t)$

$$r_1 = \frac{K(T)}{K(t)} - 1,$$

to otrzymane przez nas teoretyczne ceny terminowe kontraktów forward i futures na ten sam instrument bazowy są sobie równe.

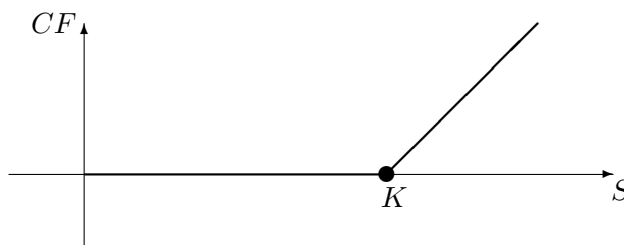
12.1.4. Opcje

Najbardziej popularne są opcje europejskie i amerykańskie.

Europejska opcja kupna (*call*), to kontrakt gwarantujący w ustalonym momencie T w przyszłości, prawo zakupu akcji (lub innego instrumentu bazowego) po ustalonej z góry cenie K .

Posiadacz opcji nie ma obowiązku jej realizacji. Zatem realizuje ją tylko, gdy cena S_T instrumentu bazowego w dniu T jest wyższa od ceny wykonania K . Wypłata posiadacza opcji call w dniu rozliczenia T wynosi

$$CF_T = (S_T - K)^+.$$



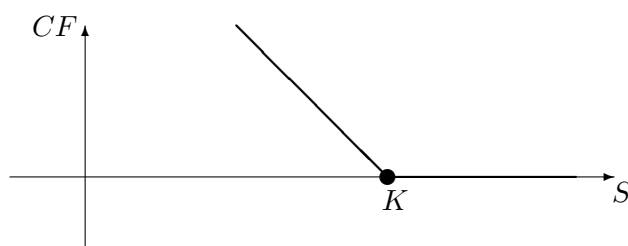
Rysunek 12.5. Opcja kupna – wypłata.

Europejska opcja sprzedaży (*put*), to kontrakt gwarantujący w ustalonym momencie T w przyszłości, prawo sprzedaży akcji (lub innego instrumentu bazowego) po ustalonej z góry cenie K .

Posiadacz opcji nie ma obowiązku jej realizacji. Zatem realizuje ją tylko, gdy cena S_T instrumentu bazowego w dniu T jest niższa od ceny wykonania K . Wypłata posiadacza opcji put w dniu rozliczenia T wynosi

$$CF_T = (S_T - K)^- = (K - S_T)^+.$$

Opcje amerykańskie różnią się od europejskich tym, że ich posiadacz może je zrealizować w dowolnym wybranym przez siebie momencie, aż do ich wygaśnięcia.



Rysunek 12.6. Opcja sprzedaży – wypłata.

Od 22 września 2003 na Giełdzie Warszawskiej są w obrocie opcje na indeks WIG20.
Przykład:

OW20C4140

O – opcja europejska,
W20 – na indeks WIG20,
C4 – kupna, zapadalna w marcu 2004,
140 – o kursie wykonania 1400 pkt.

Czwarty znak kodu określa typ call albo put i miesiąc wykonania.

miesiąc	opcja lub warrant kupna (call)	opcja lub warrant sprzedaży (put)
styczeń	A	M
luty	B	N
marzec	C	O
kwiecień	D	P
maj	E	Q
czerwiec	F	R
lipiec	G	S
sierpień	H	T
wrzesień	I	U
październik	J	V
listopad	K	W
grudzień	L	X

12.1.5. Wycena opcji europejskich

Założenia:

1. Nie ma kosztów transakcyjnych, marż, depozytów itp.
2. Dopuszczalna jest krótka sprzedaż instrumentu bazowego (akcji).

Oznaczenia: $B_t(\tau)$ – struktura terminowa czynnika dyskontującego w dniu t , T – dzień rozliczenia, K – cena wykonania, S_t – cena instrumentu bazowego w dniu t , C_t i P_t – ceny opcji kupna (call) i sprzedaży (put) w dniu t , $t < T$.

Uwaga: Cenę opcji nazywa się też premią.

Ograniczenia na ceny opcji

Lemat 12.4. *Z zasady braku arbitrażu wynikają następujące oszacowania*

$$S_t \geq C_t \geq (S_t - KB_t(T-t))^+,$$

$$KB_t(T-t) \geq P_t \geq (KB_t(T-t) - S_t)^+.$$

Dowód.

Krok 1.

Wypłata z opcji jest nieujemna, zatem $C_t \geq 0$ i $P_t \geq 0$.

Krok 2.

Rozważmy następującą inwestycję:

Zakup 1 opcji call, K obligacji o terminie zapadalności T i wypłacie 1 oraz krótka sprzedaż 1 instrumentu bazowego.

Rozliczenie:

$$CF_t = -C_t - KB_t(T-t) + S_t,$$

$$CF_T = (S_T - K)^+ + K - S_T = (S_T - K)^- \geq 0.$$

Ponieważ wypłata jest nieujemna, to $CF_t \leq 0$, czyli

$$C_t \geq S_t - KB_t(T-t).$$

Co razem z udowodnioną powyżej nieujemnością ceny C_t daje prawą stronę pierwszego oszacowania.

Krok 3.

Rozważmy następującą inwestycję:

Zakup 1 opcji put, zakup 1 instrumentu bazowego oraz pożyczkę kwoty $KB_t(T-t)$.

Rozliczenie:

$$CF_t = -P_t + KB_t(T-t) - S_t,$$

$$CF_T = (S_T - K)^- - K + S_T = (S_T - K)^+ \geq 0.$$

Ponieważ wypłata jest nieujemna, to $CF_t \leq 0$, czyli

$$P_t \geq -S_t + KB_t(T-t).$$

Co razem z udowodnioną powyżej nieujemnością ceny P_t daje prawą stronę drugiego oszacowania.

Krok 4.

Zauważmy, że wypłata z opcji put nie przekracza kwoty K , a z opcji call jest mniejsza niż S_T .
Zatem

$$P_t \leq KB_t(T-t) \quad \text{ i } \quad C_t \leq S_t.$$

Co daje lewe strony obu oszacowań.

Lemat 12.5. *Parytet kupna-sprzedaży.*

Z prawa jednej ceny wynika następujący parytet

$$C_t - P_t = S_t - KB_t(T - t).$$

Dowód.

Rozważmy następujące dwie inwestycje:

- A. Zakup 1 opcji call i K obligacji o terminie zapadalności T i wypłacie 1,
- B. Zakup 1 opcji put i zakup 1 instrumentu bazowego.

Rozliczenie A:

$$\begin{aligned} CF_t &= -C_t - KB_t(T - t), \\ CF_T &= (S_T - K)^+ + K. \end{aligned}$$

Rozliczenie B:

$$\begin{aligned} CF_t &= -P_t - S_t, \\ CF_T &= (S_T - K)^- + S_T. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$(S_T - K)^+ - (S_T - K)^- = S_T - K.$$

Zatem obie inwestycje generują te same wypłaty. Czyli wymagają takich samych nakładów

$$C_t + KB_t(T - t) = P_t + S_t.$$

Co kończy dowód.

Jeżeli założymy dodatkowo, że struktura terminowa jest płaska

$$B_t(T - t) = e^{-r(T-t)},$$

gdzie r – stała intensywność oprocentowania, to oszacowania z lematu przyjmują postać:

$$\begin{aligned} S_t &\geq C_t \geq (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+, \\ Ke^{-r(T-t)} &\geq P_t \geq (Ke^{-r(T-t)} - S_t)^+, \end{aligned}$$

a parytet kupna-sprzedaży możemy zapisać w następujący sposób:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

(patrz [49] §4.5.3, §4.5.5).

Wzór Blacka-Scholesa

Założenia dodatkowe:

- 3. Struktura terminowa jest zadana przez deterministyczny proces akumulacji postaci

$$K(t) = K(0)e^{rt}$$

modelowany przez rachunek bankowy. W szczególności struktura terminowa jest płaska i nie zmienia się z upływem czasu.

4. Proces cen instrumentu bazowego jest opisany geometrycznym ruchem Browna

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t), \quad 0 < t \leq T,$$

gdzie W_t proces Wienera ([22] §13.1). W szczególności dla ustalonego $t > 0$ W_t ma rozkład normalny,

$$E(W_t) = 0, \quad D^2(W_t) = t,$$

a dryf μ i *volatility* σ są stałe.

Z zasady braku arbitrażu wyprowadza się następujący wzór na cenę opcji kupna zwany wzorem Blacka-Scholesa [20] s. 50, [49] s. 188)

$$C_t = C_t(S_t, K, T - t, r, \sigma) = S_t F(d_+) - K e^{-r(T-t)} F(d_-),$$

gdzie F dystrybuenta standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$, oraz

$$d_{\pm} = \frac{\ln S_t - \ln K + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}.$$

Wzór na cenę opcji put otrzymujemy z parytetu kupna-sprzedaży.

$$P_t = P_t(S_t, K, T - t, r, \sigma) = -S_t F(-d_+) + K e^{-r(T-t)} F(-d_-).$$

Zauważmy, że w powyższych wzorach tylko pierwsze cztery argumenty są znane. Volatility σ należy wyznaczyć na podstawie badania rynku.

Szkic wyprowadzenia wzoru.

Dowodzi się, że z zasady braku arbitrażu wynika istnienie pewnej miary probabilistycznej Q takiej, że cena opcji jest równa zdyskontowanej wartości oczekiwanej wypłaty obliczonej w tej mierze

$$C_t = e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - K)^+ | S_t),$$

oraz $S_T = S_t \exp(Z)$ gdzie Z ma rozkład normalny (w mierze Q)

$$Z = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}X, \quad X \sim N(0,1).$$

Zatem zadanie sprowadza się do obliczenia całki

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (S_t \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x) - K)^+ \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \\ &= \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-d_-}^{+\infty} (S_t \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x) - K) \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \\ &= \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} S_t \int_{-d_-}^{+\infty} \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x - \frac{x^2}{2}) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} K \int_{-d_-}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \\
& = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-}^{+\infty} \exp(-\frac{(x - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}) dx - \exp(-r(T-t)) K Q(X \geq -d_-) = \\
& = S_t Q(X \geq -d_+) - \exp(-r(T-t)) K Q(X \geq -d_-) = \\
& = S_t F(d_+) - K e^{-r(T-t)} F(d_-).
\end{aligned}$$

12.2. Ćwiczenia

Ćwiczenie 12.1. Bank Inwestycyjny handluje opcjami europejskimi na akcje spółki „ABCD”. W swoim portfelu ma 100 opcji call z ceną wykonania 10 USD i 200 opcji put z ceną wykonania 20 USD. Ponadto bank wystawił 100 opcji call z ceną wykonania 50 USD. Przyjmując, że wszystkie opcje mają ten sam termin wykonania, oblicz, dla jakich kursów akcji spółki „ABCD” (w dniu wykonania) wypłata będzie najmniejsza, a dla jakich największa.

Rozwiązanie. Wypłata z opcji call z ceną wykonania 10 wynosi

$$C_{10} = (S - 10)^+,$$

z opcji put z ceną wykonania 20

$$P_{20} = (20 - S)^+,$$

a z opcji call z ceną wykonania 50

$$C_{50} = (S - 50)^+.$$

Wypłata z całego portfela wynosi

$$W(S) = 100C_{10} + 200P_{20} - 100C_{50} = \begin{cases} 200(20 - S) & \text{dla } S \in \langle 0, 10 \rangle, \\ 100(30 - S) & \text{dla } S \in \langle 10, 20 \rangle, \\ 100(S - 10) & \text{dla } S \in \langle 20, 50 \rangle, \\ 4000 & \text{dla } S \in \langle 50, +\infty \rangle. \end{cases}$$

Zauważmy, że $W(0) = 4000$, w przedziale $\langle 0, 20 \rangle$ W maleje, $W(20) = 1000$, w przedziale $\langle 20, 50 \rangle$ rośnie, a następnie stabilizuje się na poziomie 4000.

Odpowiedź. Najmniejsza wypłata (równa 1000 USD) będzie miała miejsce gdy kurs akcji spółki „ABCD” wyniesie 20 USD, a największa (równa 4000 USD), gdy kurs będzie większy lub równy 50 USD lub gdy spółka zbankrutuje.

Ćwiczenie 12.2. Inwestor zakupił i sprzedał pewną liczbę opcji put i opcji call o tym samym terminie zapadalności. Wykres wypłaty z jego portfela opcyjnego, w zależności od aktywu bazowego, jest łamaną o wierzchołkach w punktach $(0,5)$, $(5,0)$, $(7,4)$, $(9,0)$. Wiedząc, że „na prawo” od punktu $(9,0)$ wykres jest półprostą nachyloną do osi x pod kątem $\pi/4$ wyznacz przykładowy skład portfela.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $W(S)$ funkcję wypłaty a przez Γ łamaną będącą jej wykresem. Skład portfela nie jest wyznaczony jednoznacznie przez treść zadania. Dowolność tkwi w wyborze „części put” portfela. Jeśli w skład portfela mają wchodzić opcje put o cenie wykonania K_i , $i = 1, \dots, k$, to ich liczby n_i muszą spełniać dwa równania liniowe:

$$\sum_{i=1}^k n_i = -W'(0^+) \quad \text{ i } \quad \sum_{i=1}^k n_i K_i = W(0).$$

Cena wykonania opcji call wchodzącej w skład portfela jest albo współrzędną x wierzchołka łamanej Γ albo jest równa cenie wykonania pewnej opcji put wchodzącej w skład portfela.

Ponieważ kąt nachylenia pierwszego odcinka Γ do osi y wynosi $\pi/4$, to pochodna prawostronna W w punkcie 0 $W'(0^+)$ wynosi -1 i możemy przyjąć $k = 1$, $n_1 = 1$ i $K_1 = 5$. Wówczas część call naszego portfela będzie się składać z m_1 opcji o cenie wykonania 5, m_2 o cenie wykonania 7 i m_3 o cenie wykonania 9. Wielkość m_1 wyznaczamy z warunku $W(7) = 4$,

$$4 = W(7) = m_1(7 - 5).$$

Otrzymujemy $m_1 = 2$. Podobnie m_2 wyznaczamy z warunku $W(9) = 0$,

$$0 = W(9) = m_1(9 - 5) + m_2(9 - 7).$$

Otrzymujemy $m_2 = -4$.

„Na prawo” od punktu (9,0) Γ jest półprostą nachyloną do osi x pod kątem $\pi/4$, zatem $W'(9^+) = 1$. W ten sposób otrzymujemy warunek na sumę m_i .

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1.$$

Co daje $m_3 = 3$.

Odpowiedź. Aby uzyskać zadaną funkcję wypłaty inwestor mógł na przykład zakupić 1 opcję put z ceną wykonania 5, 2 opcje call z ceną wykonania 5 i 3 opcje call z ceną wykonania 9 oraz sprzedać 4 opcje call z ceną wykonania 7.

Ćwiczenie 12.3. W dniu 1.09.2004 opcja OW20I4170 kosztowała 580 zł, a opcja OW20U4170 220 zł, natomiast indeks WIG20 osiągnął 1730,87 pkt. Dniem rozliczenia był 17.09.2004. Wyznacz (w oparciu o parytet kupna-sprzedaży) intensywność oprocentowania. Uwaga: należy uwzględnić mnożnik 10 zł za 1 punkt indeksu.

Rozwiązanie. Z treści zadania wynika, że

$$C_t = 580, \quad P_t = 220, \quad S_t = 10 \cdot 1730,87 = 17308,7.$$

Ponadto cena wykonania wynosi $K = 10 \cdot 1700 = 17000$, a czas życia kontraktu 16 dni. Z zasady parytetu wynika, że

$$r = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{K}{S_t + P_t - C_t}\right).$$

Po wstawieniu powyższych danych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} r &= \frac{366}{16} \ln\left(\frac{17000}{17308,7 + 220 - 580}\right) = 22,875 \ln\left(\frac{17000}{16948,7}\right) = \\ &= 22,875 \cdot 0,00302 \approx 0,069. \end{aligned}$$

Odpowiedź. Intensywność oprocentowania wyniosła 6,9%.

13. Metody stochastyczne w finansach

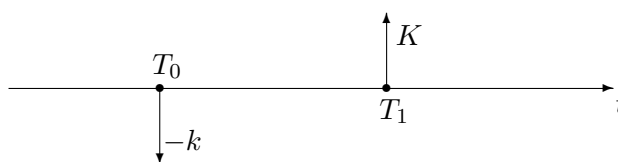
Liczba godzin 6.

Zakres materiału:

Funkcja użyteczności. Kryterium oczekiwanej użyteczności. Dominacja stochastyczna. Podstawowe miary ryzyka.

13.1. Strategie inwestycyjne

W tym wykładzie analizie poddane zostaną inwestycje jednookresowe.



Rysunek 13.1. Przepływy pieniężne

W momencie T_0 inwestor inwestuje kwotę k , a w ustalonym momencie T_1 otrzymuje K jednostek monetarnych. Kwota k jest znana (deterministyczna), a K modelujemy jako zmienną losową.

Pytanie.

Jaką metodę (strategię) ma zastosować inwestor, aby wybrać najlepszą z wielu możliwych inwestycji?

Odpowiedź matematyka jest następująca:

Inwestor powinien wprowadzić na zbiorze wszystkich możliwych (dopuszczalnych) inwestycji relację określającą, które z nich są „lepsze”, a które „gorsze”.

W poniższym podrozdziale omówimy własności takich relacji, a w kolejnych zajmiemy się ich konstrukcją.

13.1.1. Relacje quasi-porządku

Zastosowanie standardowych relacji porządkujących (patrz [36] rozdział IX) wymaga od inwestora informacji niejednokrotnie niemożliwych do uzyskania dlatego znacznie bardziej praktyczne jest wprowadzenie relacji *quasi*-porządkujących.

Definicja 13.1. Relację $\succeq$ określoną na zbiorze X nazywamy quasi-porządkiem, jeżeli jest
a) zwrotna

$$\forall x \in X \quad x \succeq x;$$

b) przechodnia

$$\forall x, y, z \in X \quad x \succeq y \wedge y \succeq z \implies x \succeq z.$$

Z każdą relacją *quasi*-porządku $\succeq$ związane są trzy „pokrewne” relacje $\preceq$, $\succ$ i $\prec$.

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \wedge \neg(y \succeq x);$$

$$x \preceq y \Leftrightarrow y \succeq x; \quad x \prec y \Leftrightarrow y \succ x.$$

Zauważmy, że dla dwóch różnych elementów x, y możliwe są cztery ewentualności, które się nawzajem wykluczają:

$$x \succ y, \quad y \succ x, \quad x \succeq y \wedge y \succeq x, \quad \neg(x \succeq y) \wedge \neg(y \succeq x),$$

x jest lepszy, y jest lepszy, x i y są tak samo dobre lub x i y są nieporównywalne.

13.2. Podejście mikroekonomiczne

13.2.1. Oczekiwana użyteczność

Założenia:

1. Inwestor zna rozkłady prawdopodobieństwa ewentualnych inwestycji.
2. Inwestor postępuje w sposób racjonalny.

Inwestorowi przyporządkowuje się funkcję użyteczności (satysfakcji) ([31, 12])

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Inwestor postępuje w sposób racjonalny, jeśli wybiera inwestycję o największej oczekiwanej użyteczności wypłaty K

$$E(\varphi(K)).$$

Do wyznaczania oczekiwanej użyteczności wykorzystuje się uogólnioną wartość oczekiwaną ([27] §1.1.3), która może przyjmować wartości zarówno skończone, jak i nieskończone ($\pm\infty$). Uogólniona wartość oczekiwana nieujemnej zmiennej losowej jest zawsze określona, może być skończona lub równa $+\infty$. W przypadku dowolnych zmiennych losowych korzysta się z rozkładu na część dodatnią i ujemną, czyli

$$E(\varphi(K)) = E(\varphi(K)^+) - E(\varphi(K)^-).$$

Przypomnijmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a

$$a = a^+ - a^-, \quad \text{gdzie} \quad a^+ = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0, \\ 0 & \text{dla } a < 0, \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} -a & \text{dla } a \leq 0, \\ 0 & \text{dla } a > 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że tylko w przypadku, gdy $E(\varphi(K)^+) = E(\varphi(K)^-) = +\infty$, oczekiwana użyteczność będzie nieokreślona ($\infty - \infty$).

Na funkcję użyteczności φ nakłada się następujące warunki:

1. φ jest niemalejąca: „inwestor preferuje większy zysk”.

2. φ jest wklęsła: „awersja do ryzyka”.

Uwaga. Funkcja φ jest wklęsła, a $-\varphi$ wypukła, gdy zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \varphi(x)\}$$

jest wypukły. Jest to równoważne następującemu warunkowi:
dla dowolnych nieujemnych wag λ_1 i λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i \geq 0$)

$$\forall x, y \quad \varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \geq \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(y).$$

(Więcej informacji czytelnik znajdzie w książce [39], która jest znakomitym kompendium wiedzy o funkcjach wypukłych.)

Wklęsłość uzasadnia się tym, że tłumaczy ona pewne stylizowane fakty. Otóż każda funkcja wklęsła i niemalejąca spełnia następujące oszacowania:

$$\forall x < y \quad \forall h > 0 \quad \varphi(x + h) - \varphi(x) \geq \varphi(y + h) - \varphi(y) \geq 0,$$

$$\forall x < y \quad \forall h > 0 \quad \varphi(x) - \varphi(x - h) \geq \varphi(y) - \varphi(y - h) \geq 0,$$

$$\forall x \quad \forall h > 0 \quad \varphi(x) - \varphi(x - h) \geq \varphi(x + h) - \varphi(x) \geq 0.$$

Możemy je zinterpretować w następujący sposób:

„Ta sama kwota zysku bardziej cieszy, gdy mamy mniej.”

„Taka sama strata bardziej boli, gdy mamy mniej.”

„Strata bardziej boli, niż zysk cieszy.”

Zauważmy, że sformułowane powyżej kryterium oznacza, że z każdą funkcją użyteczności φ związaliśmy relację *quasi*-porządku na zbiorze $\mathcal{K}$ zmiennych losowych, które modelują możliwe wypłaty,

$$K_1 \succeq_{\varphi} K_2 \Leftrightarrow E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2)).$$

Wypłata, dla której oczekiwana użyteczność jest nieokreślona, tzn.

$$E(\varphi(K)^+) = E(\varphi(K)^-) = +\infty,$$

jest nieporównywalna z innymi wypłatami. Natomiast każde dwie wypłaty o określonej oczekiwanej użyteczności (skończonej lub nieskończonej) są porównywalne.

Wniosek 13.1. *Jeżeli dla ustalonej funkcji użyteczności φ i dla każdej zmiennej losowej z $\mathcal{K}$ jest określona oczekiwana użyteczność, to relacja $\succeq_{\varphi}$ jest spójna*

$$\forall K_1, K_2 \in \mathcal{K} \quad K_1 \succeq_{\varphi} K_2 \vee K_2 \succeq_{\varphi} K_1.$$

Przez D_{φ} będziemy oznaczać dziedzinę efektywną funkcji użyteczności φ , tzn. zbiór tych argumentów, dla których funkcja φ przyjmuje skończone wartości

$$D_{\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > -\infty\}.$$

Niech d_{φ} oznacza kres dolny D_{φ} ,

$$d_{\varphi} = \inf\{x : x \in D_{\varphi}\}.$$

Ponieważ funkcja φ jest niemalejąca, to jej dziedzina efektywna może być:
i. zbiorem pustym ($D_{\varphi} = \emptyset$);

- ii. całą prostą rzeczywistą ($D_\varphi = (-\infty, +\infty)$, $d_\varphi = -\infty$);
- iii. półprostą otwartą ($D_\varphi = (d_\varphi, +\infty)$);
- iv. półprostą domkniętą ($D_\varphi = [d_\varphi, +\infty)$).

Przypadek i.

(φ stała równa $-\infty$) jest nieciekawym z punktu widzenia zastosowań i w dalszym ciągu będziemy go pomijać.

Przypadek ii.

φ jest ciągła.

Przypadek iii.

Ciągle jest obcięcie φ do dziedziny efektywnej.

Przypadek iv.

φ obcięta do dziedziny efektywnej może być nieciągła w punkcie d_φ . Ma to miejsce gdy

$$\lim_{x \rightarrow d_\varphi^+} \varphi(x) > \varphi(d_\varphi).$$

Będziemy wówczas przedstawiać funkcję φ jako sumę dwóch funkcji niemalejących i wklęsłych, ciągłej na $(d_\varphi, +\infty)$ i stałej na $(d_\varphi, +\infty)$

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + (\varphi(d_\varphi^+) - \varphi(d_\varphi))\kappa(x - d_\varphi);$$

gdzie $\varphi(d_\varphi^+)$ prawostronna granica φ w d_φ ,

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{dla } x > d_\varphi \\ \varphi(d_\varphi^+) & \text{dla } x = d_\varphi \\ -\infty & \text{dla } x < d_\varphi, \end{cases}$$

$$\kappa(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x = 0 \\ -\infty & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Funkcje wklęsłe, ciągłe na swojej dziedzinie efektywnej, można scharakteryzować za pomocą funkcji liniowych.

Lemat 13.1. *Jeśli funkcja wklęsła φ jest ciągła na D_φ , to istnieją ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$, takie, że*

$$\forall x \in D_\varphi \quad \varphi(x) = \inf_n (a_n x + b_n).$$

Dowód – [24] lemat 5.2.1.

Zauważmy, że gdy zmienna losowa K przyjmuje z niezerowym prawdopodobieństwem wartości z dopełnienia D_φ , to oczekiwana użyteczność wynosi $-\infty$ lub jest nieokreślona

$$P(K \in \mathbb{R} \setminus D_\varphi) > 0 \implies E(\varphi(K)) = -\infty \vee E(\varphi(K)) = \infty - \infty.$$

Oznacza to, że inwestor z góry odrzuca możliwość wyboru inwestycji (strategii) o takiej wypłacie.

13.2.2. Własności oczekiwanej użyteczności

Omówimy teraz podstawowe własności oczekiwanej użyteczności. Szczególną uwagę zwrócimy na kryteria pozwalające stwierdzić, czy dla danej zmiennej losowej K jest ona określona. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że zmienne losowe K , K_1 i K_2 z dalszej części rozdziału są zdefiniowane na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{M}, P)$. Na początek pokażemy, że oczekiwana użyteczność jest monotoniczna.

Twierdzenie 13.1. *Jeśli prawie na pewno $K_1 \geq K_2$ (tzn. $P(K_1 < K_2) = 0$), a oczekiwana użyteczność K_2 jest określona i większa od $-\infty$, to oczekiwana użyteczność K_1 jest określona i nie mniejsza niż oczekiwana użyteczność K_2*

$$E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2)).$$

Jeśli ponadto φ obcięta do dziedziny efektywnej jest ściśle rosnąca, a K_1 i K_2 są istotnie różne ($P(K_1 \neq K_2) > 0$) oraz oczekiwana użyteczność K_2 jest skończona, to

$$E(\varphi(K_1)) > E(\varphi(K_2)).$$

Dowód.

Ponieważ K_2 ma oczekiwaną użyteczność różną od $-\infty$, to prawie na pewno nie przyjmuje wartości z dopełnienia dziedziny efektywnej φ . A skoro φ jest niemalejąca, to otrzymujemy następujące nierówności

$$\varphi(K_1) \geq \varphi(K_2) > -\infty \quad \text{p.n.}$$

Zatem zmienna losowa $\varphi(K_1) - \varphi(K_2)$ jest prawie na pewno nieujemna i ma nieujemną wartość oczekiwaną (skończoną lub nieskończoną)

$$E(\varphi(K_1) - \varphi(K_2)) \geq 0.$$

Ponieważ $E(\varphi(K_2)) > -\infty$, to oczekiwana użyteczność K_1 jest określona i jest od niej nie większa

$$\begin{aligned} E(\varphi(K_1)) &= E(\varphi(K_1) - \varphi(K_2) + \varphi(K_2)) = E(\varphi(K_1) - \varphi(K_2)) + E(\varphi(K_2)) \geq \\ &\geq E(\varphi(K_2)). \end{aligned}$$

Gdy K_1 i K_2 są istotnie różne, a φ obcięta do dziedziny efektywnej jest ściśle rosnąca, to

$$P(\varphi(K_1) - \varphi(K_2) > 0) > 0.$$

Zatem

$$E(\varphi(K_1) - \varphi(K_2)) > 0.$$

Ponieważ oczekiwana użyteczność K_2 jest skończona, to otrzymujemy „ostrą” nierówność

$$E(\varphi(K_1)) > E(\varphi(K_2)).$$

Przeformułujemy teraz powyższe twierdzenie w terminach *quasi-porządku*.

Wniosek 13.2. *Jeżeli oczekiwane użyteczności K_1 i K_2 są określone i prawie na pewno $K_1 \geq K_2$, to*

$$K_1 \succeq_{\varphi} K_2.$$

Ponadto, jeśli φ jest ściśle rosnąca, a K_i są istotnie różne i mają skończone oczekiwane użyteczności, to

$$K_1 \succ_{\varphi} K_2.$$

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika prosty warunek dostateczny istnienia oczekiwanej użyteczności.

Wniosek 13.3. *Jeżeli prawie na pewno K nie przyjmuje wartości mniejszych niż pewna stała x należąca do efektywnej dziedziny φ , to oczekiwana użyteczność K jest określona i różna od $-\infty$.*

$$\exists x \in D_\varphi \quad K \geq x \text{ p.n.} \implies E(\varphi(K)) > -\infty$$

Dowód.

Skoro x należy do dziedziny efektywnej φ , to użyteczność wypłaty x jest większa od $-\infty$. Zatem z powyższego twierdzenia otrzymujemy, że oczekiwana użyteczność wypłaty K jest określona i nie mniejsza od $\varphi(x)$. Czyli

$$E(\varphi(K)) \geq E(\varphi(x)) = \varphi(x) > -\infty.$$

Teraz uogólnimy nierówność Jensena (patrz [22] §5.7 Twierdzenie 2, [8] str. 276).

Twierdzenie 13.2. *Jeżeli zmienna losowa K ma skończoną wartość oczekiwaną (tzn. $K \in L^1$) to spełnione są następujące warunki:*

- i. oczekiwana użyteczność K jest określona;*
 - ii. $E(\varphi(K)) \leq \varphi(E(K))$;*
 - iii. dla dowolnego σ -ciała $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, jest określona oczekiwana użyteczność warunkowej wartości oczekiwanej $E(K|\mathcal{F})$ i $E(\varphi(K)) \leq E(\varphi(E(K|\mathcal{F}))) \leq \varphi(E(K))$.*
- Ponadto, jeśli φ jest ściśle wklęsła, a K nie jest stała i $\varphi(E(K)) > -\infty$, to $E(\varphi(K)) < \varphi(E(K))$.*

Uwagi.

1. Funkcja wklęsła jest ściśle wklęsła, gdy na żadnym przedziale nie jest liniowa, tzn. gdy prosta styczna do wykresu ma z nim tylko jeden punkt wspólny.
2. Punkt *iii.* oznacza, że jeśli uśrednimy wypłatę, to jej oczekiwana użyteczność nie zmaleje.

Dowód.

Ad *ii.* oraz *i.*

Jeżeli K ma skończoną oczekiwaną użyteczność, to *ii.* wynika z nierówności Jensena dla funkcji $-\varphi$. Ponieważ zakładamy tylko istnienie skończonej wartości oczekiwanej K , to musimy pokazać istnienie oczekiwanej użyteczności.

Niech $y = l(x)$,

$$l(x) = \varphi(x_0) + a \cdot (x - x_0),$$

bedzie równaniem prostej stycznej do wykresu $\varphi(x)$ w punkcie x_0 , $x_0 > d_\varphi$. φ jest wklęsła, zatem jej wykres leży poniżej lub na prostej stycznej

$$\forall x \quad l(x) \geq \varphi(x).$$

Zatem zmienna losowa $\varphi(K) - l(K)$ jest niedodatnia i ma wartość oczekiwaną (w $\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$),

$$E(\varphi(K) - l(K)) \leq 0.$$

Ale jak łatwo zauważyć, $l(K)$ ma skończoną wartość oczekiwaną

$$E(l(K)) = E(\varphi(x_0) + a \cdot (K - x_0)) = \varphi(x_0) + a \cdot (E(K) - x_0).$$

Z tego wynika, że istnieje oczekiwana użyteczność K i spełnia nierówność

$$\begin{aligned} E(\varphi(K)) &= E(\varphi(K) - l(K) + l(K)) = E(\varphi(K) - l(K)) + E(l(K)) \leq \\ &\leq E(l(K)) = \varphi(x_0) + a \cdot (E(K) - x_0). \end{aligned}$$

Gdy $E(K) > d_\varphi$, to podstawiamy $x_0 = E(K)$ i otrzymujemy warunek *ii*. W przeciwnym przypadku, gdy $E(K) \leq d_\varphi$, to albo z dodatnim prawdopodobieństwem K przyjmuje wartości z dopełnienia dziedziny efektywnej φ , wówczas oczekiwana użyteczność K jest równa $-\infty$ i warunek *ii* też jest spełniony

$$E(\varphi(K)) = -\infty = \varphi(E(K)),$$

albo K jest prawie na pewno stała, $K = d_\varphi$ p.n., a zatem $E(\varphi(K)) = \varphi(d_\varphi) = \varphi(E(K))$.

Ad *iii*.

Dowód punktu *iii* jest trochę bardziej skomplikowany. $K \in L^1$, a więc warunkowa wartość oczekiwana $E(K|\mathcal{F})$ jest określona i też należy do L^1 ,

$$E(E(K|\mathcal{F})) = E(K).$$

Zatem jej oczekiwana użyteczność jest określona i nie większa niż $\varphi(E(K))$ (punkt (i)). Gdy oczekiwana użyteczność K jest równa $-\infty$, to warunek (iii) jest automatycznie spełniony. W przeciwnym przypadku, gdy zarówno $E(K)$ i $E(\varphi(K))$ są skończone, korzystamy z nierówności Jensena dla warunkowej wartości oczekiwanej dla φ ([24, lemat 5.2.2])

$$\varphi(E(K|\mathcal{F})) \geq E(\varphi(K)|\mathcal{F}) \text{ p.n.}$$

Następnie korzystamy z twierdzenia o iterowaniu wartości oczekiwanej i otrzymujemy następującą nierówność

$$E(\varphi(E(K|\mathcal{F}))) \geq E(E(\varphi(K)|\mathcal{F})) = E(\varphi(K)).$$

Co kończy dowód *iii*.

Gdy φ jest ściśle wklęsła, to

$$\forall x \quad x \neq x_0 \Rightarrow l(x) = \varphi(x_0) + a \cdot (x - x_0) > \varphi(x).$$

Ponadto rozkład K nie jest skupiony w jednym punkcie

$$P(K \neq x_0) > 0,$$

zatem

$$P(l(K) > \varphi(K)) > 0.$$

A z tego wynika, że dla $x_0 = E(K)$ otrzymujemy

$$\varphi(E(K)) = E(l(K)) > E(\varphi(K)).$$

Przeformułujemy powyższe twierdzenie w terminach *quasi*-porządku.

Wniosek 13.4. *Jeżeli $E(K)$ i $\varphi(E(K))$ są skończone, to*

$$E(K) \succeq_\varphi K.$$

Ponadto, jeśli φ jest ściśle wklęsła, a K nie jest stała, to

$$E(K) \succ_\varphi K.$$

Z powyższego twierdzenia wynika również następująca charakteryzacja niechęci (awersji) do ryzyka.

Wniosek 13.5. *Inwestor, który planuje inwestycje w oparciu o ściśle wklęsłą funkcję użyteczności, mając do wyboru inwestycję pewną o znanej z góry wypłacie k_1 i inwestycję wymagającą takich samych nakładów, o tym samym czasie życia i o losowej (nieznanej) wypłacie K o wartości oczekiwanej k_1 , wybierze tę pierwszą.*

Natomiast z punktu *iii.* twierdzenia 13.2 wynika warunkowa monotoniczność oczekiwanej użyteczności.

Wniosek 13.6. *Jeżeli para K_1, K_2 jest nadmartyngałem, tzn.*

$$E(K_2|K_1) \leq K_1 \text{ p.n.},$$

oraz K_2 ma skończoną zarówno wartość oczekiwaną jak i oczekiwaną użyteczność, to oczekiwana użyteczność K_1 jest określona i nie mniejsza niż oczekiwana użyteczność K_2

$$E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2)).$$

Dowód.

Z twierdzenia 13.2 wynika, że oczekiwana użyteczność $E(K_2|K_1)$ istnieje i spełnia nierówność

$$E(\varphi(K_2)) \leq E(\varphi(E(K_2|K_1))).$$

Natomiast z twierdzenia 13.1 otrzymujemy istnienie $E(\varphi(K_1))$ i oszacowanie

$$E(\varphi(E(K_2|K_1))) \leq E(\varphi(K_1)).$$

Co kończy dowód.

Z twierdzenia 13.2 wynika tylko górne ograniczenie na oczekiwaną użyteczność. Dolne ograniczenie może nie istnieć. Okazuje się, że skończona wartość oczekiwana wypłaty K wcale nie musi implikować skończonej oczekiwanej użyteczności nawet, jeśli K nie przyjmuje wartości spoza dziedziny efektywnej φ (- patrz ćwiczenie 13.5).

Na zakończenie pokażemy, że oczekiwana użyteczność jest wklęsła.

Twierdzenie 13.3. *Jeżeli zmienne losowe K_1 i K_2 mają skończoną oczekiwaną użyteczność to dla dowolnych wag λ_1 i λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i \geq 0$)*

i. zmienna losowa $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ ma określoną oczekiwaną użyteczność,

ii. $E(\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)) \geq \lambda_1 E(\varphi(K_1)) + \lambda_2 E(\varphi(K_2))$.

Ponadto, jeśli φ jest ściśle wklęsła, K_1 i K_2 są istotnie różne, $P(K_1 \neq K_2) > 0$, a wagi λ_i dodatnie, to $E(\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)) > \lambda_1 E(\varphi(K_1)) + \lambda_2 E(\varphi(K_2))$.

Dowód.

φ jest funkcją wklęsłą czyli dla dowolnych wag λ_1 i λ_2

$$\forall x, y \quad \varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \geq \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(y).$$

Zatem zmienna losowa $\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) - \lambda_1 \varphi(K_1) - \lambda_2 \varphi(K_2)$ jest nieujemna i ma nieujemną wartość oczekiwaną. Zatem

$$\begin{aligned} E(\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)) &= \\ &= E((\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) - \lambda_1 \varphi(K_1) - \lambda_2 \varphi(K_2)) + (\lambda_1 \varphi(K_1) + \lambda_2 \varphi(K_2))) = \\ &= E((\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) - \lambda_1 \varphi(K_1) - \lambda_2 \varphi(K_2))) + E(\lambda_1 \varphi(K_1) + \lambda_2 \varphi(K_2)) \geq \\ &\geq \lambda_1 E(\varphi(K_1)) + \lambda_2 E(\varphi(K_1)). \end{aligned}$$

Gdy φ jest funkcją ściśle wklęsłą, to dla $x \neq y$, $\varphi(x), \varphi(y) > -\infty$ i $\lambda_i > 0$

$$\varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) > \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(y).$$

Zatem nieujemna zmienna losowa $\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) - \lambda_1 \varphi(K_1) - \lambda_2 \varphi(K_2)$ jest dodatnia na zbiorze, który ma dodatnią miarę. Zatem jej wartość oczekiwana jest dodatnia i nierówność z punktu *ii.* jest ostra.

Wniosek 13.7. *Jeżeli istotnie różne zmienne losowe K_1 i K_2 mają równe skończone oczekiwane użyteczności, a φ jest ściśle wklęsła, to dla dowolnych dodatnich wag λ_1 i λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i > 0$)*

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 \succ_{\varphi} K_1, K_2.$$

Dowód.

Niech φ_0 oczekiwana użyteczność K_1 i K_2 . Z powyższego twierdzenia wynika, że

$$E(\varphi(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)) > \lambda_1 E(\varphi(K_1)) + \lambda_2 E(\varphi(K_2)) = (\lambda_1 + \lambda_2) \varphi_0 = \varphi_0.$$

Zatem kombinacja wypukła K_1 i K_2 jest od nich obu „lepszą”.

Z powyższego wniosku wynika następująca zasada *dywersyfikacji* portfela.

Wniosek 13.8. *Inwestor, który planuje inwestycje w oparciu o ściśle wklęsłą funkcję użyteczności, mając do wyboru trzy inwestycje wymagające takich samych nakładów, o tym samym czasie życia i o istotnie różnych wypłatach K_1 , K_2 i K_3 , takich, że oczekiwane użyteczności K_1 i K_2 są skończone i równe, a K_3 jest kombinacją wypukłą K_1 i K_2 , wybierze tę trzecią.*

13.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 13.1. Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi zero-jedynkowymi

$$P(X_i = 1) = p_i, \quad P(X_i = 0) = 1 - p_i, \quad p_i \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a φ dowolną funkcją użyteczności taką, że $\varphi(0) > -\infty$. Pokazać, że

$$p_1 \geq p_2 \implies X_1 \succeq_{\varphi} X_2.$$

Rozwiązanie.

Dla zmiennej losowej zero-jedynkowej oczekiwana użyteczność wynosi

$$E(\varphi(X)) = (1 - p)\varphi(0) + p\varphi(1) = \varphi(0) + p(\varphi(1) - \varphi(0)).$$

φ jest niemalejąca. Zatem gdy $p_1 \geq p_2$, to oczekiwana użyteczność X_1 jest większa lub równa oczekiwanej użyteczności X_2 . A stąd

$$X_1 \succeq_{\varphi} X_2.$$

Ćwiczenie 13.2. Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi zero-jedynkowymi

$$P(X_i = 1) = p_i, \quad P(X_i = 0) = 1 - p_i, \quad p_i \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a φ dowolną funkcją użyteczności taką, że $\varphi(1) > \varphi(0) > -\infty$. Pokazać, że gdy zmienne losowe X_i mają taką samą oczekiwaną użyteczność, to mają takie samo prawdopodobieństwo osiągnięcia sukcesu.

Rozwiązanie.

$$E(\varphi(X_i)) = (1 - p_i)\varphi(0) + p_i\varphi(1) = \varphi(0) + p_i(\varphi(1) - \varphi(0)).$$

Zatem z równości oczekiwanych użyteczności otrzymujemy

$$p_1 = \frac{E(\varphi(X_1)) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} = \frac{E(\varphi(X_2)) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} = p_2.$$

Ćwiczenie 13.3. Wyznaczyć oczekiwaną użyteczność $E(\varphi(X))$, gdy X ma rozkład normalny $N(0, 1)$ a $\varphi(x) = \min(x, M)$, gdzie M ustalony parametr rzeczywisty.

Rozwiązanie.

$$E(\varphi(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^M x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + MP(X > M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{M^2}{2}\right) + M(1 - F(M)).$$

Odpowiedź. Oczekiwana użyteczność X wynosi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{M^2}{2}\right) + M(1 - F(M))$, gdzie F jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Ćwiczenie 13.4. Inwestor podejmuje decyzje w oparciu o logarytmiczną funkcję użyteczności

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{dla } x > 0, \\ -\infty & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Może zainwestować 1000 zł w dwie inwestycje, o tym samym czasie życia. Wypłata z pierwszej ma rozkład

K_1	960	980	1000	1030	1050
prawdopodobieństwo [%]	20	10	15	25	30

a z drugiej

K_2	960	970	990	1000	1010	1040	1050	1060
prawd. [%]	15	5	5	15	5	25	20	10

Którą z inwestycji wybierze?

Rozwiązanie. Wyznaczamy oczekiwane użyteczności:

$$\begin{aligned} E(\ln(K_1)) &= 0,2 \ln(960) + 0,1 \ln(980) + 0,15 \ln(1000) + 0,25 \ln(1030) + \\ &\quad + 0,3 \ln(1050) = 6,919597359, \end{aligned}$$

$$E(\ln(K_2)) = 0,15 \ln(960) + 0,05 \ln(970) + 0,05 \ln(990) + 0,15 \ln(1000) + \\ + 0,05 \ln(1010) + 0,25 \ln(1040) + 0,2 \ln(1050) + 0,1 \ln(1060) = 6,925494121.$$

Jak widać, oczekiwana użyteczność drugiej wypłaty jest trochę większa.

Odpowiedź. Inwestor wybierze drugą inwestycję.

Ćwiczenie 13.5. Wyznaczyć oczekiwaną użyteczność dla wypłaty K , która ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 2)$

$$P(K \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

i dla funkcji użyteczności

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x. \end{cases}$$

Porównać ją z użytecznością wartości oczekiwanej K .

Rozwiązanie. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu jednostajnego na przedziale o długości 2 jest równa 0,5 wewnątrz tego przedziału i 0 poza nim. Zatem

$$E(\varphi(K)) = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{2} dx = -\infty.$$

Z drugiej strony wartość oczekiwana K wynosi 1, a więc

$$\varphi(E(K)) = \varphi(1) = 0.$$

Odpowiedź. Oczekiwana użyteczność dla wypłaty K wynosi $-\infty$, podczas gdy użyteczność wartości oczekiwanej K wynosi 0.

14. Metody stochastyczne w finansach - cd

14.1. Dominacja stochastyczna

Oczekiwana użyteczność zależy od wyboru funkcji użyteczności. Zachodzi pytanie, czy można ocenić, która z dwóch inwestycji jest lepsza dla wszystkich inwestorów niezależnie od ich indywidualnych preferencji. Postaramy się odpowiedzieć na to pytanie, korzystając z pojęcia dominacji stochastycznej.

Niech K_1 i K_2 oznaczają zmienne losowe.

Definicja 14.1. Mówimy, że K_1 dominuje nad K_2 gdy

$$K_1 \geq K_2 \text{ p.n. },$$

czyli $P(K_1 < K_2) = 0$.

Definicja 14.2. Mówimy, że K_1 dominuje nad K_2 w sensie dominacji stochastycznej rzędu pierwszego, gdy

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_1(x) \leq F_2(x),$$

gdzie F_i oznacza dystrybuantę zmiennej losowej K_i .

Piszemy wówczas:

$$K_1 \geq_{FSD} K_2.$$

Relacja FSD nie zależy od wyboru definicji dystrybuanty. Jeżeli K_1 dominuje nad K_2 w sensie dominacji stochastycznej rzędu pierwszego dla dystrybuant prawostronnie ciągłych ($F_i(x) = P(K_i \leq x)$), to dominuje również w sensie dominacji stochastycznej rzędu pierwszego dla dystrybuant lewostronnie ciągłych ($F_i(x) = P(K_i < x)$) i na odwrót. Ale dla ustalenia uwagi, w dalszym ciągu będziemy używać dystrybuant prawostronnie ciągłych (zgodnie z [22, 27]).

Dystrybuanta F jest funkcją nieujemną i ograniczoną, zatem zawsze istnieje granica skończona lub nieskończona całek $\int_y^x F(t)dt$ gdy y zbiega do $-\infty$, czyli uogólniona całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^x F(t)dt$ jest zawsze określona.

Definicja 14.3. Mówimy, że K_1 dominuje nad K_2 w sensie dominacji stochastycznej rzędu drugiego, gdy

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^x F_1(t)dt \leq \int_{-\infty}^x F_2(t)dt,$$

gdzie F_i dystrybuanta K_i , a całki są całkami uogólnionymi.

Piszemy wówczas:

$$K_1 \geq_{SSD} K_2.$$

Zauważmy, że w przypadku dominacji stochastycznej rzędu pierwszego i drugiego zmienne losowe K_1 i K_2 nie muszą być określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Ponadto,

jeśli nawzajem nad sobą dominują, to mają ten sam rozkład ($F_1 = F_2$). Zatem relacje dominacji stochastycznej, rzędu pierwszego i drugiego, są relacjami *quasi*-porządku na zbiorach zmiennych losowych, indukującymi relacje częściowego porządku na zbiorach ich rozkładów.

Uwaga. Mamy następujące zależności:

$$\text{Dominacja} \Rightarrow \text{FSD} \Rightarrow \text{SSD}.$$

Pokażemy teraz, jakie związki zachodzą między kryterium maksymalizacji oczekiwanej użyteczności a dominacją stochastyczną pierwszego i drugiego rzędu.

Twierdzenie 14.1. *Niech K_1 i K_2 zmienne losowe. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $K_1 \geq_{\text{FSD}} K_2$;
2. Dla każdej niemalejącej funkcji φ mamy:
 $E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2))$ lub obie wartości oczekiwane są nieokreślone lub $E(\varphi(K_1)) = +\infty$ lub $E(\varphi(K_2)) = -\infty$;
3. Istnieją zmienne losowe K'_1 i K'_2 o tym samym rozkładzie co odpowiednio K_1 i K_2 , takie, że

$$K'_1 \geq K'_2.$$

Dowód.

$1 \Rightarrow 3$.

Skorzystamy ze standardowej konstrukcji (patrz [22] §5.3 zad. 2). Zmienne losowe K'_1 i K'_2 zdefiniujemy na nowej przestrzeni probabilistycznej. Jako zbiór zdarzeń elementarnych weźmiemy otwarty odcinek jednostkowy ($\Omega = (0, 1)$), a jako prawdopodobieństwo miarę Lebesgue'a μ na tym odcinku. Niech

$$K'_i(t) = \sup\{u : P(K_i \leq u) < t\}.$$

Jak łatwo sprawdzić, K'_i i K_i mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa. Rzeczywiście dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mu\{t : K'_i(t) \leq x\} &= \mu\{t : \sup\{u : P(K_i \leq u) < t\} \leq x\} = \\ &= \mu(0, P(K_i \leq x)) = P(K_i \leq x). \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że K'_1 dominuje nad K'_2 . Z pierwszej dominacji stochastycznej K_1 wynika, że

$$\forall u \quad P(K_1 \leq u) \leq P(K_2 \leq u).$$

Zatem

$$\forall t > 0 \quad \sup\{u : P(K_1 \leq u) < t\} \geq \sup\{u : P(K_2 \leq u) < t\},$$

czyli dla dowolnego t $K'_1(t) \geq K'_2(t)$.

$3 \Rightarrow 2$.

Wartość oczekiwana zależy tylko od rozkładu, $\varphi(K'_i)$ i $\varphi(K_i)$ mają ten sam rozkład, a więc $E(\varphi(K'_i)) = E(\varphi(K_i))$ lub obie są nieokreślone. Ponadto φ jest niemalejąca, zatem gdy wartości oczekiwane istnieją, to

$$E(\varphi(K_1)) = E(\varphi(K'_1)) \geq E(\varphi(K'_2)) = E(\varphi(K_2)).$$

$2 \Rightarrow 1$.

Zauważmy, że funkcje

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq x \\ 1 & \text{dla } t > x \end{cases}$$

są niemalejące. Zatem dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(K_1 \leq x) &= 1 - P(K_1 > x) = 1 - E(\varphi_x(K_1)) \leq \\ &\leq 1 - E(\varphi_x(K_2)) = 1 - P(K_2 > x) = P(K_2 \leq x), \end{aligned}$$

co daje $K_1 \geq_{FSD} K_2$.

Wniosek 14.1. Niech $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, będzie funkcją niemalejącą taką, że zmienne losowe K_1 i K_2 prawie na pewno przyjmują wartości z I

$$P(K_1 \notin I) = P(K_2 \notin I) = 0.$$

Wówczas

$$K_1 \geq_{FSD} K_2 \implies h(K_1) \geq_{FSD} h(K_2).$$

W szczególności dla $a, m \in \mathbb{R}$ i $a > 0$

$$K_1 \geq_{FSD} K_2 \iff aK_1 + m \geq_{FSD} aK_2 + m.$$

Dowód.

Skorzystamy z pkt. 3 powyższego twierdzenia. Jeśli K'_1 i K'_2 mają ten sam rozkład co odpowiednio K_1 i K_2 i

$$K'_1 \geq K'_2,$$

to $h(K'_1)$ i $h(K'_2)$ mają ten sam rozkład co odpowiednio $h(K_1)$ i $h(K_2)$ i

$$h(K'_1) \geq h(K'_2).$$

Zatem

$$h(K_1) \geq_{FSD} h(K_2).$$

Przejdziemy teraz do drugiej dominacji stochastycznej. Na początek pokażemy związek między całką z dystrybuanty, a wartością oczekiwaną.

Lemat 14.1. Dla dowolnej zmiennej losowej K o dystrybuancie F

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad E((K - x)^-) = \int_{-\infty}^x F(t) dt.$$

Dowód.

Jak wiadomo ([22] Stwierdzenie 11 §5.6) wartość oczekiwana nieujemnej zmiennej losowej X jest równa całce z prawdopodobieństwa przekroczenia poziomu t po dt ,

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t) dt.$$

Część ujemna $(K - x)^-$ jest z definicji nieujemna, zatem

$$E((K - x)^-) = \int_0^\infty P((K - x)^- > t) dt.$$

Ponieważ $t \geq 0$, to $(K - x)^- > t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K < x - t$ i

$$E((K - x)^-) = \int_0^\infty P((K < x - t))dt.$$

Po zamianie zmiennych, $s = x - t$, otrzymujemy

$$E((K - x)^-) = \int_{-\infty}^x P(K < s)ds = \int_{-\infty}^x F(s)ds,$$

gdyż poza przeliczalną liczbą punktów $F(s) = P(K < s)$.

Z powyższego wynika następująca charakteryzacja drugiej dominacji stochastycznej:

Wniosek 14.2.

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad E((K_1 - x)^-) \leq E((K_2 - x)^-).$$

Pokażemy teraz, że gdy K ma skończoną wartość oczekiwaną, to funkcja

$$G(x) = \int_{-\infty}^x F(t)dt$$

ma prawostronną asymptotę ukośną $x - E(K)$.

Lemat 14.2. Dla dowolnej zmiennej losowej K o dystrybucie F i skończonej wartości oczekiwanej ($K \in L^1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \int_{-\infty}^x F(t)dt) = E(K).$$

Dowód.

Założmy, że $x > 0$. Wówczas

$$x - \int_{-\infty}^x F(t)dt = \int_0^x (1 - F(t))dt - \int_{-\infty}^0 F(t)dt = \int_0^x P(K > t)dt - \int_{-\infty}^0 F(t)dt.$$

Dla $t \geq 0$ $K > t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K^+ > t$, zatem korzystając ponownie ze stwierdzenia 11 §5.6 [22] otrzymujemy dla x zbiegającego do $+\infty$

$$\int_0^x P(K > t)dt = \int_0^x P(K^+ > t)dt \rightarrow \int_0^{+\infty} P(K^+ > t)dt = E(K^+).$$

Ponieważ, jak pokazaliśmy w poprzednim lemacie

$$\int_{-\infty}^0 F(t)dt = E(K^-),$$

to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \int_{-\infty}^x F(t)dt) = E(K^+) - E(K^-) = E(K).$$

Wniosek 14.3.

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \wedge K_2 \in L^1 \Rightarrow E(K_1) \geq E(K_2).$$

Twierdzenie 14.2. Niech K_1 i K_2 zmienne losowe o skończonych wartościach oczekiwanych ($K_1, K_2 \in L^1$). Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. $K_1 \geq_{SSD} K_2$;
2. Dla każdej niemalejącej i wklęsłej funkcji φ $E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2))$;
3. Istnieją zmienne losowe K'_1 i K'_2 o tym samym rozkładzie co odpowiednio K_1 i K_2 , takie, że

$$K'_1 \geq E(K'_2 | K'_1),$$

tnz. para (K'_1, K'_2) jest nadmartingale.

Dowód -patrz [24, Twierdzenie 5.2.8] lub [14, Theorem 2.58].

Wniosek 14.4. Niech K_1 i K_2 zmienne losowe o skończonych wartościach oczekiwanych ($K_1, K_2 \in L^1$), a $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ funkcja niemalejąca i wklęsła taka, że zmienne losowe K_1 i K_2 prawie na pewno przyjmują wartości z I

$$P(K_1 \notin I) = P(K_2 \notin I) = 0.$$

Wówczas

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \implies h(K_1) \geq_{SSD} h(K_2).$$

W szczególności dla $a, m \in \mathbb{R}$ i $a > 0$

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \iff aK_1 + m \geq_{SSD} aK_2 + m.$$

Dowód.

Zauważmy, że wzięta ze znakiem przeciwnym część ujemna z funkcji niemalejącej i wklęsłej też jest niemalejąca i wklęsła. Zatem z dominacji stochastycznej, $K_1 \geq_{SSD} K_2$, wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$E(-(h(K_1) - x)^-) \geq E(-(h(K_2) - x)^-),$$

co jest równoważne dominacji stochastycznej, $h(K_1) \geq_{SSD} h(K_2)$.

Na zakończenie pokażemy, że dominację stochastyczną pierwszego lub drugiego rzędu można stosować wymiennie do oceny wypłat z inwestycji lub zysku lub stóp zwrotu.

Niech K_1 i K_2 modelują wypłaty z dwóch inwestycji A i B, wymagających tych samych nakładów k , $k > 0$.

$$CF_{A,0} = CF_{B,0} = -k, \quad CF_{A,1} = K_1, \quad CF_{B,1} = K_2.$$

Przez Z i r oznaczamy odpowiednio zysk i stopę zwrotu

$$Z_i = K_i - k, \quad r_i = \frac{K_i - k}{k}.$$

Załóżmy, że dystrybuanty K_1 i K_2 są różne od siebie tzn.

$$\exists t \quad F_1(t) \neq F_2(t).$$

Wówczas:

Wniosek 14.5. *Jeżeli zachodzi choć jeden z poniższych warunków*

- $K_1 \geq_{FSD} K_2$,
- $Z_1 \geq_{FSD} Z_2$,
- $r_1 \geq_{FSD} r_2$,

to racjonalny inwestor wybierze inwestycję A.

Założmy ponadto, że wartości oczekiwane $E(K_1)$ i $E(K_2)$ są skończone.

Wniosek 14.6. *Jeżeli zachodzi choć jeden z poniższych warunków*

- $K_1 \geq_{SSD} K_2$,
- $Z_1 \geq_{SSD} Z_2$,
- $r_1 \geq_{SSD} r_2$,

to racjonalny inwestor wybierze inwestycję A.

14.2. Własności dominacji stochastycznej

Rozważania w tym podrozdziale ograniczymy do zmiennych losowych całkowalnych, tzn. posiadających skończoną wartość oczekiwaną.

Definicja 14.4. Semiwariancją ujemną i dodatnią zmiennej losowej K nazywamy odpowiednio

$$SV^-(K) = E(((K - E(K))^-)^2) \text{ i } SV^+(K) = E(((K - E(K))^+)^2).$$

Pierwiastek z semiwariancji nazywamy semiodchyleniem standardowym

$$\sigma^-(K) = \sqrt{SV^-(K)}, \quad \sigma^+(K) = \sqrt{SV^+(K)}.$$

Jeśli zmienna losowa K ma rozkład symetryczny, to semiwariancje są sobie równe i wynoszą połowę wariancji

$$SV^-(K) = SV^+(K) = \frac{1}{2}V(K).$$

Gdy w definicji wariancji zastąpimy kwadrat przez moduł, to otrzymamy odchylenie przeciętne. Przypomnijmy:

Definicja 14.5. Odchyleniem przeciętnym, semiodchyleniem przeciętnym ujemnym i semiodchyleniem przeciętnym dodatnim zmiennej losowej K nazywamy odpowiednio

$$d(K) = E(|K - E(K)|),$$

$$sd^-(K) = E((K - E(K))^-), \quad sd^+(K) = E((K - E(K))^+).$$

Te trzy wielkości są ściśle ze sobą związane.

Lemat 14.3. *Dla dowolnej zmiennej losowej K*

$$sd^-(K) = sd^+(K) = \frac{1}{2} d(K).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$E(|K - E(K)|) = E((K - E(K))^+) + E((K - E(K))^-).$$

Natomiast

$$E((K - E(K))^+) - E((K - E(K))^-) = E(K - E(K)) = 0.$$

Zatem

$$E((K - E(K))^+) = E((K - E(K))^-) \text{ i } E(|K - E(K)|) = 2E((K - E(K))^-).$$

Przeanalizujemy teraz zależności między parametrami rozkładów wynikające z dominacji stochastycznej pierwszego lub drugiego rzędu.

Lemat 14.4. *Jeśli K_1 dominuje stochastycznie nad K_2 , $K_1 \geq_{FSD} K_2$, to*

1. $E(K_1) \geq E(K_2)$.

Jeśli ponadto $E(K_1) = E(K_2)$, to

2. $\sigma^-(K_1) \leq \sigma^-(K_2)$;

3. $\sigma^+(K_1) \geq \sigma^+(K_2)$;

4. $d(K_1) = d(K_2)$.

Dowód.

Ad 1.

Rozważamy funkcję $\varphi(s) = s$. Jest to funkcja rosnąca, zatem

$$E(K_1) = E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2)) = E(K_2).$$

W dalszej części dowodu przyjmiemy, że wartości oczekiwane są równe, $E(K_1) = E(K_2) = m$.

Ad 2.

Rozważamy funkcję $\varphi(s) = -((s - m)^-)^2$. Jest to funkcja niemalejąca, zatem

$$-SV^-(K_1) = E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2)) = -SV^-(K_2).$$

Ad 3.

Rozważamy funkcję $\varphi(s) = ((s - m)^+)^2$. Jest to funkcja niemalejąca, zatem

$$SV^+(K_1) = E(\varphi(K_1)) \geq E(\varphi(K_2)) = SV^+(K_2).$$

Ad 4.

Rozważamy funkcje $\varphi_1(s) = (s - m)^+$ i $\varphi_2(s) = -(s - m)^-$. Obie są funkcjami niemalejącymi, a więc

$$\begin{aligned} sd^+(K_1) &= E(\varphi_1(K_1)) \geq E(\varphi_1(K_2)) = sd^+(K_2) = \\ &= sd^-(K_2) = -E(\varphi_2(K_2)) \geq -E(\varphi_2(K_1)) = sd^-(K_1). \end{aligned}$$

Zatem $sd^\pm(K_1) = sd^\pm(K_2)$, czyli również $d(K_1) = d(K_2)$.

Druga dominacja stochastyczna implikuje trochę słabsze warunki.

Lemat 14.5. *Jeśli K_1 dominuje stochastycznie nad K_2 , $K_1 \geq_{SSD} K_2$, to*

1. $E(K_1) \geq E(K_2)$.

Jeśli ponadto $E(K_1) = E(K_2)$, to

2. $\sigma^-(K_1) \leq \sigma^-(K_2)$;

3. $d(K_1) \leq d(K_2)$.

Dowód.

Nierówność dla wartości oczekiwanych była pokazana już w poprzednim podrozdziale (wniosek 14.3). Nierówności 2 i 3 wynikają z faktu, że funkcje $\varphi(s) = -((s - m)^-)^2$ i $\varphi_2(s) = -(s - m)^-$ wykorzystane do dowodu 2 i 4 w poprzednim lemacie są nie tylko niemalejące, ale i wklęsłe.

Gdy rozkłady są symetryczne, to semiodchylenia standardowe można zastąpić odchyleniem standardowym.

Wniosek 14.7. Jeśli rozkłady K_1 i K_2 są symetryczne, $E(K_1) = E(K_2)$ i $K_1 \geq_{FSD} K_2$, to $\sigma(K_1) = \sigma(K_2)$.

Wniosek 14.8. Jeśli rozkłady K_1 i K_2 są symetryczne, $E(K_1) = E(K_2)$ i $K_1 \geq_{SSD} K_2$, to $\sigma(K_1) \leq \sigma(K_2)$.

W przypadku rozkładów normalnych dominację stochastyczną można całkowicie opisać w terminach wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego.

Twierdzenie 14.3. Niech zmienne losowe K_1 i K_2 mają rozkłady normalne o parametrach

$$E(K_i) = m_i, \quad \sigma(K_i) = \sigma_i.$$

Wówczas

$$K_1 \geq_{FSD} K_2 \iff m_1 \geq m_2 \quad \wedge \quad \sigma_1 = \sigma_2;$$

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \iff m_1 \geq m_2 \quad \wedge \quad \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Dowód.

Niech F oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego standardowego $N(0, 1)$. Dystrybuanty zmiennych K_i możemy zapisać w następujący sposób

$$F_1(t) = F\left(\frac{t - m_1}{\sigma_1}\right), \quad F_2(t) = F\left(\frac{t - m_2}{\sigma_2}\right).$$

$$K_1 \geq_{FSD} K_2 \iff \forall t \quad F_1(t) \leq F_2(t) \iff \forall t \quad F\left(\frac{t - m_1}{\sigma_1}\right) \leq F\left(\frac{t - m_2}{\sigma_2}\right)$$

Dystrybuanta F jest ściśle rosnąca, zatem

$$K_1 \geq_{FSD} K_2 \iff \forall t \quad \frac{t - m_1}{\sigma_1} \leq \frac{t - m_2}{\sigma_2} \iff m_1 \geq m_2 \quad \wedge \quad \sigma_1 = \sigma_2.$$

Druga dominacja jest bardziej skomplikowana. Zauważmy, że

$$\int_{-\infty}^x F_i(t) dt = \int_{-\infty}^x F\left(\frac{t - m_i}{\sigma_i}\right) dt = \int_{-\infty}^{x - m_i} F\left(\frac{t}{\sigma_i}\right) dt.$$

Najpierw pokażemy, że z nierówności

$$m_1 \geq m_2, \quad \sigma_1 \leq \sigma_2$$

wynika druga dominacja stochastyczna. Pokażemy, że pochodna po σ jest nieujemna

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_{-\infty}^x F\left(\frac{t}{\sigma}\right) dt &= \int_{-\infty}^x F'\left(\frac{t}{\sigma}\right) \frac{-t}{\sigma^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{-t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Zatem przy ustalonych m i x zależność od σ jest monotoniczna. A więc

$$\int_{-\infty}^x F_1(t) dt = \int_{-\infty}^{x - m_1} F\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) dt \leq \int_{-\infty}^{x - m_1} F\left(\frac{t}{\sigma_2}\right) dt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{x-m_2} F\left(\frac{t}{\sigma_2}\right) dt = \int_{-\infty}^x F_2(t) dt.$$

Dowód implikacji w drugą stronę. Jak pokazaliśmy powyżej, druga dominacja stochastyczna implikuje nierówność wartości oczekiwanych.

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \Rightarrow m_1 \geq m_2.$$

Rozważmy następującą granicę, gdy x dąży do $-\infty$

$$g = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\int_{-\infty}^x F_2(t) dt}{\int_{-\infty}^x F_1(t) dt}.$$

Stosując dwukrotnie regułę de l'Hospitala, otrzymujemy

$$\begin{aligned} g &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F_2(x)}{F_1(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)}{F\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)} = \\ &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } \sigma_1 > \sigma_2 \\ 0 & \text{dla } \sigma_1 = \sigma_2 \wedge m_1 < m_2 \\ 1 & \text{dla } \sigma_1 = \sigma_2 \wedge m_1 = m_2 \\ +\infty & \text{dla } \sigma_1 = \sigma_2 \wedge m_1 > m_2 \\ +\infty & \text{dla } \sigma_1 < \sigma_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Z drugiej dominacji stochastycznej wynika, że g jest nie mniejsze od 1. Zatem przypadek $\sigma_1 > \sigma_2$ można wykluczyć.

Na zakończenie zajmiemy się zmiennymi losowymi o rozkładzie lognormalnym.

Twierdzenie 14.4. Niech K_1 i K_2 zmienne losowe o rozkładzie lognormalnym, $K_i = e^{X_i}$, gdzie zmienne losowe X_i mają rozkład normalny o parametrach

$$E(X_i) = m_i, \quad \sigma(X_i) = \sigma_i.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} K_1 \geq_{FSD} K_2 &\iff m_1 \geq m_2 \quad \wedge \quad \sigma_1 = \sigma_2; \\ K_1 \geq_{SSD} K_2 &\iff 0 \leq \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \leq 2(m_1 - m_2). \end{aligned}$$

Dowód.

Równoważność dla dominacji stochastycznej pierwszego rzędu wynika z faktu, że funkcja wykładnicza jest rosnąca i odwracalna. Zatem z wniosku 14.1 i charakteryzacji dominacji stochastycznej dla rozkładów normalnych (twierdzenie 14.3) otrzymujemy:

$$K_1 \geq_{FSD} K_2 \iff X_1 \geq_{FSD} X_2 \iff m_1 \geq m_2 \quad \wedge \quad \sigma_1 = \sigma_2.$$

W przypadku dominacji stochastycznej drugiego rzędu dominacja X_1 nad X_2 nie jest równoważna dominacji K_1 nad K_2 . Prawdziwa jest tylko implikacja w jedną stronę, która wynika

z faktu, że $X_i = \ln(K_i)$, a logarytm naturalny jest funkcją rosnącą i wklęsłą. Z wniosku 14.4 i twierdzenia 14.3 otrzymujemy:

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \implies X_1 \geq_{SSD} X_2 \implies m_1 \geq m_2 \wedge \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Ponadto z dominacji stochastycznej wynika nierówność dla wartości oczekiwanych

$$K_1 \geq_{SSD} K_2 \implies E(K_1) \geq E(K_2).$$

Przypomnijmy, że

$$\begin{aligned} E(K_i) &= E(e^{X_i}) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \exp\left(-\frac{(x - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma_i x + m_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - \sigma_i)^2}{2} + \frac{\sigma_i^2}{2} + m_i\right) dx = \exp\left(\frac{\sigma_i^2}{2} + m_i\right). \end{aligned}$$

Zatem

$$E(K_1) \geq E(K_2) \iff \frac{\sigma_1^2}{2} + m_1 \geq \frac{\sigma_2^2}{2} + m_2 \iff \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \leq 2(m_1 - m_2).$$

Co kończy dowód implikacji w prawą stronę.

Pokażemy teraz, że warunki na parametry σ_i i m_i wystarczają, aby zachodziła dominacja stochastyczna rzędu drugiego. Skorzystamy z warunku 3 twierdzenia 14.2. Niech $\widehat{X}_1$ i $\widehat{X}_3$ niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym

$$\widehat{X}_1 \sim N(m_1, \sigma_1), \quad \widehat{X}_3 \sim N(m_2 - m_1, \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}).$$

Niech $\widehat{X}_2 = \widehat{X}_1 + \widehat{X}_3$, zatem $\widehat{X}_2$ też ma rozkład normalny

$$\widehat{X}_2 \sim N(m_2, \sigma_2).$$

Okazuje się, że para $\exp(\widehat{X}_1), \exp(\widehat{X}_2)$ jest nadmartyngałem. Otóż z niezależności $\widehat{X}_3$ od $\widehat{X}_1$ wynika, że

$$\begin{aligned} E(\exp(\widehat{X}_2) | \exp(\widehat{X}_1)) &= \exp(\widehat{X}_1) E(\exp(\widehat{X}_3)) = \\ &= \exp(\widehat{X}_1) \exp(m_2 - m_1 + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)). \end{aligned}$$

Ponieważ założyliśmy, że $m_2 - m_1 + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \leq 0$, to

$$E(\exp(\widehat{X}_2) | \exp(\widehat{X}_1)) \leq \exp(\widehat{X}_1),$$

czyli

$$\exp(\widehat{X}_1) \geq_{SSD} \exp(\widehat{X}_2).$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że K_1 ma taki sam rozkład jak $\exp(\widehat{X}_1)$, a K_2 jak $\exp(\widehat{X}_2)$.

14.3. Dochód i ryzyko

14.3.1. Oczekiwany dochód i miary ryzyka

Strategie oparte na dominacji stochastycznej wymagają dokładnej znajomości całego rozkładu, co jest:

- a) pracochłonne;
- b) kosztowne;
- c) czasami niewykonalne.

Ponadto prowadzą one do optymalizacji „ ∞ -kryterialnej”. Dlatego bardziej popularne są strategie oparte na dwu kryteriach: prognozowany dochód i ryzyko. Maksymalizujemy prognozowany dochód i minimalizujemy ryzyko. Prowadzi to do następującego kryterium wyboru inwestycji.

Niech zmienne losowe R_1 i R_2 modelują zysk z dwu inwestycji wymagających tych samych nakładów. Załóżmy, że mają one różne prognozy dochodu lub różne miary ryzyka. Oczywiście jest, że jeśli prognozowany dochód dla R_1 jest większy lub równy prognozowanemu dochodowi dla R_2 i ryzyko dla R_1 jest mniejsze lub równe ryzyku dla R_2 , to inwestor wybierze R_1 .

Jako prognozę dochodu najczęściej przyjmuje się wartość oczekiwaną $E(R)$, rzadziej medianę $m_e(R)$. W obu przypadkach jest to prognoza *punktowa* zysku. Im większa wartość prognozy, tym inwestycja jest korzystniejsza. Ale R jest przecież zmienną losową i należy uwzględnić, że wynik może być różny od prognozy. Dlatego wprowadza się pojęcie ryzyka. Ma ono w analizie portfelowej dwa znaczenia.

1. Możliwość wystąpienia efektu niezgodnego z przewidywaniami. Nieważne, czy jest to *przykra niespodzianka*, czy *przyjemne zaskoczenie*; ważne, że prognoza była niedokładna.
2. Możliwość poniesienia straty. Uwzględniamy tylko *przykre niespodzianki*.

Najbardziej popularne miary ryzyka to:

- dla niezgodności z przewidywaniami (1.).

Odchylenie standardowe i wariancja.

$$V(R) = E((R - E(R))^2), \quad \sigma(R) = \sqrt{V(R)};$$

wyznaczamy prognozę błędu prognozy.

- dla możliwości straty (2.).

Ujemne semiodchylenie standardowe i ujemna semiwariancja.

$$SV^-(R) = E(((R - E(R))^-)^2), \quad \sigma^-(R) = \sqrt{SV^-(R)}$$

SV^- i σ^- , to odpowiedniki odchylenia standardowego i wariancji w przypadku drugiej interpretacji ryzyka.

- dla obu interpretacji ryzyka (1. i 2.).

Odchylenie przeciętne i ujemne semiodchylenie przeciętne.

$$d(R) = E(|R - E(R)|), \quad sd^-(R) = E((R - E(R))^-).$$

Ponieważ $d(R) = 2sd^-(R)$ (lemat 14.3) to można je stosować przy obu interpretacjach ryzyka, mierząc one zarówno błąd prognozy, jak i wielkość możliwej straty.

Zauważmy, że w przypadku rozkładu normalnego powyższe miary są równoważne, w szczególności odchylenie standardowe, semiodchylenie standardowe, odchylenie przeciętne i semiodchylenie przeciętne są proporcjonalne. Rzeczywiście, jeśli R ma rozkład normalny o parametrach m i σ , $R \sim N(m, \sigma^2)$, to (por. ćwiczenie 14.2)

$$V(R) = \sigma^2, \quad \sigma(R) = \sigma, \quad SV^-(R) = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad \sigma^-(R) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma, \quad sd^-(R) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}, \quad d(R) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma.$$

14.3.2. Model Markowitza

Przyjęcie wartości oczekiwanej jako miary dochodowości, a odchylenia standardowego jako miary ryzyka jest równoważne stwierdzeniu, że inwestor dokonuje wyboru inwestycji zgodnie z relacją (kryterium) Markowitza ([29, 30]).

Definicja 14.6.

$$R_1 \succeq_M R_2 \Leftrightarrow E(R_1) \geq E(R_2) \wedge \sigma(R_1) \leq \sigma(R_2).$$

Relacja Markowitza jest określona tylko dla zmiennych losowych o skończonych zarówno wartości oczekiwanej, jak i wariancji ($R_1, R_2 \in L^2$). W przypadku zmiennych losowych o rozkładzie normalnym relacja Markowitza jest zgodna z drugą dominacją stochastyczną. Natomiast w przypadku zmiennych losowych o rozkładach w znaczny sposób różniących się od rozkładu normalnego (np. dyskretnych) należy przy jej stosowaniu zachować dużą ostrożność. Zilustrujemy to następującym przykładem.

Przykład

Rozważmy dwie inwestycje, które wymagają takich samych nakładów i rozliczenie, których nastąpi w tym samym czasie. Wiadomo, że wypłata z pierwszej wyniesie 3 tys. zł, a z drugiej z tym samym prawdopodobieństwem (50%) 3 lub 4 tys. zł. Oczywiście jest, że każdy racjonalny inwestor wybierze drugą inwestycję. Niemniej zauważmy, że

$$E(K_2) = 3,5 \quad \text{ i } \quad \sigma^2(K_2) = 3^2 \frac{1}{2} + 4^2 \frac{1}{2} - 3,5^2 = \frac{25}{2} - \frac{49}{4} = 0,25.$$

Zatem $\sigma(K_2) = 0,5$, podczas gdy

$$E(K_1) = 3, \quad \sigma(K_1) = 0,$$

co oznacza, że z punktu widzenia kryterium Markowitza inwestycje K_1 i K_2 są nieporównywalne.

Zauważmy, że relacja Markowitza zachowuje się przy *przeskalowaniu*.

Lemat 14.6. Niech $a, m \in \mathbb{R}$, $a > 0$, wówczas

$$R_1 \succeq_M R_2 \Leftrightarrow aR_1 + m \succeq_M aR_2 + m.$$

Dowód.

Wartość oczekiwana jest liniowa, a odchylenie standardowe dodatnio jednorodne, zatem

$$E(R_1) \geq E(R_2) \Leftrightarrow aE(R_1) + m \geq aE(R_2) + m \Leftrightarrow E(aR_1 + m) \geq E(aR_2 + m),$$

$$\sigma(R_1) \leq \sigma(R_2) \Leftrightarrow a\sigma(R_1) \leq a\sigma(R_2) \Leftrightarrow \sigma(aR_1) \leq \sigma(aR_2).$$

Wobec tego

$$\sigma(aR_1 + m) \leq \sigma(aR_2 + m).$$

Zatem obie nierówności zostają zachowane przy przeskalowaniu.

Wniosek 14.9. Niech K_1, K_2 wypłaty, Z_1, Z_2 zysk, a R_1, R_2 stopy zwrotu z dwóch inwestycji, które wymagają tych samych nakładów k . Wówczas następujące warunki są równoważne

- i. $K_1 \succeq_M K_2$,
- ii. $Z_1 \succeq_M Z_2$,
- iii. $R_1 \succeq_M R_2$.

Kryterium Markowitza jest powszechnie używane przy planowaniu składu portfela inwestycyjnego.

Założenia modelowe.

Inwestor inwestuje kwotę k , $k > 0$ w portfel inwestycyjny, który może zawierać d papierów wartościowych. Oznaczmy przez r_i stopę zwrotu z i -tego papieru, a przez k_i kwotę zainwestowaną w ten papier ($k_1 + \dots + k_d = k$). k_i są znane w momencie zawarcia transakcji, a r_i modelujemy jako zmienne losowe o skończonej wariancji. Zysk i stopa zwrotu z portfela wynoszą

$$Z = k_1 r_1 + \dots + k_d r_d, \quad R = \frac{Z}{k} = \frac{k_1}{k} r_1 + \dots + \frac{k_d}{k} r_d.$$

Oznaczmy przez x_i udział i -tego waloru w portfelu

$$x_i = \frac{k_i}{k}.$$

Wówczas wzór na stopę zwrotu przyjmuje postać

$$R = x_1 r_1 + \dots + x_d r_d.$$

Wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela jest kombinacją liniową stóp zwrotu z poszczególnych papierów

$$E(R) = x_1 E(r_1) + \dots + x_d E(r_d),$$

a wariancja kombinacją liniową ich wariancji i kowariancji ([22] §5.6 Twierdzenie 16)

$$\sigma^2(R) = x_1^2 \sigma^2(r_1) + \dots + x_d^2 \sigma^2(r_d) + 2x_1 x_2 \operatorname{cov}(r_1, r_2) + \dots + 2x_{d-1} x_d \operatorname{cov}(r_{d-1}, r_d).$$

Biorąc pod uwagę, że $\operatorname{cov}(r_i, r_i) = \sigma^2(r_i)$ i $\operatorname{cov}(r_i, r_j) = \operatorname{cov}(r_j, r_i)$, możemy zapisać powyższy wzór jako podwójną sumę

$$\sigma^2(R) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j \operatorname{cov}(r_i, r_j),$$

lub w postaci macierzowej

$$\sigma^2(R) = x^T C x, \quad \text{gdzie} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad C = (\operatorname{cov}(r_i, r_j))_{i,j=1,\dots,d}.$$

Zbiór inwestycji dopuszczalnych $\mathcal{P}$ opisujemy jako podzbiór $\mathbb{R}^d$. Punkt $x = (x_1, \dots, x_d)$ należy do $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy inwestor może zainwestować w portfel o składzie $x_1, \dots, x_d$. Na ogół przyjmuje się, że wszystkie aktywa są nieskończenie podzielne i $\mathcal{P}$ jest podzbiorem wypukłym hiperpłaszczyzny $x_1 + \dots + x_d = 1$.

Odwzorowanie, które przyporządkowuje portfelowi o składzie x odchylenie standardowe jego stopy zwrotu $\sigma(R_x)$ i jej wartość oczekiwaną $E(R_x)$, nazywa się **odwzorowaniem Markowitza**

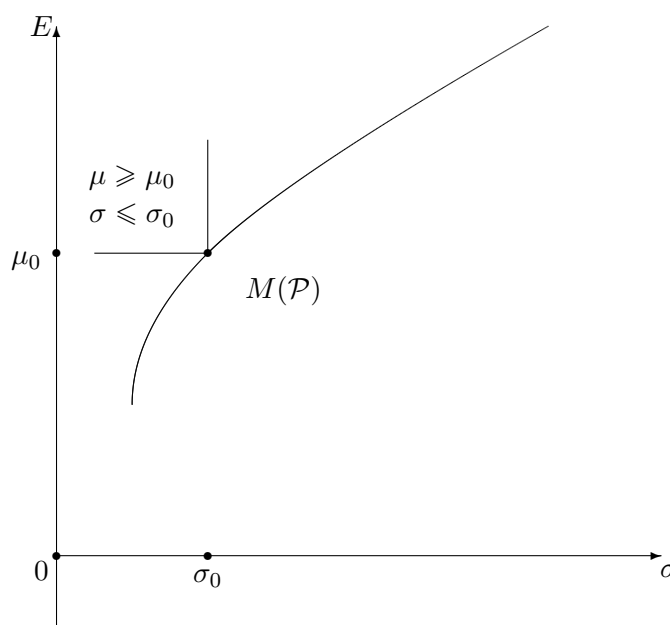
$$M : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (\sigma(R_x), E(R_x)).$$

Obraz $M(\mathcal{P})$ nazywa się zbiorem możliwości. Portfel o składzie x , $x \in \mathcal{P}$, nazywamy efektywnym, gdy stopa zwrotu z tego portfela R_x jest maksymalna względem relacji Markowitza

$$\neg \exists y \in \mathcal{P} \quad R_y \succ_M R_x.$$

Obraz zbioru portfeli efektywnych jest zawarty w brzegu zbioru możliwości i nazywa się granicą efektywną (rys. 5.2). Zauważmy, że ma ona prostą interpretację geometryczną. Punkt (σ_0, μ_0) należy do granicy efektywnej, gdy zbiór możliwości i zbiór punktów leżących na lewo i powyżej punktu (σ_0, μ_0) przecinają się tylko w tym punkcie

$$M(\mathcal{P}) \cap \{(\sigma, \mu) : \sigma \leq \sigma_0 \wedge \mu \geq \mu_0\} = \{(\sigma_0, \mu_0)\}.$$



Rysunek 14.1. Granica efektywna.

14.4. Ćwiczenia

Ćwiczenie 14.1. Oszacowano następujące prawdopodobieństwa wypłat dla inwestycji A, B i C:

Inwestycja A:

wypłata [tys. zł]	6	8	10	13	15
prawdopodobieństwo [%]	20	10	15	25	30

Inwestycja B:

wypłata [tys. zł]	6	7	9	10	11	14	15	16
prawdopodobieństwo [%]	15	5	5	15	5	25	20	10

Inwestycja C:

wypłata [tys. zł]	6	7	8	9	11	13	14	15
prawdopodobieństwo [%]	10	5	10	5	15	10	25	20

Sprawdzić, czy na podstawie kryterium dominacji stochastycznej można wybrać najlepszą spośród nich (każda wymaga zainwestowania 10 000 zł).

Rozwiązanie. Wypłaty są skokowymi zmiennymi losowymi, zatem ich dystrybuanty (F) są funkcjami schodkowymi, a całki z dystrybuant (G) ciągłymi funkcjami kawałkami liniowymi. Aby je scharakteryzować, wystarczy wyznaczyć ich wartości na dyskretnym zbiorze punktów zawierającym wszystkie wartości, jakie mogą przyjmować z niezerowym prawdopodobieństwem wypłaty K_A , K_B i K_C . Wielkości te są przedstawione w poniższej tabelce.

	K	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16
P(K)	A	20	0	10	0	15	0	25	0	30	0
	B	15	5	0	5	15	5	0	25	20	10
	C	10	5	10	5	0	15	10	25	20	0
F	A	20	20	30	30	45	45	70	70	100	100
	B	15	20	20	25	40	45	45	70	90	100
	C	10	15	25	30	30	45	55	80	100	100
G	A	0	20	40	70	100	145	235	305	375	475
	B	0	15	35	55	80	120	210	255	325	415
	C	0	10	25	50	80	110	200	255	335	435

Wiersz K zawiera wszystkie możliwe wartości wypłat. W następnych trzech wierszach podane są prawdopodobieństwa, z jakimi są one przyjmowane odpowiednio przez K_A , K_B i K_C . Poniżej są wartości dystrybuant, a pod nimi całek z dystrybuant. Zauważmy, że wartości dystrybuant F i całek G oblicza się rekurencyjnie według następujących wzorów:

$$F(K_i) = F(K_{i-1}) + p_i, \quad G(K_i) = G(K_{i-1}) + F(K_{i-1}) \cdot (K_i - K_{i-1}).$$

Na podstawie tabelki stwierdzamy, że w każdym punkcie dystrybuanta F_A przyjmuje wartości większe niż dystrybuanta F_B bądź równe. Nie jest to prawdą dla pozostałych par dystrybuant F_A i F_C oraz F_B i F_C . Zatem $K_B >_{FSD} K_A$, a K_C jest FSD -nieporównywalne z K_B i K_A .

Całki G mierzą pola pod wykresami dystrybuant, zatem G_A przyjmuje nie mniejsze wartości niż G_B . Z tabelki otrzymujemy, że również wykres G_C leży poniżej wykresu G_A . Natomiast wykresy G_B i G_C przecinają się. Zatem $K_B >_{SSD} K_A$ i $K_C >_{SSD} K_A$, ale K_C jest SSD -nieporównywalne z K_B .

Odpowiedź. Inwestor dokonujący wyboru inwestycji na podstawie dominacji stochastycznej pierwszego lub drugiego rzędu powinien odrzucić inwestycję A . Inwestycje B i C są nieporównywalne względem obu dominacji. Zatem kryteria oparte na pierwszej i drugiej dominacji stochastycznej nie dają wskazówek, którą z inwestycji należy wybrać.

Ćwiczenie 14.2. Wyznaczyć ujemne semiodchylenie przeciętne dla zmiennej losowej R o rozkładzie $N(m, \sigma^2)$.

Rozwiązanie.

$$sd^-(R) = E((R - m)^-) = \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^m x \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})|_{-\infty}^0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Odpowiedź. Ujemne semiodchylenie przeciętne dla zmiennej losowej R o rozkładzie $N(m, \sigma^2)$ wynosi $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$.

Ćwiczenie 14.3. W oparciu o relację Markowitza określić, która z poniższych inwestycji jest bardziej, a która mniej korzystna:

inwestycja A – stopa zwrotu ma rozkład $N(0,1; 0,02^2)$;

inwestycja B – stopa zwrotu ma rozkład $N(0,2; 0,02^2)$;

inwestycja C – stopa zwrotu ma rozkład $N(0,2; 0,03^2)$.

Rozwiązanie. Porównujemy wartości oczekiwane i odchylenia standardowe

$$E(R_A) = 0,1 < 0,2 = E(R_B) = E(R_C),$$

$$\sigma(R_A) = \sigma(R_B) = 0,02 < 0,03 = \sigma(R_C).$$

Zatem inwestycja B ma największą wartość oczekiwaną stopy zwrotu i najmniejsze odchylenie standardowe, czyli

$$R_B \succ_M R_A \quad \text{ i } \quad R_B \succ_M R_C.$$

Natomiast stopy zwrotu z inwestycji A i C są nieporównywalne względem relacji Markowitza, A ma *lepsze* odchylenie standardowe, a C wartość oczekiwaną.

Odpowiedź. Zgodnie z relacją Markowitza najkorzystniejsza jest inwestycja B. Pozostałe dwie inwestycje są nieporównywalne względem relacji Markowitza, a tym samym nie daje ona wskazówek, która z nich jest bardziej, a która mniej korzystna.

15. Metody stochastyczne w finansach – cd

15.1. Value at Risk – inne spojrzenie na ryzyko finansowe

15.1.1. Wprowadzenie i definicja

Value at Risk (wartość zagrożona ryzykiem, w skrócie VaR) jest przykładem miary ryzyka opartej na nieco innej *filozofii* niż miary omówione w wykładzie 14. VaR , to miara, za pomocą której nie tyle określa się, na ile niedokładne są prognozy końcowego wyniku inwestycji, ale uzyskuje informacje jak duże środki należy przeznaczyć na zabezpieczenie danej inwestycji, a nawet całej instytucji finansowej. Krótko mówiąc VaR uprzedza nas, ile możemy stracić.

Miary takie jak VaR wykorzystuje się m.in.:

- jako element kontroli, np.:
 - poszczególnych departamentów i oddziałów przez zarząd banku,
 - poszczególnych banków przez nadzór bankowy,
 - zarządu spółki akcyjnej przez radę nadzorczą i akcjonariuszy;
- przy ustalaniu limitów dotyczących adekwatności kapitałowej instytucji finansowych, czyli określaniu „jak duże powinny być środki własne firmy, aby zabezpieczona była jej wypłacalność”;
- przy ustalaniu wysokości depozytów wymaganych przez izby rozrachunkowe działające na rynku instrumentów pochodnych;
- jako *benchmark* przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych, np.:
„Ustala się pewną wartość graniczną d i zarządzający portfelem inwestycyjnym może tylko tak kształtować skład portfela, aby dana miara ryzyka jej nie przekroczyła”.

Ogólnie, Value at Risk to odpowiedź *probabilisty* na pytanie „ile można stracić?”. Jest to największa strata, jaką można ponieść przy zadanym poziomie ufności c .

Ustalmy pewien horyzont czasowy T . Niech X będzie zmienną losową, za pomocą której modelujemy przyszły stan należności netto danej instytucji finansowej (pasywa minus aktywa) albo stratę z danej inwestycji (aktualna wartość inwestycji minus jej wartość po upływie czasu T). Jeśli X ma rozkład ciągły i jej dystrybuenta jest ściśle rosnąca (np. X ma rozkład normalny), to $VaR_c(X)$ określa się w następujący sposób

$$P(X \leq VaR_c(X)) = c.$$

W przypadku ogólnym (np. gdy zmienna losowa X jest dyskretna) powyższe równanie może nie mieć rozwiązań lub może mieć ich więcej niż jedno. Dlatego też zdefiniujemy VaR jako tzw. *dolny kwantyl*.

Definicja 15.1. Dla dowolnej zmiennej losowej X i dowolnego poziomu ufności $c \in (0, 1)$

$$VaR_c(X) = \sup \{V : P(X \leq V) < c\},$$

Oczywiście można też definiować VaR jako górny kwantyl

$$VaR_c^u(X) = \sup \{V : P(X < V) \leq c\},$$

lub jako średnią ważoną obu kwantyli.

Kwestią otwartą pozostaje wybór właściwego poziomu ufności c . Analitycy banku J.P.Morgan, twórcy pojęcia Value at Risk, przyjmowali $c = 95\%$ ([38]). Natomiast Komitet Bazylejski postuluje przyjęcie $c = 99\%$ ([5]). Ta różnica wynika między innymi z faktu, że według analityków z banku J.P.Morgan Value at Risk miało być narzędziem kontrolnym używanym przez zarząd banku, natomiast Komitet Bazylejski zaproponował użycie Value at Risk w ramach nadzoru bankowego. Oczywiście jest, że nadzór zewnętrzny jest bardziej wymagający (większe c oznacza większą wartość VaR).

Omówimy pokrótce podstawowe własności VaR . Zauważmy, że oba zbiory $\{V : P(X < V) \leq c\}$ i $\{V : P(X \leq V) < c\}$ są półprostymi, wobec tego kres górny każdego z nich jest równy kresowi dolnemu odpowiednio każdego z dopełnień. Zatem $VaR_c^u(X)$ i $VaR_c(X)$ są równe odpowiednio

$$VaR_c^u(X) = \inf \{V : P(X < V) > c\}, \quad VaR_c(X) = \inf \{V : P(X \leq V) \geq c\}.$$

Korzystając z powyższego, udowodnimy następujący lemat.

Lemat 15.1. *Dla dowolnej zmiennej losowej X i dowolnego poziomu ufności $c \in (0, 1)$:*

1. $P(X < VaR_c^u(X)) \leq c \leq P(X \leq VaR_c(X))$;
 2. *Jeśli x jest większy od $VaR_c^u(X)$, to $P(X < x) > c$;*
 3. *Jeśli x jest mniejszy od $VaR_c(X)$, to $P(X \leq x) < c$.*
- Ponadto, gdy $VaR_c^u(X)$ nie jest równy $VaR_c(X)$, to:*
4. $P(X < VaR_c^u(X)) = P(X \leq VaR_c(X)) = c$;
 5. *Dla dowolnego x z przedziału otwartego $(VaR_c(X), VaR_c^u(X))$,*
 $P(X < x) = P(X \leq x) = c$;
 6. $P(X \in (VaR_c(X), VaR_c^u(X))) = 0$.

Dowód.

Punkt 1 wynika z ciągłości prawdopodobieństwa ([22] §Twierdzenie 7).

$$\{\omega : X(\omega) < VaR_c^u(X)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < VaR_c^u(X) - \frac{1}{n}\},$$

zatem, ponieważ $P(X < VaR_c^u(X) - \frac{1}{n}) \leq c$, to

$$P(X < VaR_c^u(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X < VaR_c^u(X) - \frac{1}{n}) \leq c.$$

Podobnie

$$\{\omega : X(\omega) \leq VaR_c(X)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \leq VaR_c(X) + \frac{1}{n}\}.$$

Ponieważ $P(X \leq VaR_c(X) + \frac{1}{n}) \geq c$, to

$$P(X \leq VaR_c(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq VaR_c(X) + \frac{1}{n}) \geq c.$$

Punkt 2 wynika z przedstawienia $VaR_c^u(X)$ jako kres dolny, a punkt 3 z przedstawienia $VaR_c(X)$ jako kres górny.

Punkt 4 wynika z nierówności z punktu 1 i z faktu, że $VaR_c(X)$ jest mniejszy od $VaR_c^u(X)$.

$$c \leq P(X \leq VaR_c(X)) \leq P(X < VaR_c^u(X)) \leq c,$$

wobec tego wszystkie nierówności „ $\leq$ ” w tym wzorze są równościami.

Podobnie pokazuje się punkt 5:

$$c = P(X \leq VaR_c(X)) \leq P(X < x) \leq P(X \leq x) \leq P(X < VaR_c^u(X)) = c.$$

Punkt 6 wynika z punktu 4.

$$\begin{aligned} P(X \in (VaR_c(X), VaR_c^u(X))) &= \\ &= P(X < VaR_c^u(X)) - P(X \leq VaR_c(X)) = c - c = 0. \end{aligned}$$

15.1.2. Alokacja kapitału

Na zakończenie przeanalizujemy możliwość zastosowania Value at Risk do wyznaczania optymalnej alokacji posiadanych środków. Rozważymy następujący prosty przykład.

Udziałowcy Towarzystwa Ubezpieczeniowego TU SA zastanawiają się, czy zachodzi potrzeba dokapitalizowania spółki. TU SA sprzedawało szereg polis ubezpieczeniowych co może skutkować wypłatą wysokich odszkodowań. Jeśli kwota odszkodowań przekroczy posiadane fundusze, TU SA będzie zagrożone bankructwem. Aby go uniknąć udziałowcy będą zmuszeni do poniesienia dodatkowych kosztów. Z drugiej strony dokapitalizowanie też wiąże się z pewnymi kosztami. W tej sytuacji udziałowcy muszą rozstrzygnąć, jaki jest optymalny poziom funduszy posiadanych przez TU SA.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

Y – wielkość odszkodowań pomniejszoną o środki posiadane przez TU SA (modelujemy ją jako zmienną losową);

x – kwota, którą udziałowcy chcą dokapitalizować spółkę;

$K(x, Y)$ – koszty w zależności od x i Y .

$$K(x, Y) = ax + b(Y - x)^+,$$

gdzie: a – koszt kapitału (np. stopa procentowa), b – koszty, które poniosą udziałowcy na pokrycie roszczeń przekraczających fundusze TU SA (w przeliczeniu na 1 jednostkę monetarną). Oczywiście $0 < a < b$.

Racjonalni akcjonariusze będą się starać zminimalizować oczekiwane koszty. A więc wybiorą x , które zminimalizuje wartość oczekiwaną relatywnej straty, czyli różnicy $K(x, Y) - K(0, Y)$,

$$E(K(x, Y) - K(0, Y)) \longrightarrow \min.$$

Pokażemy, że optymalny poziom dokapitalizowania jest równy Value at Risk Y , wyznaczonemu dla poziomu ufności $c = 1 - \frac{a}{b}$.

Zauważmy, że w odróżnieniu od straty $K(x, Y)$, relatywna strata

$$V(x) = K(x, Y) - K(0, Y) = ax + b(Y - x)^+ - b(Y)^+,$$

jest ograniczona i niezależnie od tego, jaki jest rozkład Y i ile wynosi x , posiada skończoną wartość oczekiwaną, która jest funkcją ciągłą zmiennej x . Ponadto, gdy $K(x, Y)$ mają skończoną wartość oczekiwaną, to $E(V(x))$ i $E(K(x, Y))$ przyjmują minimum w tych samych punktach.

Twierdzenie 15.1. $VaR_c(Y)$ minimalizuje wartość oczekiwaną relatywnej straty $E(V(x))$ dla $c = 1 - \frac{a}{b}$. Ponadto, jeśli dystrybuenta Y jest ściśle rosnąca w pewnym otoczeniu punktu $x = VaR_c(Y)$, to jest to jedyne minimum. W przeciwnym wypadku zbiór minimów $E(V(x))$ jest przedziałem domkniętym

$$\langle VaR_c(Y), VaR_c^u(Y) \rangle.$$

Dowód.

Niech x_1 i x_2 , $x_1 < x_2$, będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zapiszemy różnicę relatywnych strat za pomocą funkcji charakterystycznych $\mathbb{I}_*$

$$\begin{aligned} V(x_2) - V(x_1) &= ax_2 + b(Y - x_2)^+ - Y^+ - ax_1 - b(Y - x_1)^+ + Y^+ = \\ &= a(x_2 - x_1) - b(x_2 - x_1)\mathbb{I}_{Y \geq x_2} - b(Y - x_1)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)} = \\ &= a(x_2 - x_1) - b(x_2 - x_1)\mathbb{I}_{Y > x_1} + b(x_2 - Y)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

Zatem przyrost wartości oczekiwanej relatywnej straty wynosi

$$\begin{aligned} E(V(x_2)) - E(V(x_1)) &= E(V(x_2) - V(x_1)) = \\ &= (x_2 - x_1)(a - bP(Y \geq x_2)) - bE((Y - x_1)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}) = \\ &= (x_2 - x_1)(a - bP(Y > x_1)) + bE((x_2 - Y)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}). \end{aligned}$$

Rozważymy trzy przypadki:

A. Oba punkty leżą na prawo od VaR_c^u ,

$$VaR_c^u(Y) < x_1 < x_2;$$

B. Oba punkty leżą na lewo od VaR_c ,

$$x_1 < x_2 < VaR_c;$$

C. Oba punkty leżą pomiędzy VaR_c i VaR_c^u ,

$$VaR_c(Y) < x_1 < x_2 < VaR_c^u(Y).$$

Przypadek A.

Na mocy lematu 5.4.1

$$P(Y > x_1) = 1 - P(Y \leq x_1) < 1 - c = \frac{a}{b}.$$

Wobec tego

$$a - bP(Y > x_1) > a - b\frac{a}{b} = 0.$$

Zatem, ponieważ wartość oczekiwana nieujemnej zmiennej losowej jest nieujemna, to

$$E(V(x_2)) - E(V(x_1)) = (x_2 - x_1)(a - bP(Y > x_1)) + bE((x_2 - Y)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}) \geq 0.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że funkcja $E(V(x))$ jest ściśle rosnąca na półprostej $(VaR_c^u(Y), +\infty)$. Ale wiemy, że jest ona ciągła, zatem jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[VaR_c^u(Y), +\infty)$.

Przypadek B.

Na mocy lematu 5.4.1

$$P(Y \geq x_2) = 1 - P(Y < x_2) > 1 - c = \frac{a}{b}.$$

Wobec tego

$$a - bP(Y \geq x_2) < a - b\frac{a}{b} = 0.$$

Zatem, ponieważ wartość oczekiwana nieujemnej zmiennej losowej jest nieujemna, to

$$E(V(x_2)) - E(V(x_1)) = (x_2 - x_1)(a - bP(Y \geq x_2)) - bE((Y - x_1)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}) \leq 0.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że funkcja $E(V(x))$ jest ściśle malejąca na półprostej $(-\infty, VaR_c(Y))$. Z ciągłości wynika, że jest ona ściśle malejąca na półprostej domkniętej $(-\infty, VaR_c(Y)]$.

Przypadek C.

Gdy $VaR_c(Y)$ jest mniejszy od $VaR_c^u(Y)$, to na mocy lematu 5.4.1

$$P(Y \geq x_2) = 1 - P(Y < x_2) = 1 - c = \frac{a}{b}.$$

Wobec tego

$$a - bP(Y \geq x_2) = a - b\frac{a}{b} = 0.$$

Ponadto

$$P(Y \in (x_1, x_2)) = 0,$$

czyli

$$E((Y - x_1)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}) = 0.$$

Z powyższego wynika, że

$$E(V(x_2)) - E(V(x_1)) = (x_2 - x_1)(a - bP(Y \geq x_2)) - bE((Y - x_1)\mathbb{I}_{Y \in (x_1, x_2)}) = 0.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że funkcja $E(V(x))$ jest stała na odcinku $(VaR_c(Y), VaR_c^u(Y))$. Z ciągłości wynika, że jest ona stała na odcinku domkniętym $[VaR_c(Y), VaR_c^u(Y)]$.

Podsumowując, gdy dystrybuenta Y jest ściśle monotoniczna w pewnym otoczeniu $VaR_c(Y)$, to $VaR_c^u(Y) = VaR_c(Y)$ i $E(V(x))$ przyjmuje minimum dokładnie w jednym punkcie. W przeciwnym przypadku każdy punkt z przedziału $[VaR_c(Y), VaR_c^u(Y)]$ minimalizuje $E(V(x))$.

15.2. Teoretyczne podstawy pomiaru ryzyka dla inwestycji finansowych.

Każdą inwestycję A charakteryzujemy za pomocą dwóch wielkości:

wartości początkowej (nakładów) ozn. $W_0(A)$

i wartości końcowej (wyплаты, bogactwa końcowego) ozn. $W_1(A)$.

$W_0(A) > 0$ i jest znane w momencie rozpoczęcia inwestycji.

$W_1(A) \geq 0$ modelujemy jako zmienną losową określoną na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

W tej konwencji

$W_1(A) - W_0(A)$ oznacza zysk,

$W_0(A) - W_1(A)$ stratę,

a stopa zwrotu to $R(A) = \frac{W_1(A) - W_0(A)}{W_0(A)}$.

Ponadto ze względów technicznych zakładamy, że zbiór dopuszczalnych inwestycji $\mathcal{G}$ jest stożkiem wypukłym

- i.* $\forall A \in \mathcal{G} \quad \forall \lambda > 0 \quad \exists C \in \mathcal{G} \quad W_i(C) = \lambda W_i(A), \quad i = 0, 1;$
- ii.* $\forall A, B \in \mathcal{G} \quad \exists C \in \mathcal{G} \quad W_i(C) = W_i(A) + W_i(B), \quad i = 0, 1;$

oraz zawiera inwestycję o zerowym zysku

$$iii. \quad \exists C \in \mathcal{G} \quad W_1(C) = W_0(C).$$

Inwestycje C z punktów *i.* oraz *ii.* będziemy oznaczać odpowiednio $C = \lambda A$ i $C = A + B$.

Z punktu widzenia metodologicznego wyróżniamy dwie grupy miar ryzyka: miary dyspersji i miary monotoniczne. Osobną grupę stanowią miary efektywności, ściśle związane z ryzykiem nieosiągnięcia zakładanego poziomu zysku albo stopy zwrotu.

15.2.1. Miary dyspersji.

Miary dyspersji ostrzegają, o ile stopa zwrotu $R(A)$ albo wypłata $W_1(A)$ różnią się od prognozy (np. wartości oczekiwanej lub mediany). Ostrzeżenie to może dotyczyć zarówno:

1. Możliwości wystąpienia efektu niezgodnego z przewidywaniami. Nieważne, czy jest to *przykra niespodzianka*, czy *przyjemne zaskoczenie*; ważne, że prognoza była niedokładna.
2. Możliwości poniesienia straty. Uwzględniamy tylko *przykre niespodzianki*.

Najbardziej popularne miary ryzyka-dyspersji to omówione na poprzednim wykładzie (patrz 14.3.1):

1. Odchylenie standardowe i wariancja.

$$V(R) = \mathbb{E}((R - \mathbb{E}(R))^2), \quad \sigma(R) = \sqrt{V(R)}$$

Wyznaczamy prognozę błędu prognozy.

2. Ujemne semiodchylenie standardowe i ujemna semiwariancja.

$$SV^-(R) = \mathbb{E}(((R - \mathbb{E}(R))^-)^2), \quad \sigma^-(R) = \sqrt{SV^-(R)}$$

Są to odpowiedniki odchylenia standardowego i wariancji w przypadku drugiej interpretacji ryzyka.

3. Odchylenie przeciętne i ujemne semiodchylenie przeciętne.

$$d(R) = \mathbb{E}(|R - \mathbb{E}(R)|), \quad sd^-(R) = \mathbb{E}((R - \mathbb{E}(R))^-).$$

Więcej przykładów i informacji o miarach dyspersji (dewiacji) czytelnik może znaleźć w pracy [41].

15.2.2. Miary monotoniczne – zgodne z dominacją stochastyczną.

Miary monotoniczne mają za zadanie oceniać, która inwestycja może przynieść większą stratę. Funkcja

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

jest monotoniczną miarą ryzyka jeżeli spełnia następujące warunki

- A1. $W_0(A) \leq W_0(B) \wedge W_1(A) \geq W_1(B) \implies \rho(A) \leq \rho(B);$
- A2. $W_0(A) = W_1(A) \implies \rho(A) = 0.$

Poza tym „mile widziane” są następujące własności:

- A3. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \rho(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \leq \lambda_1 \rho(A_1) + \lambda_2 \rho(A_2);$
- A4. $\forall c \in \mathbb{R} \quad W_1(B) - W_0(B) = W_1(A) - W_0(A) + c \implies \rho(B) = \rho(A) - c;$
- A5. $\forall \lambda > 0 \quad \rho(\lambda A) = \lambda \rho(A).$

Miary spełniające aksjomaty A1, A2, A3 i A4 nazywa się wypukłymi (patrz [14]). Natomiast miary spełniające wszystkie pięć aksjomatów to tzw. koherentne miary ryzyka (patrz [2, 3]). Podstawowym zastosowaniem takich miar jest wyznaczanie wielkości ”kapitału ekonomicznego” potrzebnego do zabezpieczenia danej pozycji.

Przykłady miar monotonicznych.

1. Prawdopodobieństwo nieosiągnięcia wyznaczonego poziomu T (poziomu aspiracji)

$$SF_T(A) = \mathbb{P}(W_1(A) - W_0(A) < T).$$

Gdy $T = 0$ jest to prawdopodobieństwo poniesienia straty.

Gdy $T \leq 0$, to SF_T spełnia tylko warunki A1 i A2.

2. Value at Risk - największa strata przy zadanym poziomie istotności α ($\alpha = 0.05, 0.01, \dots$).

$$VaR_\alpha(A) = \inf\{V : \mathbb{P}(W_0(A) - W_1(A) > V) < \alpha\}.$$

VaR_α spełnia warunki A1, A2, A4 i A5, ale na ogół nie spełnia A3 – patrz lemat 15.1.

3. **Conditional VaR** (zwany też Probable Maximum Loss lub Expected Shortfall) - warunkowa oczekiwana wartość straty pod warunkiem, że osiągnie ona lub przekroczy VaR .

$$CVaR_\alpha(A) = \mathbb{E}(W_0(A) - W_1(A) | W_0(A) - W_1(A) \geq VaR_\alpha(A)).$$

Dla zmiennych losowych $W_1()$ o ciągłym rozkładzie *CVaR* jest koherentną miarą ryzyka i spełnia wszystkie pięć aksjomatów (patrz [33, 40, 1]).

4. Spadek oczekiwanej użyteczności.

$$\rho_\varphi(A) = \varphi(W_0(A)) - \mathbb{E}(\varphi(W_1(A))),$$

gdzie φ wklęsła i rosnąca funkcja na $\mathbb{R}_+$ (funkcja użyteczności) np. $\ln(t)$. ρ_φ spełnia warunki A1, A2 i A3.

5. Miary ryzyka indukowane przez zmianę miary probabilistycznej.

Niech Y_i , $i = 1, \dots, k$, nieujemne zmienne losowe o skończonej wartości oczekiwanej (np. kursy waluty lokalnej w i -tej walucie lub koszyku walut).

$$\rho(A) = \sup \left\{ \frac{\mathbb{E}(Y_i(W_0(A) - W_1(A)))}{\mathbb{E}(Y_i)} \right\}, i = 1, \dots, k.$$

Miary indukowane są koherentnymi miarami ryzyka i spełniają wszystkie pięć aksjomatów.

6. Miary wyznaczone przez poziom krytyczny r taki, że wartość oczekiwana jego przekroczenia przez stratę jest stała i wynosi γ , $\gamma > 0$.

$$\rho_\gamma(A) = r + \gamma, \text{ gdzie } \mathbb{E}((W_0(A) - W_1(A) - r)^+) = \gamma.$$

Miary ρ_γ są wypukłe i spełniają warunki A1, A2, A3 i A4 ([23]).

7. Miary wyznaczone przez poziom krytyczny r taki, że wartość oczekiwana przekroczenia r jest proporcjonalna do r i wynosi γr , $\gamma > 0$.

$$\rho_\gamma(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdzie } \mathbb{P}(W_1(A) < W_0(A)) = 0, \\ r, & \text{gdzie } \mathbb{P}(W_1(A) < W_0(A)) > 0, \end{cases}$$

gdzie

$$r > 0 \text{ i } \mathbb{E}\left(\left(\frac{W_0(A) - W_1(A)}{r} - 1\right)^+\right) = \gamma.$$

Miary ρ_γ spełniają warunki A1, A2, A3 i A5 ([23]).

8. Miary wyznaczone przez poziom krytyczny r taki, że dla ustalonego parametru, $\gamma > 0$.

$$r \geq \mathbb{E}(W_0(A) - W_1(A)) \text{ i } \mathbb{E}((W_0(A) - W_1(A) - r)^+) = \gamma(r - \mathbb{E}(W_0(A) - W_1(A))).$$

Miary ρ_γ są koherentne i spełniają warunki A1, A2, A3, A4 i A5 ([23]).

9. Składka holenderska.

$$\rho_c(A) = E(W_0(A) - W_1(A)) + cE(W_1(A) - E(W_1(A)))^-, \quad c \in (0, 1].$$

Miary ρ_γ są koherentne i spełniają warunki A1, A2, A3, A4 i A5.

15.2.3. Miary efektywności

Miary efektywności (performance measures) mają za zadanie ocenić w jakim stopniu dana strategia inwestycyjna gwarantuje uzyskanie (i przekroczenie) zadanego poziomu aspiracji T . Zwykle benchmark T jest wielkością deterministyczną, ale może być też zależny od czynników losowych.

Miary efektywności najczęściej konstruowane są jako iloraz dwóch miar: miary nadwyżki stopy zwrotu nad benchmarkiem T i miary dyspersji stopy zwrotu względem benchmarku T . Można tu zauważyć pewną analogię z testami statystycznymi dotyczącymi wartości oczekiwanej.

Przykłady miar efektywności ([32]).

Przyjmujemy następujące oznaczenia: R – stopa zwrotu z inwestycji, a T – benchmark czyli wymagany poziom stopy zwrotu (poziom aspiracji).

1. **Uogólniony współczynnik Sharpe’a.**

$$\lambda(R) = \frac{\mathbb{E}(R - T)}{\sigma(R - T)}.$$

2. **Współczynnik Sortino.**

$$SoR(R) = \frac{\mathbb{E}(R - T)}{\sigma((R - T)^-)}.$$

3. **Wskaźnik potencjału nadwyżki** (Upside Potential Ratio).

$$UPR(R) = \frac{\mathbb{E}((R - T)^+)}{\sigma((R - T)^-)}.$$

4. **Stosunek zysku do straty** (Gain-Loss Ratio), zwany też funkcją omega.

$$\Omega(R) = \frac{\mathbb{E}((R - T)^+)}{\mathbb{E}((R - T)^-)}.$$

Miary 2, 3, i 4, w odróżnieniu od „symetrycznego” współczynnika Sharpe’a, określane są w literaturze jako „Downside Risk Measures”.

15.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 15.1. Wyznacz VaR_c dla straty X o rozkładzie normalnym, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dla $c = 0,95$ i dla $c = 0,99$.

Rozwiązanie.

$$VaR_c(X) = F_X^{-1}(c) = \mu + \sigma F^{-1}(c),$$

gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Zatem $VaR_{0,95} = \mu + 1,65\sigma$ a $VaR_{0,99} = \mu + 2,33\sigma$.

Odpowiedź. $VaR_{0,95} = \mu + 1,65\sigma$ a $VaR_{0,99} = \mu + 2,33\sigma$.

Ćwiczenie 15.2. Wyznacz VaR_c dla straty X o rozkładzie lognormalnym, $X = \exp(Y)$ $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, dla $c \in (0, 1)$.

Rozwiązanie.

$$VaR_c(X) = \exp(VaR_c(Y)) = \exp(\mu + \sigma F^{-1}(c)),$$

gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Odpowiedź. $VaR_c(X) = \exp(\mu + \sigma F^{-1}(c))$, gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Ćwiczenie 15.3. Wyznacz VaR_c dla straty X o rozkładzie Pareto, $F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^k}$, $x \geq 1$, $k > 0$ dla $c = 0,95$ i dla $c = 0,99$.

Rozwiązanie.

$$F_X^{-1}(y) = (1 - y)^{-1/k}.$$

Zatem

$$VaR_{0,95}(X) = F_X^{-1}(0,95) = 0,05^{-1/k} = 20^{1/k},$$

$$VaR_{0,99}(X) = F_X^{-1}(0,99) = 0,01^{-1/k} = 100^{1/k}.$$

Odpowiedź. $VaR_{0,95}(X) = 0,05^{-1/k} = 20^{1/k}$, a $VaR_{0,99}(X) = 0,01^{-1/k} = 100^{1/k}$.

Ćwiczenie 15.4. Przybliżamy łączny rozkład dziennych stóp zwrotu kursów USD i EUR w PLN rozkładem normalnym o parametrach: $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = 0,01$, $\sigma_2 = 0,02$ i $\rho = 0,5$. Aktualny kurs USD wynosi 3,5 PLN, a EUR – 4 PLN. Wyznaczyć *dzienny* Value at Risk dla portfela walutowego złożonego z 20 tys. USD i 10 tys. EUR, dla $c = 0,95$.

Rozwiązanie. Niech r_1 i r_2 oznaczają dzienne stopy zwrotu (relatywne przyrosty) kursów USD i EUR. Oznaczmy przez K wyrażoną w PLN, możliwą stratę, tzn. różnicę wartości aktualnej portfela i w dniu następnym.

$$K = -(3,5 \cdot 20000 \cdot r_1 + 4 \cdot 10000 \cdot r_2) = -(70000r_1 + 40000r_2).$$

K ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji

$$\sigma^2(K) = 70000^2 \sigma_1^2 + 40000^2 \sigma_2^2 + 2 \cdot 70000 \cdot 40000 \cdot \rho \sigma_1 \sigma_2 = 1690000.$$

Odchylenie standardowe K wynosi 1300. Po przybliżeniu kwantyla rozkładu normalnego standardowego przez 1,65 otrzymujemy, że $VaR(K)$ wynosi $1300 \cdot 1,65 = 2145$.

Odpowiedź. Dla poziomu ufności 0,95 Value at Risk wynosi 2145 PLN.

Literatura

- [1] Acerbi C., Tasche D.: On coherence of expected shortfall, *Journal of Banking & Finance* 26.7 (2002), 1487-1503.
- [2] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, Thinking Coherently, In: P. Embrechts, (editor), *Extremes and Integrated Risk Management*, Risk Waters Group Ltd 2000.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9 (1999), 203-228.
- [4] *Bankowość, podręcznik akademicki*, redakcja Jaworski W.L. i Zawadzka Z, Poltext 2001.
- [5] Basle Committee on Banking Supervision, *Supervisory Framework for the use of the Backtesting in Conjunction with the Internal Approach to Market Risk Capital Requirements*, Basle 1996.
- [6] Barucci E.: *Financial Market Theory: Equilibrium, Efficiency and Information*, Springer V. 2003.
- [7] Bijak W., Podgórska M., Utkin J.: *Matematyka finansowa – teoria i praktyka obliczeń finansowych*, Bizant, Warszawa 1994.
- [8] Billingsley P.: *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.
- [9] Bitz M.: *Produkty bankowe. Rynek usług finansowych*, POLTEXT, Warszawa 1996.
- [10] Bluhm C., Overbeck L., Wagner C.: *An Introduction to Credit Risk Modeling*, Chapman & Hall/CRC 2003.
- [11] Borowski J., Golański R., Kasprzyk K., Melon L., Podgórska M.: *Matematyka finansowa – przykłady, zadania*, Wyd. SGH, Warszawa 1998.
- [12] Dorosiewicz S.: *Elementy analizy portfelowej, statyka – ujęcie matematyczne*, Wyd. SGH, Warszawa 2003.
- [13] Fabozzi F.J.: *Rynki obligacji. Analiza i strategie*, WIG-Press, Warszawa 2000.
- [14] Föllmer H., Schied A.: *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, de Gruyter 2004.
- [15] Gątarek D., Maksymiuk R.: *Wycena i zabezpieczenie pochodnych instrumentów finansowych*, Wyd. K.E. LIBER, Warszawa 1998.
- [16] Höglund T.: *Mathematical asset management*, Wiley 2008.
- [17] Hull J.: *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-Press, Warszawa 1999.
- [18] Iwanicz-Drozdowska M., Jaworski W.L., Zawadzka Z.: *Bankowość zagadnienia podstawowe*, Poltext, Warszawa 2010.
- [19] Jajuga K., Jajuga T.: *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [20] Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł.: *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.
- [21] Jakubowski J.: *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, 2006.
- [22] Jakubowski J., Sztencel R.: *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa 2000.
- [23] Jaworski P., On subjective approach to risk measurement, *Quantitative Finance* 6.6 (2006) 495-511.
- [24] Jaworski P., Micał J.: *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, 2005.
- [25] James J., Webber N.: *Interest Rate Modelling*, J.Wiley & Sons, Ltd, 2000.
- [26] Kellison S.G.: *The Theory of Interest*, McGraw-Hill, Irwin 1991.
- [27] Lipcer R.Sz., Szirajew A.N.: *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
- [28] *Market Model Stock Trading*, Xetra Release 6.0, Gruppe Deutsche Börse 2001.
- [29] Markowitz H.M.: *Portfolio selection*, *Journal of Finance* 7, 1952, 77-91.
- [30] Markowitz H.M.: *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Blackwell Publishers 1992.
- [31] Neumann von J., Morgenstern O.: *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton 1947.
- [32] J. Perello, Downside Risk analysis applied to the Hedge Funds universe, arXiv: physics/0610162v2, 2007.

- [33] G.C. Pflug, Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk, In: S. Uryasev, (editor), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers 2000.
- [34] Pliska S.R.: *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, Warszawa 2005.
- [35] Podgórska M., Klimkowska J.: *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [36] Rasiowa H.: *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1969.
- [37] *Regulamin Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A.* (3.02.2004).
- [38] *Risk Metrics – Technical Document*, 1996, Morgan Guaranty Trust Company of New York.
- [39] Rockafellar R.T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.
- [40] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance* 26, 1443-1471 (2002).
- [41] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, M. Zabarankin, Master funds in Portfolio Analysis with General Deviation Measures, *Journal of Banking & Finance* (to appear).
- [42] Sopoćko A.: *Giełda papierów wartościowych*, Mediabank, Warszawa 1993.
- [43] Sopoćko A.: *Rynkowe instrumenty finansowe*, Wyd. WSPiZ, Warszawa 2003.
- [44] Skałba M.: *Ubezpieczenia na życie*, WNT, Warszawa 1999.
- [45] *Szczegółowe zasady obrotu giełdowego* (8.03.2004).
- [46] Ustawa z dnia 20 lipca 2001 r. o kredycie konsumenckim. Dz.U. Nr 100, poz. 1081.
- [47] Ustawa z dnia 12 maja 2003 r. o zmianie ustawy o kredycie konsumenckim. Dz.U. Nr 109, poz. 1030.
- [48] *WARSET, Plansze poglądowe*, GPW 2000.
- [49] Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1999.
- [50] Wierzbicki M.: *Analiza portfelowa*, Motto, Łódź 1995.

Literatura