Matematyka stosowana

Jakościowa Teoria Równań Różniczkowych Zwyczajnych

Henryk Żołądek
zoladek@mimuw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski, 2011

Streszczenie. Jakościowa Teoria Równań Różniczkowych Zwyczajnych zajmuje miejsce pomiędzy teorią Równań Różniczkowych Zwyczajnych i Teorią Układów Dynamicznych. Jej główna idea polega na przedstawieniu metod badania równań różniczkowych, które nie odwołują się do rozwiązywania tych równań. Dlatego na pierwsze miejsce wysuwane są takie zagadnienia jak stabilność rozwiązań względem zaburzeń warunków początkowych czy strukturalna stabilność i bifurkacje przy zaburzeniach parametrów (od których układ zależy)

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=rrj

(może zawierać dodatkowe materiały)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

Wprowadzenie

Jakościowa Teoria Równań Różniczkowych Zwyczajnych (JTRRZ) zajmuje dosyć szczególne miejsce zarówno w Matematyce Stosowanej jak i w Matematyce Teoretycznej. Z jednej strony jest to kontynuacja standardowego wykładu z Równań Różniczkowych Zwyczajnych (RRZ). Z drugiej strony stanowi ona wprowadzenie do teorii Układów Dynamicznych (UD), jednej z głównych dyscyplin matematycznych ostatnich dziesięcioleci. Ponadto okazuje się bardzo przydatna absolwentom, gdy w pracy zawodowej spotykają się z równaniami różniczkowymi, które są zwykle mocno skomplikowane i nie nie dają się rozwiązać standardowymi metodami. O ile się zbytnio nie przechwalam, to pierwszy wykład z JTRRZ na Wydziale MIM został wygłoszony przeze mnie w drugiej połowie lat 80-tych zeszłego wieku; jak widać, pomysł okazał się udany.

Główna idea jakościowej analizy równań różniczkowych polega na tym, aby bez rozwiązywania samych równań, móc coś powiedzieć o zachowaniu się rozwiązań.

Dlatego na pierwsze miejsce wysuwają się takie własności pewnych rozwiązań jak stabilność. Jest to stabilność względem zmian warunków początkowych równania. Zauważmy, że nawet przy podejściu numerycznym do równań różniczkowych wszystkie wyliczenia są obarczone pewnym nieuniknionym błędem. Zatem dobrze jest, gdy asymptotyczne zachownie się rozwiązań jest niewrażliwe na zaburzenia stanu początkowego. Na tym z grubsza koncentruje się pierwsza część skryptu.

Innym istotnym pojęciem tej teorii jest strukturalna stabilność. Jest to stabilność całego układu, tj. portretu fazowego, względem zaburzeń parametrów, które zwykle występują (i to w dużych ilościach) po prawej stronie równań. W przypadku braku strukturalnej stabilności mamy do czynienia z bifurkacjami. Metody jakościowej teorii pozwalają na dosyć precyzyjne i ścisłe badanie takich bifurkacji. Opisujemy je w trzeciej części skryptu.

W przypadku 2−wymiarowych autonomicznych układów portrety fazowe są koncepcyjnie dosyć proste, składają się one z punktów osobliwych, ich separatrys i cykli granicznych; dochodzą jeszcze rozdmuchania osobliwości i zachowanie na nieskończoności. Warto wspomnieć, że problem cykli granicznych dla wielomianowych pól wektorowych to do dziś nierozwiązany szesnasty problem Hilberta. Tym tematom jest poświęcona druga część skryptu.

Czwarta część jest poświęcona kilku zagadnieniom, w których występuje mały parametr (w różnym kontekście). W szczególności do tej klasy zagadnień zalicza się teoria KAM i teoria drgań relaksacyjnych; omawiamy je dosyć pobieżnie.

W układach wielowymiarowych pojawiają się nowe zjawiska, z których najważniejszy jest chaos. Najbardziej elementarym przykadem układu chaotycznego jest słynna podkowa Smale'a, definiowana dla pojedynczego przekształcenia. W przedostatniej części tego skryptu pokażemy jak podkowa Smale'a pojawia już w takich elementarych układach jak huśtawka poruszana okresową siłą zewnętrzną. Podamy też inne przykłady chaotycznych zachowań, jak atraktory.

W Dodatku (Rozdział 6) czytelnik znajdzie zebrane główne fakty z kursowego wykładu z Równań Różniczkowych Zwyczajnych.

Każdy rozdział zawiera serię zadań (o różnym stopniu trudności), które szanujący się student powinien rozwiązać.

Na koniec wstępu chciałbym podziękować profesorowi Zbigniewowi Peradzyńskiemu, który starannie przeczytał rękopis i przekazał mi listę uwag i błędów.

1. Punkty równowagi pól wektorowych

Rozważmy nieautonomiczny układ równań różniczkowych (lub pole wektorowe zależne od czasu)

$$\dot{x} = v(t, x). \tag{1.1}$$

Tutaj x należy do pewnej rozmaitości M zaś t (czas) do przedziału $I \subset \mathbb{R}$. W tym rozdziale możemy zakładać, że M jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i że pole v jest klasy C^r, $r \geqslant 2$; tak, że spełnione są założenia twierdzeń z Dodatku.

Przypomnijmy, że punkt x_* taki, że

$$v(t, x_*) = 0$$

(dla każdego t) nazywa się **punktem równowagi**; inne nazwy spotykane w literaturze to: **punkt osobliwy** pola i **punkt krytyczny** pola (głównie w przypadku pola autonomicznego). Oczywiście $\varphi(t) \equiv x_*$ jest rozwiązaniem tego układu. Celem tego rozdziału jest zbadanie własności rozwiązań układu (1.1) w otoczeniu pnktu równowagi.

1.1. Stabilność w sensie Lapunowa i asymptotyczna stabilność

Najprostszą i pożądaną z punktu widzenia zastosowań własnością puktu równowagi jest jego stabilność. Poniżej podajemy dwie matematycznie ścisłe definicje stabilności.

Definicja 1.1. Punkt równowagi x_* równania (1.1) jest **stabily w sensie Lapunowa**, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że każde rozwiązanie $x = \varphi(t; x_0; t_0)$ startujące z $\delta-$otoczenia puktu x_*, $|x_0 - x_*| < \delta$, pozostaje w $\varepsilon-$otoczeniu tego punktu, $|\varphi(t; x_0; t_0) - x_*| < \varepsilon$, dla wszystkich czasów $t > t_0$.

Punkt równowagi x_* jest **asymptotycznie stabilny**, jeśli jest on stabilny w sensie Lapunowa i, dodatkowo, istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że każde rozwiązanie $\varphi(t; x_0; t_0)$ startujące z punktu $x_0 = \varphi(t_0; x_0; t_0)$ ε_0-bliskiego punktowi równowagi, $|x_0 - x_*| < \varepsilon_0$, dąży do x_* przy $t \to \infty$.

Przykład 1.2. Dla *oscylatora harmonicznego* $\ddot{x} = -\omega^2 x$, albo

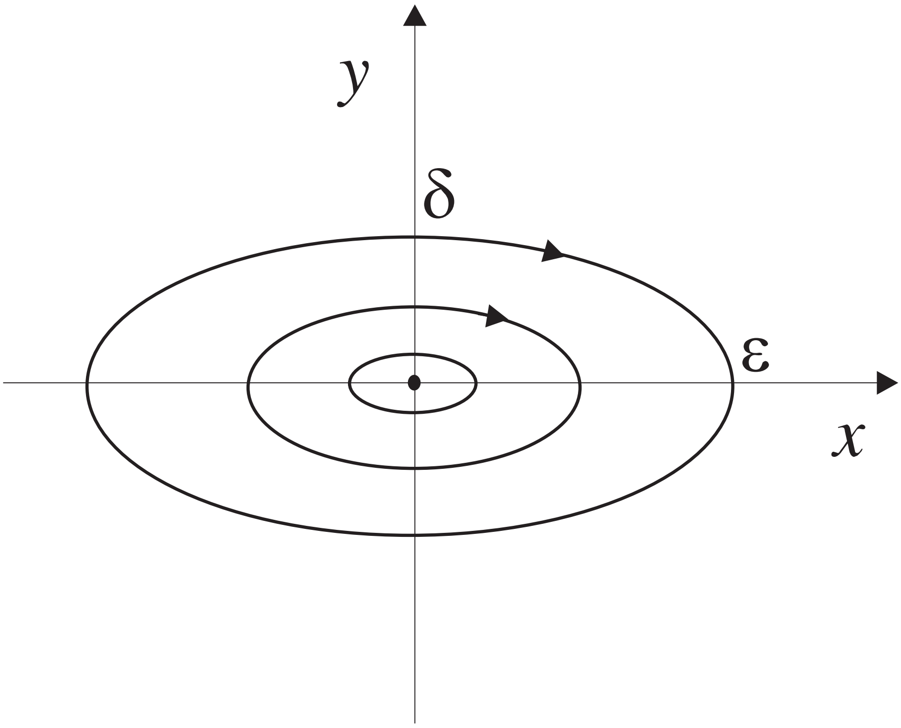
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x,$$

rozwiązania leżą w elipsach $\{(\omega x)^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$ (patrz Rysunek 1.1). Stąd dla $0 < \omega \leqslant 1$ wynika, że wybór $\delta = \omega\varepsilon$ spełnia warunki definicji stabilności w sensie Lapunowa. Ponieważ rozwiązania nie dążą do punktu równowagi $x = y = 0$, nie jest on asymptotycznie stabilny.

Przykład 1.3. Na Rysunku 1.2 przedstawiono portret fazowy pewnego pola wektorowego, które ma tę własność, że każde rozwiązanie dąży do punktu równowagi (czyli jest spełniony drugi z warunków na stabilność asymptotyczną). Jednakowoż ten punkt równowagi nie jest stabily w sensie Lapunowa, ponieważ trajektorie starujące z dołu oraz dowolnie blisko punktu równowagi wychodzą z czasem z ustalonego otoczenia tego punktu.

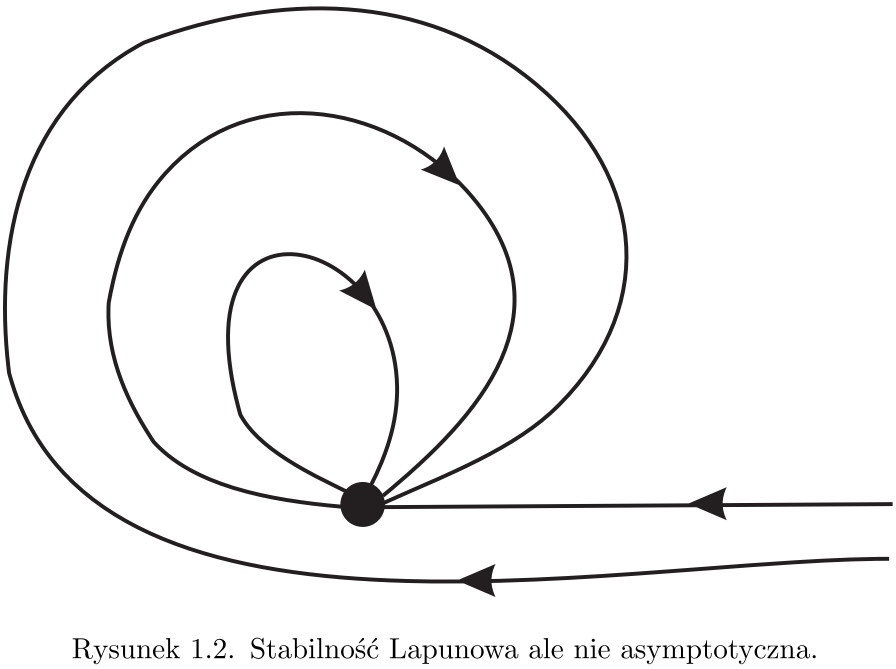
Okazuje się, że odpowiednie autonomiczne pole wektorowe można zadać konkretnym wzorem. Mianowicie, ma ono postać

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x^2 - 4xy - y(x^2 + y^2)^2 \tag{1.2}$$



Rysunek 1.1. Oscylator harmoniczny.

(patrz Zadanie 2.64).



Rysunek 1.2. Stabilność Lapunowa ale nie asymptotyczna.

Podstawowy wynik o stabilności punktów równowagi pochodzi od A. Lapunowa. Dotyczy ono punktu równowagi $x = 0$ dla kiełka[1] autonomicznego pola wetorowego w $(\mathbb{R}^n, 0)$ postaci

$$v(x) = Ax + O(|x|^2), \tag{1.3}$$

gdzie $A = \frac{\partial v}{\partial x}(0)$ jest macierzą linearyzacji pola w punkcie $x = 0$.

Twierdzenie 1.4 (Lapunow)**.** *Jeśli macierz A ma własność, że części rzeczywiste wszystkich jej wartości własnych są ujemne,*

$$\mathrm{Re}\lambda_j < 0, \tag{1.4}$$

to punkt równowagi $x = 0$ jest asymptotycznie stabilny.

Zanim zaczniemy ścisły dowód tego twierdzenia wprowadzimy pojęcie funkcji Lapunowa, które okazuje się być użyteczne dla pokazywania asymptotycznej stabilności nawet bez założenia (1.4).

Definicja 1.5. Funkcją Lapunowa dla punktu równowagi $x = 0$ kiełka autonomicznego pola wektorowego $v(x)$ nazywamy funkcję

$$L : U \longmapsto \mathbb{R}$$

z otoczenia U punktu $x = 0$, która spełnia następujące dwie własności:
(i) $L(x) \geqslant 0$ i $L(x) = 0$ tylko dla $x = 0$;
(ii) $\dot{L}(x) = \langle dL(x), v(x)\rangle < 0$ dla $x \neq 0$.

Stwierdzenie 1.6. J*eśli istnieje funkcja Lapunowa (dla punktu równowa- gi $x = 0$ pola $v(x)$) to ten punkt jest asymptotycznie stabilny.*

Dowód. Własność (i) z definicji funkcji Lapunowa mówi, że zbiory $\{L(x) \leqslant c\}$, $c > 0$, są ograniczone i dążą do punktu $x = 0$ przy $c \to 0$.

Własność (ii) oznacza, że jeśli $x = \varphi(t)$ jest rowiązaniem równania $\dot{x} = x(x)$, to

$$\frac{d}{dt} L \circ \varphi(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = (\nabla L(x), v(x)) = \langle dL(x), v(x)\rangle < 0.$$

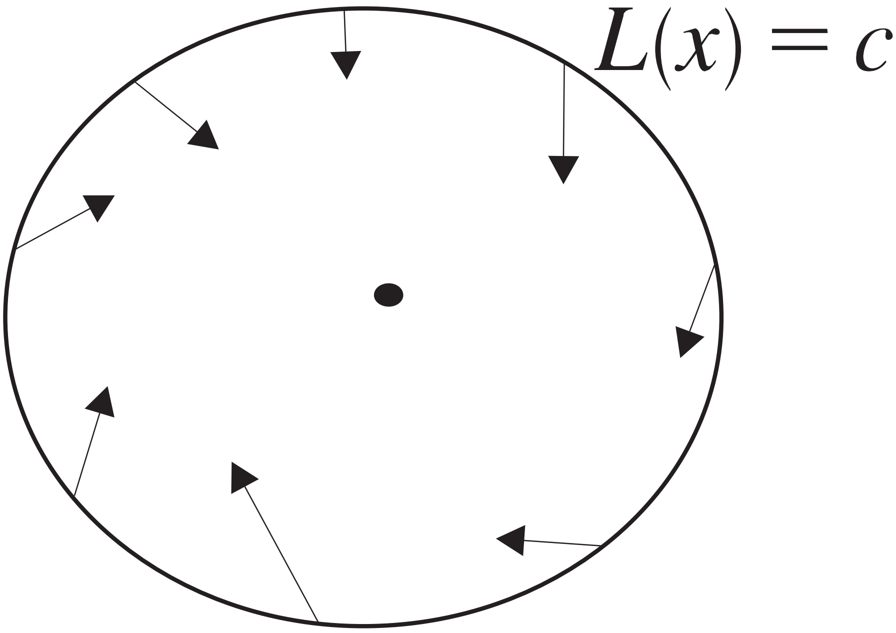
Widać, że funkcja Lapunowa maleje wzdłuż rozwiązań równania różniczkowego (patrz Rysunek 1.3).

Zatem rozwiązania startujące z brzegu $\{L(x) = c\}$ zbioru $\{L(x) \leqslant c\}$ ‘wchodzą’ do wnętrza tego zbioru. Ponieważ te trajektorie pozostają w zbiorach $\{L \leqslant c\}$, jest spełniony warunek stabilności w sensie Lapunowa. Z drugiej strony, rozwiązania muszą dążyć do punktu $x = 0$ przy $t \to \infty$; a to oznacza asymptotyczną stabilność. □

Teraz dla dowodu twierdzenia Lapunowa wypada skonstruować funkcję Lapunowa. W tym celu poprawimy nieco macierz A. Po pierwsze, założymy, że jest ona w postaci Jordana. Zatem mamy klatki

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j & 1 & 0 & \dots \\ \beta_j & \alpha_j & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_j & -\beta_j & \dots \\ 0 & 0 & \beta_j & \alpha_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

[1] Przez kiełek pola wektorowego $v(x)$ (lub funkcji $f(x)$ czy formy różniczkowej $\omega(x)$ czy odwzorowania) w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rozumiemy pole wektorowe (lub funkcję lub formę różniczkową lub odwzorowanie) określoną na pewnym otoczeniu U punktu x_0. Dwa kiełki, jeden określony na otoczeniu U a drugi na U', są równoważne, jeśli są zgodne na pewnym otoczeniu $V \subset U \cap U'$. Przyjmuje się oznaczenie $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to \mathbb{R}$ dla oznaczenia kiełka funkcji w x_0; analogoczne oznaczenia są dla pól wektorowych, form różniczkowych, odwzorowań, itd.



Rysunek 1.3. Funkcja Lapunowa.

odpowiadające nierzeczywistym $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ i zespolonym $(\lambda_j = \bar{\lambda}_{j+1} = \alpha_j + i\beta_j$, $j = r+1, r+3, \dots, n-1)$ wartościom własnym.

Okazuje się, że jedynki nad diagonalą można zastąpić małymi $\varepsilon-$ami. Rzeczywiście, jeśli mamy klatkę Jordana wymiaru k z rzeczywistą wartością własną λ, to w standardowej bazie (e_j) mamy

$$Ae_1 = \lambda e_1, \quad Ae_2 = \lambda e_2 + e_1, \dots, \; Ae_k = \lambda e_k + e_{k-1}.$$

Zatem dla bazy (f_j) takiej, że

$$f_k = e_k, \quad f_{k-1} = e_{k-1}/\varepsilon, \dots, \; f_1 = e_1/\varepsilon^{k-1},$$

będziemy mieli $Af_1 = f_1$ i $Af_j = \lambda f_j + \varepsilon f_{j-1}$ $(j > 1)$. Analogiczną zamianę stosujemy w przypadku, gdy mamy klatkę Jordana z zepolonymi wartościami własnymi (Zadanie 1.27). Mamy zatem następujący

Lemat 1.7. *W odpowiednim liniowym układzie współrzędnych macierz A przyjmuje postać*

$$A = A_0 + \varepsilon A_1,$$

gdzie A_0 jest blokowo-diagonalna z $\lambda_j \in \mathbb{R}$ i z $\begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ *na diagonali a maciarz A_1 jest ograniczona, $\|A_1\| < C_1$.*

Następny lemat kończy dowód Stwierdzenia 1.6.

Lemat 1.8. *Niech (x_i) będzie układem współrzędnych z tezy Lematu 1.7. Wtedy funkcja*

$$L(x) = \sum x_i^2 = (x, x) = |x|^2$$

na odpowiednio małym otoczeniu pnktu $x = 0$ jest funkcją Lapunowa dla tego punktu równowagi.

Dowód. Oczywiście wystarczy sprawdzić własność (ii) z Definicji 1.5 funkcji Lapunowa. Mamy

$$\dot{L} = (\nabla L, A_0 x) + \varepsilon (\nabla L, A_1 x) + (\nabla L, v - Ax),$$

gdzie $\nabla L = 2x$. Pierwszy wyraz po prawej stronie tej równości wynosi (jak łatwo sprawdzić)

$$(\nabla L, A_0 x) = 2 \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_j^2 + 2 \sum \alpha_j (x_j^2 + x_{j+1}^2), \tag{1.5}$$

gdzie w drugiej sumie sumujemy po $j = r+1, r+3, \ldots, n-1$. Następnie, z ograniczoności A_1 dostajemy

$$|(\nabla L, A_1 x)| \leqslant 2C_1 |x|^2.$$

Poniewaz nieliniowe wyrazy pola $v(x) - Ax$ są rzędu $O(|x|^2)$, mamy

$$|(\nabla L, v - Ax)| \leqslant 2C_2 |x|^3 \leqslant 2C_2 \varepsilon |x|^2$$

dla pewnej stałej C_2 i dostatecznie małego $|x|$.

Warunek (1.4) z założenia twierdzenia Lapunowa oznacza, że w (1.5) mamy

$$\lambda_j, \alpha_k < -\Lambda < 0$$

dla pewnego Λ. Zatem mamy $(\nabla L, A_0 x) < -2\Lambda |x|^2$ a pozostałe dwa człony w $\dot{L}$ szacują się przez $2(C_1 + C_2)\varepsilon |x|^2$. To pokazuje, że $\dot{L} < 0$ dla $x \neq 0$ i małego ε, co kończy dowód lematu i twierdzenia Lapunowa. □

Istnieje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Lapunowa. Jest ono dosyć naturalne i przypuszczalnie Lapunow miał jego świadomość, ale w rosyjskiej literaturze (np. w [10]) przypisuje się je V. Czetajewowi.

Twierdzenie 1.9 (Czetajew)**.** *Jeśli macierz A linearyzacji pola wektorowego (1.3) posiada wartość własną o ściśle dodatniej części rzeczywistej, to punkt równowagi $x = 0$ nie jest stabilny (ani w sensie Lapunowa ani asymptotycznie).*

Dowód. Niech $\mathrm{Re}\lambda_1, \ldots, \mathrm{Re}\lambda_k$ będą ściśle dodatnie a $\mathrm{Re}\lambda_{k+1}, \ldots, \mathrm{Re}\lambda_{k+l} \leqslant 0$, $k + l = n$. Możemy założyć, że

$$A = A_1 \oplus A_2$$

w rozkładzie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$, przy czym macierz A_1 ma wartości własne $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a macierz A_2 ma wartości własne $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$. Ponadto, możemy założyć, że macierze A_1 i A_2 są jak w tezie Lematu 1.7. Przyjmijmy jeszcze, że $x = (x_1, x_2)$ w powyższym rozkładzie $\mathbb{R}^n$ oraz $|x| = |x_1| + |x_2|$.

Zdefiniujmy stożek V za pomocą nierówności

$$|x_2| \leqslant \alpha |x_1|, \quad |x_1| \leqslant \beta,$$

gdzie stałe α i β będą zdefiniowanie w trakcie dalszych etapów dowodu. Zauważmy, że brzeg ∂V stożka V składa się z dwóch części: $\partial_1 V = \{|x_2| = \alpha |x_1|\}$ i $\partial_2 V = \{|x_1| = \beta\}$. Zdefiniujmy też 'funkcję Czetajewa', jako

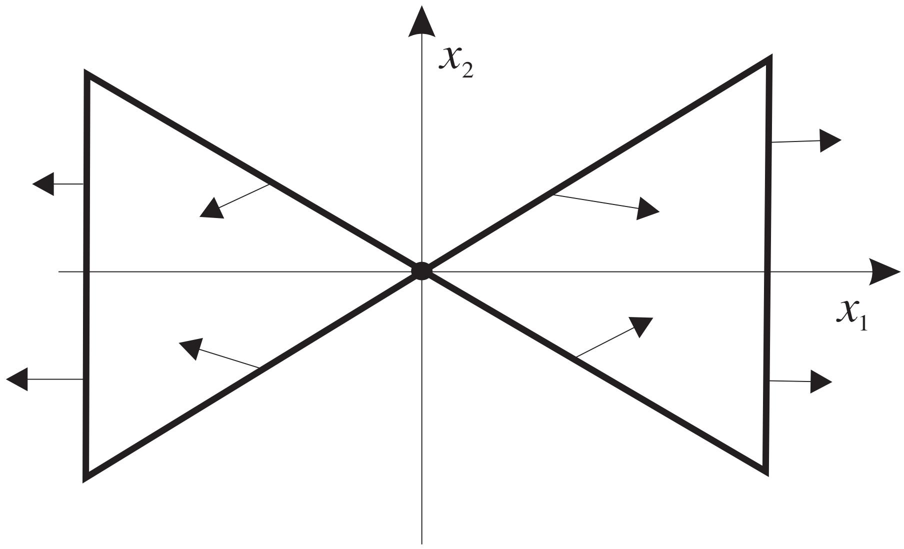
$$C(x) = |x_1|.$$

Okazuje się, że przy odpowiednio dobranych α i β zachodzą następujące własności:

(a) pole wektorowe wchodzi do V na częsci $\partial_1 V$ brzegu,

(b) $\dot{C}(x) > 0$ dla $x \in V \setminus 0$.

Oczywiście, z nich wynika teza twierdzenia; trajektorie startujące dowolnie blisko $x = 0$ w V wychodzą z V przez część $\partial_2 V$ brzegu (patrz Rysunek 1.4).



Rysunek 1.4. Funkcja Czetajewa.

Aby udowodnić te własności, skorzystamy z nierówności (które są konsekwencją poczynionych założeń):

$$\frac{d}{dt}|x_1| > M|x_1| - \varepsilon|x|, \quad \frac{d}{dt}|x_2| < \varepsilon|x|,$$

(dla $M = \min\{\mathrm{Re}\lambda_j : 1 \leqslant j \leqslant l\}$) i małego ε, przy warunku, że $|x| < \beta$ (β dostatecznie małe). Jak zwykle d/dt oznacza pochodną wzdłuż trajektorii $x(t)$ pola wektorowego.

Warunek (a) oznacza, że $\frac{d}{dt}(|x_1| - \alpha|x_2|)|_{\partial_1 V} > 0$. Ale dla $|x_1| = \alpha|x_2|$ mamy

$$\frac{d}{dt}(|x_1| - \alpha|x_2|) > M|x_1| - (\alpha+1)\varepsilon|x| = \left(M - (\alpha+1)^2\varepsilon\right)|x_1| > 0,$$

o ile ε jest małe. Z drugiej strony dla $|x_2| \leqslant \alpha|x_1|$ mamy

$$\frac{d}{dt}|x_1| > (M - (\alpha+1)\varepsilon)|x_1| > 0.$$

□

W związku z powyższymi twierdzeniami nasuwa się naturalne praktyczne pytanie: *jak sprawdzić, czy wszystkie wartości własne danej macierzy mają ujemne częsci rzeczywiste?*

Oczywiście to pytanie sprowadza się do pytania o części rzeczywiste pierwiastków wielomianu charakterystycznego tej macierzy.

Zatem załóżmy, że mamy wielomian[2]

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 > 0, \quad a_j \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Definicja 1.10. Mówimy, że wielomian $P(\lambda)$ jest **stabilny** jeśli wszystkie jego zera λ_j mają ujemną część rzeczywistą.

Pytamy o warunki konieczne i dostateczne aby wielomian postaci (1.6) był stabilny. Okazuje się, że ten problem był badany już w XIX wieku i ma pełne rozwiązanie.

[2] Wielomian charakterystyczny macierzy $\det(A-\lambda)$ ma współczynnik $a_0 = (-1)^n$. Tutaj przyjmujemy $a_0 > 0$ dla uproszczenia formułowanych niżej wyników.

Aby przyjrzeć się temu zagadnieniu, odnotujmy następujący prosty warunek konieczny.

Lemat 1.11. *Jeśli wielomian postaci (1.6) jest stabilny, to $a_j > 0$ dla wszystkich j.*

Dowód. Przyjrzyjmy się czynnikom w przedstawieniu

$$P(\lambda) = a_0 \prod(\lambda - \lambda_j) \prod(\lambda^2 - 2\alpha_j \lambda + (\alpha_j^2 + \beta_j^2)),$$

gdzie pierwszy iloczyn jest związany z rzeczywistymi pierwiastkami $\lambda_j < 0$, a drugi iloczyn jest związany z nierzeczywistymi pierwiastkami $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, $\alpha_j < 0$, $\beta_j \neq 0$. Ponieważ każdy z czynników ma dodatnie współczynniki, to i cały wielomian też musi mieć dodatnie współczynniki. □

Uwaga 1.12. Jeśli stopień $n \leqslant 2$, to warunek $a_j > 0$, $j = 0, 1, 2$, jest również warunkiem dostateczym.

Zdefiniujmy następującą macierz wymiaru $n \times n$:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

taką, że na diagonali stoją kolejno liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Twierdzenie 1.13 (Warunki Raussa–Hurwitza)**.** *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na stabilność wielomianu (1.6) jest:*

(i) $a_j > 0$ dla wszystkich j;

(ii) minory główne Δ_j (wymiarów j) macierzy (1.7) są dodatnie.

Przykłady 1.14. Dla $n = 1$ macierz (1.7) ma postać $[a_1]$, zatem $\Delta_1 = a_1$.

Dla $n = 2$, czyli macierzy $\begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, mamy $\Delta_1 = a_1$ i $\Delta_2 = a_2$; zatem odtwarzamy Uwagę 1.12.

Dla $n = 3$ mamy macierz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Warunki Raussa–Hurwitza przyjmują postać: $\Delta_1 = a_1 > 0$ (nic nowego),

$$\Delta_2 = a_1 a_1 - a_0 a_3 > 0 \tag{1.8}$$

i $\Delta_3 = a_3 \Delta_2$ (też nic nowego).

Uwaga 1.15. Można pokazać, że warunek $\Delta_j > 0$ dla wszystkich j można zastąpić następującym *warunkiem Liénarda–Shapira*:

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 > 0, \dots$$

(patrz także poniższy dowód).

Dowód Twierdzenia 1.13.[3] Idea dowodu jest dosyć prosta. Warunki $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ (oraz $a_0 > 0$) definiują pewien podzbiór U w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1} = \{a\}$ współczynników a_j. Zbiór U jest semi-algebraiczny i jego brzeg składa się z gładkich 'stratów'. Chodzi o równania definiujące te straty. Jeśli $a \in \partial U$, to mamy dwie możliwości: albo

[3] Na wykładzie dowód jest ograniczony do przypadku $n = 3$ i tego wymaga się od studentów na egzaminie.

(a) pewien pierwiastek równania $P(\lambda) = 0$ zeruje się, albo

(b) para sprzężonych pierwiastków zespolonych leży na osi urojonej.

Przypadek (a) oznacza, że $P(0) = 0$, czyli $a_n = 0$; to jest dosyć proste.

Rozważmy sytuację z parą $\lambda_{j,j+1} = \pm i\beta$ urojonych pierwiastków. Mamy wtedy

$$P_\beta(\lambda) = (\lambda^2 + \beta^2)Q(\lambda) \tag{1.9}$$

dla pewnego wielomianu

$$Q = b_0\lambda^{n-2} + b_1\lambda^{n-3} + \ldots + b_{n-2},$$

o którym możemy założyć, że jest stabilny. Ponadto, z założenia indukcyjnego (względem n) możemy przyjąć, że $b_j > 0$ i odpowiednie minory $\Delta_j = \Delta_j(Q) > 0$.

Mamy następujące relacje

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 + \beta^2 b_0,\ a_3 = b_3 + \beta^2 b_1, \ldots$$

To oznacza, że macierz M w (1.7) ma pos tać $M = M_1 + \beta^2 M_2$, gdzie

$$M_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-4} & b_{n-5} & b_{n-6} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że $r-$ty wiersz macierzy M_2 równa się $(r-1)-$temu wierszowi macierzy M_1 dla $r > 1$. To oznacza, że wszystkie minory $\Delta_j(P_\beta)$, $j = 1, \ldots, n-2$, macierzy M są równe odpowiednim minorom $\Delta_j(Q)$ dla macierzy M_1 (związanej z wielomianem Q); zatem są one dodatnie. Stąd też wynika, że $\Delta_{n-1}(P_\beta) = 0$ i $\Delta_n(P_\beta) = \beta^2 b_{n-2}\Delta_{n-1}(P_\beta) = 0$.

Widać, że równanie $\Delta_{n-1}(P) = 0$ opisuje lokalnie hiperpłaszczyznę w przestrzeni współczynników (a_j) oddzielającą wielomiany stabilne od nie-
stabilnych. Wypada tylko sprawdzić, czy nierówność $\Delta_{n-1}(P_\beta) > 0$ lokalnie definiuje zbiór wielomianów stabilnych.

W tym celu rozważymy następującą deformację sytuacji (1.9):

$$P_{\alpha,\beta} = (\lambda^2 + \alpha^2\lambda + \beta^2)Q(\lambda),$$

gdzie parametr α jest mały i β jest rzeczywiste. Wtedy do macierzy M dochodzi jeszcze jeden człon $\alpha^2 M_3$, gdzie w ostatnich dwóch wierszach macierzy M_3 niezerowy jest tylko końcowy fragment wymiaru 2×2 :

$$N = \begin{bmatrix} b_{n-2} & b_{n-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gdy α i β są niezerowe wielomian $P_{\alpha,\beta}$ jest stabilny; zatem $\Delta_j(P_{\alpha,\beta}) \neq 0$ dla $j = 1, \ldots, n-1$. Policzmy granicę $\Delta_{n-1}(P_{\alpha,\beta})$ przy $\beta \to 0$ i stałym $\alpha \neq 0$. (Wtedy $\Delta_n(P_{\alpha,\beta}) \to 0$, bo $a_n =$

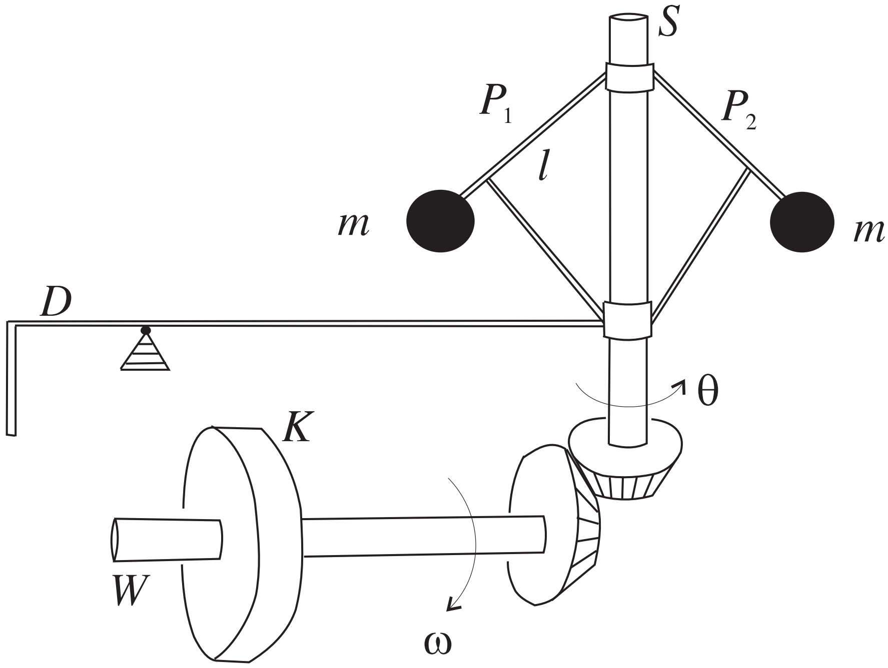
$\beta^2 b_{n-2} \to 0$, ale to nam nie przeszkadza.) Łatwo zobaczyć, że dla $\beta = 0$ i małego niezerowego α macierz M przyjmuje postać blokową, z blokami: M_{11} (wymiaru $(n-2)\times(n-2)$), M_{12} (wymiaru $(n-2)\times 2$), $M_{21} = 0$ (wymiaru $2\times(n-2)$) i $M_{22} = \alpha^2 N$. Ponieważ $\det M_{11} = \Delta_{n-2}(P_{\alpha,0})$ jest bliskie $\Delta_{n-2}(P_{0,0}) = \Delta_{n-2}(Q) > 0$ (z założenia indukcyjnego), więc i $\det M_{11} > 0$. Zatem

$$\Delta_{n-1}(P_{\alpha,0}) = \det M_{11} \cdot \alpha^2 b_{n-2} > 0.$$

□

Przykład 1.16 (Regulator Watta)**.** Na Rysunku 1.5 mamy przedsta- wiony schemat regulatora Watta, stosowanego w XIX wieku w maszynach parowych. Ten regulator składa się z:

— sworznia S, który może się obracać wokół swojej osi;



Rysunek 1.5. Regulator Watta.

— dwu kul o masie m każda, umieszczonych na ruchomych przegubach wokół sworznia S, tak, że górna obręcz jest nieruchoma (scalona z S) a dolna obręcz może przesuwać się w górę i w dół (przy czym kule odpowiednio oddalają się od sworznia i przybliżają do sworznia), ponadto pręty P_1 i P_2 łaczące kule z górną obręczą mają długość l;

— koła zamachowego K umieszczonego na walcu W;

— przekładni zębatej pomiędzy sworzniem S i walcem W o stosunku prędkości obrotowych n;

— dźwigni D regulującej dopływ pary do maszyny i przymocowanej do dolnej obręczy.

Na każdą kulę działają trzy siły (patrz Rusunek 1.6): siła odśrodkowa $F_{odśr} = ml\theta^2 \sin\varphi$ (skierowana prostopadle od sworznia na zewnątrz), siła ciężkości $F_{cież} = mg$ (skierowana w dół) oraz tarcie $F_{tarc} = -b\dot{\varphi}$ (prostopadłe do prętów $P_{1,2}$). Tutaj θ jest prędkością kątową obrotu sworznia S (i kul), φ jest kątem pomiędzy prętami $P_{1,2}$ a sworzniem S, g jest przyspieszeniem ziemskim a b jest pewnym współczynnikiem. Sumując składowe tych sił prostopadłe do prętów $P_{1,2}$, dostajemy następujące równanie ruchu

$$ml\ddot{\varphi} = ml\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi}. \tag{1.10}$$

Przy tym zwykle zakłada się (np. w [16]), że

$$l = 1,$$

tj. w pewnych jednoskach długości.

W równaniu (1.10) oprócz dynamicznej zmiennej φ występuje jeszcze wielkość θ, która także zmienia się z czasem. Aby dostać jakąś zależność θ (lub jej pochodnych) od φ, uwzględnijmy najpierw jej związek

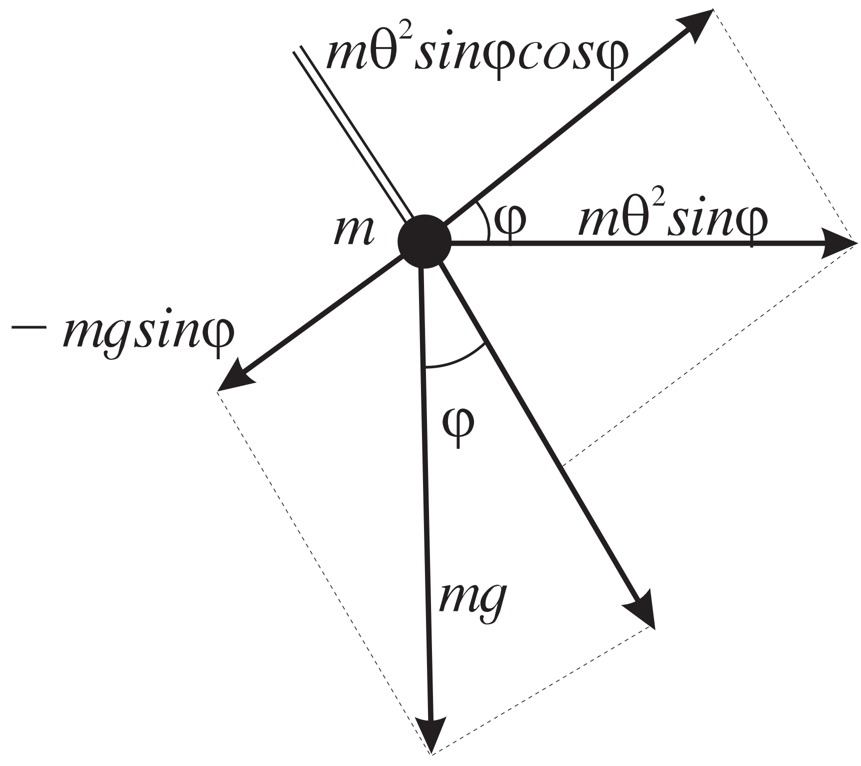
$$\theta = n\omega$$

z prędkością obrotową ω walca W. Z drugiej strony, ruch koła zamachowego K opisuje się równaniem

$$J\dot{\omega} = k\cos\varphi - F,$$

gdzie J jest momentem bezwładności koła, natomiast po prawej stronie mamy moment siły działającej na koło. Przy tym składnik $k\cos\varphi$ jest proporcjonalny do ilości dopływu pary (k jest pewną stałą) a F jest stałą spowalniającą siłą związaną z pracą wykonywaną przez maszynę. Z powyższych rozważań wynika następujący zamknięty i autonomiczny układ równań różniczkowych dla $x = \varphi$, $y = \dot{\varphi}$ i $z = \omega$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y, \\ \dot{y} & = & n^2 z^2 \sin x \cos x - g\sin x - \frac{b}{m} y, \\ \dot{z} & = & \frac{k}{J}\cos x - \frac{F}{J}, \end{array} \tag{1.11}$$



Rysunek 1.6. Siła ciężkości i siła odśrodkowa.

Okazuje się, że ten układ ma dokładnie jedno (fizycznie realizowalne) położenie równowagi (x_0, y_0, z_0) zadane równaniami

$$\cos x_0 = F/k, \quad y_0 = 0, \quad n^2 z_0^2 = g/\cos x_0. \tag{1.12}$$

Ponadto macierz linearyzacji układu (1.11) w tym punkcie równowagi jest następująca

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -g\frac{\sin^2 x_0}{\cos x_0} & -\frac{b}{m} & 2g\frac{\sin x_0}{z_0} \\ -\frac{k}{J}\sin x_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

a jej wielomian charakterystyczny to

$$\det(A - \lambda) = -P(\lambda) = -\left\{\lambda^3 + \frac{b}{m}\lambda^2 + g\frac{\sin^2 x_0}{\cos x_0}\lambda + 2kg\frac{\sin^2 x_0}{Jz_0}\right\}. \tag{1.14}$$

Widać, że współczynniki wielomianu $P(\lambda)$ są dodatnie, czyli jest spełniony warunek (i) Twierdzenia Raussa–Hurwiza. Dzięki Przykładowi 1.14 (dla $n = 3$) warunkiem dostatecznym stabilności wielomian $P(\lambda)$ jest nierówność (1.8), która w tym przypadku oznacza

$$\frac{bJ}{m} > 2k\frac{\cos x_0}{z_0} = \frac{2F}{z_0} \tag{1.15}$$

(Zadanie 1.28). Tutaj $\nu := z_0/2F = \omega_0/2F$ ma mechaniczną interpretację *nierównomierności pracy maszyny*. Zatem ostatnia nierówność przyjmuje prostą postać

$$\frac{bJ\nu}{m} > 1.$$

Można stąd wysnuć następujące wnioski:

— zwiększanie masy m kul pogarsza stabilność;
— zmniejszanie współczynnika tarcia b pogarsza stabilność;[4]
— zmniejszenie momentu bezwładności J koła zamachowego pogarsza stabilność;
— podobny wpływ ma zmniejszenie współczynnika ν nierównomierności pracy maszyny.

1.2. Hiperboliczność

Wyniki poprzedniego rozdziału nauczyły nas, że warunek $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$, dla pewnej wartości własnej macierzy linearyzacji A w punkcie równowagi autonomicznego pola wektorowego

$$\dot{z} = Az + \dots, \quad z \in (\mathbb{R}^n, 0), \tag{1.16}$$

jest warunkiem granicznym dla roztrzygnięcia problemy stabilności asymptotycznej tego punktu równowagi. Stąd pojawia się następująca

Definicja 1.17. Punkt równowagi $z = 0$ autonomicznego pola wektorowego (1.16) nazywa się **punktem hiperbolicznym**, jeśli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy A linearyzacji pola w tym punkcie są niezerowe.

Załóżmy, że punkt $z = 0$ jest hiperboliczny i rozważmy odpowiedni układ liniowy

$$\dot{z} = Az. \tag{1.17}$$

Wtedy istnieje naturalny rozkład przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na sumę prostą podprzestrzeni stabilnej $E^s \simeq \mathbb{R}^k$ i podprzestrzeni niestabilnej $E^u \simeq \mathbb{R}^l$ (od angielskich słów 'stable' i 'unstable'), odpowiadających wartościom własnym z $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ i z $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$ odpowiednio:

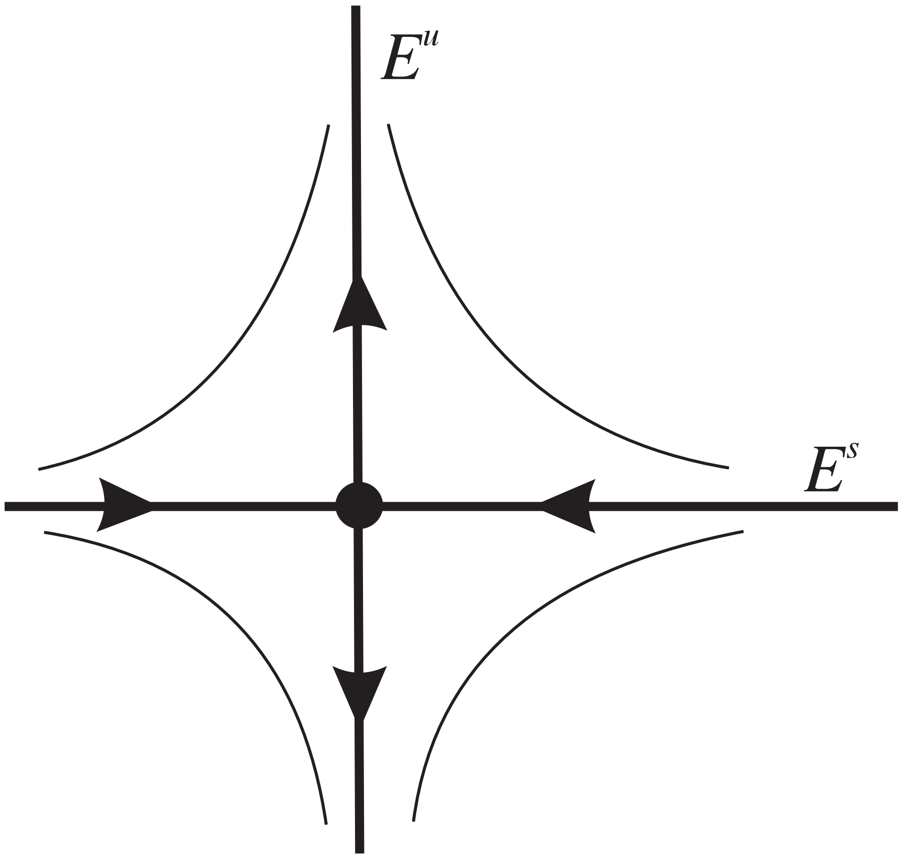
$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u, \quad A = A_1 \oplus A_2. \tag{1.18}$$

[4] Gdy prezentowałem ten przykład kilka lat temu na wykładzie z JTRRZ, Z. Nowak poinformował nas o przypadkach, gdy w niektórych fabrykach niemieckich (gdzie dbano o wszystko) uporczywe zmniejsznie współczynnika tarcia prowadziło do awarii maszyn parowych.

Zauważmy, że podprzestrzenie E^s i E^u można zdefiniować topologicznie w terminach liniowego potoku fazowego $g^t_{Az} = e^{At}$ liniowego pola (1.17) (patrz Dodatek). Mianowicie

$$E^s = \left\{ z : g^t_{Az}(z) \to 0,\ t \to +\infty \right\}, \quad E^s = \left\{ z : g^t_{Az}(z) \to 0,\ t \to -\infty \right\}$$

(patrz Rysunek 1.7).



Rysunek 1.7. Hiperboliczne siodło.

Okazuje się, że analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku nieliniowego pola (1.16).

Twierdzenie 1.18 (Hadamard–Perron)**.** *Dla hiperbolicznego punktu równowagi $z = 0$ pola $\dot{z} = v(z)$ klasy C^r, $r \geqslant 2$, istnieją lokalne podrozmaitości,* stabilna W^s *i* niestabilna W^u *klasy C^r, takie, że*

$$W^s = \left\{ z : g^t_v(z) \to 0,\ t \to +\infty \right\}, \quad W^s = \left\{ z : g^t_v(z) \to 0,\ t \to -\infty \right\}, \tag{1.19}$$

oraz[5]

$$T_0 W^s = E^s, \quad T_0 W^u = E^u. \tag{1.20}$$

Zanim zabierzemy się za dowód tego twierdzenia, zauważmy, że analogiczne pojęcia i twierdzenia można wprowadzić dla lokalnych dyfeomeorfizmów. Po pierwsze, jeśli $z = 0$ jest punktem

[5] Tutaj g^t_v oznacza lokalny potok fazowy generowany przez pole $v(x)$ a $T_y M$ oznacza przestrzeń styczną do podrozmaitości M w punkcie y.

równowagi pola wektorowego $\dot{z} = v(z) = Az + \ldots$, to $z = 0$ jest **punktem stałym** przekształcenia potoku po czasie $t = 1$, $f(z) = g_v^1(z)$, tzn.

$$f(0) = 0.$$

Ponadto część liniowa $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ przekształcenia f w $z = 0$ ma postać macierzy

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0) = B = e^A.$$

(Zadanie 1.36). W istocie istnieje dyskretna wersja pojęcia potoku fazowego.

Definicja 1.19. Dyfeomorfizm $f : M \longmapsto M$ definiuje homomorfizm $\mathbb{Z} \to Diff(M)$ z grupy addytywnej liczb całkowitych do grupy dyfeomeorfizmów rozmaitości tak, że

$$n \longmapsto f^n,$$

gdzie $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (n razy dla $n \geqslant 0$) i $f^{-n} = f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ ($|n|$ razy dla $n < 0$). W literaturze $\{f^n\}$ nazywa się **kaskadą**.

Punkt $z_0 \in M$ jest **punktem okresowym o okresie** $p \geqslant 1$ dla f, jeśli $f^p(z_0) = z_0$; przy tym pod okresem będziemy rozumieli minimalny okres (tzn. $f^q(z_0) \neq z_0$ dla $1 \leqslant q < p$). Oczywiście punkt okresowy o okresie $p = 1$ jest punktem stałym.

Definicja 1.20. Punkt okresowy z_0 o okresie p dyfeomorfizmu f nazywa się **hiperbolicznym**, jeśli macierz

$$B = \frac{\partial (f^p)}{\partial z}(z_0)$$

ma wszystkie wartości własne poza okręgiem jednostkowym,

$$|\lambda_j| \neq 1.$$

Lemat 1.21. *Jeśli $z = 0$ jest hiperbolicznym punktem równowagi pola wektorowego $v(z)$ to $z = 0$ jest też hiperbolicznym punktem stałym dyfeomorfizmu $f = g_v^t$, i odwrotnie* (Zadanie 1.36).

Mamy następującą wersję twierdzenia Hadamarda–Perrona dla dyfeomorfizmów.

Twierdzenie 1.22. *Jeśli punkt stały $z = 0$ lokalnego dyfeomorfizmu $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longmapsto (\mathbb{R}^n, 0)$ klasy C^r, $r \geqslant 1$, jest hiperboliczny, to istnieją lokalne podrozmaitości,* stabilna W^s *i* niestabilna W^u *klasy C^r, takie, że*

$$W^s = \{z : f^n(z) \to 0,\ n \to +\infty\}, \quad W^s = \{z : f^n(z) \to 0,\ n \to -\infty\}, \tag{1.21}$$

oraz

$$T_0 W^s = E^s, \quad T_0 W^u = E^u, \tag{1.22}$$

gdzie E^s i E^u są podprzestrzniami $\mathbb{R}^n$ rozpiętymi przez podprzestrzenie własne odpowiadające wartościom własnym macierzy $B = \frac{\partial f}{\partial z}(0)$ o module < 1 i > 1 odpowiednio.

Droga do dowodu Twierdzenia Hadamarda–Perrona 1.18 wiedzie poprzez dowód Twierdzenia 1.22. Przy tym, jak się wkrótce przekonamy, metoda dowodu istnienia podrozmaitościi W^s i W^u o własnościach (1.21) klasy C^0 jest dosyć naturalna: dostaje się równanie na punkt stały pewnego przekształcenia w odpowiedniej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha. Niestety ‘wyciśnięcie’ warunku kontrakcji tego przekształcenia jest mocno wyczerpujące. Dlatego w poniższym dowodzie ograniczymy się do wyprowadzenie odpowiednich równań i naszkicujemy ogólny schemat oszacowań. Po ścisły dowód odsyłamy czytelnika do monografii W. Szlenka [18].

Dowód Twierdzenia 1.22. Dla uproszczenia sytuacji załóżmy rozkład (1.18), czyli $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u = \{(x,y)\}$ i przekształcenie w postaci $f = (f_1, f_2)$ takie, że

$$f_1(x,y) = Ax + \varphi(x,y), \quad f_2(x,y) = By + \psi(x,y), \tag{1.23}$$

gdzie

$$\|A\| < 1, \quad \left\|B^{-1}\right\| < 1 \tag{1.24}$$

oraz funkcje φ i ψ są rzędu $o(|x|+|y|)$ (Zadanie 1.37).

Oczywiście wektorowe funkcje φ i ψ są określone w małym otoczeniu zera. W dowodzie, który predstawiamy poniżej, stanowi to pewną techniczną przeszkodę. Dlatego dokonamy następującej zamiany

$$\varphi \longmapsto \varphi\chi, \quad \psi \longmapsto \psi\chi,$$

gdzie funkcja $\chi(x,y)$ jest gładka (klasy C^∞) i taka, że:

(i) $\chi(x,y) \equiv 1$ w małym otoczeniu zera, $|x|+|y| < \varepsilon$;

(ii) $\chi(x,y) \equiv 0$ poza małym otoczeniem zera, $|x|+|y| > 2\varepsilon$ (Zadanie 1.38).

Zatem funkcje $\varphi\chi$ i $\psi\chi$ po przedłużeniu zerem dla $|x|+|y| > \varepsilon$ będą określone na całym $\mathbb{R}^n$. Dalej oznaczamy je przez φ i ψ. Przypomnijmy, że te nowe funkcje spełniają $d\varphi(0,0) = 0$, $d\psi(0,0) = 0$ oraz $|\varphi|$ i $|\psi|$ są małe wraz z pochodnymi. Dzięki własności (i) dynamika przekształcenia f z nowymi φ i ψ w otoczeniu zera jest taka sama jak dla starego przekształcenia (1.23).

Poszukujemy podrozmaitości W^s w postaci wykresu pewnego odwzorowania (lub funkcji wektorowej) $F : E^s \longmapsto E^u$,

$$W^s = \{(x, F(x)) : x \in E^s\}.$$

(Dowód istnienia podrozmaitości W^u przebiega zupełnie analogicznie, dlatego ograniczamy się do przypadku W^s.)

Z własności (1.21) wynika, że podrozmaitość W^s powinna być niezmiennicza względem dyfeomorfizmu f, $f(W^s) = W^s$. To oznacza, że $f(x, F(x)) = (x_1, F(x_1))$ dla pewnych $x_1 \in E^s$ zależnych od $x \in E^s$. Z (1.23) znajdujemy, że $x_1 = Ax + \varphi(x, F(x))$. Zatem dostajemy warunek

$$BF(x) + \psi(x, F(x)) = F \circ (Ax + \varphi(x, F(x)),$$

który przepiszemy w następującej postaci

$$F(x) = B^{-1}\left\{F \circ (Ax + \varphi(x, F(x)) - \psi(x, F(x))\right\} =: \mathcal{T}(F)(x). \tag{1.25}$$

Traktujemy ostatnie równanie jako równanie punktu stałego $F = \mathcal{T}(F)$ dla nieliniowego operatora $\mathcal{T}$ definiowanego przez prawą stronę tej równości.

Zakładając, że funkcje φ i ψ są klasy C^1, naturalne jest wprowadzić przestrzeń Banacha $\mathcal{X} = C^0(E^s, E^u)$ odwzorowań ciągłych z normą supremum. Nietrudno też pokazać, że przekształcenie $\mathcal{T}$ przeprowadza $\mathcal{X}$ w siebie. Aby zastosować zasadę Banacha dla odwzorowań zwężających, należałoby jeszcze udowodnić warunek kontrakcji, czyli oszacować normę różnicy $\mathcal{T}(F_1) - \mathcal{T}(F_2)$. Tutaj pojawia się problem, bo z (1.25) dostajemy następującą nierówność:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{T}(F_1) - \mathcal{T}(F_2)\| \\ \leqslant\ &\left\{\left\|B^{-1}\right\| + \left\|B^{-1}\right\| \cdot \|F_1'\| \cdot \left\|\varphi_y'\right\| + \left\|B^{-1}\right\| \cdot \left\|\psi_y'\right\|\right\} \cdot \|F_1 - F_2\| \end{aligned}$$

(Zadanie 1.39). Ponieważ $\|B^{-1}\| < 1$ (patrz (1.24)) oraz $\left\|\psi_y'\right\| = \|\partial\psi/\partial y\|$ i $\|\partial\varphi/\partial y\|$ są małe (patrz powyżej), to wypada tylko umieć oszacować normę pochodnej F_1' odwzorowania F_1. Ale, jeśli wybieramy F_1 i F_2 dowolnie z przestrzni $\mathcal{X}$, to F_1 będzie tylko ciągłe, a jego pochodna może być nieograniczona.

Jest wyjście z tego impasu. Przypomnijmy, że w dowodzie twierdzenia Banacha wybiera się $F_0 \in \mathcal{X}$, a następnie punkty $F_n = \mathcal{T}^n(F_0)$ powinny zbiegać do punktu stałego. Chodzi o to aby wybrać wektorową funkcję F_0 gładką i pokazać, że funkcje F_n też są gładkie z odpowiednio ograniczonymi normami. Nietrudno zgadnąć, że

$$F_0(x) \equiv 0$$

jest dibrym wyborem. Łatwo też widać ze wzoru (1.24), że $F_n(x)$ są gładkie, np. $F_1(x) = -B^{-1}\psi(x,0)$.

Trzeba tylko pokazać, że funkcje $F_n(x)$ są jednakowo ciągłe. To sprowadza się do oszacowania normy pochodnej $(\mathcal{T}(F))'(x)$ przy założeniu, ograniczoności normy $F'(x)$. Mamy

$$(\mathcal{T}(F))'(x) = B^{-1} \cdot \left\{ F' \cdot \left[A + \varphi'_x + \varphi'_y \cdot F' \right] - \psi'_x - \psi'_y \cdot F' \right\}, \tag{1.26}$$

gdzie pominęliśmy argumenty funkcji występujących po prawej stronnie tej równości. Zatem norma supremum szacuje się następująco:

$$\left\| (\mathcal{T}(F))' \right\| \leqslant a + b \left\| F' \right\| + c \left\| F' \right\|^2,$$

gdzie a jest małe, $b < 1$ i $c > 0$. Stąd wynika, że, jeśli $\|F'\|$ jest dostatecznie mała, $\|F'\| < d$ (dla odpowiedniego d), to i $\left\|(\mathcal{T}(F))'\right\| < d$ (Zadanie 1.40). To daje równomierne oszacowanie dla norm $\|F'_n\|$ ciągu funkcji F_n.

Zatem F_n zbiegają do punktu stałego F_*, o którym na razie możemy powiedzieć tylko że jest reprezentowany przez ciągłe odwzorowanie z E^s do E^u; czyli, że podrozmaitość

$$W^s = \{(x, F_*(x))\}$$

jest klasy C^0.

Powiemy krótko, jak dowieść gładkości funkcji F_*. W tym celu należy stosować jednocześnie równania (1.25) i (1.26) do ciągów $\{F_n\}$ i $\{F'_n\}$. W szczególności, pokazuje się jednakową ciągłość rodziny $\{F'_n\}$, co wymaga jednostajnego szacowania wyrażenia $\sup \left|(\mathcal{T}(F_n))'(x_1) - (\mathcal{T}(F_n))'(x_2)\right|$. Okazuje się, że to daje się zrobić korzystając z oszacowań dla $\sup\{|F'_n(x_1) - F'_n(x_2)|, |\varphi'(x_1,y_1) - \varphi'(x_2,y_2)|, |\psi'(x_1,y_1) - \psi'(x_2,y_2)|\}$.

Następnie korzysta się z twierdzenia Ascoliego, które mówi, że z jednakowo ciągłego ciągu funkcji na zwartym zbiorze można wybrać podciąg zbieżny. Tutaj zbiór zwarty to $\{|x| < M\} \subset E^s$ dla pewnego M a granicą podciągu $\{F_{n_k}\}$ musi być F_* (bo taka jest granica w przestrzeni funkcji ciągłych).

W tym (skróconym) dowodzie ograniczyliśmy się do przypadku, gdy f jest klasy C^1 (i wtedy $W^{s,u}$ są też klasy C^1). Ale przypadek klasy C^r dla $r > 1$ też da się udowodnić, i to tą samą metodą, tylko dowód wymaga większej liczby wzorów i oszacowań. Pomijamy go.

Na koniec zauważmy, że ponieważ $F'_0(0) = 0$ i $\varphi'(0,0) = 0$ i $\psi'(0,0) = 0$, to mamy $F'_n(0) = 0$ dla dowolnego n. Zatem $F'_*(0) = 0$, co oznacza, że podrozmaitość W^s jest styczna w punkcie $(0,0)$ do przestrzeni E^s. □

Dowód Twierdzenia 1.18. Połóżmy $f = g^1_v$, czyli przekształcenie potoku fazowego po czasie $t = 1$ i niech V^s będzie lokalną rozmaitością stabilną dla f (patrz Twierdzenie 1.22). Ponieważ podrozmaitość W^s jest definiowana topologicznie jako zbiór tych punktów z, że $g^t_v(z) \to 0$ gdy $t \to \infty$, to $W^s \subset V^s$. Z drugiej strony, jeśli $z \in V^s$, to zapisując $t = n + \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leqslant \tau < 1$, mamy $g^t(z) = g^\tau(g^n(z)) \to 0$ (jako, że rodzina $\{g^\tau\}_{\tau\in[0,1)}$ jest jednakowo ciągła). □

Drugi podstawowy wynik dotyczący hiperbolicznych punktów stałych pochodzi od D. Grobmana i P. Hartmana ([13]). Formułujemy go jednocześnie dla kaskad i potoków.

Twierdzenie 1.23 (Grobman–Hartman)**.** *Niech* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longmapsto (\mathbb{R}^n, 0)$ *będzie kiełkiem dyfeomorfizmu klasy* C^r, $r \geqslant 1$, *z hiperbolicznym punktem stałym w* $z = 0$. *Wtedy istnieje lokalny homeomorfizm* $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longmapsto (\mathbb{R}^n, 0)$ *taki, że*

$$h \circ f(z) = f'(0) \cdot h(z). \tag{1.27}$$

Analogicznie, dla lokalnego potoku g_v^t *generowanego przez kiełek pola wektorowego* $v(z)$ *z hiperbolicznym punktem równowagi* $z = 0$ *istnieje lokalny homeomorfizm* h *(jak wyżej) taki, że*

$$h \circ g_v^t(z) = e^{tv'(0)} \cdot h(z). \tag{1.28}$$

Dowód. Zaczniemy od przypadku kaskady. Podobnie jak w przypadku dowodu Twierdzenia 1.22 sprowadzamy sytuację do przypadku, gdy $z = (x, y)$ i

$$f(x, y) = (Ax + \varphi, By + \psi) = Lz + \tilde{f},$$

gdzie $L = A \oplus B = f'(0)$, zachodzą oszacowania (1.24) i $\tilde{f} = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$ jest określone na całym $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ oraz jest małe wraz z pochodnymi. Homeomorfizm h wybierzemy w postaci

$$h = id + g = (x + g_1, y + g_2), \quad g \text{ małe}. \tag{1.29}$$

Równanie (1.27) na h, które odnacza przemienność następującego diagramu

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \overset{f}{\longmapsto} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \mathbb{R}^n & \overset{L}{\longmapsto} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

prowadzi do równania $(id + g) \circ L = L \cdot (id + g) + \tilde{f} \circ (id + g)$. W składowych dostajemy układ równań

$$\begin{array}{rcl} g_1(Ax, By) & = & A \cdot g_1(x, y) + \varphi(x + g_1, y + g_2), \\ g_2(Ax, By) & = & B \cdot g_2(x, y) + \psi(x + g_1, y + g_2). \end{array}$$

Przepiszmy ten układ w dogodnej dla nas formie

$$\begin{array}{rcl} g_1(x, y) & = & A \cdot g_1(A^{-1}x, B^{-1}y) + \varphi \circ (id + g) \circ (A^{-1}x, B^{-1}y), \\ g_2(x, y) & = & B^{-1} \cdot g_2(Ax, By) - B^{-1} \cdot \psi \circ (id + g). \end{array} \tag{1.30}$$

Łatwo rozpoznać tu równanie punktu stałego $g = \mathcal{T}(g)$ dla nieliniowego operatora $\mathcal{T}$ działającego na $g = (g_1, g_2)$ poprzez prawe strony układu (1.30).

Jako przestrzeń Banacha wybierzemy

$$\mathcal{X} = C^0(\mathbb{R}^n, E^s) \oplus C^0(\mathbb{R}^n, E^u)$$

z normą $\|g\| = \sup |g_1| + \sup |g_2|$. Tutaj już nietrudno pokazać, że operator $\mathcal{T}$ przekształca kulę w $\mathcal{X}$ o odpowiednim promieniu w siebie i że jest kontrakcją. Podstawowy argument polega na tym, że macierze A i B^{-1} mają normę < 1.

Oderwijmy się na moment od naszego dowodu i rozważmy sytuację, gdy równanie (1.27) zastąpić równaniem

$$k \circ f = L \cdot k, \tag{1.31}$$

gdzie $k : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$. Po podstawieniu $k = id + l = (x + l_1, y + l_2)$ i pewnych przekształceniach otrzymujemy następujący analog układu (1.30)

$$\begin{array}{rcl} l_1(x,y) & = & Al_1 \circ f^{-1}(x,y) - \varphi \circ f^{-1}(x,y), \\ l_2(x,y) & = & B^{-1}l_2(x,y) + B^{-1}\psi(x,y). \end{array}$$

Tutaj też mamy do czynienia z równaniem punktu stałego dla odpowiedniego przekształcenia $\mathcal{S} : \mathcal{X} \longmapsto \mathcal{X}$, które jest zwężające. Zatem również układ (1.31) ma rozwiązanie.

Odnotujmy następującą własność rozwiązań równań (1.27) i (1.31), które są konsekwencją faktu, że w tezie twierdzenia Banacha o punkcie stałym przekształcenia zwężającego w przestrzeni Banacha tenże punkt stały zależy w sposób ciągły od parametrów (o ile samo przekształcenie zależy od parametrów w sposób ciągły):

Rozwiązania $h(x,y)$ i $k(x,y)$ równań (1.27) i (1.31) są jednoznaczne i zależą w sposób ciągły od danych występujących w tych równaniach (czyli od $L = A \oplus B$ i $\tilde{f} = (\varphi, \psi)$). Ponadto w równaniu (1.27) możemy zastąpić liniowe przekształcenie $L = f'(0)$ dowolnym przekształceniem g takim, że $g'(0) = L$.

Wyżej wspomniana jednoznaczność pozwoli nam na udowodnienie, że przekształcenia h i k są homeomorfizmami; dokładniej, że $h \circ k = k \circ h = id$. Rzeczywiście, przekształcenie $m = k \circ h$ spełnia warunek $m \circ L = L \circ m$, czyli równanie (1.27) dla $f = L$. Ponieważ również przekształcenie tożsamościowe też spełnia to równanie, to z jednoznaczności mamy $m = id$. Analogicznie, przekształcenia $n = h \circ k$ i id spełniają równanie $f \circ n = n \circ f$.

Przejdźmy teraz do dowodu drugiej części twierdzenia, czyli isnienia homeomorfizmu h, który spełnia jendocześnie wszystkie równania typu (1.27) dla rodziny przekształceń $f_t = g_v^t$, $v = Az + \ldots$. Dla $t \neq 0$ przekształcenia f_t mają hiperboliczny punkt stały $z = 0$. Zatem z udowodnionej już pierwszej części twierdzenia mamy istnienie rodziny homeomorfizmów h_t, $t \neq 0$, takich, że

$$h_t \circ f_t = f_t \circ h_t.$$

Trzeba jeszcze tylko pokazać, że h_t nie zależą od t, który tutaj traktujemy jako parametr. Przynajmniej wiemy, że h_t zależy od t w sposób ciągły.

Zauważmy teraz następującą tożsamość

$$h_{t/2} \circ f_t \circ h_{t/2}^{-1} = \left(h_{t/2} \circ f_{t/2} \circ h_{t/2}^{-1}\right) \circ \left(h_{t/2} \circ f_{t/2} \circ h_{t/2}^{-1}\right) = e^{At/2} \circ e^{At/2} = e^{At}$$

(tutaj wykorzystaliśmy grupową własność potoku fazowego). Oznacza ona, że $h_{t/2} = h_t$ (jednoznaczność). Analogicznie dowodzi się, że $h_{t/k} = h_t$ dla naturalnego k i stąd, że

$$h_{kt/l} = h_t, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

(Zadanie 1.41). Widać, że dla wymiernego zbioru parametrów t przekształcenia h_t są takie same. Z ciągłej zależności h_t of parametru (patrz wyżej) wynika, że $h_t \equiv \text{const}$ jako funkcja od $t > 0$. Teraz obserwacja, że jeśli h spełnia równanie (1.28) dla danego czasu $t > 0$, to spełnia to równanie też dla czasu $-t$ (Zadanie 1.42) kończy dowód.

Na koniec jeszcze jedna uwaga. Ponieważ $\{g_v^t\}$ jest tylko lokalnym potokiem fazowym (dla pola wektorowego $v(z)$ określonego w otoczeniu $z = 0$) to trzeba zatroszczyć się o dziedziny przekształceń potoku, i tym samym, o dziedziny przkształceń h_t. Ale tu nie ma problemu, bo dziedzina przekształcenia $g_v^{t/k}$ zwiększa się ze wzrostem $k \in \mathbb{N}$. Wystarczy w powyższym dowodzie ograniczyć się do czasów takich , że $|t| < 1$. □

Własność (1.27) oznacza, że dynamika (tj. kaskada) generowana przez dyfeomorfizm f jest taka sama, z jakościowego punktu widzenia jak dynamika generowana przez dyfeomorfizm liniowy $L(z) = f'(0)z$. Rzeczywiście, jeśli $\{\ldots, f^{-1}(z_0), z_0, f(z_0), f^2(z_0), \ldots\}$ jest orbitą punktu względem dyfeomorfizmu f i $y_0 = h(x_0)$, to $\{\ldots, L^{-1}(y_0), y_0, L(y_0), \ldots\}$ jest orbitą punktu y_0 względem liniowego dyfeomorfizmu L.

Następująca definicja wydaje się naturalna.

Definicja 1.24. Jeśli dla dyfeomorfizmów $f : M \longmapsto M$ i $g : N \longmapsto N$ istnieje homeomorfizm $h : M \longmapsto N$ taki, że

$$g = h \circ f \circ h^{-1},$$

to mówimy, że dyfeomorfizmy f i g są **topologicznie sprzężone** (przy pomocy h). Jeśli h jest klasy C^r, to mówimy o sprzężeniu klasy C^r. Podobnie, pola wektorowe $v(x)$ i $w(x)$ są topologicznie (lub klasy C^r) **sprzężone**, jeśli ich potoki fazowe są sprzężone przy pomocy homeomorfizmu (lub odpowiednio dyfeomorfizmu klasy C^r).

Jeśli dyfeomorfizm f ma własność, że dowolny dyfeomorfizm g, który jest bliski f (w pewnej klasie, której tutaj nie chcemy uściślać) jest topologicznie sprzężony z f, to mówimy, że f jest **strukturalnie stabilny**. Podobnie, pole wektorowe $v(x)$ jest **strukturalnie stabilne** jeśli bliskie pola są topologicznie sprzężone z nim.

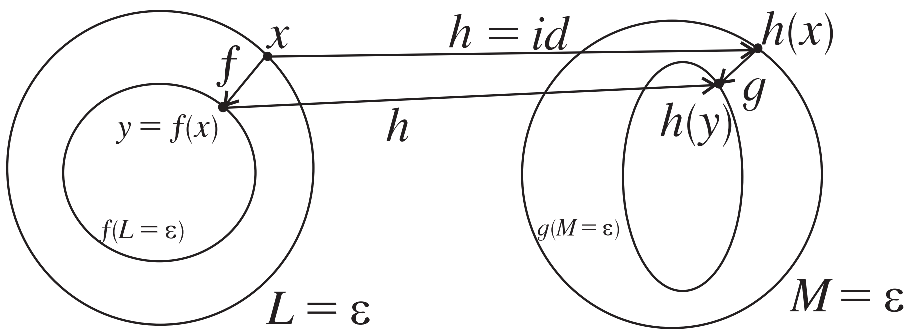
Twierdzenie Grobmana–Hartmana mówi, że dyfeomorfizm (odpowiednio pole wektorowe) w otoczeniu hiperbolicznego punktu stałego (odpowiednio hiperbolicznego punktu równowagi) jest topologicznie sprzężone z częścią liniową dyfeomorfizmu (odpowiednio pola). Możemy udowodnić więcej.

Stwierdzenie 1.25. *Dyfeomorfizm (odpowiednio pole wektorowe) w otoczeniu hiperbolicznego punktu stałego (odpowiednio hiperbolicznego punktu równowagi) jest strukturalnie stabilny.*

Dowód. Użyjemy następującej bezpośredniej konstrukcji homeomorfizmu h, który sprzęga dwa dyfeomorfizmy f i g w przypadku asymptotycznie stabilnym, tzn. takim, że $f'(0)$ i $g'(0)$ mają wszystkie wartości własne o module < 1. Można założyć, że $E^s = \mathbb{R}^n$ i $z = x$ w dowodzie twierdzenia Grobmana–Hartmana. Wtedy istnieje 'funkcja Lapunowa', $L(x)$ tzn. spełniająca warunek (i) Definicji 1.5 i następujący analog warunku (ii):

$$L(f(x)) < L(x) \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

Jej konstrukcja jest zpełnie analogiczna jak w dowodzie Twierdzenia Lapunowa; możemy założyć, że $L(x) = |x|^2$ w odpowiednim (liniowym) układzie współrzędnych. Niech $M(x) = |x|^2$ będzie odpowiednią funkcją Lapunowa dla dyfeomorfizmu g (też w odpowiednim układzie współrzędnych). Mamy dwa egzemplarze $\mathbb{R}^n$, na których działają odpowiednio dyfeomorfizmy f i g.



Rysunek 1.8. Konstrukcja sprzężenia.

Wybierzmy małe $\varepsilon > 0$ i rozważmy hiperpowierzchnie (dyfeomorficzne ze sferami) $\{L(x) = \varepsilon\}$ i $\{M(x) = \varepsilon\}$. Zdefiniujmy homeomorfizm h pomiędzy tymi hiperpowierzchniami jako $h|_{L=\varepsilon} = id : \{L = \varepsilon\} \longmapsto \{M = \varepsilon\}$ (patrz Rysunek 1.8). Warunek

$$h \circ f^{-1} = g^{-1} \circ h \tag{1.32}$$

pozwala 'dookreślić' przekształcenie h pomiędzy hiperpowierzchniami $f(\{L=\varepsilon\})$ i $g(\{M=\varepsilon\})$, jak na Rysunku 1.8. Przedłużmy h w sposób ciągły i wzajemnie jednoznaczny do obszaru pomiędzy hiperpowierzchniami $\{L=\varepsilon\}$ i $f(\{L=\varepsilon\})$. Stosując wielokrotnie równanie (1.32) przedłużamy h do całego obszaru $\{0<L\leqslant\varepsilon\}$. Kładąc $h(0)=0$ dostajemy poszukiwany homeomorfizm.

Zupełnie analogiczna konstrukcja pracuje w przypadku dyfeomorfizmów rozszerzających, tzn. gdy macierze $f'(0)$ i $g'(0)$ mają wartości własne o module >1.

Rozważmy teraz dwa dyfeomorfizmy liniowe f_0 i g_0 definiowane przy pomocy hiperbolicznych macierzy $A=A_s\oplus A_u$ i $B=B_s\oplus B_u$ w odpowiednich (i takich samych) rozkładach $\mathbb{R}^n=E^s\oplus E^u$. Z powyższych rozważań dostajemy homeomorfizmy h_s i h_u, które sprzęgają A_sx z B_sx i A_uy z B_uy odpowiednio. Teraz homeomorfizm

$$h=h_s\oplus h_u$$

sprzęga f_0 z g_0.

Rozważmy teraz dyfeomorfizm f w otoczeniu hiperbolicznego punktu stałego $z=0$ i jego małe zaburzenie g z tym samym punktem stałym. Ponieważ macierz $B=g'(0)$ jest bliska macierzy $A=f'(0)$ to też jest hiperboliczna z takimi samymi wymiarami podprzestrzeni stabilnej i niestabilnej; czyli możemy zastosować powyższą konstrukcję homeomorfizmu sprzęgającego części liniowe tych dyfeomorfizmów. Widzimy, że f jest sprzężony z $f_0=f'(0)z$, f_0 jest sprzężony z $g_0=g'(0)z$ i g_0 jest sprzęzony z g; składając te trzy homeomorfizmy dostaje się sprzężenie f z g.

Przypadek Stwierdzenia 1.25 dla pól wektorowych pozostawiamy słucha- czom jako ćwiczenie (Zadanie 1.43). □

Uwaga 1.26. Można zapytać, czy nie można wzmocnić tezy twierdzenia Grobmana-Hartmana, tzn. czy homeomorfizm h może być klasy C^1. Okazuje się, że nie. Na przykład, przekształcenie $(x,y,z)\longmapsto\left(\frac{1}{2}x,4y,2z+xy\right)$ nie da się zlinearyzować przy pomocy dyfeomorfizmu klasy C^1 (patrz [13], Problem 8.1). Ten problem wiąże się z rezonansami pomiędzy wartościami własnymi (patrz Twierdzenie Poincarégo–Dulaca w Rozdziale 3.3).

ZADANIA

Zadanie 1.27. Uzupełnić dowód Lematu 1.7, tzn. w przypadku nierzeczywistych wartości własnych.

Zadanie 1.28. Udowodnić wzory (1.11)–(1.15).

Zadanie 1.29. Zbadać stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) dla punktu osobliwego $x=d/c$, $y=a/b$, układu Lotki–Volterry

$$\dot{x}=x(a-by),\quad \dot{y}=y(cx-d),\quad abcd>0, \tag{1.33}$$

który opisuje dynamikę dwóch konkurujących populacji (drapieżników i ofiar).

Wskazówka: Stwierdzenie 2.11 poniżej.

Zadanie 1.30. Korzystając z Definicji 1.1 sprawdzić, czy położenie równowagi $x(0)=0$ dla równania $\dot{x}=4x-t^2x$ jest stabilne w sensie Lapunowa, t.j. z $t_0=0$.

Zadanie 1.31. Zbadać stabilność położenia równowagi $x=y=0$ dla układu $\dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x$, $\dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y$.

Zadanie 1.32. Zbadać stabilność zerowego rozwiązania dla układu $\dot{x}=e^x-e^{3z}$, $\dot{y}=4z-3\sin(x+y)$, $\dot{z}=\ln(1+z-3x)$.

Zadanie 1.33. Dla jakich wartości parametru a rozwiązanie zerowe układu $\dot{x} = ax + y + x^2$, $\dot{y} = x + ay + y^2$ jest asymptotycznie stabilne?

Wskazówka: gdy$a = -1$ prosta $y = x$ jest niezmiennicza.

Zadanie 1.34. Dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązanie zerowe układu $\dot{x} = y + \sin x$, $\dot{y} = ax + by$ jest asymptotycznie stabilne?

Wskazówka: dla $a = b \leqslant -1$ wprowadzając $z = \dot{x}$ sprowadzić układ do postaci $\dot{x} = H_z'$, $\dot{z} = -H_x' - (a + \cos x)z$, $H = \frac{1}{2}z^2 - a(\frac{1}{2}x^2 + 1 - \cos x)$, i znaleźć funkcję Lapunowa.

Zadanie 1.35. Dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązanie $x(t) \equiv 0$ równania $\dddot{x} + 3\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ jest asymptotycznie stabilne?

Zadanie 1.36. Pokazać, że dyfeomorfizm g^t (lokalnego) potoku fazowego generowanego przez pole wektorowe $\dot{x} = Ax + O(|x|^2)$ ma część liniową w punkcie stałym $x = 0$ postaci $B = e^{At}$. Wywnioskować stąd Lemat 1.21.

Zadanie 1.37. Udowodnić oszacowania (1.24) (dla odpowiedniego układu współrzędnych i euklidesowej normy w $\mathbb{R}^n$).

Zadanie 1.38. Podać jawny wzór na funkcję χ z dowodu Twierdzenia 1.22.

Zadanie 1.39. Udowodnić nierówność dla $\|\mathcal{T}(F_1) - \mathcal{T}(F_2)\|$ z dowodu Twierdzenia 1.22.

Zadanie 1.40. Podać jakiś wzór na d, w zależności od a, b, c, w nierówności $\|(\mathcal{T}(F))'\| < d$.

Zadanie 1.41. Udowodnić, że $h_{\frac{k}{l}t} = h_t$ dla $k, l \in \mathbb{N}$ i $t \neq 0$.

Zadanie 1.42. Udowodnić, że jeśli h spełnia własność (1.28) dla danego $t > 0$ to też spełnia tę własność dla $t < 0$.

Zadanie 1.43. Uzupełnić dowód Stwierdzenia 1.25.

2. Portrety fazowe autonomicznych pól wektorowych

Definicja 2.1. Portret fazowy autonomicznego pola wektorowego $v(x)$ na rozmaitości M to rozbicie przestrzeni fazowej M na krzywe fazowe tego pola.

Krzywe fazowe są trzech typów:

(i) punkty równowagi, czyli zdegenerowane krzywe odpowiadające stałym rozwiązaniom;

(ii) włożone odcinki (ograniczone lub nieograniczone), czyli obrazy $\varphi(I)$ rozwiązań $\varphi : I \longmapsto M$, które są włożeniami;

(iii) **zamknięte krzywe fazowe** (włożone okręgi), odpowiadające **okresowym rozwiązaniom** φ :

$$\varphi(t+T) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

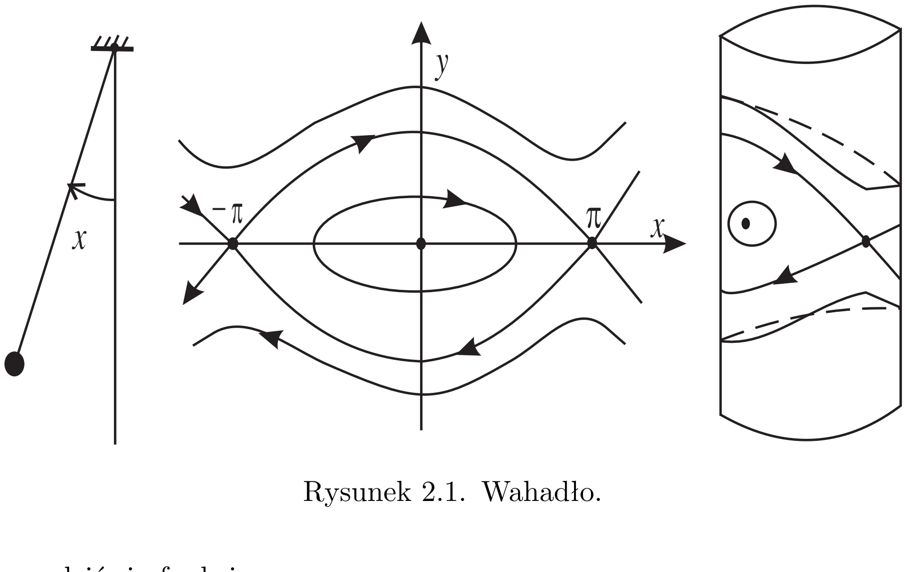
gdzie $T > 0$ jest **okresem** rozwiązania (zakładamy, że jest to minimalny okres spełniający (2.1)).

W całym tym rozdziale rozważamy tylko autonomiczne pola wektorowe; dlatego też będziemy opuszczali przymiotnik 'autonomiczne'.

Przykład 2.2 (Wahadło Matematyczne)**.** Jest to następujący układ

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x$$

na przestrzeni fazowej $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (walec).



Rysunek 2.1. Wahadło.

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$H = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \tag{2.2}$$

jest całką pierwszą tego układu, tj. $\dot{H} \equiv 0$. Odnotujmy następujące własności funkcji H :

–punkt $(0,0)$ jest punktem absolutnego minimum i $H(0,0) = -1$;

–punkt $(\pi, 0)$ jest punktem siodłowym i $H(\pi, 0) = 1$;

–$H(x, y) \to \infty$ przy $|y| \to \infty$.

Łatwo też sprawdzić, że oprócz wskazanych wyżej punktów równowagi mamy dwie krzywe fazowe typu (ii); są to separatrysy siodła $(\pi, 0)$ leżące w poziomicy $\{H = 1\}$. Pozostałe krzywe fazowe są zamknięte i można je podzielić na dwie grupy: (a) wokół punktu równowagi $(0, 0)$ (odpowiadające wahaniom o ograniczonej amplitudzie) i (b) obiegające walec (one odpowiadają kręceniu się wahadła wokół punktu zaczepienia).

Możemy policzyć okresy powyższych rozwiązań okresowych leżących na poziomicy $H = h$ całki pierwszej. Mamy $dt = dx/y$, gdzie y wyznaczamy ze wzoru (2.2): $y = \pm\sqrt{2(h + \cos x)}$. Zatem w przypadku (a) mamy

$$T = 2\int_{x_1}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2(h + \cos x)}},$$

gdzie $x_{1,2}$ to dwa zera funkcji $h + \cos x$. Tutaj całka od x_1 do x_2 daje czas pozostawania trajektorii w obszarze $y > 0$, ale, z uwagi na symetrię, jest to dokładnie połowa okresu. W przypadku (b) mamy

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2(h + \cos x)}}.$$

Niestety, powyższe całki nie dają się policzyć w terminach elementarnych funkcji. Rzeczywiście, po podstawieniu $u = \cos x$ (z $dx = du/\sin x = -du/\sqrt{1 - u^2}$) dostajemy

$$T = 4\int_{-h}^{1} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(h + u)}}.$$

Całka po prawej stronie ostatniej równości to tzw. *całka eliptyczna* definiująca pewną funkcję eliptyczną[1] (Zadanie 2.44).

Zauważmy jeszcze, że zamknięte krzywe fazowe w tym przykładzie są nieizolowane, występują w całych rodzinach.

2.1. Rozwiązania okresowe

Zamknięte krzywe fazowe są też nazywane trajektoriami okresowymi lub orbitami okresowymi. W Przykładzie 2.2 występują one w całych rodzinach, ale istnieją też trajektorie okresowe izolowane.

Definicja 2.3. Cyklem granicznym autonomicznego pola wektorowego nazywamy izolowaną zamkniętą krzywą fazową tego pola.

Punkt równowagi takiego pola, który jest otoczony nieizolowanymi zamkniętymi krzywymi fazowymi, nazywa się **centrum**.

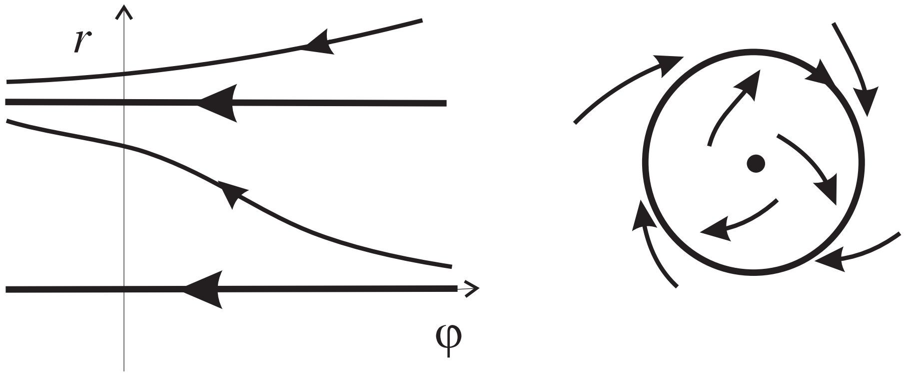
Przykład 2.4. Rozważmy układ

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) + y, \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Wygodnie jest badać ten układ w biegunowym układzie współrzędnych (r, φ)

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\varphi} = -1$$

[1] Całki i funkcje eliptyczne pojawiają się bardzo często w równaniach różniczkowych mechaniki klasycznej (patrz [4].



Rysunek 2.2. Cykl graniczny.

(Zadanie 2.46). Widać, że rozwiązania startujące z $r = r_0 \in (0, 1)$ rosną z czasem do $r = 1$ a rozwiązania startujące z $r_0 > 1$ maleją do $r = 1$. Rozwiązanie startujące z $r_0 = 1$ jest stałe i odpowiada izolowanemu okresowemu rozwiązaniu na płaszczyźnie XY (patrz Rysunek 2.2).

Definicja 2.5. Niech γ będzie zamkniętą krzywą fazową pewnego pola wektorowego w M. Weźmy kiełek S (od 'section' czyli **cięcie**) hiperpłaszczyzny transwersalnej (tj. pod niezerowym kątem) do γ w pewnym punkcie $p_0 \in \gamma$. Z punktów $x_0 \in S$ startuje rozwiązanie $\varphi(t; x_0)$, które po pewnym czasie $T(x_0)$ znowu trafia w S, $\varphi(T(x_0); x_0) \in S$. Powstające w ten sposób odwzorowanie $f : S \longmapsto S$ (dyfeomorfizm z odpowiednią dziedziną):

$$x_0 \longmapsto f(x_0) = \varphi(T(x_0); x_0)$$

nazywa się **przekształceniem powrotu Poincarégo** (patrz Rysunek 2.3).

W tej definicji występuje znaczna dowolność związana z wyborem cięcia S. Okazuje się, że to nie stanowi wielkiego problemu bo, jeśli $f' : S' \longmapsto S'$ jest przekształceniem powrotu związanym z innym cięciem S', to zachodzi następujący

Lemat 2.6. *Dyfeomorfizmy f i f' są sprzężone przy pomocy pewnego dyfeomorfizmu tej samej klasy gładkości co f i f'.*

Dowód. Niech $f_1 : S \longmapsto S'$ i $f_2 : S' \longmapsto S$ będą naturalnymi przekształceniami 'wzdłuż rozwiązań. Mamy $f = f_2 \circ f_1$ i $f' = f_1 \circ f_2$. □

Cięcie (S, p_0) możemy utożsamić z $\left(\mathbb{R}^{n-1}, 0\right)$, gdzie $n = \dim M$, i przekształcenie powrotu definiuje nam kiełek dyfeomorfizmu $f : \left(\mathbb{R}^{n-1}, 0\right) \longmapsto \left(\mathbb{R}^{n-1}, 0\right)$ (bo $f(p_0) = p_0$) postaci

$$f(z) = Az + \dots$$

(Zadanie 2.47).

Definicja 2.7. Zamknięta krzywa fazowa γ jest **hiperboliczna** jeśli punkt stały $z = 0$ powyższgo dyfeomorfizmu jest hiperboliczny, tzn. $|\lambda_j| \neq 1$ dla wartości własnych macierzy A.

Następujące dwa stwierdzenia są prostymi analogami Twierdzenia Lapunowa i Twierdzenia Hadamarda–Perrona.

Rysunek 2.3. Przekształcenie powrotu.

Stwierdzenie 2.8. *Jeśli* $|\lambda_j| < 1$ *dla wszystkich wartości własnych to krzywa* γ *jest asymptotycznie stabilna, tzn. dowolne rozwiązanie* $\varphi(t)$ *startujące dostatecznie blisko* γ *ma własność, że* $\operatorname{dist}(\varphi(t)\,,\gamma) \to 0$ *przy* $t \to \infty$.

Stwierdzenie 2.9. *Jeśli krzywa* γ *jest hiperboliczna, to istnieją podrozmaitości* W^s *(stabilna) i* W^u *(niestabilna) takie, że* $\operatorname{dist}\big(g^t(x), \gamma\big) \to 0$ *dla* $x \in W^s$ *i* $t \to \infty$ *oraz* $\operatorname{dist}\big(g^t(y), \gamma\big) \to 0$ *dla* $y \in W^u$ *i* $t \to -\infty$.

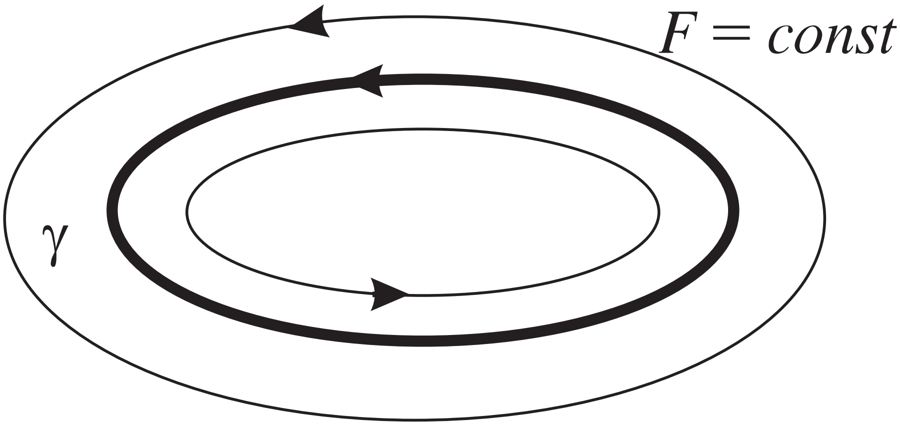
Bardziej interesujące chyba jest następujące

Stwierdzenie 2.10. *Gdy* $n = \dim M = 2$ *i zarówno sama rozmaitość jak i pole wektorowe*

$v(x)$ są analityczne i γ jest zamkniętą krzywą fazową pola v, to albo γ jest cyklem granicznym albo istnieje (jednoznaczna) całka pierwsza w otoczeniu krzywej γ.

Dowód. W istocie tutaj trzeba udowodnić, że rozwiązania okresowe pola v nie mogą się akumulować na krzywej γ. To jest równoważne własności, że przekształcenie powrotu Poincarégo $f : (\mathbb{R}, 0) \longmapsto (\mathbb{R}, 0)$ ma albo izolowany punkt stały w $z = 0$ albo $f(z) \equiv z$. Ale to wynika analityczności funkcji $f(z) - z$ (przy założeniu, że cięcie S jest analityczne) i standardowych własności funkcji analitycznych.

W przypadku $f = id$ wszystkie krzywe fazowe w otoczeniu γ są zamknięte i są one poziomicami pewnej całki pierwszej F dla pola wektorowego (Rysunek 2.4). □



Rysunek 2.4. Poziomice całki pierwszej.

To stwierdzenie ma analog dla punktu osobliwego $x = y = 0$ analitycznego pola wektorowego w przypadku, gdy część liniowa pola ma nierzeczywiste wartości własne, tj.

$$\dot{x} = \alpha x - \omega y + \ldots, \quad \dot{y} = \omega x + \alpha y + \ldots, \quad \omega \neq 0 \tag{2.3}$$

Stwierdzenie 2.11. *W przypadku analitycznego pola typu (2.3) na płaszczyźnie zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo punkt $(0, 0)$ jest ogniskiem (stabilnym lub niestabilnym) albo istnieje (jednoznaczna) całka pierwsza w otoczeniu tego punktu (czyli punkt $(0, 0)$ jest centrum).*

Dowód. Trzeba przejść do biegunowego układu współrzędnych (r, φ). Dostaniemy wtedy

$$\dot{r} = \alpha r + r^2 A(r, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega + rB(r, \varphi), \tag{2.4}$$

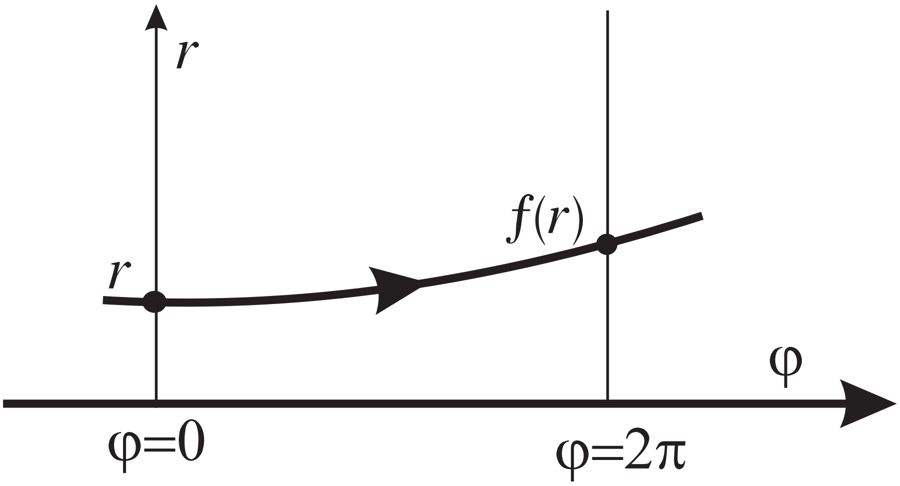
gdzie $A(r, \varphi)$ i $B(r, \varphi)$ rozwijają się w zbieżny szeregi potęgowe od r ze współczynnikami będącymi wielomianami trygonometrycznymi od φ (Zadanie 2.48). Krzywe fazowe tego układu spełniają równanie różniczkowe

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\frac{\alpha + rA(r, \varphi)}{\omega + rB(r, \varphi)}. \tag{2.5}$$

Jego rozwiązania $r = \psi(\varphi; r_0)$ takie, że $\psi(0; r_0) = r_0$, zadają przekształcenie

$$f : (\mathbb{R}_+, 0) \longmapsto (\mathbb{R}_+, 0), \quad r_0 \longmapsto \psi(2\pi; r_0),$$

które jest analogiem przekształcenia powrotu Poincarégo. W istocie jest to przekształcenie powrotu dla pola (2.3) z półosi $S_+ = \{(x, 0) : x \geqslant 0\} \simeq \mathbb{R}_+$ w siebie (patrz Rysunek 2.5). Ze zbieżności szeregów reprezentujących A i B wynika, że przekształcenie f jest analityczne.



Rysunek 2.5. Przekształcenie powrotu.

Punkty stałe dyfeomorfizmu f odpowiadają zamkniętym krzywym fazowym pola (2.3). Tak jak i w dowodzie poprzedniego stwierdzenia, albo $r = 0$ jest izolowanym punktem stałym dla f albo $f = id$ i wtedy wszystkie krzywe fazowe w otoczeniu $x = y = 0$ są zamknięte. □

Przekształcenie powrotu Poincarégo f rozwija się w szereg

$$f(r) = a_1 r + a_2 r^2 + \dots \tag{2.6}$$

Łatwo sprawdzić, że $a_1 = \exp(2\pi\alpha/\omega)$ (Zadanie 2.49).

Lemat 2.12. *Jeśli* $a_1 = 1$ *to* $a_2 = 0$ *i, ogólniej, jeśli* $a_1 - 1 = a_2 = \dots = a_{2k-1} = 0$ *to* $a_{2k} = 0$.

Ten lemat jest konsekwencją Twierdzenia Poincarégo–Dulaca (dowodzonego w Rozdziale 3.3.1) i dlatego go tutaj nie dowodzimy. Słuchacze mogą dowodzić go wykorzystując pewne własności symetrii (względem zamiany $\varphi \longmapsto \varphi + \pi$) funkcji A i B w (2.4).

Stąd wynika, że jeśli $a_1 - 1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k-1} = 0$ i $a_{2k+1} > 0$ (odpowiednio < 0) to punkt $x = y = 0$ jest ogniskiem stabilnym (odpowiednio niestabilnym).

Definicja 2.13. Współczynniki

$$c_1 = \frac{\omega}{2\pi}(a_1 - 1), \quad c_3 = \frac{\omega}{2\pi}a_3, \quad c_5 = \frac{\omega}{2\pi}a_5, \dots$$

nazywają się **liczbami ogniskowymi Lapunowa–Poincarégo**.

Uwaga 2.14. Liczby ogniskowe są ważnie przy badaniu tzw. *małych cykli granicznych*, tzn. które rodzą się z ogniska w przypadku, gdy pole wektorowe zależy od pewnych parametrów. Jednak są one trudne do policzenia. Poniżej podaję pewien sposób ich wyliczenia; ten sposób w istocie był wykorzystywany przez Lapunowa.

Zamiast współrzędnych rzeczywistych będziemy używać współrzędnych zespolonych $z = x + iy$ i $\bar{z} = x - iy$, $i = \sqrt{-1}$, tak, że pole wektorowe zapisuje się w postaci jednego równania zespolonego

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2 + Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3 + \dots, \tag{2.7}$$

gdzie $A, B, C, D, E, F, G, \dots$ są zespolonymi stałymi. Zauważmy, że część liniowa jest tu znacznie uproszczona; w szczególności, $c_1 = 0$.

Będziemy poszukiwać całki pierwszej dla równania (2.7) w postaci

$$H(z,\bar{z}) = z\bar{z} + a_{30}z^3 + a_{21}z^2\bar{z} + a_{12}z\bar{z}^2 + a_{03}\bar{z}^3 + \ldots, \tag{2.8}$$

gdzie warunek rzeczywistości H prowadzi do warunków $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$. Oczywiście, na ogół nie będzie całki pierwszej i przeszkody do tego są związane z liczbami ogniskowymi Lapunowa–Poincarégo.

Oczekiwana własność $\dot{H} \equiv 0$ prowadzi do następującego układu równań algebraicznych

$$(3ia_{30} + \bar{C})z^3 + (ia_{21} + A + \bar{B})z^2\bar{z} \equiv 0$$

dla współczynników wielomianu H przy wyrazach sześciennych. Znajdujemy $a_{30} = -i\bar{C}/3$, $a_{21} = -i(A+\bar{B})$ i $H = z\bar{z} + i\left(C\bar{z}^3 - \bar{C}z^3\right)/3 + i\left(\left(\bar{A}+B\right)z\bar{z}^2 - \left(A+\bar{B}\right)z^2\bar{z}\right) + \ldots$ (tu nie ma przeszkód). Ale dla wyrazu przy $z^2\bar{z}^2$, po zróżniczkowaniu funkcji (2.8), dostajemy

$$0 \cdot ia_{22} + E + \bar{E} + i(\bar{A}\bar{B} - AB) = 0.$$

Widzimy, że aby $\dot{H} = 0$ (modulo wyrazy rzędu piątego), musi zachodzić

$$\mathrm{Im}(AB) + \mathrm{Re}E = 0;$$

spodziewamy się, że liczba ogniskowa c_3 jest proporcjonalna do $\mathrm{Im}(AB) + \mathrm{Re}E$.

Aby znaleźć stałą proporcjonalności, zauważmy, że $H = r^2 + O(r^3)$, $\dot{H} = 2\left(\mathrm{Im}AB + \mathrm{Re}E\right)r^4 + O(r^5)$ oraz $\dot{\varphi} = 1 + O(r)$. Zatem

$$f(r) - r = \Delta r \approx \frac{dr}{dH}\Delta H \approx \frac{1}{2r}\int_0^{2\pi} \dot{H}d\varphi \approx \frac{2(\mathrm{Im}AB + \mathrm{Re}E)r^4}{2r} \cdot 2\pi.$$

To daje

$$c_3 = \mathrm{Im}(AB) + \mathrm{Re}E \tag{2.9}$$

(Zadanie 2.50).

2.2. Kryterium Poincarégo–Bendixsona

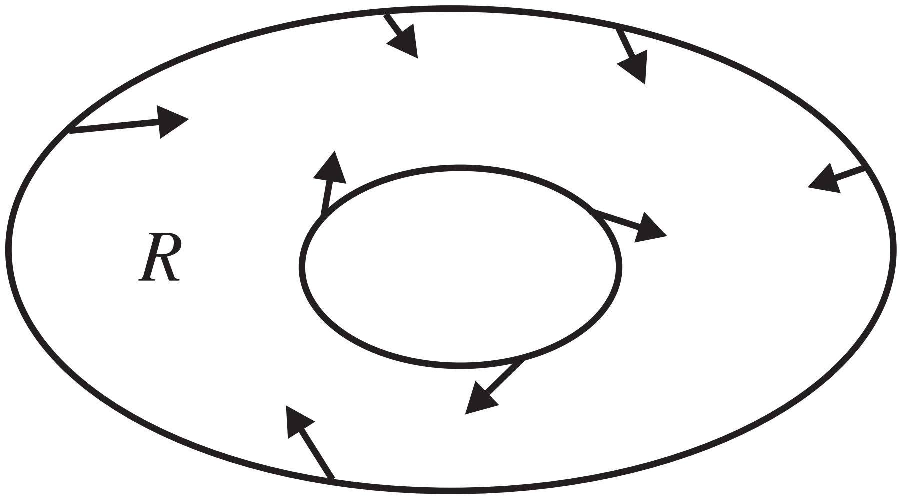
Problem badania cykli granicznych okazuje się bardzo trudny. Swiadczy o tym następujący problem nierozwiązany do dziś.

Hipoteza 2.15 (Szesnasty Problem Hilberta)**.** [2] Podać oszacowanie w terminach stopni wielomianów P i Q dla liczby cykli granicznych wielomianowego pola wektorowego postaci

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y). \tag{2.10}$$

Uwaga 2.16. Wiadomo, że liczba cykli granicznych dla pojedynczego pola postaci (2.10) jest skończona (Yu. Ilyashenko i J. Ecalle), ale nie wiadomo czy istnieje jej ograniczenie w terminach $n = \max(\deg P, \deg Q)$. Są przykłady pól kwadratowych z 4 cyklami granicznymi (Zadanie 2.51).

[2] W istocie jest to druga część 16-go Problemu Hilberta. Pierwsza część dotyczy liczby i położenia składowych spójnych (tzw. owali) dla rzeczywistych krzywych algebraicznych postaci $F(x,y) = 0$. Tutaj problem jest w znacznym stopniu rozwiązany (z odpowiednimi uogólnieniami).



Rysunek 2.6. Pierścień pochłaniający.

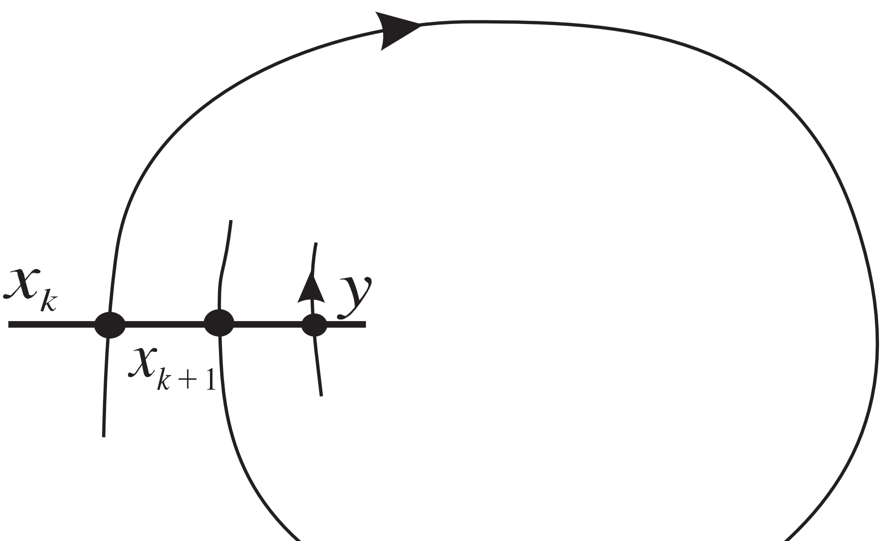
Dlatego ważne są konkretne metody pokazujące istnienie cykli granicznych lub ich brak. Prezentowane poniżej kryterium Poincarégo–Bendixsona gwarantuje nam istnienie przynajmniej jednego cyklu granicznego pod warunkiem, że pole wektorowe jest analityczne (patrz Stwierdzenie 2.10).

Załóżmy, że mamy pole wektorowe $v(x)$ na płaszczyźnie oraz obszar $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ typu pierścienia (jak na Rysunku 2.6) o następujących własnościach:

(i) pole $v(x)$ nie ma punktów równowagi w $\mathcal{R}$,

(ii) pole $v(x)$ na brzegu $\partial\mathcal{R}$ pierścienia $\mathcal{R}$ jest skierowane do wnętrza pierścienia.

Twierdzenie 2.17 (Poincaré–Bendixson)**.** *Przy tych założeniach wewnątrz obszaru $\mathcal{R}$ istnieje co najmniej jedna zamknięta krzywa fazowa pola v.*



Rysunek 2.7. Kolejne powroty.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się następujące ważne pojęcie w Układach Dynamicznych.

Definicja 2.18. Zbiorem $\omega-$granicznym punktu x, oznaczanym przez $\omega(x)$, względem potoku fazowego g^t (lub kaskady $\{f^n\}$) nazywamy zbiór punktów skupienia dodatniej orbity tego punktu, czyli

$$\omega(x) = \left\{y : \exists t_k \to +\infty \text{ taki że } g^{t_n}(x) \to y\right\}$$

(lub $\omega(x) = \{y : \exists n_k \to \infty \text{ taki że } f^{n_k}(x) \to y\}$. (Zadanie 2.52).

W przypadku punktów skupienia ujemnej orbity punktu x (tzn. gdy $t_k \to -\infty$ lub $n_k \to -\infty$) mówi się o **zbiorze $\alpha-$granicznym punktu** x.

Oczywiście przyciągający cykl graniczny jest zbiorem $\omega-$granicznym dla dowolnego punktu leżącego blisko tego cyklu. Istnieje wersja Twierdzenia Poincarégo–Bendixsona używająca pojęcia zbioru $\omega-$granicznego dla potoku fazowego generowanego przez pole wektorowego v.

Twierdzenie 2.19. *Jeśli dla pola wektorowego v w $\mathbb{R}^2$ i punktu x zbiór $\omega(x)$ jest:*

(a) ograniczony i

(b) nie zawiera punktów równowagi pola,

to $\omega(x)$ jest zamkniętą krzywą fazową tego pola.

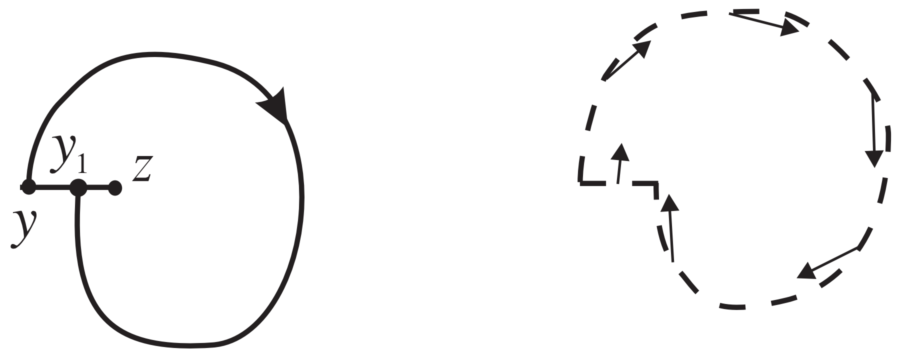
Dowód. Niech $y \in \omega(x)$. Pokażemy, że trajektoria pola przechodząca przez y jest zamknięta.

W tym celu wybierzmy lokalne cięcie (odcinek) S prostopadłe do $v(y)$ w y. Rozważmy punkty przecięcia $x_k = g_v^{t_k}(x)$, $t_{k+1} > t_k$, orbity $\left\{g_v^t(x)\right\}_{t>0}$ z cięciem S. Z założenia takich punktów jest nieskończnie wiele i możemy założyć, że ciąg $\{x_k\}$ jest monotoniczny na S (tu korzystamy z faktu, że jesteśmy na płaszczyźnie) (Zadanie 2.53). Zatem mamy sytuację jak na Rysunku 2.7. Zauważmy jeszcze, że cała orbita w przód $\Gamma(y) = \left\{g^t(y) : t \geqslant 0\right\}$ punktu y też leży w zbiorze $\omega(x)$; zatem mamy

$$\omega(y) \subset \omega(x).$$

Oczywiście $\omega(y)$ jest zbiorem domkniętym, ograniczonym i bez punktów równowagi pola v.

Przypuśćmy, że krzywa $\Gamma(y)$ nie jest zamkniętą krzywą fazową. Wtedy $\omega(y) \neq \Gamma(y)$ i istnieje punkt skupienia $z \in \omega(y) \setminus \Gamma(y)$ trajektorii $\Gamma(y)$. Znowu możemy wziąć cięcie S_1 prostopadłe do $v(z)$ w z i (ewentualnie zamieniając y którymś z punktów y_k przecięcia $\Gamma(y)$ z S_1) uzyskamy sytuację jak na Rysunku 2.8.



Rysunek 2.8. Dowód Twierdzenia 2.19.

Teraz deformując nieznacznie kawałek trajektorii $\Gamma(y)$ (od y do y_1) tak, aby nowa krzywa była ustawiona do pola v pod kątem, dostaje się obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do którego pole 'wchodzi'. Ale to daje sprzeczność, bo musi zachodzić $\Gamma(y) \subset \Omega$, a stąd, że

$$\omega(x) \subset \Omega;$$

zauważmy, że $\omega(x)$ musi zawierać też punkty orbity $\{g^t(y) : t < 0\}$ punktu y spoza Ω. □

Dowód Twierdzenia 2.17. Bierzemy dowolny punkt $x \in \partial\mathcal{R}$. Wtedy jego zbiór $\omega-$graniczny spełnia założenia Twierdzenia 2.19. □

Przykład 2.20.[3] Rozważmy następujący przypadek tzw. *układu Liénarda*

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - y + F(y), \tag{2.11}$$

gdzie $F(y) = 2y/\sqrt{1-4y^2}$; w istocie chodzi o to, aby F była nieparzysta, $F'(0) > 1$ i $F(\pm\infty) = \pm 1$.

Zauważmy, że jedyny punkt równowagi $x = y = 0$ jest ogniskiem niestabilnym (z wartościami własnymi $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Wobec tego wybieramy wewnętrzny brzeg pierścienia $\mathcal{R}$ (aby zastosować Twierdzenie 2.17) w postaci

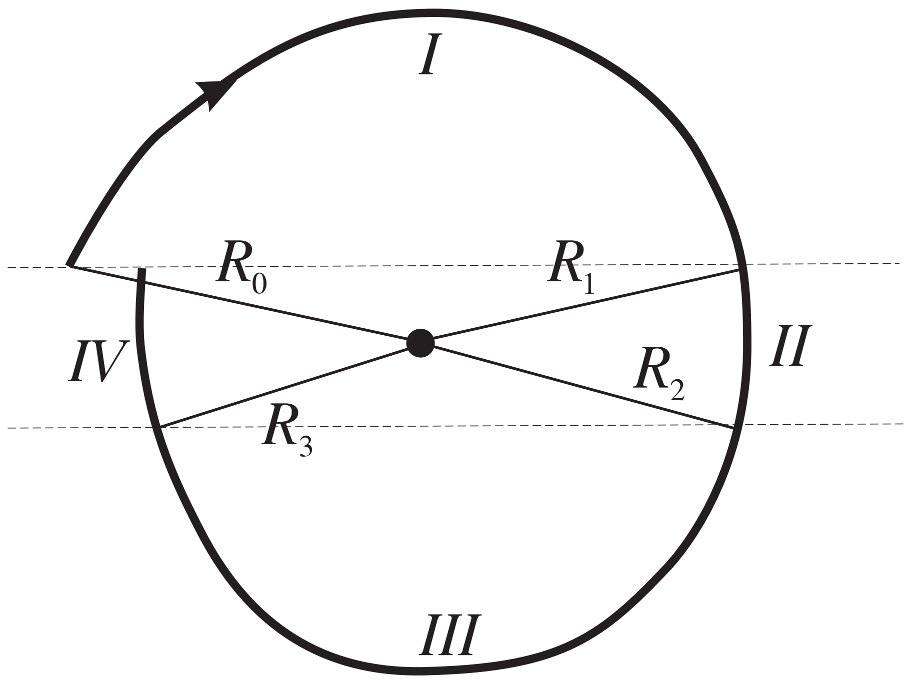
$$\partial_w \mathcal{R} = \left\{x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

dla małego $r > 0$ (Zadanie 2.54).

Chciałoby się wybrać zewnętrzny brzeg w postaci dużego okręgu $x^2 + y^2 = R^2$. Niestety tożsamość

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = -y^2 + yF(y)$$

pokazuje, że w obszarze $\{(x, y) : F(y)/y > 1\} = \{-y_0 < y < y_0\}$ funkcja 'kwadratu promienia' $R^2 = x^2 + y^2$ zwiększa swoją wartość wzłuż trajektorii pola. Szczęśliwie ten zły obszar jest mały.



Rysunek 2.9. Układ Liénarda.

[3] Ten przykład pochodzi z monografii "Modern Geometry" Dubrovina, Novikova i Fomenko. Niestety tam nie ma pewnych istotnych detali, które uzupełniłem. Ponadto układ Liénarda zwykle przyjmuje formy $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -f(x)y - g(x)$ lub $\dot{x} = y + F(x), \dot{y} = -g(x)$. Układ (2.11) po zamianie x z y sprowadza się do drugiej z nich.

Aby wszystko uściślić, rozważmy cztery obszary płaszczyzny (I, II, III, IV), w których badamy $\frac{d}{dt}\left(R^2\right)$. Są one przedstawione na Rysunku 2.9, gdzie na granicy pomiędzy I i II mamy $y = y_0$ i na granicach pomiędzy II i III oraz pomiędzy III i IV mamy $y = -y_0$.

Startujemy z punktu (x_0, y_0) takiego, że $R = R_0$ jest duże i $y = y_0$. Wchodzimy do obszaru I, gdzie $\dot{R} < 0$. Tutaj układ jest bliski układowi liniowemu $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - y + 1$ i nietrudno jest oszacować, że zmiana $\Delta_I R$ promienia R w obszarze I jest postaci

$$\Delta_I R = -C_1 R_0 + O(1), \quad R_0 \to \infty,$$

gdzie $C_1 > 0$ i nie zależy od R_0.

Wkraczamy do obszaru II z promieniem $R_1 \approx (1 - C_1)R_0$. Jest to duży promień a zatem i x jest duże (bo y jest ograniczone). Tutaj krzywe fazowe spełniają równanie

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x + \dots} \approx \frac{-y}{R_1 + o(1)}$$

i mamy oszacowanie

$$-C_2 < \Delta_{II} R < C_2$$

dla pewnej stałej C_2 niezależnej od R_0.

Analogicznie jak w obszarze I dostajemy $\Delta_{III} R = -C_1 R_2 + O(1)$ (gdzie $R_2 = R_1 + O(1)$) i, analogicznie jak w obszarze II, dostajemy $|\Delta_{IV} R| < C_2$. Sumując te przyrosty dostajemy

$$\Delta R \leqslant -2C_1 R_0 + C_3$$

dla stałej C_3 niezależnej od R_0.

Zatem promień R średnio maleje i już teraz łatwo skonstruować zewnętrzny brzeg pierścienia $\mathcal{R}$; wystarczy lekko przekrzywić trajektorię punktu (x_0, y_0) i połączyć końce odcinkiem.

Słuchacze mogą zapytać, dlaczego w twierdzeniu Poincarégo–Bendixsona obszar $\mathcal{R}$ jest pierścieniem; może wystarczyłoby, aby był ograniczony i jednospójny (tj. bez dziury w środku). Otóż nie, i powód leży w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.21. *Wewnątrz obszaru ograniczonego przez zamkniętą krzywą fazową pola wektorowego na płaszczyźnie istnieje co najmniej jeden punkt osobliwy tego pola.*

Dowód tego wyniku używa metod topologicznych, a dokładniej, pojęcia indeksu.

Definicja 2.22. Niech $v(x)$ będzie polem wektorowym w $\mathbb{R}^2$ i niech $C \subset \mathbb{R}^2$ będzie zorientowaną krzywą taką, że

$$v|_C \neq 0. \tag{2.12}$$

Indeksem $i_C v$ pola v wzdłuż krzywej C mazywamy liczbę obrotów wektora $v|_C$.

Jeśli x_0 jest izolowanym punktem osobliwym pola v, to **indeksem $i_{x_0} v$ pola v w punkcie** x_0 nazywamy indeks $i_{C(x_0,\varepsilon)} v$ pola v wzdłuż okręgu $C(x_0, \varepsilon)$ wokół x_0 o dostatecznie małym promieniu ε (i zorientowanego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, tj. dodatnio).[4]

Przykłady 2.23. Dla pola $v = x\partial_x + y\partial_y$ mamy $i_{(0,0)} v = 1$, dla pola $v = x\partial_x - y\partial_y$ mamay $i_{(0,0)} v = -1$ a dla pola $v = x^2\partial_x + y\partial_y$ mamay $i_{(0,0)} v = 0$, patrz Rysunek 2.10 (Zadania 2.55 i 2.56).

Stwierdzenie 2.24. *Dla dodatnio zorientowanej krzywej C mamy*

$$i_C v = \sum i_{x_j} v,$$

[4] Pojęcie indeksu izolowanego punktu osobliwego x_0 pola wektorowego $v(x)$ uogólnia się do przypadku pola w $\mathbb{R}^n$. Jest to stopień odwzorowania $x \longmapsto v(x)/\left|v(x)\right|$ z małej sfery wokół x_0 do $\mathbb{S}^{n-1}$.

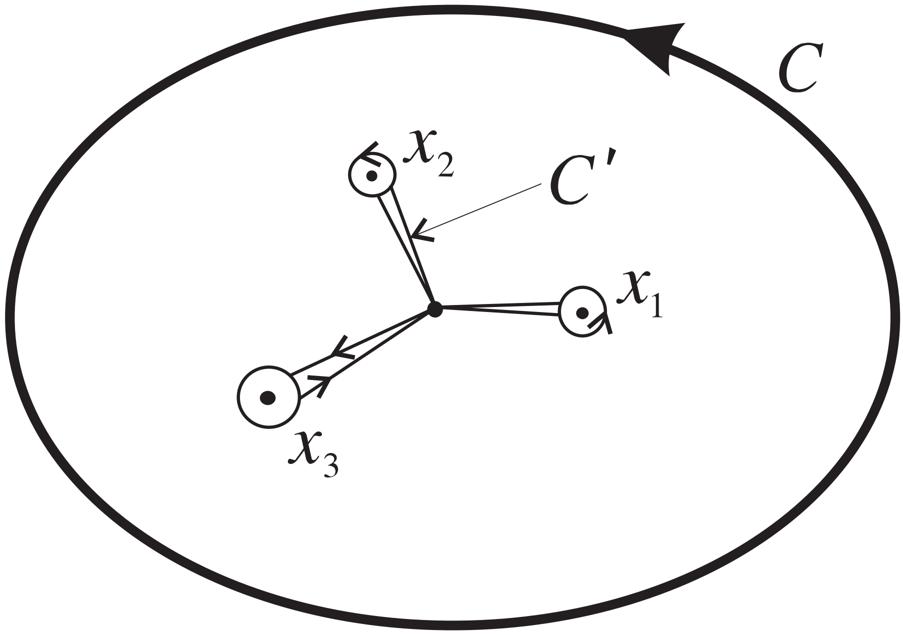
Rysunek 2.10. Indeks pola wektorowego.

gdzie sumowanie biegnie po punktach osobliwych pola wewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywą C.

Dowód. Zauważmy, że odwzorowanie

$$(v, C) \longmapsto i_C v$$

jest funkcją ciągłą na przestrzeni par (pole wektorowe, krzywa) spełniających warunek (2.12). Ponieważ zbiorem wartości tej funkcji są liczby całkowite, to indeks jest lokalnie stały. W szczególności nie zależy od deformacji pola i deformacji krzywej (w klasie (2.12); to uzasadnia definicję indeksu w punkcie.



Rysunek 2.11. Homotopijnie równoważne krzywe.

Możemy zdeformować krzywą do krzywej C' złożonej z układu pętli wokół punktów równowagi x_j i układu odcinków łączących te pętle z punktem bazowym. Ponieważ obroty pola wzdłuż odcinków znoszą sie parami to $i_{C_1}v$ jest równe sumie obrotów pola wokół punktów osobliwych (patrz Rysunek 2.11). □

Lemat 2.25. *Jeśli C jest zamkniętą przywą fazową pola v, to $i_C v = 1$.*

Dowód. Korzystając z własności niezmienniczości indeksu względem deformacji (w klasie (2.12)) możemy zdeformować krzywą i pole tak, aby otrzymać $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (z dodatnią lub ujemną orientacją) i pole v będzie styczne do tej krzywej. Łatwo widać, że kąt wektora $v(x, y)$ na C jest 'opóźniony' lub 'przyspieszony' względem kątu punktu (x, y) o $\pi/2$. □

Następujący wniosek uściśla Twierdzenie 2.21.

Wniosek 2.26. *Jeśli $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ jest zamkniętą krzywą fazową pola $v(x)$ to*

$$\sum i_{x_j} v = 1,$$

gdzie sumujemy po punktach równowagi pola wewnątrz obszaru zakreślonego przez krzywą γ.

2.3. Kryterium Dulaca

Rozważmy pole wektorowe $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, z zamkniętą krzywą fazową γ, czyli trajektorią okresową $x = \varphi_0(t)$ o okresie T. Rozważmy cięcie S (prostopadłe do γ w x_0) i odpowiednie przekształcenie powrotu Poincarégo $f : S \longmapsto S$. Utożsamiając S z $(\mathbb{R}, 0)$ mamy

$$f(z) = \lambda z + O(z^2), \quad \lambda > 0.$$

Definicja 2.27. Liczba $\mu = \ln \lambda$ nazywa się **wykładnikiem charakterystycznym** orbity okresowej γ. (Zadanie 2.58).

Twierdzenie 2.28 (Dulac). *Mamy*

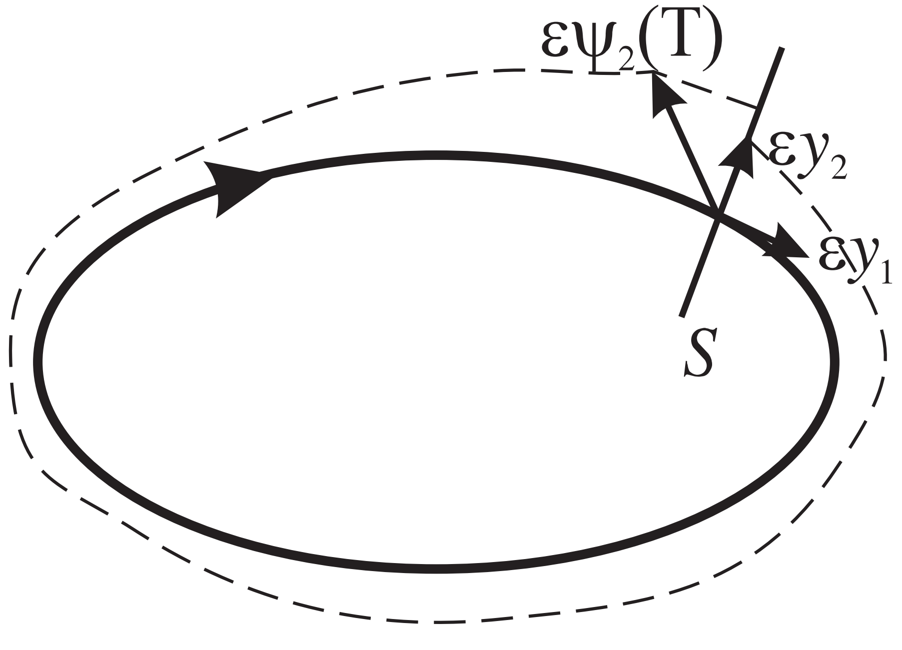
$$\mu = \int_0^T \operatorname{div} v(\varphi_0(t)))dt,$$

gdzie $\operatorname{div} v(x)$ *oznacza dywergencją pola wektorowego* $v(x)$ *(patrz wzór (6.29) poniżej).*

Dowód. Rozważmy równanie w wariacjach względem warunków początkowych wzdłuż rozwiązania $\varphi_0(t)$

$$\dot{y} = A(t)y, \qquad A(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi_0(t))$$

(patrz wzór (6.13)). Wybierzmy dwa warunki początkowe dla tego równania: $y(0) = y_1$, jako jednostkowy wektor styczny do γ w x_0, i $y(0) = y_2$, jako jednostkowy wektor prostopadły do γ w x_0. One odpowiadają dwóm typom zaburzenia warunku początkowego $x(0) = x_0$ dla równania $\dot{x} = v(x) : x(0) = x_0 + \varepsilon y_1$ i $x(0) = x_0 + \varepsilon y_2$.



Rysunek 2.12. Twierdzenie Dulaca.

Zgodnie ze wzorem (6.28) rozwiązania $y = \psi_1(t)$ i $y = \psi_2(t)$ spełniające powyższe warunki początkowe rozpinają równoległoboki, których pole jest równe Wrońskianowi $W(t) = \det(\psi_1(t), \psi_2(t))$ tych rozwiązań. Dla $t = T$ mamy $\psi_1(T) = \psi_1(0) = y_1$, bo $x = \varphi_0(t) + \varepsilon\psi_1(t) + O(\varepsilon^2)$ w istocie reprezentuje rozwiązanie okresowe $\varphi_0(t)$ z nieco przesuniętym punktem początkowym (na γ). Natomiast $\psi_2(T)$ jest pewnym wektorem zawiązanym z wartością rozwiązania $x = \varphi_0(t) + \varepsilon\psi_2(t) + O(\varepsilon^3)$ dla $t = T$, które nie musi nawet trafić w cięcie S (patrz Rysunek 2.12). Ale rzut $\varepsilon(\psi_2(T), y_2)y_2$ wektora $\varepsilon\psi_2(T)$ na S ma naturalną interpretację $f(\varepsilon y_1) + O(\varepsilon^2)$, gdzie f jest przekształceniem powrotu.

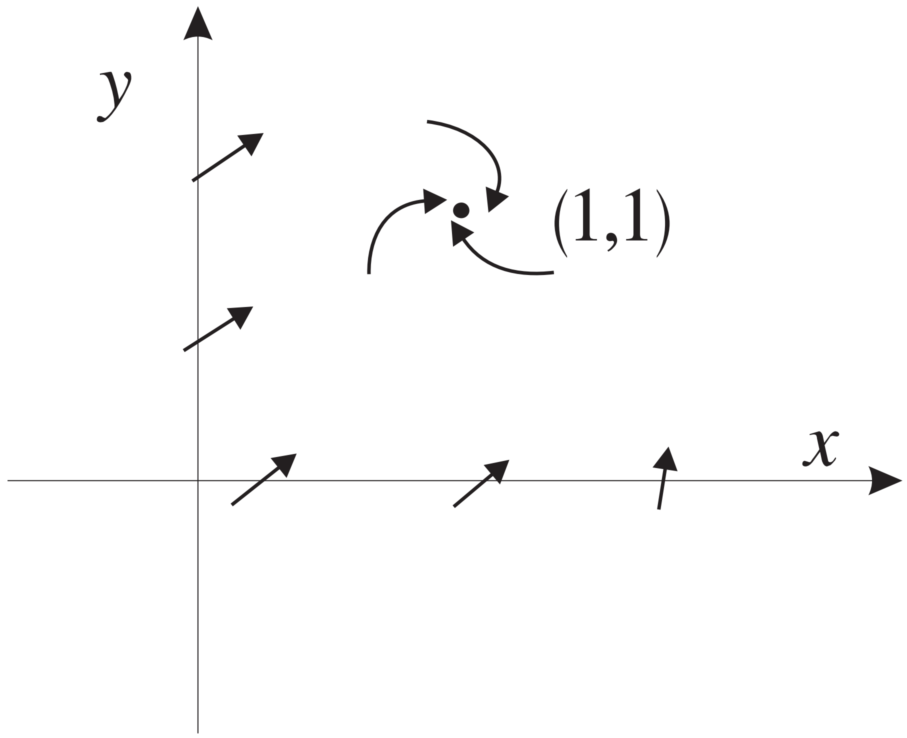
Zauważmy teraz, że równoległobok rozpięty przez wektory $\psi_1(T) = y_1$ i $\psi_2(T)$ ma takie samo pole $W(T)$ jak długość rzutu wektora $\psi_2(T)$ na S. To oznacza, że

$$f'(0) = W(T).$$

Ale Twierdzenie 6.23, czyli $\dot{W} = \operatorname{tr}A(t) \cdot W$ z $\operatorname{tr}A(t) = \operatorname{div} v(\varphi_0(t))$, pozwala wyliczyć W. Ponieważ $W(0) = 1$, to mamy $W(T) = \exp \int_0^T \operatorname{tr}A(t)dt$. □

Twierdzenie Dulaca okazuje się być użyteczne przy pokazywaniu braku cykli granicznych dla pewnych pól wektorowych. Zilustrujemy to na następującum przykładzie.

Przykład 2.29 (Układ Jouanolou)**.** Ma on następującą postać



Rysunek 2.13. Układ Jouanolou.

$$\dot{x} = y^s - x^{s+1}, \quad \dot{y} = 1 - yx^s.$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2.21 każdy cykl graniczny tego pola powinien okrążać przynajmniej jeden punkt osobliwy. Równania punktów osobliwych, czyli $y = x^{-s}$ i $(x^{-s})^s = x^{s+1}$, prowadzą do $x^{s^2+s+1} = 1$. Zatem jest tylko jeden (rzeczywisty) punkt równowagi $x = y = 1$.

Część liniowa układu w tym punkcie zadaje się macierzą

$$\begin{pmatrix} -s-1 & s \\ -s & -1 \end{pmatrix}$$

z równaniem charakterystycznym $\lambda^2 + (s+2)\lambda + (s^2+s+1) = 0$. Zatem punkt $(1,1)$ jest stabilnym ogniskiem.

Przypuśćmy, że γ jest cyklem granicznym wokół $(1,1)$ i najbliższym dla tego punktu (wszystkie cykle graniczne tworzą ‘gniazdo’ wokół $(1,1)$). Łatwo widać, że γ musi być niestabilny (przynajmniej od wewnątrz).

Z drugiej strony, dywergencja pola Jouanolou wynosi

$$\text{div} = -(s+2)x^s.$$

Widać, że jeśli s jest parzyste, to div< 0 (dla prawie wszystkich punktów krzywej fazowej) i Twierdzenie Dulaca implikuje, że wykładnik charakterystyczny cyklu γ jest ujemny (sprzeczność z niestabilnością γ).

Jeśli s jest nieparzyste to ten argument również pracuje, tylko trzeba najpierw pokazać, że γ musi leżeć w pierwszej ćwiartce, patrz Rysunek 2.13 (Zadanie 2.59).

Twierdzenie Dulaca ma jeszcze inne zastosowania.

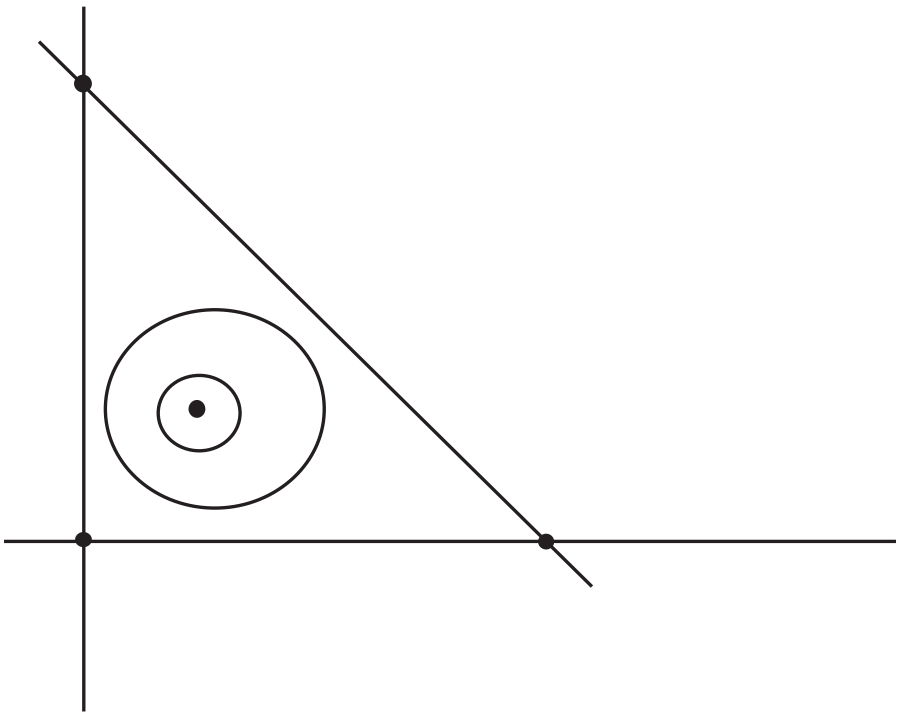
Definicja 2.30. Funkcja $\Phi : \Omega \longmapsto \mathbb{R}_+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nazywa się **funkcją Dulaca** dla pola wektorowego v, jeśli $\operatorname{div}(\Phi v)$ ma stały znak w obszarze Ω.

Twierdzenie 2.31. *Jeśli dla pola wektorowego v istnieje funkcja Dulaca Φ w obszarze Ω, to każdy cykl graniczny pola leżący w Ω jest stabiln,y gdy* $\operatorname{div}(\Phi v) < 0$ *(odpowiednio niestabilny, gdy* $\operatorname{div}(\Phi v) > 0$).

Dowód. Pomnożenie pola wektorowego przez funkcję dodatnią nie zmienia portretu fazowego tego pola. Zmienia się tylko prędkość punktu (tj. rozwiązania) wzdłuż krzywej fazowej. □

Uwaga 2.32. Można w Twierdzeniu 2.31 dopuścić nieostre nierówności $\operatorname{div}(\Phi v) \geqslant 0$ lub $\operatorname{div}(\Phi v) \geqslant 0$. Ale wtedy trzeba wykluczyć możliwość, że ewentualny cykl jest całkowicie zawarty w krzywej $\operatorname{div}(\Phi v) = 0$.

Przykład 2.33. (Uogólniony układ Lotki–Volterry)**.** Jest to układ opisujący zmianę populacji drapieżników i ofiar (np. wilków i zajęcy)



Rysunek 2.14. Układ Lotki–Volterry.

$$\dot{x} = x\,[Ay - B(1-x-y)]\,, \quad \dot{y} = y\,[C(1-x-y) - Dx]$$

(z $ABCD \neq 0$) w obszarze $x, y > 0$. Równania $Ay = B(1-x-y)$ i $C(1-x-y) = Dx$ definiują punkt osobliwy (x_0, y_0), o którym założymy, że leży w pierwszej ćwiartce i że wyznacznik macierzy części liniowej w (x_0, y_0) jest dodatni (tylko wtedy indeks pola w (x_0, y_0) wynosi 1 i jest szansa na cykl graniczny). Twierdzę, że:

jeśli $A = D$ to mamy centrum w (x_0, y_0) a jeśli $A \neq D$ to nie ma rozwiązań okresowych.

Aby to potwierdzić, rozważmy następującą kandydatkę na funkcję Dulaca

$$\Phi = x^{C/A-1} y^{B/D-1}.$$

Sprawdzamy (z $z = 1 - x - y$)):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\Phi v) &= \tfrac{\partial}{\partial x} x^{C/A}\left[Ay - B(1-x-y)\right] y^{B/D-1} \\
&\quad + \tfrac{\partial}{\partial y} y^{B/D}\left[C(1-x-y) - Dx\right] x^{C/A-1} \\
&= x^{C/A-1} y^{B/D-1} \left\{ \tfrac{C}{A}\left[Ay - Bz\right] + Bx + \tfrac{B}{D}\left[Cz - Dx\right] - Cy \right\} \\
&= \tfrac{BC}{AD}(A-D) x^{C/A-1} y^{B/D-1} z.
\end{aligned}$$

Jeśli $A = D$, to pole Φv jest hamiltonowskie i ma całkę pierwszą (parz Rysunek 2.14).

Jeśli $A - D \neq 0$, to Φ jest funkcją Dulaca w obszarze $z > 0$ lub w obszarze $z < 0$. Ale tożsamość

$$\dot{z}|_{z=0} = (D - A)x(1 - x) \neq 0$$

(przy $A - D \neq 0$) implikuje, że ewentualny cykl graniczny nie może przechodzić przez odcinek $x + y = 1$, $x, y > 0$. Dalsze rozumowanie przebiega tak samo jak w przykładzie z układem Jouanolou.

Przykład 2.34 (Równanie van der Pola)**.** Jest to następujący układ

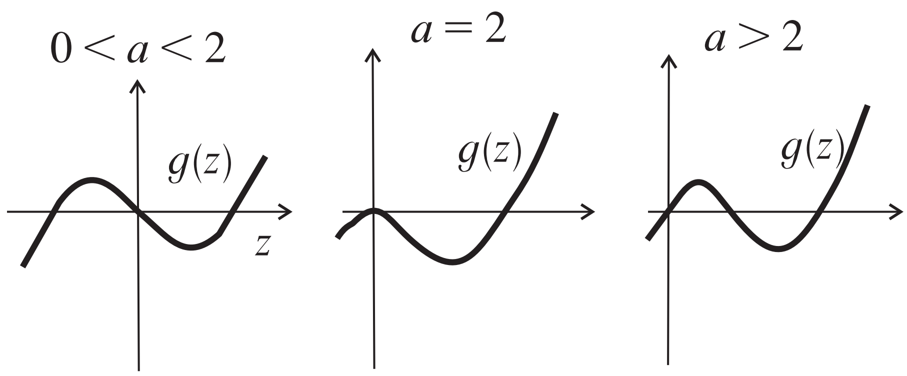
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - a(x^2 - 1)y, \quad a > 0;$$

szczególny przypadek układu Liénarda. Pojawia się on w elektrotechnice, dla układu składającego się z kondensatora o pojemności C, cewki o indukcyjności L i pewnego nieliniowego elementu (typu diody) zastępującego opornik. W przypadku układu LCR (cewka, kondensator, opornik) bilans różnic potencjałów daje równanie $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$ na natężenie prądu I w obwodzie; w naszym przypadku człon $\frac{d}{dt}(RI)$ jest zastępowany członem $\frac{d}{dt}\left[R\left(I^3/3 - I\right)\right]$, czyli

$$L\ddot{I} + R(I^2 - 1)\dot{I} + I/C = 0;$$

to jest właśnie oryginalne **równanie van der Pola**. Po zamianie $t \longmapsto \alpha t = \sqrt{CL}t$ i podstawieniu $x = I$ i $y = \dot{I}$ dostajemy powyższy układ van der Pola z $a = R/\alpha$. Po więcej szczegółów odsyłam do książki D. Arrowsmitha and K. Place'a [6].

Udowodnimy, że:



Rysunek 2.15. Funkcja $g(z)$.

układ van der Pola posiada dokładnie jeden cykl graniczny.

Po pierwsze zauważmy, że $(0,0)$ jest jedynym punktem osobliwym z macierzą części liniowej $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$, czyli, że $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$ i ten punkt jest niestabilny (ognisko lub węzeł).

Rozważmy funkcję

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2 + a(x^3/3 - 3)y + x^2 - c \\ &= \left[y + \tfrac{1}{2}a\left(\tfrac{x^3}{3} - x\right)\right]^2 - g(x^2) - c \\ &= y_1^2 - g(x^2) - c, \end{aligned}$$

gdzie

$$g(z) = \frac{a^2}{36}z^3 - \frac{a^2}{6}z^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right) z$$

a stała $c > 0$ i jest dostatecznie mała. Interesuje nasz krzywa $f(x,y) = 0$, która we współrzędnych (x, y_1) ma postać $y_1 = \pm\sqrt{g(x^2) + c}$. Z własności: $g(0) = 0$; $g'(0) < 0$ dla $0 < a < 2$; $g'(0) > 0$ dla $a > 2$; $g'(0) = 0$ i $g''(0) < 0$ gdy $a = 2$, możemy odtworzyć wykres funkcji $g(z)$; jest on przedstawiony na Rysunku 2.15. Stąd wynika też kształt krzywej $f = 0$ na płaszczyźnie zmiennych x, y_1 (przedstawiony na Rysunku 2.16). (Na płaszczyźnie zmiennych x, y ta krzywa jest w pewnym sensie 'kopnięta'). Zauważmy, że krzywa $f = 0$ ma trzy składowe, z których jedna okrąża punkt $(0,0)$.

Okazuje się, że funkcja

$$\Phi(x,y) = 1/f(x,y)$$

jest funkcją Dulaca dla układu van der Pola w obszarze $f > 0$.

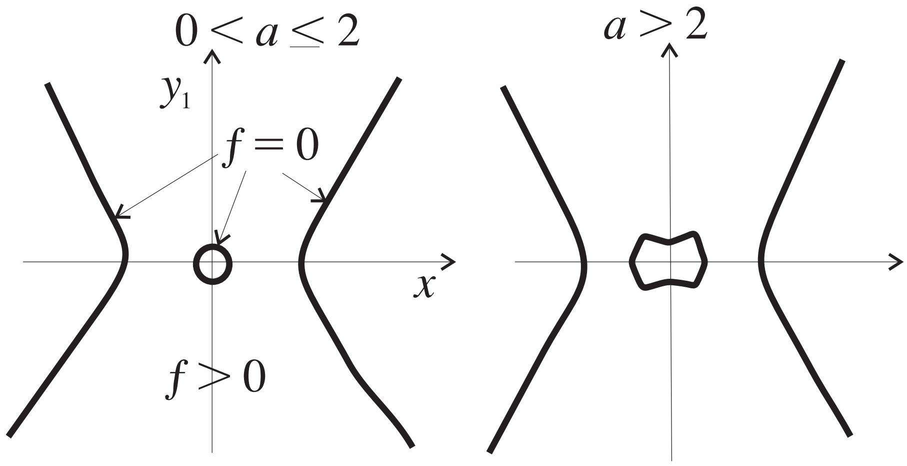
Rzeczywiście, mamy

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{f}v\right) = \frac{f \cdot \operatorname{div} v - \dot{f}}{f^2},$$

gdzie

$$f \cdot \operatorname{div} v - \dot{f} = a\left(\frac{2}{3}x^4 - cx^2 + c\right) =: M(x)$$

i $M(x) < 0$ dla $0 < c < 8/3$ (Zadanie 2.60).



Rysunek 2.16. Funkcja $f(x,y)$.

Stąd otrzymujemy dwa wnioski:

(a) $\dot{f}|_{f=0} > 0$, tzn. pole 'wchodzi' do obszaru $f > 0$;

(b) W obszarze $f > 0$ może być co najwyżej jeden cykl graniczny, przy tym stabilny.

Pozostaje jeszcze udowodnić, że w obszarze $f > 0$ istnieje jakiś cykl graniczny. W tym celu skonstruujemy pierścień $\mathcal{R}$ spełniający założenia Twierdzenia Poincarégo–Bendixsona. Wewnętrzny brzeg tego pierścienia to mała zamknięta składowa krzywej $f = 0$ wokół $(0, 0)$. Brzeg zewnętrzny będzie składać się z kawałków nieograniczonych składowych krzywej $f = 0$ i z 'poprawionych' łuków okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ dla dużego promienia R.

Z własności (a) wynika, że na kawałkach brzegu w $f = 0$ pole wchodzi do $\mathcal{R}$. Dalej, z

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = -a\left(x^2 - 1\right) y^2$$

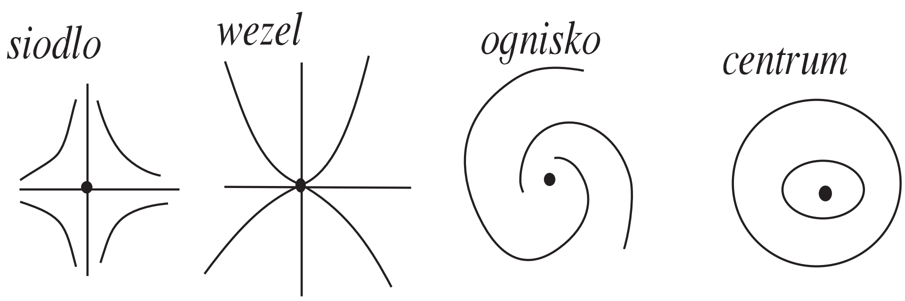
wynika, że $\dot{R} < 0$ poza pasem $\{|x| \leqslant 1\}$. Ale w tym pasie mamy

$$\frac{dy}{dx} = -a(x^2 - 1) - \frac{x}{y} = O(1) + O(1/R),$$

czyli przyrost y (a tym samym i przyrost R) jest ograniczony przez stałą niezależną od R. Teraz już łatwo poprawić odpowiednie kawałki zewnętrznego brzegu pierścienia $\mathcal{R}$, aby tam też pole wchodziło do $\mathcal{R}$ (patrz Przykład 2.20).

Powyższy dowód jednoznaczności cyklu granicznego pochodzi od L. Czerkasa z Mińska Białoruskiego. W Zadaniu 4.17 poniżej proponujemy inny dowód jednoznaczności cyklu granicznego w przypadku, gdy parametr $a > 0$ jest mały.

2.4. Rysowanie portretów fazowych na płaszczyźnie



Rysunek 2.17. Niezdegenerowane punkty osobliwe.

Jak już było powiedziane w Definicji 2.1 portret fazowy pola wektorowego $v(x)$ na płaszczyźnie to rozbicie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na krzywe fazowe tego pola. Elementami portretu fazowego są: punkty osobliwe, zamknięte krzywe fazowe, separatrysy punktów osobliwych i zachowanie na nieskończoności. Pokrótce je kolejno omówimy.

2.4.1. Punkty osobliwe

Dzielą się one na elementarne i nieelementarne.Przy tym elementarne punkty osobliwe można podzielić na niezdegenerowane i zdegenerowane.

Definicja 2.35. Punkt równowagi x_0 pola wektorowego $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, nazywa się **niezdegenerowanym** jeśli det $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0) \neq 0$.

Punkt równowagi x_0 płaskiego pola wektorowego $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, nazywa się *elementarnym* jeśli przynajmniej jedna wartość własna macierzy $A = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0)$ jest niezerowa. W ostatnim przypadku punkt x_0 jest:

siodłem, jeśli $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ dla wartości własnych $\lambda_{1,2}$ amacierzy A;

węzłem stabilnym (odpowiednio **węzłem niestabilnym**), jeśli $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (odpowiednio $\lambda_1, \lambda_2 > 0$);

ogniskiem stabilnym (odpowiednio **ogniskiem niestabilnym**), jeśli $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$ (odpowiednio $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$);

siodło–węzłem, jeśli $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Lokalne portrety fazowe w otoczeniu elementarnych punktów osobliwych zdefiniowanych powyżej są przedstawione na Rysunkach 2.17 i 2.18.

Uwaga 2.36. W przypadku $\lambda_{1,2} \in i\mathbb{R} \setminus 0$, czyli czysto urojonych wartości własnych punkt krytyczny x_0 może być ogniskiem stabilnym lub niestabilnym (dokładniej, **słabym ogniskiem**) lub **centrum**; patrz Stwierdzenie 2.11 powyżej.

Uwaga 2.37. Pojęcie siodła–węzła podane powyżej jest dosyć szerokie. Rzecz w tym, że możemy mieć następujące modelowe sytuacje

$$\dot{x} = x^{2k}, \quad \dot{y} = \pm y, \tag{2.13}$$

$$\dot{x} = \pm x^{2k+1}, \quad \dot{y} = \pm y. \tag{2.14}$$

W Podrozdziale 3.3 poniżej wzory (2.13)–(2.14) będą dokładniej uzasadnione. Gdy $\dot{x} = x^s$ i $s > 2$, to siodło–węzeł jest w pewnym sensie zdegenerowane; mówimy, że ma *kowymiar* $s - 1$.

Z punktu widzenia topologicznego lokalny portret fazowy nie zależy od k. Te portrety są przedstawione na Rysunku 2.18.

Uwaga 2.38 (Nieelementarne punkty osobliwe)**.** Przypomnę, że tutaj mamy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Niestety nie istnieje zadowalająca klasyfikacja takich osobliwości. Ale istnieje pewna skuteczna metoda ich badania. Jest to metoda *rozdmuchiwania osobliwości* (albo rozwiązywania osobliwości).

Polega ona na prostej operacji wprowadzenia biegunowych współrzędnych (r, φ) na płaszczyźnie. Zatem jeśli mamy, na przykład,

$$\dot{x} = ax^2 + bxy + cy^2 + \ldots, \quad \dot{y} = dx^2 + exy + fy^2 + \ldots, \tag{2.15}$$

to w zmiennych biegunowych dostajemy

$$\dot{r} = r^2 \left(P(\varphi) + O(r)\right), \quad \dot{\varphi} = r\left(Q(\varphi) + O(r)\right), \tag{2.16}$$

gdzie

$$\begin{aligned} P &= a\cos^3\varphi + (b+d)\cos^2\varphi\sin\varphi + (c+e)\cos\varphi\sin\varphi + f\sin^3\varphi, \\ Q &= d\cos^3\varphi + (e-a)\cos^2\varphi\sin\varphi + (f-b)\cos\varphi\sin\varphi - c\sin^3\varphi. \end{aligned}$$

Zauważmy, że prawe strony równań (2.16) zerują się przy $r = 0$. Podzielmy te prawe strony przez r; w obszarze $r > 0$ portret fazowy nie zmieni się, jedynie 'prędkość' punktu wzdłuż krzywej fazowej będzie inna,ale niezerowa. (Mogłoby się zdarzyć, że $P(\varphi) \equiv 0$, ale wtedy dzielimy przez r^2). Jest to tzw. orbitalna równoważność, o której opowiadamy poniżej.

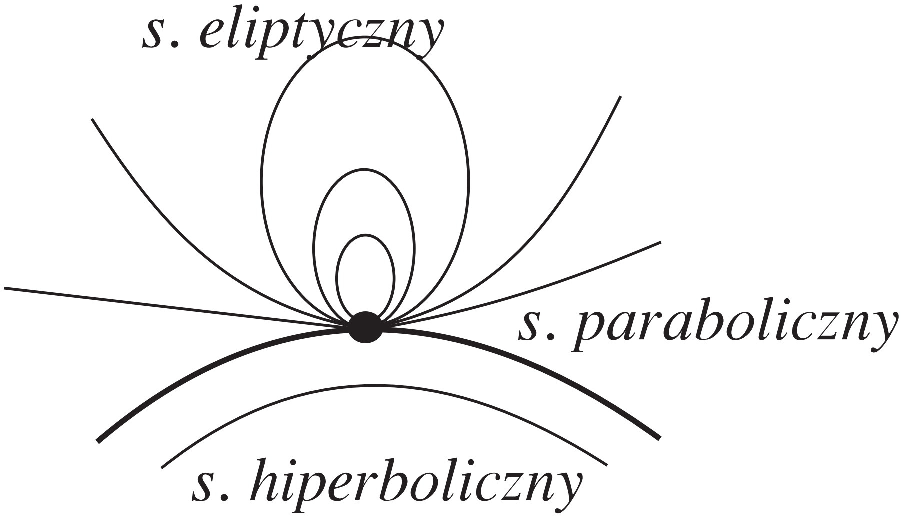
Ale po takiej operacji dostajemy pole wektorowe na cylindrze $\{(r, \varphi)\} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ (z którego dla nas jest istotna część $\{r \geqslant 0\}$), przy tym z izolowanymi punktami osobliwymi na okręgu

Rysunek 2.18. Siodło–węzły.

$r = 0$. Jeśli współczynniki $a, \ldots, f$ są typowe, to te punkty osobliwe są już niezdegenerowane, czyli elementarne.

W przeciwnym przypadku powtarzamy procedurę rozdmuchania (połączo- ną z dzieleniem) w otoczeniu każdego nieelementarnego punktu osobliwego $r = 0$, $\varphi = \varphi_0$ (z nowymi współrzędnymi $x - \varphi - \varphi_0$, $y = r$). Okazuje się, że jeśli wyjściowe pole wektorowe, jak (2.15), jest analityczne, to po skończonej liczbie takich operacji rozdmuchania dostajemy pole wektorowe na pewnej powierzchnii M z elementarnymi punktami osobliwymi. (Jest to trudne twierdzenie, po którego dowód odsyłam do mojej książki "The monodromy group" [20].)

W przypadku nieelementarnego punktu osobliwego często jego otoczenie można podzielić na sektory: *hiperboliczne, paraboliczne, i eliptyczne*. Są one zobrazowane na Rysunku 2.19. Jest



Rysunek 2.19. Sektory.

pewna teoria związana z nimi, którą nie będziemy się zajmować. Zainteresowanych słuchaczy odsyłam do książki P. Hartmana [13].

2.4.2. Zamknięte krzywe fazowe

One odpowiadają rozwiązaniom (i trajektoriom) okresowym i były dosyć szczegółowo omawiane w poprzednim podrozdziale.

2.4.3. Separatrysy punktów osobliwych

Definicja 2.39. Separatrysą punktu osobliwego x_0 pola wektorowego $v(x)$ nazywamy krzywą fazową tego pola która 'dąży' do x_0 pod określonym granicznym kierunkiem i jest 'wyróżniona' wśród takich krzywych.

Na przykład, dla siodła separatrysami są składowe 'nakłutych' rozmaitości stabilnej $W^s \setminus x_0$ i niestabilnej $W^u \setminus x_0$; w sumie mamy cztery separatrysy.

W ogólnym przypadku, gdy mamy podział na sektory hiperboliczne, eliptyczne i paraboliczne, separatrysy występują na brzegach sektorów hiperbolicznych.

Uwaga 2.40. Ważnym elementem portretu fazowego pola wektorowego jest 'los' drugiego końca danej separatrysy L.

Może on lądować w innym punkcie osobliwym x_1, zwykle w jego sektorze parabolicznym. Ale może też nawijać się na ognisko. Szczególny jest przypadek, gdy L jest separatrysą zarówno dla x_0 jak i dla x_1; mamy wtedy do czynienia z tzw. *połączeniem separatrys.*

Drugi koniec separatrysy może też nawijać się na cykl graniczny.

Szczególny, i dosyć eksploatowany w teorii Układów Dynamicznych jest przypadek, gdy drugi koniec separatrysy L ląduje w tym samym punkcie x_0. Mamy wtedy tzw. *pętlę separatrys.* Więcej na ten temat słuchacze znajdą np. w [1] i [2].

2.4.4. Zachowanie na nieskończoności

Istnieje wiele uzwarceń płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Jednym z nich jest tzw. *uzwarcenie Poincarégo* (albo płaszczyzna Poincarégo). Polega ono na uzupełnieniu płaszczyzny okręgiem przez dodanie wszystkich ‘kierunków w nieskończoności’. Płaszczyzna Poincarégo jest dyfeomorficzna z dyskiem: $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{S}^1 \simeq D^2$ (patrz Rysunek 2.20).[5]

Uzwarcenie Poincarégo jest przydatne przy badaniu zachowania się krzywych fazowych wielomianowych pól wektorowych, tzn. takich układów $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$, których prawe strony P i Q są wielomianami.

Wtedy w otoczeniu okręgu w nieskończoności można wpropwadzić współrzędne typu biegunowego

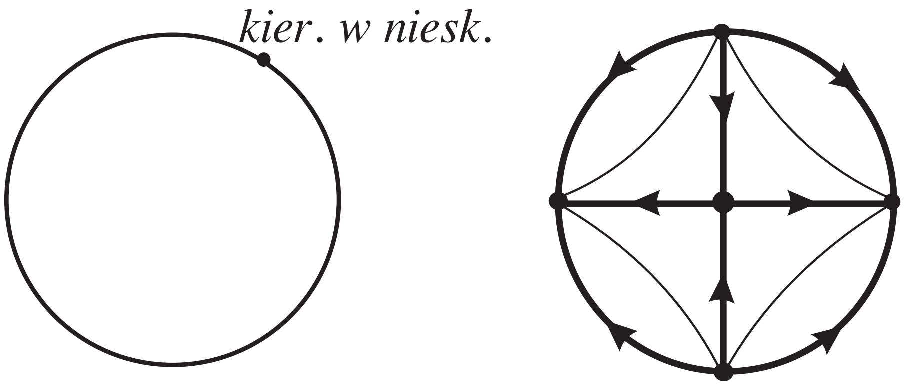
$$x = \frac{1}{z}\cos\varphi, \quad y = \frac{1}{z}\sin\varphi.$$

Dostaniemy układ postaci

$$\dot{z} = \frac{1}{z^k}\left(A(\varphi) + O(z)\right), \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{z^l}\left(B(\varphi) + O(z)\right),$$

czyli z biegunem w zbiorze $\{z = 0\}$ (okrąg w nieskończoności). Mnożąc prawe strony przez $z^{\min(k,l)}$, co prowadzi do orbitalnej równoważności w obszarze $z > 0$, dostajemy porządne pole wektorowe w otoczeniu okręgu w nieskończoności.

Zauważmy, że punkty osobliwe $z = 0$, $\varphi = \varphi_0$ nowego pola odpowiadają sytuacji gdy jakaś krzywa fazowa układu $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$ dąży do nieskończoności (przy $t \to +\infty$ lub przy $t \to -\infty$) pod granicznym kierunkiem φ_0.



Rysunek 2.20. Płaszczyzna Poincarégo.

Przykład 2.41. Liniowe pole wektorowe $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ prowadzi do portretu fazowego w płaszczyźnie Poincarégo przedstawionego na Rysunku 2.20.

2.4.5. Orbitalna równoważność

Definicja 2.42. Dwa pola wektorowe $v(x)$ na M i $w(y)$ na N są **orbitalnie równoważne**, jeśli mają takie same portrety fazowe z topologicznego punktu widzenia. To znaczy, istnieje homeomorfizm $h : M \longmapsto N$ taki, że h(krzywa fazowa v) = (krzywa fazowa w).

Pole wektorowe $v(x)$ na M jest **orbitalnie strukturalnie stabilne**, jeśli każde pole $w(x)$ na M dostatecznie bliskie polu v (w odpowiedniej topologii) jest orbitalnie równoważne z polem v.

[5] W matematyce bardziej rozpowszechnione jest uzwarcenie za pomocą płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$. Różnica pomiędzy uzwarceniem Poincarégo polega na tym, że w płaszczyźnie rzutowej dwa antypodyczne kierunki w nieskończoności są utożsamiane. Niestety, płaszczyzna rzutowa jest rozmaitością nieorientowalną i nie da się jej narysować (w przeciwieństwie do płaszczyzny Poincarégo).

Jak łatwo się przekonać, powyższa definicja orbitalnej równoważności i orbitalnej strukturalnej stabilności jest słabsza od definicji równoważności i strukturalnej stabilności podanej w Definicji 1.24.

Zatem z Twierdzenie Grobmana–Hartmana (Twierdzenie 1.23) i następującego po nim Stwierdzenia 1.25 wynika, że dwa pola wektorowe w otoczeniu hiperbolicznych punktów osobliwych o takich samych wymiarach rozmaitości stabilnej i niestabilnej są orbitalnie równoważne. Są one też orbitalnie strukturalnie stabilne.

Poniżej, bez dowodu podajemy warunki konieczne dla orbitalnej strukturalnej stabilności pola wektorowego na płaszczyźnie.

Twierdzenie 2.43. *Jeśli pole $v(x)$ w obszarze $U \subset \mathbb{R}^2$ jest orbitalnie strukturalnie stabilne, to:*

(i) jego punkty osobliwe są hiperboliczne,

(ii) jego zamknięte krzywe fazowe są hiperbolicznymi cyklami granicznymi,

(ii) nie ma połączeń separatrys.

Jeśli obszar U jest zwarty (np. płaszczyzna Poincarégo), to powyższe warunki na orbitalną strukturalną stabilność są również dostateczne.

ZADANIA

Zadanie 2.44. Wyliczyć rozwiązanie układu $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$ (wahadło matematyczne) z warunkiem początkowym $x(0) = 0$, $y(0) = 2$ odpowiadającemu $H = 1$.

Zadanie 2.45. Analogicznie jak w przypadku wahaddła matematycznego znaleźć całkę pierwszą i naszkicować krzywe fazowe dla *układu Duffinga*

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^3.$$

Wyliczyć rozwiązanie z warunkiem początkowym $x(0) = 0$, $y(0) = 1/\sqrt{2}$.

Zadanie 2.46. Wyliczyć $\dot{r}$ i $\dot{\varphi}$ w Przykładzie 2.4.

Zadanie 2.47. Pokazać, że wartości własne macierzy A w przekształceniu powrotu Poincarégo $f(z) = Az + \ldots$ nie zależą od wyboru cięcia S do orbity okresowej γ.

Zadanie 2.48. Udowodnić wzór (2.4).

Zadanie 2.49. Wyliczyć współczynnik a_1 we wzorze (2.6).

Zadanie 2.50. Przy założeniu, że po prawej stronie równania (2.7) występują tylko wyrazy kwadratowe (tj. $D = E = \ldots = 0$) i że $c_3 = 0$, wyliczyć c_5.

Zadanie 2.51. Pokazać, że dla liniowego pola wektorowego liczba cykli granicznych wynosi 0.

Zadanie 2.52. Pokazać, że zbiór $\omega-$graniczny $\omega(x)$ dla potoku $\{g^t\}$ jest domknięty i niezmienniczy, tzn. $g^t(\omega(x)) = \omega(x)$.

Zadanie 2.53. Pokazać, że w dowodzie Twierdzenia 2.19 kolejne punkty x_j przecięcia trajektorii $\Gamma(x)$ punktu x z cięciem S układają się w ciąg monotoniczny, jak na Rysunku 2.7.

Zadanie 2.54. Pokazać, że pole wektorowe (2.11) ma własność, że kwadrat promienia $r^2 = x^2 + y^2$ rośnie wzdluż rozwiązań dla małych r.

Zadanie 2.55. Policzyć indeks w $(0, 0)$ dla następujących pól:

$$\begin{aligned} \text{(a)}\quad \dot{x} &= x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = y^3 - 3x^2y; \\ \text{(b)}\quad \dot{x} &= y + x^2, \quad \dot{y} = x^3. \end{aligned}$$

Zadanie 2.56. Pokazać, że $i_0 v = \operatorname{sign}\det A$ dla kiełka pola $\dot{x} = Ax + \dots$ w $(\mathbb{R}^n, 0)$ takiego, że $\det A \neq 0$. Uwaga: przypadek $n > 2$ to zadanie z gwiazdką.

Zadanie 2.57. Pokazać, że pole wektorowe $\dot{x} = 1 - xy$, $\dot{y} = x$ nie posiada cykli granicznych.

Zadanie 2.58. Pokazać, że wykładnik charakterystyczny orbity okresowej zdefiniowany w Definicji 2.27 jest dobrze określony.

Zadanie 2.59. Uzupełnić analizę układu Jouanolou w przypadku nieparzystego s.

Zadanie 2.60. Wyliczyć $\operatorname{div}\left(\frac{1}{f}v\right)$ w analizie układu van der Pola.

Zadanie 2.61. Naszkicować portret fazowy (w $\mathbb{R}^2$) dla układu $\dot{x} = 1 + x^2 - y^2$, $\dot{y} = x + x^2 - 2xy$.

Zadanie 2.62. Naszkicować portret fazowy dla układu $\dot{x} = y^2 - 4x^2$, $\dot{y} = 4y - 8$.

Zadanie 2.63. Naszkicować portret fazowy dla równań $\dot{z} = z^2$ i $\dot{z} = \bar{z}^2$, gdzie $z = x + iy \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Zadanie 2.64. Rozważmy pole wektorowe $v(x, y)$ postaci (1.2), czyli $\dot{x} = y + x^2$, $\dot{y} = -2x^3 - 4xy - y(x^2 + y^2)^2$; chcemy pokazać, że portret fazowy tego układu jest jak na Rysunku 1.2.

(a) Zacznijmy od prostszego pola wektorowego $v_0(x, y)$ zadanego układem

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x^3 - 4xy. \tag{2.17}$$

Robiąc podstawienie $z = x^2$ naszkicować jego portret fazowy i pokazać, że w otoczeniu $x = y = 0$ jest on jakościowo taki jak na Rysunku 1.2 (tylko, że ma większy sektor eliptyczny). Pokazać też, że parabola $y = -x^2$ jest niezmiennicza dla pola (2.17) i zawiera separatrysy na granicy sektora hiperbolicznego.

(b) Stosując dwukrotnie rozdmuchanie pokazać, że pola v i v_0 mają jakościowo takie same portrety fazowe w otoczeniu $x = y = 0$.

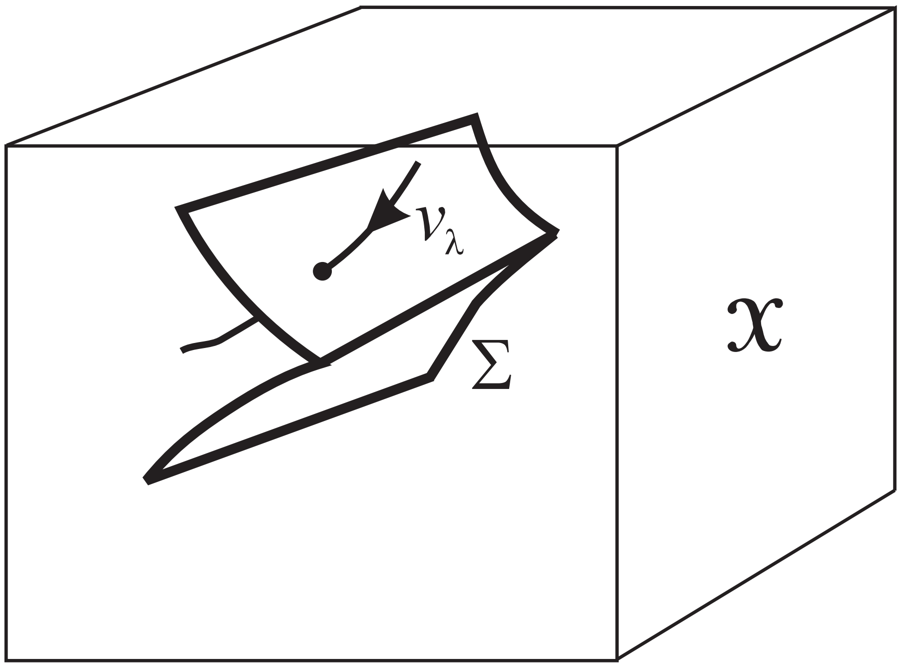
(c) Pokazać, że dodanie składnika $-y\left(x^2 + y^2\right)^2 \frac{\partial}{\partial y}$ do pola v_0 powo- duje, że w obszarze $U = \{y \geqslant -x^2\}$ (czyli cały sektor eliptycznym dla v_0 z brzegiem) przecinamy krzywe fazowe pola v_0 pod kątem i tak, że krzywe fazowe pola v kierują się bardziej w kierunku środka układu współrzędnych. Wywnioskować stąd, że wszystkie punkty z obszaru U dążą do $(0, 0)$ pod wpływem potoku fazowego $\{g_v^t\}_{t>0}$.

(d) Pokazać, że również pozostałe punkty z otoczenia $(0, 0)$ albo leżą w stabilnej separatrysie punktu $(0, 0)$ (tj. dla v) albo wchodzą do obszaru U po skończonym czasie pod wpływem potoku g_v^t.

3. Teoria bifurkacji

3.1. Wersalność

Zgodnie z Twierdzeniem 2.43 typowe pola wektorowe na zwartej 2−wymia- rowej rozmaitości M są orbitalnie strukturalnie stabilne. Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{X}$ nieskończenie wymiarową przestrzeń wszystkich pól wektorowych na M (danej klasy i z odpowiednią topologią, o której nie będziemy mówić), to podzbiór Σ, nazywany *zbiorem bifurkacyjnym*, przestrzeni $\mathcal{X}$złożony z pól, które nie są orbtalnie strukturalnie stabilne, powinien mieć kowymiar $\geqslant 1$. Należy się spodziewać, że ten podzbiór Σ jest na ogół gładki, ale może mieć punkty nieregularne (jak na Rysunku 3.1). Te ostatnie punkty powinny odpowiadać polom wektorowym, które mają osobliwości bardziej skomplikowane niż pola odpowiadające typowym punktom z Σ.



Rysunek 3.1. Zbiór bifurkacyjny.

Jeśli wybierzemy przypadkowo pojedyncze pole z $\mathcal{X}$, to z prawdopodobieństwem 1 będzie ono poza zbiorem Σ. Ale cała rodzina $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ pól wektorowych stanowi krzywą w $\mathcal{X}$ i już może przeciąć hiperpowierzchnię Σ. Spodziewamy się też, że dla typowej rodziny odpowiednia krzywa przetnie hiperpowierzchnię Σ pod kątem i w punktach typowych tej hiperpowierzchnii (patrz Rysunek 3.1).

Teoria bifurkacji zajmuje się badaniem zarówno geometrii zbioru bifurkacyjnego Σ jak i zachownia się wieloparametrowych rodzin pól wektorowych. My ograniczymy się do 1−parametrowych rodzin.

Należy zwrócić uwagę na jeszcze jeden aspekt tej sytuacji. Na przestrzeni $\mathcal{X}$ działa grupa $\mathcal{G}$ orbitalnych równoważności i podzbiór bifurkacyjny Σ jest niezmienniczy względem tego działania. Należy zatem powiązać analizę $1-$parametrowych rodzin $\{v_\lambda\}$ z działaniem grupy G. V. Arnold w [5] wprowadził raz na zawsze porządek na tym polu i poniższe definicje pochodzą od niego. My podajemy te definicje dla $1-$parametrowych rodzin, ale łatwo je uogólnić na przypadek wieloparametrowy.[1]

Definicja 3.1. Dwie rodziny $\{v_\lambda\}_{\lambda\in J}$ i $\{w_\lambda\}_{\lambda\in J}$, $J\subset\mathbb{R}$, pól wektorowych na M są **orbitalnie równoważne**, jeśli dla każdego $\lambda\in J$ pola $v_\lambda(x)$ i $w_\lambda(x)$ są orbitalnie równoważne za pomocą homeomorfizmu $h_\lambda(x)$, który zależy w sposób ciągły od parametru λ.

Mówimy, że rodzina $\{w_\nu\}_{\nu\in K}$ jest **indukowana** z rodziny $\{v_\lambda\}_{\lambda\in J}$, jeśli istnieje ciągłe od wzorowanie $\varphi : K \longmapsto J$ takie, że

$$w_\nu = v_{\varphi(\nu)}.$$

Rodzina $\{v_\lambda\}_{\lambda\in(\mathbb{R},0)}$, z zadanym polem v_0, jest **wersalna**, jeśli dowolna inna rodzina $\{w_\nu\}_{\nu\in(\mathbb{R},0)}$ z $w_0 = v_0$ jest orbitalnie równoważna rodzinie indukowanej z rodziny $\{v_\lambda\}$.

Przykład 3.2. Rodzina $\dot{x} = \nu^2 + x^3$ jest indukowana z rodziny $\dot{x} = \lambda + x^3$ przy pomocy zamiany zmiennych $\lambda = \varphi(\nu) = \nu^2$.

Przykład 3.3. Weźmy modelową rodzinę pól wektorowych

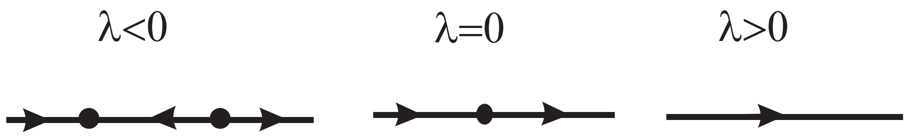
$$\dot{x} = v_\lambda(x) = \lambda + x^2. \tag{3.1}$$

Odpowiednie portrety fazowe są przedstawione na Rysunku 3.2.

Weźmy teraz dowolną rodzinę postaci

$$\dot{x} = w_\mu(x) = x^2 + \mu\tilde{w}(x,\mu) =: f(x,\mu), \tag{3.2}$$

gdzie $\tilde{w}(x,\mu)$ jest gładką funkcją w otoczeniu $x = \mu = 0$. Twierdzę, że



Rysunek 3.2. Portrety fazowe.

dla dażdego μ pole wektorowe w_μ posiada albo 1 albo 2 albo 0 punktów osobliwych w otoczeniu $x = 0$.

Aby to zobaczyć rozważmy równanie

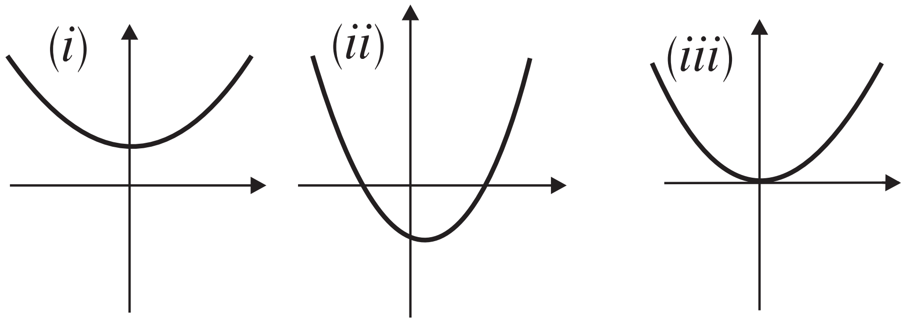
$$g(x,\mu) = 0,$$

gdzie $g(x,\mu) = f'_x(x,\mu)$. Ponieważ $f''_{xx}(0,0) \neq 0$, to $g'_x(0,0) \neq 0$, i z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej wynika istnienie gładkiej funkcji $\psi(\mu)$ takiej, że jest spełnione równanie $g(\psi(\mu),\mu) \equiv 0$. To oznacza, że punkt

$$x_\mu = \psi(\mu)$$

jest punktem lokalnego minimum funkcji $w_\mu = f(\cdot,\mu) : \frac{dw_\mu}{dx}(x_\mu) = 0$. Mamy trzy możliwości na wartość pola w_μ w punkcie x_μ : (i) $w_\mu(x_\mu) = 0$, (ii) $w_\mu(x_\mu) < 0$, (iii) $w_\mu(x_\mu) > 0$. W przypadku (i) pole w_μ ma dokłanie jeden punkt równowagi (typu siodło–węzeł), w przypadku

[1] Ta filozofia pracuje również w innych ogólnych sytuacjach. Na przykład, gdy $\mathcal{X}$ jest przestrzenią funkcji f na rozmaitości a $\mathcal{G}$ jest grupą dyfeomorfizmów h rozmaitości z działaniem $f \longmapsto f\circ h$. Podobnie $\mathcal{X}$ może być przestrzenią dyfeomorfizmów f rozmaitości M a grupa $\mathcal{G}$ dyfeomorfizmów M może działać poprzez sprzężenie: $f \longmapsto h\circ f\circ h^{-1}$.



Rysunek 3.3. Wykresy prawej strony.

(ii) pole w_μ ma dwa hiperboliczne punkty równowagi a w przypadku (iii) nie ma żadnych punktów równowagi (patrz Rysunek 3.3).

Zatem dla każdego μ portret fazowy pola w_μ jest topologicznie równoważny z portretem fazowym pola v_λ dla odpowiedniego λ. Pojawia się naturalne pytanie, czy można tak dobrać $\lambda = \varphi(\mu)$ i homeomorfizmy h_μ realizujące orbitalne sprzężenie w_μ z $v_{\varphi(\mu)}$, aby zależność od μ była ciągła. Okazuje się, że tak; to oznacza, że rodzina (3.1) jest wersalna.

Aby się o tym przekonać, rozważmy najpierw przypadek, gdy

(a)$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$ w (3.2). Wtedy krzywa punktów równowagi

$$\Gamma : w_\mu(x) = f(x,\mu) = 0$$

pola w_μ na płaszczyżnie zmiennych x, μ jest 'pionowa' i homeomorficzna z parabolą (patrz Rysunek 3.4). Również parabolą jest krzywa punktów równowagi $\Delta = \{\lambda = -x^2\}$ dla pola v_λ.

W zależności od znaku $f'_\mu(0,0)$ kładziemy $\varphi(\mu) = \mu$ lub $\varphi(\mu) = -\mu$; czyli dalej można zakładać, że obie 'parabole' są zorientowane tak samo. W tym przypadku konstrukcję homeomorfizmów h_μ, czyli homeomorfizmu płaszczyzny

$$(\mu, x) \longmapsto (\mu, h_\mu(x)),$$

rozpoczynamy od konstrukcji homeomorfizmu pomiędzy krzywymi punktów równowagi: $\Gamma \longmapsto \Delta$. Następnie przedłużamy ten homeomorfizm do homeomorfizmu płaszczyzny, tak aby odcinki pionowe (w $\mu = \text{const}$) poza punktami równowagi przechodziły na odpowiednie odcinki pionowe. Jest raczej jasne, że tak da się zrobić.

(b) W zdegenerowanym przypadku, gdy $f'_\mu(0,0) \neq 0$, krzywa punktów równowagi $\Gamma = \{f = 0\}$ może być bardzo skomplikowana (patrz Rysunek 3.5). Ale wiemy, że z każdą prostą pionową $\mu = \text{const}$ ta krzywa ma co najwyżej dwa punkty przecięcia. Oznaczmy Γ_μ przecięcie Γ z taką prostą. Zatem konstrukcja przeparametryzowania $\mu \longmapsto \varphi(\mu)$ polega na tym aby parametry μ, dla których $\#\Gamma_\mu = 2$, przeszły na lewo od $\lambda = 0$ a parametry μ, dla których $\#\Gamma_\mu = 0$ przeszły na prawo od $\lambda = 0$ (z zachowaniem ciągłości). Następnie, powtarzając argumenty z przypadku (a), konstrujemy najpierw ciągłe przekształcenie $(\mu, x) \longmapsto (\varphi(\mu), h_\mu(x))$ pomiędzy krzywymi Γ i Δ a następnie przedłużamy je w sposób ciągły z zachowaniem pionowości.

3.2. Transwersalność

Matematycznym aparatem do ścisłego sformułowania teorii bifurkacji i odpowiednich twierdzeń jest teoria transwersalności sformułowana przez francuskiego matematyka R. Thoma.

Rysunek 3.4. Bifurkacja modelowej rodziny i bifurkacja typowej rodziny.

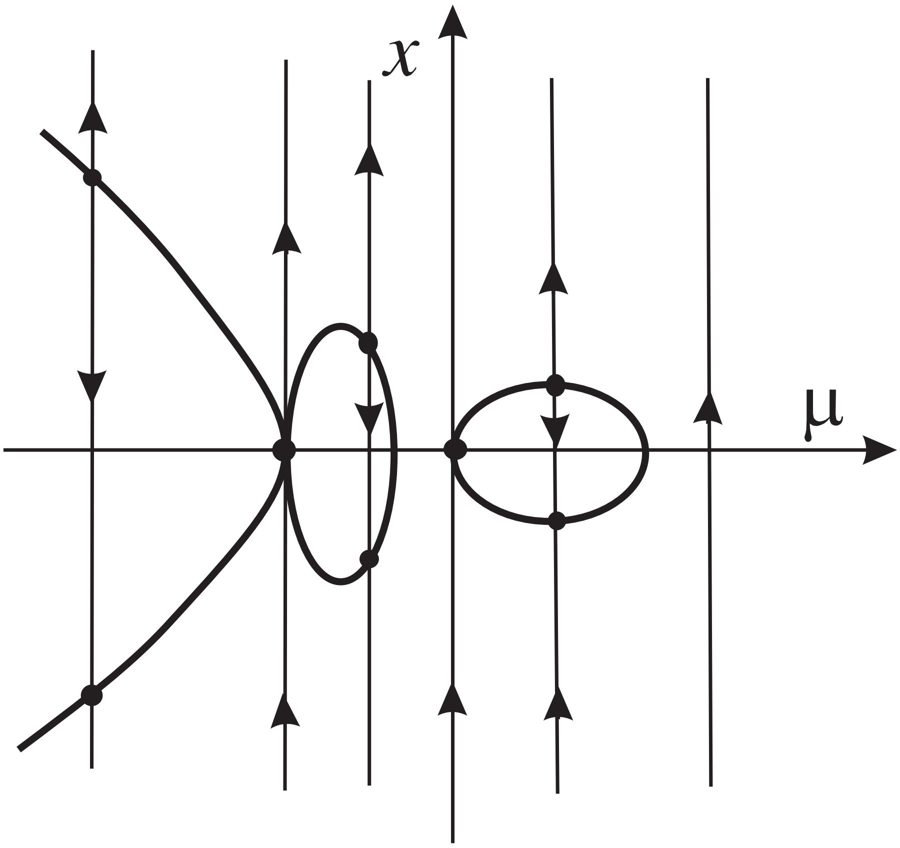
Niech M będzie $n-$wymiarową rozmaitością a $B \subset M$ będzie jej $k-$wymiarową podrozmaitością. Ponadto niech A będzie $m-$wymarową rozmaitością a

$$f : A \longmapsto M$$

będzie odwzorowaniem różniczkowalnym (o wystarczającej klasie różniczkowalności). W przypadku zwartych rozmaitości A i M w przestrzeni $C^k(A, M)$ odwzorowań wprowadza się naturalną topologię (której nie będę uściślał).

Definicja 3.4. Mówimy, że **odwzorowanie f jest transwersalne do podrozmaitości** B, jeśli dla każdego punktu $x \in A$ takiego, że $y = f(x) \in B$, ma miejsce następująca własność

$$f_* T_x A + T_y B = T_y M.$$



Rysunek 3.5. Bifurkacja nietypowej rodziny.

Gdy $A \subset M$ jest podrozmaitością i $f = id|_A$ jest włożeniem, to mówimy, że A **jest transwersalne do** B, gdy własność

$$T_y A + T_y B = T_y M$$

zachodzi dla każdego punktu $y \in A \cap B$. Mamy standardowe oznaczenia

$$f \pitchfork B \quad \text{i} \quad A \pitchfork B$$

dla własności transwersalności.

Przykład 3.5. (a) Niech $M = \mathbb{R}^2$ oraz $A \subset M$ i $B \subset M$ będą gładkimi krzywymi. Wtedy $A \pitchfork B$ gdy krzywa A przecina krzywę B pod niezerowym kątem (patrz Rysunek 3.6).

(b) Niech $M = \mathbb{R}^3$, $A \subset M$ to krzywa i $B \subset M$ to powierzchnia. Rysunek 3.7 pokazuje przypadki transwersalności i nietransweralsności.

(c) Przypadek $M = \mathbb{R}^3$ i dwu powierzchni $A \subset M$, $B \subset M$ przedstawia Rysunek 3.8.

(d) Gdy $M = \mathbb{R}^3$ i $A \subset M$, $B \subset M$ są krzywymi, to $A \pitchfork B$ wtedy i tylko wtedy gdy krzywe są rozłączne.

(e) Niech $M = \mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$, $A = \mathbb{R}^1$ i $B = \{x = 0\}$ oraz niech $f : A \longmapsto M$ będzie zadane wzorem $f(t) = (t^3, 0)$. Oczywiście $f(t) \in B$ tylko dla $t = 0$. Ale wtedy $f_*(0) = f'(0) = 0$. Zatem $f_* T_0 A + T_{(00)} B = T_{(0,0)} B \simeq B \neq T_{(0,0)} M$. Ten przykład pokazuje zasadność własności transwersalności odwzorowania to podrozmaitości.

Rysunek 3.6. Transwersalność krzywych na płaszczyźnie.

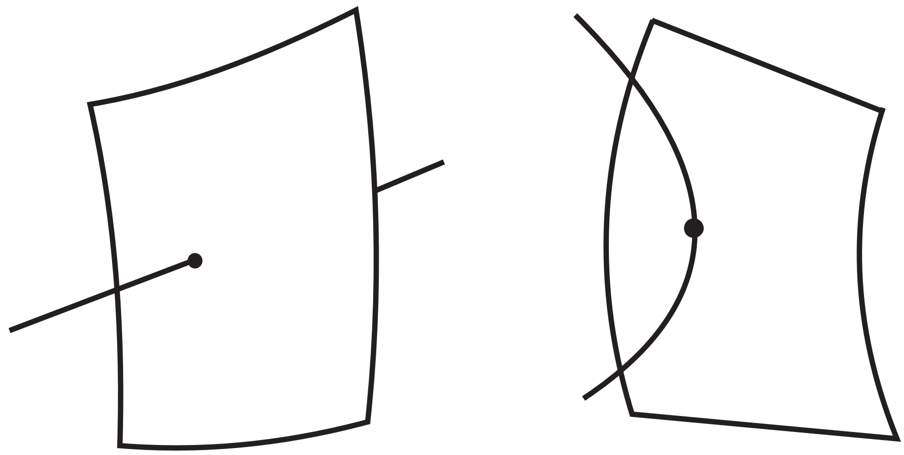
Zachodzi następujące fundamentalne twierdzenie pochodzące od Thoma[2].

Twierdzenie 3.6 (Thom)**.** *Niech M, A i B będą ustalonymi zwartymi rozmaitościami jak powyżej. Wtedy podzbiór przestrzeni odwzorowań $f : A \longmapsto M$ złożony z odwzorowań, które są transwersalne do B, jest otwarty i gęsty.*

[2] To Twierdzenie Thoma o Transwersalności, jak również jego uogólnienie podane poniżej, stanowiły istotny element stworzonej przez niego Teorii Katastrof . Ta teoria zawiera w sobie po części teorię osobliwości odwzorowań i funkcji jak również teorię bifurkacji układów dynamicznych.

Warto jeszcze dodać, że w przypadku uogólnienia Twierdzenia Thoma na przypadek rozmaitości niezwartych wprowadza się specjalną topologię (tzw. topologię Whitney'a) w przestrzeni odwzorowań klasy C^k.

To oznacza, że, z jednej strony, jeśli odwzorowanie f_0 jest transwersalne do B, to dowolne bliskie niemu odwzorowanie f_ε też jest transwersalne do B, a, z drugiej strony, jeśli f_0 nie jest transwersalne, to dowolnie blisko niego istnieje odwzorowanie f_ε, które już jest transwersalne.



Rysunek 3.7. Transwersalność krzywej i powierzchni w przestrzeni.

Dowód. Nietrudno zauważyć, że można ograniczyć się do sytuacji lokalnej, gdy $A \subset \mathbb{R}^m$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ są podzbiorami otwartymi a

$$B = \{y_1 = \ldots = y_{n-k} = 0\} \cap M$$

jest (lokalnie) podprzestrzenią kowymiaru $n - k$ (Zadanie 3.16).

Wtedy $f(x) = (f_1(x), \ldots f_n(x))$ i

$$T_y B = \{q \in \mathbb{R}^n : q_1 = \ldots = q_{n-k} = 0\} \subset T_y M = \mathbb{R}^n.$$

Jeśli $f(x_0) \in B$, tzn. $f_1(x_0) = \ldots f_{n-k}(x_0) = 0$, to f jest transwersalne w x_0 do B wtedy i tylko wtedy gdy wektory $f_*\partial_{x_1}, \ldots, f_*\partial_{x_m}$ razem z wektorami $\partial_{yn-k+1}, \ldots \partial_{y_n}$ rozpinają $\mathbb{R}^n$. (Tutaj ∂_{x_j} i ∂_{y_k} są bazowymi wektorami w $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ odpowiednio.) Do tego wystarczy, aby rzuty wektorów $f_*\partial_{x_j}$ na przestrzeń ilorazową $T_y M/T_y B \simeq \mathbb{R}^{n-k}$ rozpinały tę przestrzeń. To oznacza, że macierz

$$C = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \ldots & \partial f_1/\partial x_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial f_{n-k}/\partial x_1 & \ldots & \partial f_{n-k}/\partial x_m \end{bmatrix}$$

ma rząd rk$C \geqslant n - k$.

Mamy dwie możliwości:

(i) $m < n - k$ i wtedy rząd jest mniejszy od $n - k$,

(ii) $m \geqslant n - k$ (wtedy własność rk$C \geqslant n - k$ jest warunkiem otwartym w przestrzeni macierzy).

W przypadku (i) transwersalność oznacza brak przecięcia $f(A)$ z B i jest to warunek otwarty w przestrzeni odwzorowań. Również w przypadku (ii) nietrudno pokazać, że warunek transwersalności też jest otwarty (Zadanie 3.13).

Aby udowodnić gęstość własności transwersalności musimy wprowadzić dodatkowe pojęcia (Zadanie 3.14).

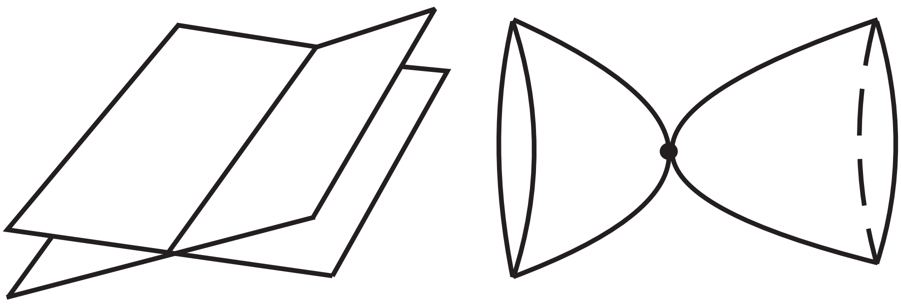
W przypadku (ii) weźmy lokalne odwzorowanie $g : A \longmapsto R^{n-k}$,

$$g(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-k}(x)).$$

Przypomnijmy (patrz Definicja 3.7 poniżej), że x_0 jest punktem krytycznym dla g, jeśli rk$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$ =rk$C < n-k$, a wartość $g(x_0)$ nazywa się wartością krytyczną dla g. Skorzystamy z klasycznego Twierdzenia Sarda (Twierdzenie 3.7 poniżej), które zapewnia, że zbiór wartości krytycznych dla g jest 'rzadki'. Zgodnie z Zadaniem 3.15 $f \pitchfork B$, gdy 0 nie jest wartością krytyczną dla g. Niech z będzie wartością niekrytyczną dla g i bliską zeru. Zaburzymy odwzorowanie $f = (g, h)$ w następujący sposób

$$f_\varepsilon(x) = (g(x) - z, h(x)).$$

Latwo sprawdzić, że f_ε jest transwersalne do B (Zadanie 3.16). □



Rysunek 3.8. Transwersalność powierzchnii w przestrzeni.

Definicja 3.7. Niech $h : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^l$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Mówimy, że że x_0 jest **punktem krytycznym** dla h jeśli rk$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0)$ nie jest maksymalny. Wartość $h(x_0)$ w punkcie krytycznym nazywa się **wartością krytyczną** dla h.

Twierdzenie 3.8 (Sard)**.** *Zbiór wartości krytycznych dla odwzorowania różniczkowalnego* $h : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^l$ *dostatecznie wysokiej klasy gładkości ma zerową miarę Lebesque'a.*

Uzasadnienie. Rozważmy przypadek $m = l = 1$. Nie jest wykluczone, że wartości krytyczne dla g mogą tworzyć zbiór gęsty w $\mathbb{R}$.

Możemy jednak pokryć każdy punkt krytyczny x_j odcinkiem I_j o szerokości $|I_j| \leqslant \varepsilon$ dla dowolnie małego ε. Ponieważ $g'(x_j) = 0$, to długość obrazu $g(I_j)$ takiego odcinka będzie szerokości rzędu $O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon)\,|I_j|$ (patrz Rysunek 3.9). Zatem

$$\left|g\left(\bigcup I_j\right)\right| \leqslant O(\varepsilon) \cdot \left|\bigcup I_j\right| \leqslant O(\varepsilon),$$

co dąży do zera przy $\varepsilon \to 0$.

W istocie ten sam argument pracuje przy dowolnych $m \leqslant l$ (Zadanie 3.17). Gdy $m > l$ dowód jest bardziej skomplikowany (z rozbiciem $\mathbb{R}^m$ na podzbiory stałego rzędu macierzy $\partial h/\partial x$). □

Następująca definicja jest potrzebna do uogólnienia Twierdzenia Thoma. Niech

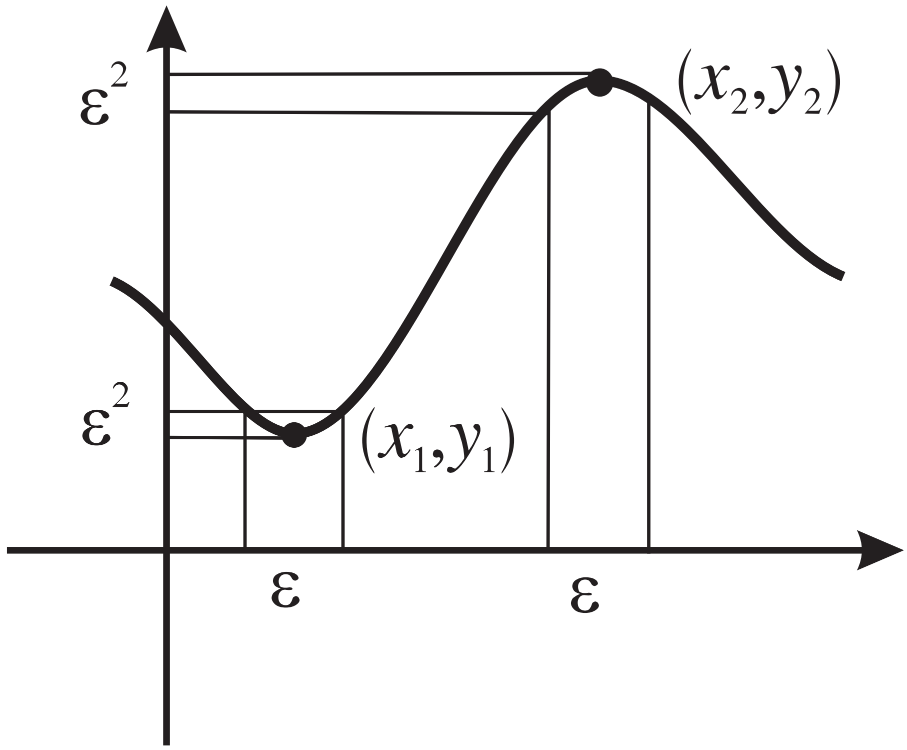
$$f : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

będzie odwzorowaniem dostatecznie wiele razy różniczkowalnym. Z takim odwzorowaniem można związać serię geometrycznych obiektów. Pierwszym z nich jest wykres

$$\{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n =: J^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m).$$

Innym jest wykres pochodnej, czyli wykres odwzorowania $Df : x \longmapsto (y, p) = (f(x), \frac{\partial f}{\partial x}(x))$,

$$\left\{\left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x}(x)\right)\right\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \cdot n} =: J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$



Rysunek 3.9. Twierdzenie Sarda.

Ogólnie, wykres odwzorowania $r-$tej pochodnej odwzorowania $x \longmapsto (f(x), Df(x), \ldots, D^r f(x))$ jest podzbiorem (dosyć dużej) przestrzeni oznaczanej przez $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Definicja 3.9. Przestrzenie $J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ nazywają się **przestrzeniami dżetów rzędu** r odzworowań z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Z każdym odzworowaniem postaci (3.3) wiąże się jego $r-$**ty dżet**

$$x \longmapsto j^r f(x) = (x, f(x), Df(x), \ldots, D^r f(x)) \in J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Analogicznie, jeśli A i M są rozmaitościami wymiarów m i n odpowiednio, to definiuje się przestrzenie $J^r(A, M)$ dżetów odwzorowań z A do M i z każdym różniczkowalnym odwzorowaniem $f : A \longmapsto M$ wiąże się jego $r$ty dżet $j^r f : A \longmapsto J^r(A, M)$.

Definicja 3.10. Jeśli $C \subset J^r(A, M)$ jest podrozmaitością, to mówimy, że odwzorowanie $f : A \longmapsto M$ jest **transwersalne do** C (oznaczenie $f \pitchfork C$) gdy $j^r f \pitchfork C$.

Twierdzenie 3.11 (Thom)**.** *Niech A, M i $C \subset J^r(A, M)$ będą ustalone. Wtedy zbiór odwzorowań $f : A \longmapsto M$, które są transwersalne do C, jest otwarty i gęsty w zbiorze wszystkich takich odwzorowań.*

Dowód. Ten dowód w znacznej części powtarza dowód Twierdzenia 3.6. Podstawowa różnica leży w dowodzie gęstości, a dokładniej, w wyborze zaburzenia. Otóż, zamiast zamiany $g(x) \to g(x) - z$ (gdzie z jest 'małą' wartością niekrytyczną dla g), bierze się zamianę $g(x) \to g(x) - z - \tilde{p}(x) - \tilde{q}(x, x) - \ldots - \tilde{s}(x, \ldots x)$, gdzie $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\ldots$, $\tilde{s}$ są odpowiednio 'małymi' przekształeceniami liniowymi, jednorodnymi kwadratowymi, czy jednorodnymi stopnia r. □

Przykład 3.12. Pewne naturalne warunki na odwzorowanie są interpretowane jako warunki na jego transwersalność w dżetach. Na przykład, warunek

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,\lambda) \neq 0 \ \text{ gdy } \ f(x,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda) = 0$$

wynika z jednoczesnej transwersalności odwzorowania

$$j^1 f : \mathbb{R}^2 = \{(x,\lambda)\} \longmapsto J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \{(x,\lambda,y,p_x,p_\lambda)\}$$

do dwóch podrozmaitości

$$C_1 = \{y=0\} \quad \text{i} \quad C_2 = \{y = p_x = 0\}\,.$$

Istotnie, transwersalność do C_1 oznacza, że $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ lub $\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \neq 0$ gdy $y = f(x,\lambda) = 0$. Tymczasem transweralność do C_2 oznacza, że $\begin{vmatrix} f'_x & f'_\lambda \\ f''_{xx} & f''_{x\lambda} \end{vmatrix} \neq 0$ gdy $y = f = 0$ i $p_x = f'_x = 0$.

W zagadnieniach teorii bifurkacji zawsze, gdy pojawiają się warunki podobnego charakteru jak w Przykładzie 3.12, możemy założyć, że albo są spełnione z prawdopodobieństwem 1 albo z takim samym przwdopodobieństwem nie mogą być spełnione. Ten drugi przypadek zachodzi gdy $\dim A + \dim C < \dim J^r(A,M)$. Taki jest praktyczny wniosek z twierdzeń Thoma.

ZADANIA

Zadanie 3.13. W przypadku $m \geqslant n-k$ zauważyć, że (w dowodzie Twierdzenia 3.6) $\mathrm{rk} C \geqslant n-k$ oznacza $\mathrm{rk} C = n-k$. Skorzystać z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej aby pokazać, że $f^{-1}(B) \subset A$ w otoczeniu x_0 jest podrozmaitością w A kowymiaru $n-k$. Pokazać następnie, że dla dowolnego f_ε bliskiego f również $f_\varepsilon^{-1}(B)$ jest lokalnie podrozmaitością kowymiaru $n-k$ bliską $f^{-1}(B)$. Wywnioskować stąd i z otwartości podzbioru macierzy rzędu $n-k$ w przestrzeni macierzy wymiaru $(n-k)\times n$, że f_ε jest transwersalne do B w otoczeniu x_0.

Zadanie 3.14. Pokazać lokalną gęstość własności transwersalności w przypadku $m < n-k$.
Wskazówka: Wybrać odpowiednie zaburzenie f_ε dla f, które nie jest transwersalne do B.

Zadanie 3.15. Pokazać, że $f \pitchfork B$ wtedy i tylko wtedy gdy 0 nie jest wartością krytyczną dla odwzorowania g.

Zadanie 3.16. Uzupełnić dowód Twierdzenia 3.6.
Wskazówka: Użyć odpowiedniego rozkładu jedności $1 = \sum \varphi_j(x)$ w A związanego z lokalnymi afinicznymi mapami w A, M i B. Lokalne zaburzenia wybierać w postaci $f_\varepsilon = (g - \psi_k(x) z_k, h(x))$, z odpowiednimi funkcjami $\psi_k(x)$ o zwartym nośniku i 'małymi' wektorami z_k. Na koniec skorzystać ze zwartości A.

Zadanie 3.17. Udowodnić Twierdzenie Sarda w przypadkach $m < l$ i $m = l > 1$.

3.3. Bifurkacje kowymiaru 1

Bifurkacje autonomicznych pól wektorowych będziemy dzielić na lokalne i nielokalne.

Lokalne bifurkacje zachodzą w otoczeniu punktu osobliwego $x=0$ dla wartości bifurkacyjnej parametru. Dokładniej, mamy rodzinę

$$\dot{x} = v(x;\mu)$$

taką, że

$$v(x,0) = Ax + \dots.$$

W przypadku typowych 1−parametrowych rodzin naruszenie warunku hi- perboliczności (tzn. $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \neq 0$ dla wszystkich wartości własnych) zachodzi w dwu przypadkach:

1. $\lambda_1(A) = 0$ i $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \neq 0$ dla $j > 1$; jest to **bifurkacja siodło–węzeł**.

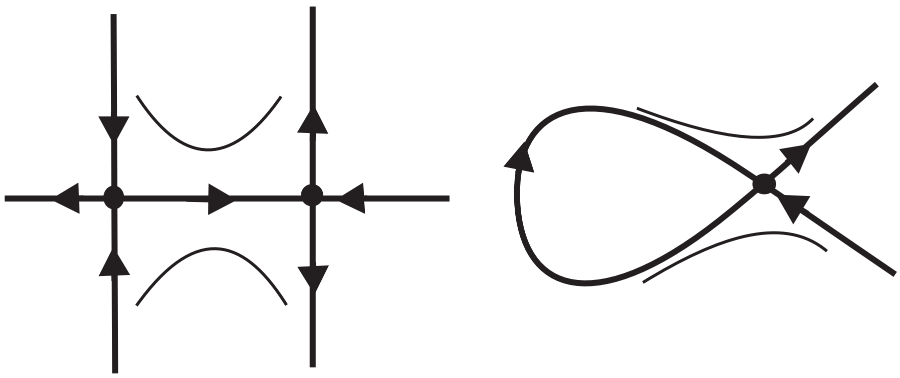
2. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i\omega \in i\mathbb{R} \setminus 0$ i $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$ dla $j > 2$; jest to **bifurkacja narodzin cyklu granicznego** albo **bifurkacja Andronowa–Hopfa**.

Mamy trzy **nielokalne bifurkacje** związane z orbitą okresową γ dla pola $v(x,0)$. Niech λ_j będą wartościami własnymi części liniowej przekształcenia powrotu Poincarégo. Przypomnijmy, że warunek hiperboliczności dla γ oznacza, że $|\lambda_j| \neq 1$ dla wszystkich j. Zatem typowe bifurkacje kowymiaru 1 mają miejsce w następujących przypadkach:

3. $\lambda_1 = 1$ i $|\lambda_j| \neq 1$ dla $j > 1$; jest to **bifurkacja siodło–węzeł dla orbity okresowej**.

4. $\lambda_1 = -1$ i $|\lambda_j| \neq 1$ dla $j > 1$; jest to **bifurkacja podwojenia okresu**.

5. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$. Tutaj przypadki, gdy $\lambda_1 = e^{2\pi ik/m}$ jest pierwiastkiem z 1 stopnia m, nazywają się **rezonansowymi**; dodatkowo, gdy $m = 3, 4$ to mówimy o **silnym rezonansie**.



Rysunek 3.10. Połączenie separatrys i pętla separatrys.

Na koniec mamy dwie **nielokalne bifurkacje** związane z połaczeniem separatrys (patrz Rysunek 3.10):

6. **Połączenie separatrys** różnych siodeł.

7. **Pętla separatrys** jednego siodła.

3.3.1. Redukcja do rozmaitości centralnej i forma normalna Poincarégo–Dulaca

Załóżmy, że mamy pole wektorowe

$$\dot{x} = v(x) = Ax + \dots$$

z punktem osobliwym $x = 0$. Możemy założyć, że macierz A ma postać blokowo diagonalną

$$A = A^s \oplus A^u \oplus A^c, \tag{3.4}$$

gdzie A^s (odpowiednio A^u i A^c) ma wartości własne z $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ (odpowiednio z $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$ i z $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$).

Twierdzenie 3.18 (Szoszitaiszwili)**.** *W sytuacji jak powyżej istnieje lokalny homeomorfizm $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longmapsto (\mathbb{R}^n, 0)$ przeprowadzający portret fazowy pola $v(x)$ na portret fazowy następującego pola*

$$\dot{y}_1 = -y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2, \quad \dot{y}_3 = w(y_3), \tag{3.5}$$

gdzie

$$w(y_3) = A^c y_3 + \dots$$

Dowód tego twierdzenia jest techniczny i skomplikowany (patrz [5]). Dlatego nie będziemy go tutaj przytaczać. Za to wyciągniemy z niego bardzo praktyczne zastosowania. Zauważmy też, że to twierdzenie jest uogólnieniem Twierdzenia Grobmana–Hartmana.

Definicja 3.19. Podrozmaitość zadaną równaniem

$$W^c = \{y_1 = 0,\ y_2 = 0\}$$

(w terminach (3.5)) nazywamy **rozmaitością centralną**.

Twierszenie Szoszitaiszwiliego mówi, że w przypadku niehiperbolicznego puktu osobliwego 'ciekawa część' dynamiki odbywa się na rozmaitości centralnej.

Dla rodziny pól wektorowych $v(x, \mu)$ możemy potraktować μ jako dodatkową zmienną, tzn. mamy układ

$$\dot{x} = v(x, \mu), \quad \dot{\mu} = 0,$$

do którego stosujemy Twierdzenie 3.18 (z $h(x, \mu) = (h_0(x, \mu), \mu)$). Mamy następującą **redukcję do rozmaitości centralnej**.

Stwierdzenie 3.20. *Dla rodziny $\dot{x} = v(x, \mu)$ z $v(x, 0) = Ax + \dots$ $A = A^s \oplus A^u \oplus A^c$, istnieje lokalny homeomeorfizm $(h_0(x, \mu), \mu)$ zadający topologiczną równoważność tej rodziny z następującą rodziną*

$$\dot{z} = w(z, \mu), \quad \dot{z}_1 = -z_1, \quad \dot{z}_2 = z_2.$$

Samo istnienie rozmaitości centralnej W^c jest uogólnieniem Twierdzenia Hadamarda–Perrona. Można jej poszukiwać jak w dwodzie Twierdzenia 1.19. Przy tym okaże się, że rozmaitość centralna nie jest wyznaczona jednoznacznie; zależy ona od wyboru przedłużenia pola (lub dyfeomorfizmu) na całe $\mathbb{R}^n$.

Ale istnieje sposób wyznaczenia W^c w sposób formalny. Poszukujemy jej jako wykresu

$$W^c = \{x_1 = f(x_3), \quad x_2 = g(x_3) : x_3 \in E^c\}$$

(gdzie współrzędne (x_1, x_2, x_3) są związane z rozkładem (3.4)), który jest niezmienniczy względem pola $v(x)$. Okazuje się, że odwzorowania $f : E^c \longmapsto E^s$ i $g : E^c \longmapsto E^u$ mają jednoznacznie wyznaczone szeregi Taylora, $f(x_3), g(x_3) = O(|x_3|^2)$. Na W^c, które jest parametryozwane przez $x_3 \in E^c$, otrzymujemy pole wektorowe

$$\dot{x}_3 = w(x_3).$$

Ta redukcja do W^c nazywa się **redukcją Lapunowa–Schmidta**.

Niestety, na ogół okazuje się, że szeregi zadające f i g są rozbieżne (nawet gdy $v(x)$ było analityczne). Tym też tłumaczy się niejednoznaczność W^c w sensie topologicznym.

Przykład 3.21. Rozważmy układ

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = y - x^2.$$

Tutaj $W^u = \{x = 0\}$ jest rozmaitością niestabilną. Rozmaitość centralną poszukujemy w postaci $W^c = \{y = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\}$. Podstawiając takie y do układu, dostajemy

$$\left(a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\right) - x^2 = \left(2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots\right) \cdot x^2.$$

To prowadzi do następującej rekurencji: $a_2 = 1$, $a_{n+1} = na_n$, z rozwiązaniem $a_n = (n-1)!$. Zatem rozmaitość centralna zadaje się jednoznacznym, ale rozbieżnym, szeregiem

$$y = \sum_{n \geqslant 2} (n-1)! x^n$$

(Zadania 3.27 i 3.28).

Innym narzędziem użytecznym w teorii bifurkacji, które również opiera się na (często rozbieżnych) szeregach formalnych, jest następne twierdzenie. Rozważamy kiełki analitycznych pól wektorowych

$$\dot{x} = Ax + O(|x|^2), \quad x \in (\mathbb{C}^n, 0)\,, \tag{3.6}$$

takich, że macierz A jest diagonalna, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Przypomnijmy jeszcze standardowe oznaczenia $(e_1, \ldots, e_n)$ dla standardowej basy w $\mathbb{C}^n$ (zatem $x = \sum x_j e_j$), $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ i $|k| = k_1 + \ldots k_n$.

Definicja 3.22. Mówimy, że wartości własne spełniają relację **rezonansową typu** (j, k) , $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, jeśli

$$\lambda_j = k_1\lambda_1 + \ldots k_n\lambda_n = (k, \lambda).$$

Twierdzenie 3.23 (Poincaré–Dulac)**.** *Załóżmy że mamy kiełek zespolonego analitycznego pola wektorowego (3.6). Wtedy istnieje zamiana*

$$x = y + O(|y|^2)$$

taka, że każda składowa po prawej stronie jest formalnym szeregiem potęgowym od y, która prowadzi do układu

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j + \sum c_{j;k} y^k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.7}$$

przy czym sumy po prawych stronach równań (3.7) biegną po takich wielowskaźnikach $k = (k_1, \ldots, k_n)$, że jest spełniona relacja rezonansowa typu (j, k) .

Dowód. Sprowadzanie do **postaci normalnej Poincarégo–Dulaca** (3.7) odbywa się przy pomocy serii zamian postaci

$$x = y - \sum_{j,k:|k|=m} b_{j,k} y^k e_j, \tag{3.8}$$

czyli dodajemy wyrazy jednorodne stopnia m. (Zaczynamy od $m = 2$, potem bierzemy $m = 3$, itd.) Łatwo sprawdzić, że przekształcenie odwrotne do (3.8) ma postać $y = x + \sum_{j,k:|k|=m} b_{j,k} y^k e_j + \ldots$ (Zadanie 3.29).

Załóżmy, że w polu (3.6) do stopnia $m-1$ występują tylko wyrazy rezonansowe (założenie indukcyjne). Chcemy przy pomocy podstawienia (3.8) zlikwidować wyrazy nierezonansowe stopnia dokładnie m. Mamy

$$\dot{x}_i = \dot{y}_i - \sum_{k:|k|=m} b_{i,k} \left(y^k\right)^{\cdot}, \tag{3.9}$$

gdzie

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + (\text{wyrazy rezon. st. } \leqslant m) + h.o.t.$$

i

$$\sum_{k:|k|=m} b_{i,k} \left(y^k\right)^{\cdot} = \sum b_{i,k} \cdot (\lambda, k)\, y^k + h.o.t.$$

Z lewej strony wzoru (3.9), po podstawieniu (3.8), mamy

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \lambda_i \left(y_i - \sum_{k:|k|=m} b_{i,k} y^k \right) + (\text{wyrazy rezon. st. } \leqslant m-1) \\ &\quad + \sum_{k:|k|=m} a_{i,k} y^k + h.o.t. \end{aligned}$$

Teraz, porównując wyrazy jednorodne stopnia m, dostajemy równania

$$b_{i,k} \cdot \{(\lambda, k) - \lambda_i\} = a_{i,k}.$$

Z nich jasno wynika, że jeśli $(\lambda, k) - \lambda_i \neq 0$, to można dobrać $b_{i,k}$ tak, aby zlikwidować odpowiedni nierezonansowy wyraz $x^k e_i$. Pozostają tylko wyrazy rezonansowe. □

Przykład 3.24. Rozważmy przypadek *rezonansowego węzła*

$$\dot{x}_1 = x_1 + \ldots, \quad \dot{x}_2 = n x_2 + \ldots,$$

czyli dla $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = n \in \mathbb{N} \setminus 1$ Jak łatwo stwierdzić, jedyną relacją rezonansową jest $\lambda_2 = n\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2$. Zatem normalna forma Poincarégo–Dulaca jest następująca

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = n y_2 + c y_1^n$$

(Zadanie 3.30). Okazuje się, że w tym przypadku zamiana prowadząca do postaci normalnej jest analityczna (o ile wyjściowy kiełek był analityczny). [3]

Przykład 3.25. Dla *siodło–węzła*

$$\dot{x}_1 = \ldots, \quad \dot{x}_2 = x_2 + \ldots,$$

czyli z $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$, relacje rezonasowe są postaci $\lambda_1 = k\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2$ i $\lambda_2 = k\lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2$. Stąd wynika następująca forma Poincarégo–Dulaca

$$\dot{y}_1 = \sum_{k \geqslant 2} a_k y_1^k, \quad \dot{y}_2 = y_2 \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} b_k y_1^k \right).$$

Okazuje się, że na ogół ta forma normalna nie jest analityczna.

Przykład 3.26. *Dla (1 : −1) rezonansowego siodła*

$$\dot{x}_1 = x_1 + \ldots, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \ldots,$$

czyli z $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$ relacje rezonansowe są postaci $\lambda_1 = (k+1)\lambda_1 + k\lambda_2$ i $\lambda_2 = k\lambda_1 + (k+1)\lambda_2$. Stąd wynika następująca postać normalna Poincarégo–Dulaca

$$\dot{y}_1 = y_1 \left(1 + \sum a_k (y_1 y_2)^k \right), \quad \dot{y}_2 = -y_2 \left(1 + \sum b_k (y_1 y_2)^k \right).$$

[3] Do tego przypadku można też zaliczyć sytuację, gdy $n = 1$, czyli, gdy część liniowa nie jest diagonalna. Istnieje naturale rozszerzenie Twierdzenia 3.23 na przypadek, gdy część linowa pola posiada nietrywialne klatki Jordana.

Również i ta forma nie jest na ogól analityczna (Zadanie 3.31).

ZADANIA

Zadanie 3.27. Znaleźć rozmaitość centralną punktu $(0,0)$ dla układu z Zadania 1.33 przy $a=-1$, tzn. dla $\dot{x}=-x+y+x^2$, $\dot{y}=x-y+y^2$.

Zadanie 3.28. Znaleźć przybliżenie rozmaitości centralnej z dokładnością do wyrazów sześciennych dla punktu $(0,0,0)$ układu $\dot{x}=-y+x^2+zy$, $\dot{y}=x+xy+z^2$, $\dot{z}=z+xy$.

Zadanie 3.29. Pokazać, że przekształcenie odwrotne do przekształcenia (3.8) ma postać jak w dowodzie Twierdzenia 3.23.

Zadanie 3.30. Pokazać, że w każdym innym przypadku węzła, tzn. gdy $1<\lambda_2/\lambda_1\notin\mathbb{N}$, normalna forma Poincarégo–Dulaca jest liniowa (brak nieliniowych wyrazów rezonansowych).

Zadanie 3.31. Uogólnić Przykład 3.26 na przypadek $(p:-q)$ −rezonansowego siodła, tzn. gdy $0<\lambda_1/\lambda_2=-p/q\in\mathbb{Q}$ (ułamek zredukowany).

3.3.2. Bifurkacja siodło–węzeł

Mamy 1−parametrową rodzinę pól wektorowych

$$\dot{x}=v(x;\mu)=v_\mu(x),\qquad (x,\mu)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0\times 0)\,.$$

Na nią nakładamy następujące warunki:

1. $v(0;0)=0$ i $v(x;0)=Ax+\dots$

2. Macierz A ma jedną zerową wartość własną, $\lambda_1=0$, (w szczególności $\det A=0$) i $\mathrm{Re}\lambda_j\neq 0$ dla $j>1$. Zatem można założyć, że A ma postać blokową

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&B\end{bmatrix}.$$

3. Niech (x,y) będzie liniowym układem współrzędnych związanym z powyższą postacią A. Możemy przepisać układ w postaci

$$\dot{x}=f(x,y;\mu),\quad \dot{y}=By+\dots,$$

gdzie $f(0,0;0)=0$ i $f'_x(0,0;0)=0$, $f'_y(0,0;0)=0$. Następne założenie mówi, że

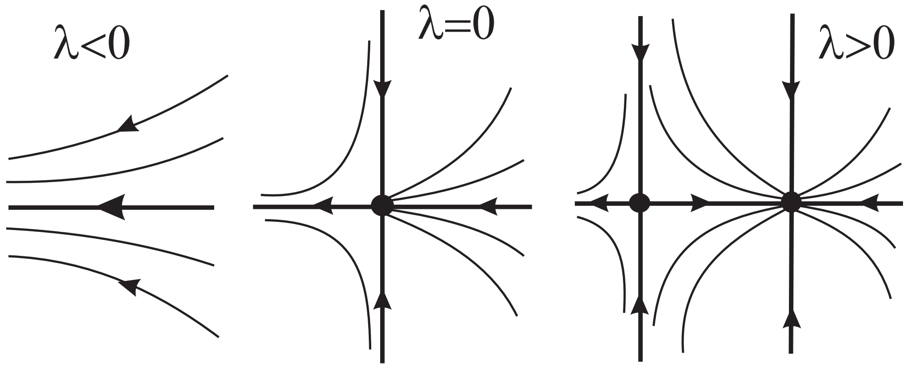
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0;0)\neq 0.$$

4. Ostatnie założenie mówi, że

$$\frac{\partial f}{\partial\mu}(0,0;0)\neq 0$$

(Zadanie 3.34).

Uwaga 3.32. Powyższe warunki są warunkami w przestrzeni $J^2=J^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ dżetów rzędu 2. Są to warunki na transwersalność względem pewnych podrozmaitości w J^2. Dzięki Twierdzeniu 3.11 typowe $v(x;\mu)$ spełnia te warunki (porównaj też Przykład 3.12).



Rysunek 3.11. Bifurkacja siodło–węzeł.

Twierdzenie 3.33. *Jeśli są spełnione powyższe warunki, to rodzina* $\{v_\mu\}$ *jest wersalna. W szczególności, jest ona równoważna jednej z rodzin postaci*

$$\dot{x} = \lambda \pm x^2, \quad \dot{y}_1 = -y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2.$$

Dowód. Z twierdzenia o redukcji do rozmaitości centralnej możemy założyć, że mamy układ postaci

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad \dot{y}_1 = -y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2.$$

Mamy następujące własności wynikające bezpośrednio z Warunków 1, 2, 3 i 4:

(i) $f(0, 0) = 0$,
(ii) $f'_x(0, 0) = 0$,
(iii) $f''_{xx}(0, 0) \neq 0$,
(iv) $f'_\mu(0, 0) \neq 0$.

Dalszy dowód przebiega dokładnie jak w Przykładzie 3.3.

Na Rysunku 3.11 jest przedstawiona bifurkacja siodło–węzeł dla rodziny dwuwymiarowych pól wektorowych. □

ZADANIA

Zadanie 3.34. Pokazać, że Warunek 4 posiada następującą interpretację. Z Warunku 3 wynika, że równanie $f'_x = 0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $x = x_0(y, \mu)$ (punkt lokalnego extremum). Niech $g(y, \mu) = f(x_0(y, \mu), y; \mu)$ (wartość w tego ekstremum). Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0; 0) \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$.

Zadanie 3.35. Dla 2−parametrowej rodziny 1−wymiarowych pól wektorowych $\dot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 x + x^3$ (deformacja osobliwości typu siodło–węzeł kowymiaru 2) zbadać bifurkacje punktów równowagi.

3.3.3. Bifurkacja Andronowa–Hopfa

Mamy 1−parametrową rodzinę pól wektorowych

$$\dot{x} = v(x; \mu) = v_\mu(x), \quad (x, \mu) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times 0).$$

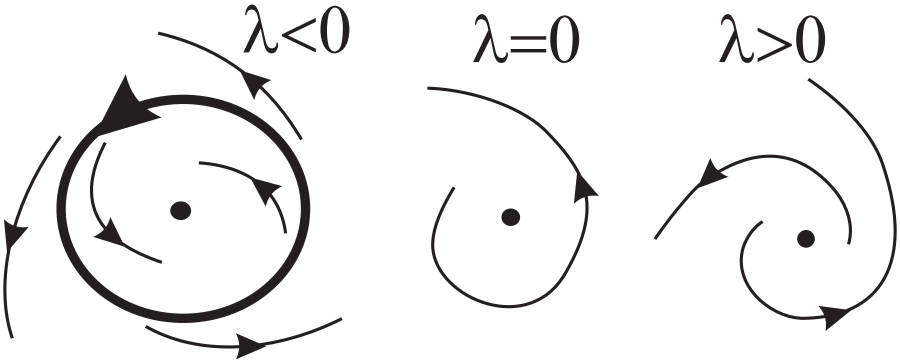
Na nią nakładamy następujące warunki:

1. $v(0; 0) = 0$, zatem $v(x; 0) = Ax + \ldots$

2. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i\omega \in i\mathbb{R} \setminus 0$ i $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$ dla $j > 2$. To implikuje $\det A \neq 0$ i z Twierdzenia o Funkcjach Uwikłanych równanie $v(x;\mu) = 0$ ma rozwiązanie $x = x_0(\mu)$, które odpowiada punktowi równowagi. Następnie przesuwamy ten punkt równowagi do początku układu współrzędnych: $x \longmapsto x - x_0(\mu)$. Teraz mamy układ

$$\dot{x} = A(\mu)x + \ldots.$$

3. Następne założenie mówi, że



Rysunek 3.12. Ostra utrata stabilności.

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\mathrm{Re}\lambda_{1,2}(\mu)|_{\mu=0} \neq 0.$$

4. Ostatnie założenie wykorzystuje formę normalną Poincarégo–Dulaca dla $\mu = 0$. W dziedzinie zespolonej mamy $\lambda_1 = -\lambda_2$ i zgodnie z Przykładem 3.26 forma normalna przyjmuje postać

$$\dot{z}_1 = i\omega z_1\left(1 + \sum a_j\,(z_1 z_2)^j\right), \quad \dot{z}_2 = -i\omega z_2\left(1 + \sum b_j\,(z_1 z_2)^j\right),$$

gdzie $z_{1,2} = x_1 \pm \sqrt{-1}x_2 + \ldots = y_1 \pm i y_2$ są (formalnymi) zmiennymi zespolonymi po ograniczniu do rozmaitości centralnnej. Ponieważ wyjściowe pole było rzeczywiste, to $z_2 = \bar{z}_1$ i powyższe równania są względem siebie sprzężone. W zmiennych rzeczywistych $y_1 = x_1 + \ldots$ i $y_2 = x_2 + \ldots$ dostajemy następującą *postać normalną Poincarégo–Dulaca dla ogniska*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1\left(c_3 r^2 + c_5 r^4 + \ldots\right) - \omega y_2\left(1 + d_3 r^2 + \ldots\right), \\ \dot{y}_2 &= \omega y_1\left(1 + d_3 r^2 + \ldots\right) + y_2\left(c_3 r^2 + c_5 r^4 + \ldots\right), \end{aligned}$$

gdzie $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. Tutaj $c_3, c_5, \ldots$ są liczbami ogniskowymi Lapunowa–Poincarego z Definicji 2.13 (Zadanie 3.40).

Ostatni warunek niezdegenerowania mówi, że

$$c_3 \neq 0.$$

Następujące twierdzenie nosi też nazwę **Twierdzenia o narodzinach cyklu granicznego** i jest najbardziej chyba znanym twierdzeniem z teorii bifurkacji.

Twierdzenie 3.36 (Andronov–Hopf)**.** *Jeśli są spełnione powyższe warunki, to rodzina* $\{v_\mu\}$ *jest wersalna. W szczególności jest ona równoważna rodzinie*

$$\dot{x}_1 = x_1(\lambda \pm r^2) - \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 + x_2(\lambda \pm r^2), \quad \dot{y}_1 = -y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2,$$

($r^2 = x_1^2 + x_2^2$) *lub (równoważnie i na rozmaitości centralnej) rodzinie*

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega)z \pm z\,|z|^2\,, \qquad z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2. \tag{3.10}$$

Rysunek 3.13. Łagodna utrata stabilności.

Uwaga 3.37. Z dokładnością do zmiany orientacji płaszczyzny (np. $(x, y) \longmapsto (x, -y)$) można przyjąć, że częstotliwość $\omega > 0$. Przy tym założeniu mamy dwie lokalne bifurkacje rodzin (3.10) odpowiadających dwu wartościom $c_3 = 1$ i $c_3 = -1$. Są one przedstawione na Rysunkach 3.12 i 3.13 odpowiednio. Różnica pomiędzy tymi rysunkami ma istotne znaczenie praktyczne.

Na Rysunku 3.12 obserwujemy tzw. **ostrą utratę stabilności**. Istotnie, dla $\lambda < 0$ punkt równowagi jest stabilny (chociaż 'basen' jego przyciągania kurczy się) a dla $\lambda \geqslant 0$ punkt równowagi staje się 'globalnie' niestabilny (tutaj układ kompletnie się rozstraja).

Na Rysunku 3.13 mamy do czynienia z tzw. **łagodną utratą stabilności**. Dla $\mu \leqslant 0$ punkt równowagi jest 'globalnie' stabilny i dla $\lambda > 0$ traci on stabilność. Ale dla $\lambda > 0$ pojawia się stabilny cykl graniczny, zlokalizowany blisko punktu równowagi. Zatem układ (np. mechaniczny) zaczyna lekko oscylować wokół położenia równowagi.

Dowód Twierdzenia 3.36. Podobnie jak w przypadku Twierdzenia o Bifurkacji Siodło–Węzeł sprowadzamy najpierw zagadnienie do sytuacji dwuwymiarowej (na rozmaitości centralnej).

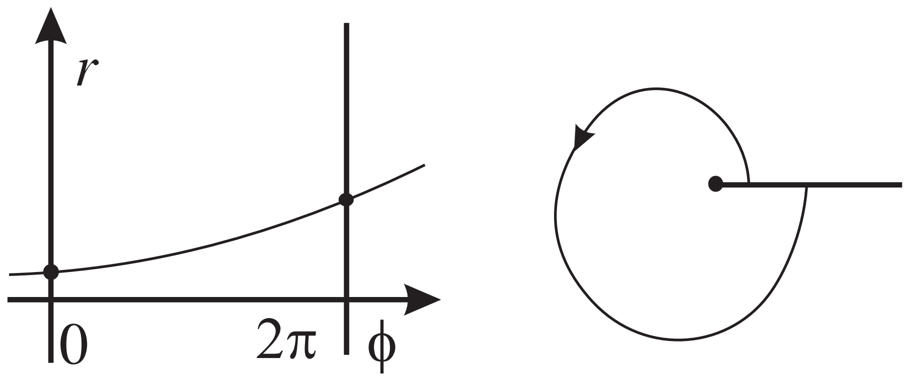
Lekko uzupełniając dowód Twierdzenia Poincarégo–Dulaca sprowadzamy całą rodzinę do następującej postaci normalnej, modulo wyrazy rzędu $\geqslant 4$:

$$\dot{z} = (c_1(\mu) + i\omega(\mu))\, z + (c_3(\mu) + id_3(\mu))\, |z|^2\, z + O(|z|^4), \tag{3.11}$$

$z = y_1 + iy_2$, gdzie $c_1(0) = 0$, $c_1'(0) \neq 0$ i $c_3(0) \neq 0$ (Zadanie 3.41). Możemy spokojnie przyjąć, że $c_1(\mu) = \mu$, i, przechodząc do biegunowego układu współrzędnych, $z = re^{i\varphi}$, możemy napisać

$$\dot{r} = r\left(\mu + c_3 r^2 + O(r^3)\right), \quad \dot{\varphi} = \omega + O(r^2) \tag{3.12}$$

(Zadanie 3.42).



Rysunek 3.14. Dowód Twierdzenia Andronowa–Hopfa.

Dla układu (3.12) definiujemy przekształcenie powrotu Poincarégo $P : \{\varphi = 0\} \longmapsto \{\varphi = 2\pi\}$ jak na Rysunku 3.14. Dla ustalenia uwagi założymy, że $c_3 = 1$. Dalszą analizę dzielimy na trzy kroki.

(a) Dla $\mu \geqslant 0$ mamy $\dot{r} > 0$ (dla $r > 0$), czyli $P(r) > r$ i nie ma cykli granicznych.

(b) Niech $\mu < 0$. Rozważmy obszar $\{0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{-\mu}\}$. Dokonajmy następującej normalizacji

$$r = \tau R, \quad \mu = -\tau^2.$$

Wtedy w obszarze $\{0 \leqslant R \leqslant 2\}$ dostajemy układ

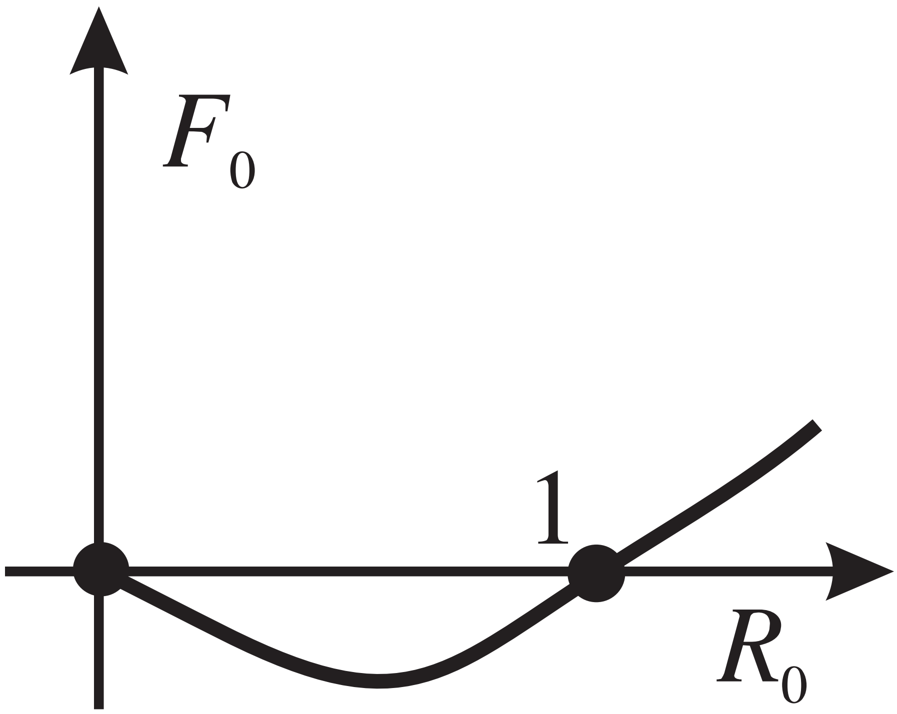
$$\dot{R} = \tau^2 R\left(-1 + R^2 + O(\tau)\right), \quad \dot{\varphi} = \omega + O(\tau) \tag{3.13}$$

dla małego parametru τ. Teraz już łatwo wyliczyć przekształcenie P. Zauważmy, że rozwiązanie układu (3.13) z warunkiem początkowym $R(0) = R_0$, $\varphi(0) = 0$ spełnia $R(t) = R_0 + O(\tau)$. Zatem

$$\begin{aligned} P(R_0) - R_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{dR}{d\varphi} d\varphi = \frac{\tau^2}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{R(-1 + R^2 + \ldots)}{1 + \ldots} d\varphi \\ &= \tau^2 \frac{2\pi}{\omega} R_0(R_0^2 - 1 + O(\tau)). \end{aligned}$$

Oznaczmy $F(R_0, \tau) = (P(R_0) - R_0)/\tau^2 = F_0(R_0) + O(\tau)$, gdzie wykres funkcji $F_0 R_0) = \pi R_0(R_0^2 - 1)/\omega$ jest przedstawiony na Rysunku 3.15. Widzimy, że równanie $F(R_0, \tau) = 0$ posiada dokładnie dwa proste rozwiązania $R_0 = 0$ i $R_0 = 1 + O(\tau)$ (Zadanie 3.43). Pierwsze z nich odpowiada punktowi równowagi, a drugie cyklowi granicznemu bliskiemu okręgu $\{r = \sqrt{-\mu}\}$.

(c) Dla $\mu < 0$ rozważmy obszar $\{2\sqrt{-\mu} < r < \varepsilon\}$ dla małego $\varepsilon > 0$ (niezależnego od μ). Z (3.12) łatwo widać, że tutaj $\dot{r} > 0$ i nie może być cykli granicznych.



Rysunek 3.15. Wykres funkcji F_0.

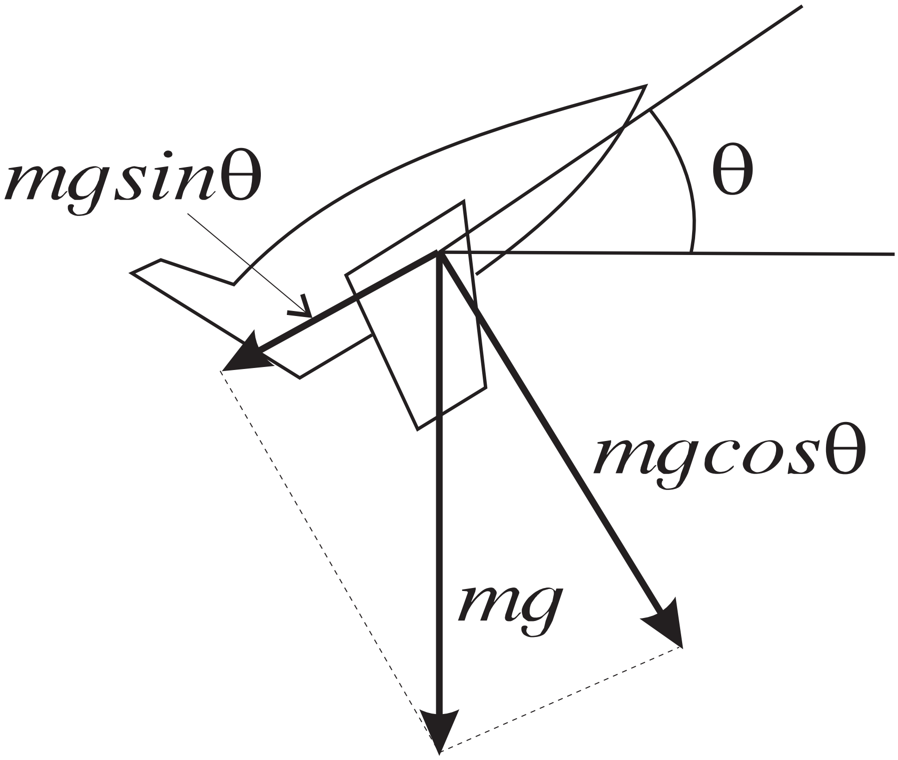
Widać zatem, że w każdej z trzech powyższych sytuacji portrety fazowe są 'jakościowo' takie same jak dla modelowej rodziny (3.10). Wypadałoby jeszcze skonstruować rodzinę $\{h_\mu\}$ lokalnych homeomorfizmów realizujących topologiczne orbitalne równoważności odpowiednich portretów fazowych. Jest to dosyć żmudne zadanie (jeśli potraktować je bardzo serio) i my je opuścimy (nawet w [5] jest to pominięte). □

Uwaga 3.38. E. Hopf w swojej oryginalnej pracy udowodnił ogólniejsze wynik niż Twierdzenie 3.36. Mianowicie opuścił on założenie, że $c_3 \neq 0$ (patrz [14]). Pokazał on istnienie $1-$parametrowej rodziny γ_ν rozwiązań okresowych dla pól wektorowych $v_{\mu(\nu)}(x)$, gdzie $(\mathbb{R}_+, 0) \ni \nu \longrightarrow \mu(\nu)$ jest pewnym gładkim odwzorowaniem. To twierdzenie nazywa się **Twierdzeniem o Bifurkacji Hopfa**. Na przykład, dla rodziny

$$\dot{z} = (\mu + i)\, z = v_\mu(z, \bar{z})$$

mamy rodzinę rozwiązań okresowych $\gamma_\nu = \left\{|z|^2 = \nu\right\}$ dla jednego pola $\dot{z} = iz = v_0(z, \bar{z})$, tzn. $\mu(\nu) \equiv 0$.

Arnold [5] często podkreślał, że w przypadku $c_3 \neq 0$ odpowiednią bifurkację badał równolegle A. Andronov [2]. Dlatego też bifurkacja z Twierdzenia 3.36 nazywa się **Bifurkacją Andronowa–Hopfa**.



Rysunek 3.16. Szybowiec Żukowskiego.

Przykład 3.39 (Model Żukowskiego szybowca)**.** Niech samolot leci z prędkością v (która może się zmieniać) i jest podniesiony pod kątem θ względem poziomu (patrz Rysunek 3.16). Na samolot działają następujące siły: siła ciągu F_c skierowana wzdłuż samolotu, siła ciężkości mg skierowana do dołu i siła oporu powietrza proporcjonalna do v^2. Rozkładamy siłę ciężkości na składową wzdłuż samolotu (powodującą wytracanie prędkości) i w kierunku prostopadłym (powodując obrót w dół). Mamy zatem następującą parę równań: $m\dot{v} = F_c - mg\sin\theta - c_2v^2$ i $mv\dot{\theta} = -mg\cos\theta + c_2v^2$. Tutaj stałe c_1 i c_2 zależą od kilku czynników, których nie będę specyfikował (patrz [8], Rozdz. 3, Paragr. 3) i [7], Rozdz. 14, Paragr. 3, Rozdz. 15, Paragr. 3). Po odpowiedniej normalizacji $y = \mathrm{const} \cdot v$ dostajemy następującą 2−parametrową rodzinę pól wektorowych

$$\dot{\theta} = (y^2 - \cos\theta)/y, \quad \dot{y} = \lambda - \mu y^2 - \sin\theta, \tag{3.14}$$

$-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $y \geqslant 0$,z biegunem wzdłuż $\{y = 0\}$.

Rozważmy najpierw przypadek $\lambda = 0$, który odpowiada modelowi szybowca. Po pomnożeniu przez y (przeskalowanie czasu) dostajemy portret fazowy regularnego pola

$$V = (y^2 - \cos\theta)\partial_\theta - y(\sin\theta + \mu y^2)\partial_y. \tag{3.15}$$

Przy $\mu = 0$ dostajemy układ hamiltonowski z całką pierwszą

$$F = \frac{1}{3}y^3 - y\cos\theta$$

i punktami równowagi $S_{\pm} = (\pm\pi/2, 0)$ i $C = (0,1)$. Przy $\mu > 0$ dostajemy $\mathrm{div}V = -2\mu y < 0$, czyli funkcja $\Phi = y$ jest funkcją Dulaca dla pola (3.14). Stąd łatwo wynika, że dla $\mu = 0$ ruch szybowca jest okresowy (oscylujący wokół centrum C) a dla $\mu > 0$ odpowiedni punkt krytyczny C (bifurkujący z $(0,1)$) jest globalnie stabilnym ogniskiem (Zadanie 3.44). To znaczy, że ruch szybowca stabilizuje się.

Dla ogólnej rodziny (3.14) z małymi λ i μ można badać pojawiające się możliwe cykle graniczne metodą całek abelowych (patrz Przykład 4.5 poniżej). Przyrost ΔF całki pierwszej wzdłuż trajektorii układu (3.14) (od cięcia do cięcia) wynosi w przybliżeniu

$$\int \dot{F}dt = \int \left(y^2 - \cos\theta\right)\left(\lambda - \mu y^2\right)dt \approx \int_{F=c} (\lambda - \mu y^2) y d\theta = \lambda I_0(c) - \mu I_1(c),$$

gdzie $I_0(c) = \int\int dydx$ jest polem obszaru zakreślonego przez krzywą $F(\theta, y) = c$. W [7] pokazano, że funkcja $c \longmapsto I_1(c)/I_0(c)$ jest monotoniczna, czyli, że równanie $\lambda I_0(c) - \mu I_1(c) = 0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie. To oznacza, że układ (4.14) dla małych λ i μ może posiadać co najwyżej jeden cykl graniczny.

Tutaj w momencie, gdy dywergencja pola (3.14) w ognisku C jest zerowa, zachodzi bifurkacja Andronowa–Hopfa. Można sprawdzić, że jest ona niezdegenerowana (zachęcam czytelników do sprawdzenia tego).

ZADANIA

Zadanie 3.40. Pokazać, że współczynniki $c_3, c_5, \ldots$ z Punktu 4 założeń do Twierdzenia Andronowa–Hopfa pokrywają się ze liczbami oniskowymi Lapunowa–Poincarégo z Definicji 2.13. Znaleźć zależność pomiędzy wspólczynnikami c_{2j+1} i d_{2j+1} a a_j i b_j.

Zadanie 3.41. Udowodnić wzór (3.11).
Wskazówka: Redukcję skończonej liczby wyrazów rezonansowych można przeprowadzać jednocześnie dla $1-$parametrowej rodziny.

Zadanie 3.42. Udowodnić wzór (3.12).

Zadanie 3.43. Pokazać ściśle, że równanie $F = 0$ z dowodu Twierdzenia 3.36 ma dokładnie dwa rozwiązania.

Zadanie 3.44. Zbadać punkty osobliwe pola (3.15). Naszkicować portrety fazowe dla $\mu = 0$ i $\mu \neq 0$.

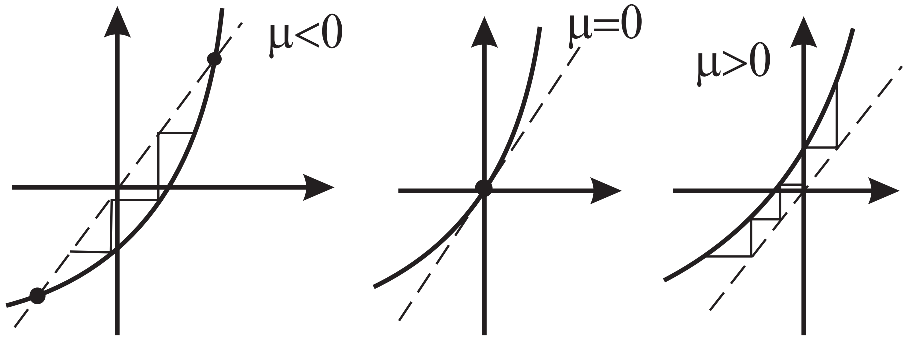
3.3.4. Bifurkacje dla cykli granicznych

Niech $\gamma \subset M$ będzie zamkniętą krzywą fazową dla pola wektorowego $v_0(x)$ na rozmaitości M ($n-$wymiarowej). Ponadto pole $v_0(x)$ jest zanurzone w $1-$parametrowej rodzinie $v_\mu(x)$, $\mu \in (\mathbb{R}, 0)$, pól wektorowych na M. Weźmy cięcie S transwersalne do γ w M. Dla μ bliskich 0 mamy dobrze zdefiniowane przekształcenia Poincarégo $P_\mu : S \longmapsto S$. Utożsamiając S z $\left(\mathbb{R}^{n-1}, 0\right)$, otrzymujemy rodzinę lokalnych przekształceń

$$f_\mu : \left(\mathbb{R}^{n-1}, 0\right) \longmapsto \left(\mathbb{R}^{n-1}, 0\right), \quad f_\mu(z) = f(z;\mu),$$

takich, że $f_0(0) = 0$. Zatem

$$f_0(z) = Az + \ldots$$



Rysunek 3.17. Bifurkacja siodło–węzeł dla dyfeomorfizmów.

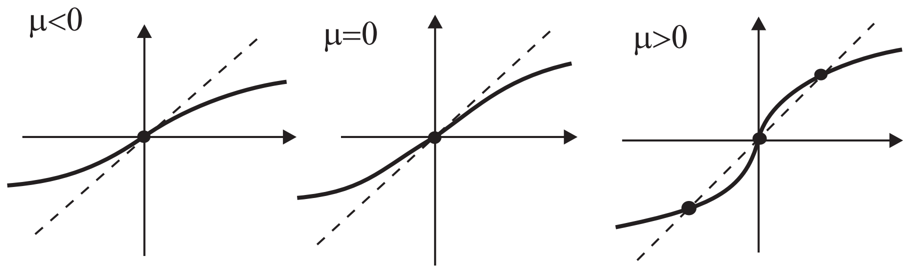
Zakładamy też, że dla $\mu = 0$ orbita γ jest niehiperboliczna, tzn. punkt stały $z = 0$ dyfeomorfizmu f_0 jest niehiperboliczny. W zależności od typu niehiperboliczności mamy różne rodzaje bifurkacji. My omówimy tutaj tylko dwie.

A. Bifurkacja siodło–węzeł dla cyklu granicznego. Tutaj mamy $\lambda_1 = 1$ i $|\lambda_j| \neq 1$ $(j > 1)$ dla wartości własnych macierzy A. Sprowadzając sytuację do rozmaitości centralnej (czyli $1-$wymiarowej dla dyfeomorfizmu) i nakładając odpowiednie warunki niezdegenerowania (tzn. $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0;0)\frac{\partial f}{\partial \mu}(0;0) \neq 0$), pokazuje się równoważność odpowiedniej rodziny $1-$wymiarowych przekształceń z następującą modelową rodziną

$$f(z;\mu) = x + \mu \pm x^2.$$

Odpowiednie bifurkacje są przedstawione na Rysunku 3.17. Widzimy, że dla $\mu < 0$ mamy dwa cykle graniczne, które się zlewają przy $\mu = 0$ a następnie znikają.

B. Bifurkacja podwojenia okresu. Tutaj mamy $\lambda_1 = -1$ i $|\lambda_j| \neq 1$ dla $j > 1$. Ponieważ przekształcenie powrotu zmienia orientację, to rozmaitość centralna dla orbity γ jest wstęgą Möbiusa (patrz Rysunek 3.19).



Rysunek 3.18. Bifurkacja podwojenia okresu dla dyfeomorfizmów.

Modelową rodziną przekształceń w tym przypadku jest

$$f_\mu(z) = f(z,\mu) = (-1+\mu)\, z \pm z^3.$$

Oczywiście to przekształcenie ma tylko jeden punkt stały, tj. $z = 0$. Ale jego druga iteracja ma postać

$$f_\mu \circ f_\mu(z) = (1-2\mu)z \mp 2z^3 + \ldots$$

i posiada dwa dodatkowe punkty stałe $z_{1,2} \approx \sqrt{\mp\mu}$ dla $\mp\mu > 0$. Te punkty stałe odpowiadają orbicie okresowej dla f_μ o okresie 2. Stąd bierze się nazwa bifurkacji; czasami też jest używana nazwa *bifurkacja widełki* (od kształtu krzywej punktów okresowych na płaszczyźnie (μ, z)).

Odpowiednie bifurkacje dla $\{f_\mu\}$ są przedstawione na Rysunku 3.18.[4]

Rysunek 3.19. Bifurkacja podwojenia okresu dla cykkli granicznych.

Na tym kończymy omawianie bifurkacji pól wektorowych. Po więcej szczegółów na temat bifurkacji opisanych wyżej i innych bifurkacji odsyłam słuchaczy do literatury ([1], [2], [5], [6], [7], [8], [11], [14]).

[4] Bifurkacja podwojenia okresu leży u podstaw znanej bifurkacji Feigenbauma dla nieodwracalnego przekształcenia $g : I \longmapsto I$ odcinka w siebie. Najpierw punkt stały traci stabilność przy przechodzeniu wartości własnej przez -1. Potem powstała obrita okresowa o okresie 2 znowu traci stabilność i powstaje orbita okresowa o okresie 2^2, itd. Dla granicznej wartości parametru mamy bifurkację Feigenbauma.

4. Równania z małym parametrem

Mały parametr w równaniu różniczkowym może pojawiać się zasadniczo na dwa sposoby: albo z prawej strony albo z lewej strony. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z małym zaburzeniem układu, o którym na ogół sporo wiemy a w drugim przypadku pojawiają się tzw. drgania relaksacyjne. Oba przypadki są omawiane kolejno w następnych rozdziałach.

4.1. Uśrednianie

Przykładem układu z pierwszej grupy jest znany układ van der Pola

$$\acute{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y,$$

gdzie ε jest naszym małym parametrem. Jest to szczególny przypadek **zaburzenia układu hamiltonowskiego o jednym stopniu swobody**

$$\dot{x} = H_y' + \varepsilon P(x, y), \quad \dot{y} = -H_x' + \varepsilon Q(x, y). \tag{4.1}$$

W zastosowaniach często pojawiają się **układy hamiltonowskie z wieloma stopniami swobody** postaci

$$\dot{q}_i = H_{p_i}', \quad \dot{p}_i = -H_{q_i}', \qquad i = 1, \ldots n, \tag{4.2}$$

gdzie $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ jest **funkcją Hamiltona**, lub *hamiltonianem* (Zadania 4.11 i 4.12). Na ogół układ (4.2) nie daje się rozwiązać. Jednak istnieje klasa układów hamiltonowkich w pełni rozwiązywalnych.

Definicja 4.1. Układ (4.2) nazywa się **zupełnie całkowalnym** jeśli istnieje układ funkcjonalnie niezależnych całek pierwszych $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ taki, że każda funkcja F_j jest całką pierwszą dla innych układów hamiltonowskich generowanych przez inne funkcje F_i. Mówi się też, że *funkcje* F_j *są w inwolucji.*

Przykładami układów zupełnie całkowalnych jest zagadnienie Keplera i potok geodezyjny na powierzchni elipsoidy (patrz [4]); oba mają dwa stopnie swobody.

Dla układów spełniających warunek z Definicji 4.1 zachodzi następujące twierdzenie, które przytaczamy bez dowodu (patrz [4]).

Twierdzenie 4.2 (Liouville–Arnold)**.** *Jeśli wspólne poziomice* $\{F_1 = c_1, \ldots, F_n = c_n\}$ *zupełnie całkowalnego układu hamiltonowskiego są zwarte i gładkie, to są one torusami* $\mathbb{T}^n$.

Ponadto w otoczeniu danego takiego torusa istnieje układ współrzędnych $(I_1, \ldots, I_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, *tzw.* ***zmienne działanie–kąt****, w których układ (4.2) przyjmuje następującą postać hamiltonowską*

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \omega_j(I) = \partial H_0 / \partial I_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

gdzie $H(q,p) = H_0(I_1,\dots,I_n)$ *jest hamiltonianem po zamianie. W szczgólności ruch na torusach* $\{I_1 = d_1,\dots,I_n = d_n\}$*, które są parametryzowane przez kąty* $\varphi_j \bmod 2\pi$*, jest okresowy lub prawie-okresowy (patrz Rysunek 4.1)*:

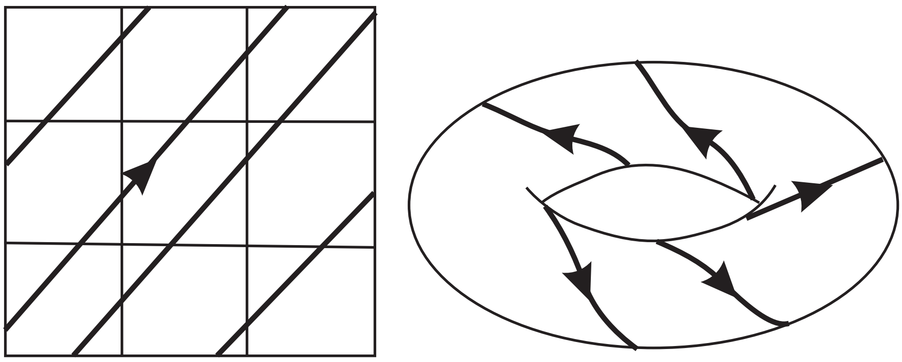
$$\varphi_j(t) = \varphi_j(0) + \omega_j(I)t.$$

Przykład 4.3. Dla układu van der Pola z $\varepsilon = 0$ i $H = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ zmienne działanie–kąt są następujące: $I = H$ i $\varphi = \arg(x+iy)$.

Rozważmy teraz następujące zaburzenie układu (4.3)

$$\dot{I} = \varepsilon g(I,\varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I,\varphi), \tag{4.4}$$

gdzie $I = (I_1,\dots,I_n)$, $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ and $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$. Naturalne jest spodziewać się, że rozwiązanie układu (4.4) po czasie rzędu $O(1)$ różni sę od rozwiązania układu (4.3) z tymi samymi warunkami początkowymi o wielkość rzędu $O(\varepsilon)$. Tymczasem poniższe Twierdzenie 4.4 mówi, że taką samą wielkość $O(\varepsilon)$ można uzyskać po czasie dążącym do nieskończoności przy $\varepsilon \to 0$. Tego rodzaju zjawisko ma miejsce dzięki tzw. uśrednieniu.



Rysunek 4.1. Dynamika prawie okresowa na torusie.

Idea uśrednienia wiąże się z faktem, że na większości torusów $\mathbb{T}^n = \{I = d\}$ trajektori układu niezaburzonego jest gęsta (jak na Rysunku 4.1). Zatem średnie odchylenie działania $I(t)$ można wyliczyć (w przybliżeniu) poprzez uśrednienie po torusie.

Definijemy **układ uśredniony**

$$\dot{J} = \varepsilon G(J), \tag{4.5}$$

gdzie

$$G(J) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(J,\varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_n$$

jest uśrednioną po $\mathbb{T}^n$ wielkością prędkości zmian działania.

Twierdzenie 4.4 (O uśrednianiu)**.** *Niech* $n = 1$ *i funkcje* ω, f, g *będą klasy* C^1 *i* $\omega(I) > 0$ *na otwartym podzbiorze* $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^1$*. Jeśli* $(I(t),\varphi(t))$ *i* $(J(t),\psi(t))$ *są rozwiązaniami układów (4.4) i (4.5) takimi, że* $I(0) = J(0)$*, to dla*

$$0 < t < 1/\varepsilon$$

amy

$$|I(t) - J(t)| < C \cdot \varepsilon,$$

gdzie stała C *zależy tylko od* ω, f, g*.*

Dowód. Dokonajmy zamiany
$$K = I + \varepsilon k(I, \varphi) \tag{4.6}$$
tak, aby zachodziło $\dot{K} = O(\varepsilon^2)$. Wyliczenie $k(J, \varphi)$ przebiega następująco

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \dot{I} + \varepsilon \tfrac{\partial k}{\partial I}\dot{I} + \varepsilon \tfrac{\partial k}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \varepsilon \left\{ g + \tfrac{\partial k}{\partial \varphi}\omega \right\} + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \left\{ g(K, \varphi) + \tfrac{\partial k}{\partial \varphi}(K, \varphi)\omega(K) \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Zatem chcemy rozwiązać równanie

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi}(K, \varphi)\omega(K) = -g(K, \varphi),$$

z oczywistym rozwiązaniem $g(K, \varphi) = \frac{-1}{\omega(K)} \int_0^\varphi g(K, \psi)d\psi$. Niestety, na ogół to rozwiązanie nie jest jednoznaczną (czyli okresową) funkcją od φ. Przeszkodą jest wielkość $\int_0^{2\pi} g(h, \psi)d\psi$, która może być niezerowa.

Ale, zapisując
$$g(K, \varphi) = G(K) + \tilde{g}(K, \varphi)$$
tak, że $\int_0^{2\pi} \tilde{g}(h, \psi)d\psi = 0$, możemy zdefiniować jednoznaczną funkcję

$$g(K, \varphi) = \frac{-1}{\omega(K)} \int_0^\varphi \tilde{g}(K, \psi)d\psi.$$

Dostajemy równanie
$$\dot{K} = \varepsilon G(K) + O(\varepsilon^2).$$

Widać, że po czasie $O(1/\varepsilon)$ różnica pomiędzy $J(t)$ i $K(t)$ jest rzędu $O(\varepsilon)$. Z drugiej strony, różnica pomiędzy $K(t)$ i $I(t)$ jest rzędu $O(\varepsilon)$, dzięki zamianie (4.6). □

Dla zaburzeń typu (4.4) zupełnie całkowalnych układów hamiltonoskich z wieloma stopniami swobody oszacowania są słabsze niż w tezie Twierdzenia 4.4. Okazuje się, że po czasie czędu $O(1/\varepsilon^a)$, dla warunków początkowych spoza zbioru o mierze Lebesque's $O(\varepsilon^b)$, odchylenie $J(t)$ od $I(t)$ nie przekracza $O(\varepsilon^c)$, gdzie $a, b, c > 0$ są wykładnikami zależnymi od ω, f, g. Po więcej informacji odsyłam czytelnika do [5].

Przykład 4.5 (Całki abelowe)**.** Rozważmy następujące zaburzenie dwuwymiarowego układu hamiltonowskiego

$$\dot{x} = H'_x + \varepsilon P(x, y), \quad \dot{y} = -H'_x + \varepsilon Q(x, y).$$

Dla $\varepsilon = 0$ krzywe fazowe leżą w poziomicach funkcji Hamiktona $H(x, y)$. W pewnym obszarze przestrzeni fazowej te krzywe są zamknięte. Jak już robiliśmy to kilkakrotnie, badanie cykli granicznych układu zaburzonego polega na analizie przekształcenia powrotu Poincarégo z S (cięcie transweralne do krzywych fazowych) do S. Parametryzując S za pomocą $H|_S$ warunek cyklu granicznego to $\Delta H = H(B) - H(A) = 0$ (patrz Rysunek 4.2). Mamy

$$\begin{aligned} \Delta H &= \int_0^T \tfrac{dH}{dt}dt = \int_0^T \left\{ H'_x \left(H'_y + \varepsilon P \right) + H'_y(-H'_x + \varepsilon Q \right\} dt \\ &= \varepsilon \int \left(PH'x + QH'_y \right) dt = \varepsilon \int \left\{ P(H'_x - \varepsilon Q) + Q\left(H'_y + \varepsilon P \right) \right\} \\ &= \varepsilon \int_{\Gamma(h)} Qdx - Pdy = \varepsilon \oint_{H=h} (Qdx - Pdy) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

gdzie T jest czasem powrotu do S a $\Gamma(h)$ jest krzywą fazową układu zaburzonego startującą z $A \in S$ takiego, że $H(A) = h$.

Rysunek 4.2. Przekształcenie powrotu dla zaburzenia układu hamiltonowskiego.

Wyrażenie

$$I(h) = \oint_{H=h} Qdx - Pdy \tag{4.7}$$

jest tzw. **całką abelową**.[1] Z Twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że jeśli $I(h_0) = 0$ i $I'(h_0) \neq 0$, to dla $\varepsilon \neq 0$ i małego istnieje cykl graniczny γ_ε, który dąży do krzywej $H = h_0$ przy $\varepsilon \to 0$. To podejście do problemu cykli granicznych jest szeroko stosowane w Jakościowej Teorii.

[1] Pojęcie całki abelowej wywodzi się z zespolonej geometrii algebraicznej. Są to całki z $1-$form meromorficznych wzdłuż pewnych zamkniętych krzywych na zespolonych krzywych algebraicznych (powierzchniach Riemanna). Gdy $H(x,y)$, $P(x,y)$ i $Q(x,y$ są wielomianami, to powierzchnia Riemanna jest zespoloną krzywą $\{H(x,y) = h\} \subset \mathbb{C}^2$ a $1-$forma to $\omega = (Qdx - Pdy)\,|_{H=h}$.

Nietrudno zauważyć, że funkcja $I(h)$ jest odpowiednikiem całki uśrednienia $G(J)$, która występuje we wzorze (4.5).

4.2. Teoria KAM

Rozważmy układ hamiltonowski

$$\dot{q} = H'_p, \quad \dot{p} = -H'_q,$$

$p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, z hamiltonianem postaci

$$H(p,q) = H_0(p,q) + \varepsilon H_1(p,q),$$

gdzie H_0 jest hamiltonianem układu zupełnie całkowalnego, czyli układu typu (4.3) w zmiennych działanie–kąt. Z tą sytuacją wiąże się jedno z najważniejszych twierdzeń matematycznych drugiej połowy XX wieku. Przed jego sformułowaniem musimy wprowadzić jeszcze dwa założenia dotyczące niezdegenerowania niezaburzonego hamiltonianu H_0 :

$$\det\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0, \tag{4.8}$$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} & \frac{\partial H_0}{\partial I_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I_j} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Warunek (4.8) oznacza, że częstości $\omega_i(I)$ znieniają się niezależnie i dosyć szybko wraz ze zmianą działań I_j, natomiast warunek (4.9) oznacza, że te częstości zmianiają się szybko i w miarę niezależnie po ograniczeniu do poziomic $\{H_0 = const\}$.

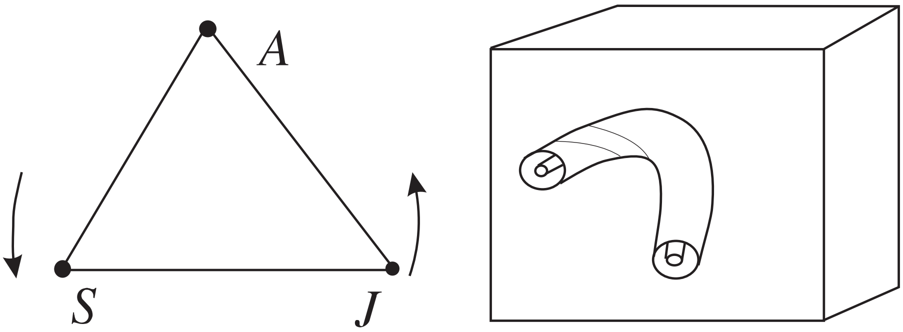
Twierdzenie 4.6 (Kołmogorow–Arnold–Moser). *Jeśli są spełnione warunki niezdegenerowania (4.8) i (4.9) dla H_0, to dla małego zaburzenia $H = H_0 + \varepsilon H_1$ większość torusów niezmienniczych $\{I = const\}$ nie znika, ale tylko lekko deformuje się i ruch na nich jest dalej prawie okresowy.*

To twierdzenie zostało sformułowane w 1954 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Amsterdamie, ale na ścisły dowód musiało czekać do początku lat sześćdziesiątych. Podali go niezależnie V. Arnold (w przypadku analitycznym) i J. Moser (w przypadku gładkim klasy C^{333}). Później klasa gładkości została obniżona do C^3. Oczywiście nie jestem w stanie przedstawić tego dowodu tutaj.

Przykład 4.7. (Płaski ograniczony problem trzech ciał) **Płaskie ograniczone zagadnienie trzech ciał** jest to układ w którym dwa ciała (oddziałujące na siebie siłą grawitacji) obracają się za stała prędkością kątową wokół ich środka masy (w początku układu współrzędnych) a trzecie ciało porusza się w płaszczyźnie obrotu dwu ciał i ma masę tak małą, że nie zakłóca ich ruchu. Na Rysunku 4.3 mamy taki układ, w którym S oznacza Słońce, J -Jowisz, A zaś jest Asteroidem. Jednostki czasu, długości i masy można dobrać tak, aby prędkość kątowa, suma mas S i J oraz stała grawitacyjna były równe 1. Wtedy też odległość między S i J też równa się 1. Jedynym parametrem charakteryzującym układ jest masa Jowisza μ.

Równania ruchu Asteroidu są hamiltonowskie z hamiltonianem

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2},$$



Rysunek 4.3. Problem trzech ciał i niezmiennicze torusy.

gdzie ρ_1 i ρ_2 są odległościami A od S i J odpowiednio. Zauważmy, że położenia S i J zmieniają się z czasem: $J = (1-\mu)(\cos t, \sin t)$, $S = (-\mu)(\cos t, \sin t)$; zatem hamiltoniam zależy bezpośredno od czasu.

Aby pozbyć się tej zależności od czasu, dokonujemy następującej zamiany (jednoczesny obrót współrzędnych i pędów)

$$q' = M(t)q, \quad p' = M(t)p, \quad M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Okazuje się, że w nowych zmiennych układ nadal jest hamiltonowski z nowym hamiltonianem

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1' + q_2'\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_2' - q_1'\right)^2 - V(q_1', q_2'), \tag{4.10}$$

$$V = \frac{q_1'^2 + q_2'^2}{2} + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2},$$

$\rho_1^2 = \left(q_1' + \mu\right)^2 + q_2'^2$, $\rho_2^2 = \left(q_1' + \mu - 1\right)^2 + q_2'^2$ (Zadanie 4.13). W nowych zmiennych q_1', q_2' ciała S i J spoczywają.

Punkty równowagi układu hamiltonowsiego to punkty krytyczne funkcji hamiltona (Zadanie 4.14). W przypadku hamiltonianu (4.10) te punkty, które nazywamy *względnymi położeniami równowagi*, zadane są przez

$$p_1' = -q_2', \quad p_2' = q_1', \quad \partial V/\partial q_1' = \partial V/\partial q_2' = 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_2'} &= q_2'\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) = q_2' f, \\ \frac{\partial V}{\partial q_2'} &= q_1' f - \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right). \end{aligned}$$

Mamy dwie możliwości:

1. $q_2' = 0$; tutaj znajdujemy trzy punkty tzw. *współliniowe punkty libracji* L_1, L_2, L_3 (Zadanie 4.15), które okazują się niestabilne.

2. $f = 0$ i $\rho_1 = \rho_2 = 1$; tutaj mamy dwa tzw. *trójkątne punkty libracji* L_4 i L_5, które leżą w wierzchołkach dwóch trójkątów równobocznych o podstawie $\overline{SJ}$.

Wyliczenia, których nie przeprowadzamy, pokazują, że dla $27\mu(1-\mu) > 1$ punkty $L_{4,5}$ są niestabilne natomiast w przeciwnym przypadku, tj. dla $\mu < \mu_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{23/27}) \approx 0.03852$, wartości własne części liniowej układu hamiltonowskiego są postaci $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, gdzie $\omega_1 < 0 < \omega_2 \neq \omega_1$. Jesteśmy na granicy obszaru stabilności.

Ponadto część kwadratowa H w punkcie L_4 przyjmuje postać

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_1(\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2\left(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2\right)$$

w odpowiednim układzie wspólrzędnych w otoczeniu L_4 (patrz [19]). Jest to Hamiltonian układu zupełnie całkowalnego ze zmiannymi działanie–kąt $I_1 = \frac{1}{2}(\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2)$, $I_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2\right)$, $\varphi_1 = \arg\left(\tilde{q}_1 + i\tilde{p}_1\right)$, $\varphi_2 = \arg\left(\tilde{q}_2 + i\tilde{p}_2\right)$ i z $H_0 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$ (Zadanie 4.16).

Mamy sytuację jak w Twierdzeniu KAM: $H = H_0 + H_1$, gdzie H_0 jest zupełnie całkowalny a H_1 zawiera wyrazy rzędu > 2 ze względu na I_j (które są małe). Niestety, to nie wystarcza, ponieważ częstości $\omega_j = \partial H_0/\partial I_j$ są stałe, a z warunku niezdegenerowania (4.8) powinny się zmianiać wraz z I_j. Należy więc uwzględnić jeszcze dalsze wyrazy rozwinięcia H w otoczeniu L_4.

Dokładniej, dokonujemy uproszczenia wyrazów rzędu trzeciego i czwartego w hamiltonianie H. To uproszczenie jest analogiem formy normalnej Poincarégo–Dulaca i zostało udowodnione przez G. Birkhoffa w Twierdzeniu 4.9 poniżej. Ta *forma normalna Birkhoffa* w naszym przypadku ma następującą postać

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \sum \omega_{ij} I_i I_j, \quad I_j = \frac{1}{2}(P_j^2 + Q_j^2), \tag{4.11}$$

gdzie $P_j = \tilde{p}_j + \ldots$, $Q_j = \tilde{q}_j + \ldots$ są nowymi zmiennymi a H_1 zawiera wyrazy rzędu $\geqslant 5$ (oraz H_0 i H_1 są inne niż powyżej). W założeniu twierdzenia Birkhoffa pojawia się warunek braku relacji rezonansowych rzędu 4 i 3. Okazuje się, że takie relacje zachodzą dla wartości $\mu_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1833}/45\right) \approx 0.02429$ i $\mu_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{213}/15\right) \approx 0.01352$; zatem te wartości parametru μ należy wykluczyć.

Hamiltonian $H_0 = H_0(I_1, I_2)$ jest hamiltonianem zupełnie całkowalnym i ma szansę na spełnienie warunków niezdegenerowania (4.8) i (4.9). Okazuje się, że tylko warunek (4.9) jest istotny. A. Leontowicz pokazał, że może on zostać naruszony tylko dla dyskretnego zbioru wartości parametru μ.[2] Załóżmy zatem, że μ spełnia wszystkie warunki wypisane powyżej, czyli jest prawdziwa teza twierdzenia KAM.

Jak z twierdzenia KAM wynika stabilność? Otóż znajdujemy się w przestrzeni 4−wymiarowej w otoczeniu punktu równowagi. Ponieważ układ jest hamiltonowski z hamiltonianem niezależnym od czasu, więc ruch odbywa się po powierzchniach $H = \text{const}$. Są one trójwymiarowe. Z twierdzenia KAM wynika, że każda taka powierzchnia jest prawie zapełniona torusami niezmienniczymi $\mathbb{T}^2$, których jest tym więcej im bliżej jesteśmy torusa $I_1 = I_2 = 0$. Każdy torus niezmienniczy rozbija powierzchnię H =const na dwie części, swoje wnętrze i zewnętrze. Zaden punkt z wnętrza nie wychodzi zeń w trakcie ewolucji. Ponieważ w przestrzeni zmiennych P, Q torusy mogą być dowolnie małe, to wynika stąd stabilność w sensie Lapunowa.

Uzupełnimy powyższy przykład. Załóżmy, że mamy hamiltonian w postaci

$$H = \sum \omega_j \cdot \frac{1}{2}(p_j^2 + q_j^2) + \ldots.$$

[2] W [19] można dowiedzieć się, że warunek (4.9) zostaje naruszony dla dokłanie jednej konkretnej wartości parametru μ. Ta wartość wynikała ze wzoru na wyznacznik w równaniu (4.9) podanego przez francuskich astronomów A. Deprit i A. Deprit-Bartholomé (i cytowanego w bardzo poważnych monografiach). Ostatnio z moją magistrantką W. Barwicz odkryliśmy, że ten wzór jest nieprawdziwy, a nawet sprzeczny z wyliczeniami Leontowicza. W istocie, tenże wyznacznik jest bardzo skomplikowaną funkcją algebraiczną od μ, króra nie jest tożsamościowo równa zeru.

Definicja 4.8. Mówimy, że 'częstości' ω_j spełniają *relację resonansową rzędu* d, jeśli isnieją liczby całkowite $k_1, \ldots, k_n$ z $\sum |k_j| = d$ takie, że

$$\sum k_j \omega_j = 0.$$

Twierdzenie 4.9 (Birkhoff). *Jeśli częstości ω_j nie spełniają żadnej relacji rezonansowej rzędu $\leqslant 2m$, to istnieje kanoniczna zamiana zmiennych $(p,q) \longmapsto (P,Q) = (p+\ldots, q+\ldots)$ prowadząca do hamiltonianu*

$$H = \sum_{|l| \leqslant m} a_l I^l + O\left(|(p,q)|^{2m+1}\right),$$

gdzie $I_j = \frac{1}{2}(P_j^2 + Q_j^2)$ i sumowanie przebiega po wielowskaźmikach $(l_1, \ldots, l_n)$ z $|l| = l_1 + \ldots + l_n$ i $I^l = I_1^{l_1} \ldots I_n^{l_n}$.

Uwaga 4.10. Zamiana $(p,q) \longmapsto (P,Q)$, występująca w powyższym twierdzeniu jest *kanoniczna* jeśli

$$\sum dp_j \wedge dq_j = \sum dP_j \wedge dQ_j.$$

Okazuje się, że po kanonicznej zamianie zmiennych układ hamiltonowski przechodzi w układ hamiltonowski (patrz [4]).

ZADANIA

Zadanie 4.11. Pokazać, że jeśli funkcja hamiltona H nie zależy bezpośrednio od czasu, to jest całką pierwszą dla układu (4.2).

Zadanie 4.12. Pokazać, że pole wektorowe zadane wzorem (4.2) ma zerową dywergencję. Wywnioskować stąd, że odpowiedni potok fazowy zachowuje objętość.

Zadanie 4.13. Udowodnić wzór (4.10).

Zadanie 4.14. Pokazać, że jeśli H nie zależy bezpośrednio od czasu, to punkty równowagi układu (4.2) są dokładnie punktami krytycznymi funkcji H.

Zadanie 4.15. Pokazać, że istnieją dokładnie trzy współliniowe punkty libracji.

Zadanie 4.16. Pokazać, że hamiltonian postaci $H_0 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$ (lub jak we wzorze (4.11)) jest hamiltonianem układu zupełnie całkowalnego.

Zadanie 4.17. Zastosować metodę całek abelowych (Przykład 4.5) do pokazania, że układ van der Pola $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - a(x^2 - 1)y$ dla małego parametru $a > 0$ posiada dokładnie jeden cykl graniczny.

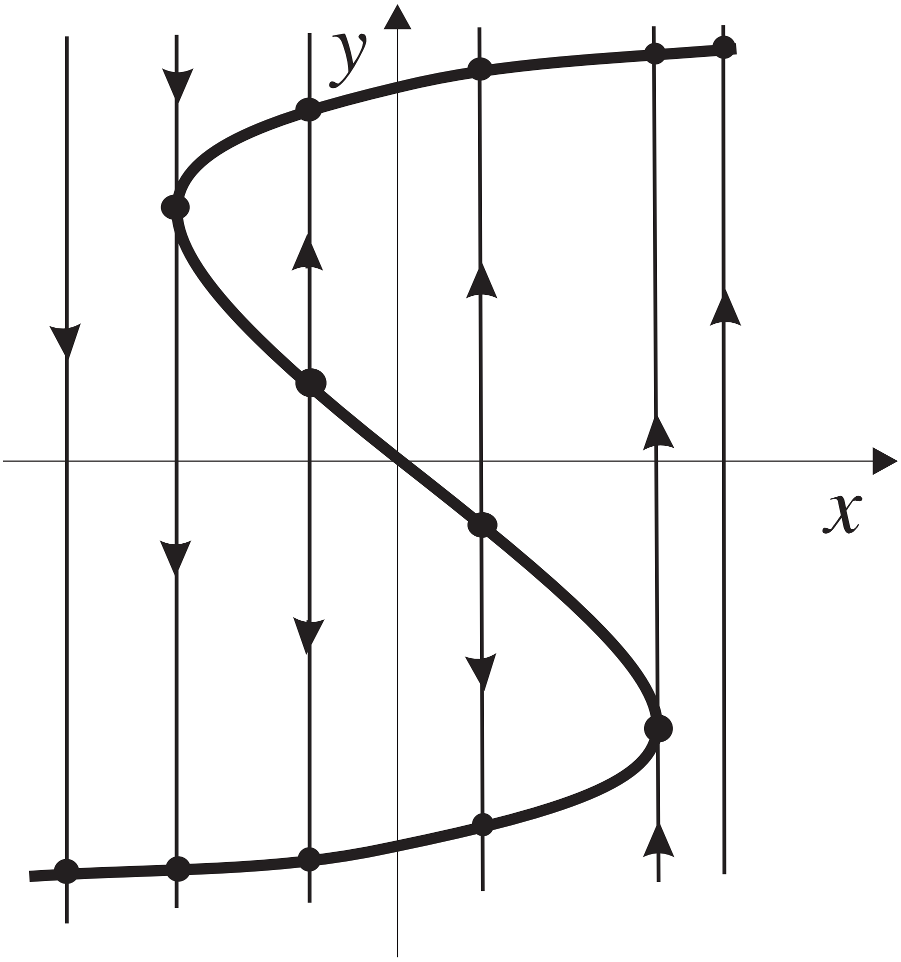
4.3. Drgania relaksacyjne

Zacznijmy od znanego przykładu.

Przykład 4.18 (Układ van der Pola).

$$\dot{x} = y - x^3 + x, \quad \dot{y} = -\varepsilon x.$$

(Gdy $\varepsilon = 1$ i położyć $y_1 = y - x^3 + x$, to dostaje się $\dot{x} = y_1$, $\dot{y}_1 = -x - (3x^2 - 1)y_1$; z dokładnością do przeskalowania jest to układ z Przykładu 2.34.)



Rysunek 4.4. Układ van der Pola typu ‘wolny–szybki’.

Widać, że x zmienia się szybko w porównaniu z y; mówimy, że x jest *szybką zmienną* a y *wolną*. Dla $\varepsilon = 0$ mamy y =const i w istocie mamy równanie na x zależne od parametru y (teoria bifurkacji się kłania, patrz Rysunek 4.4). Gdy $\varepsilon \neq 0$ (ale małe), to fizycy powiedzieliby, że parametr y ‘płynie’. Oczekuje się istnienia cyklu granicznego γ_ε (w istocie γ_ε jest stabilny) dążącego do kawałkmi gładkiej krzywej γ_0 przedstawionej na Rysunku 4.5. Cykl γ_0 składa się z:

— kawałków ruchu powolnego wzdłuż krzywej $y = x^3 - x$ (gdzie $\dot{x} = 0$),

— odcinków skoku wzdłuż prostych y =const.

Taki ruch jest przykładem **dragań relaksacyjnych** (jak bicie serca).

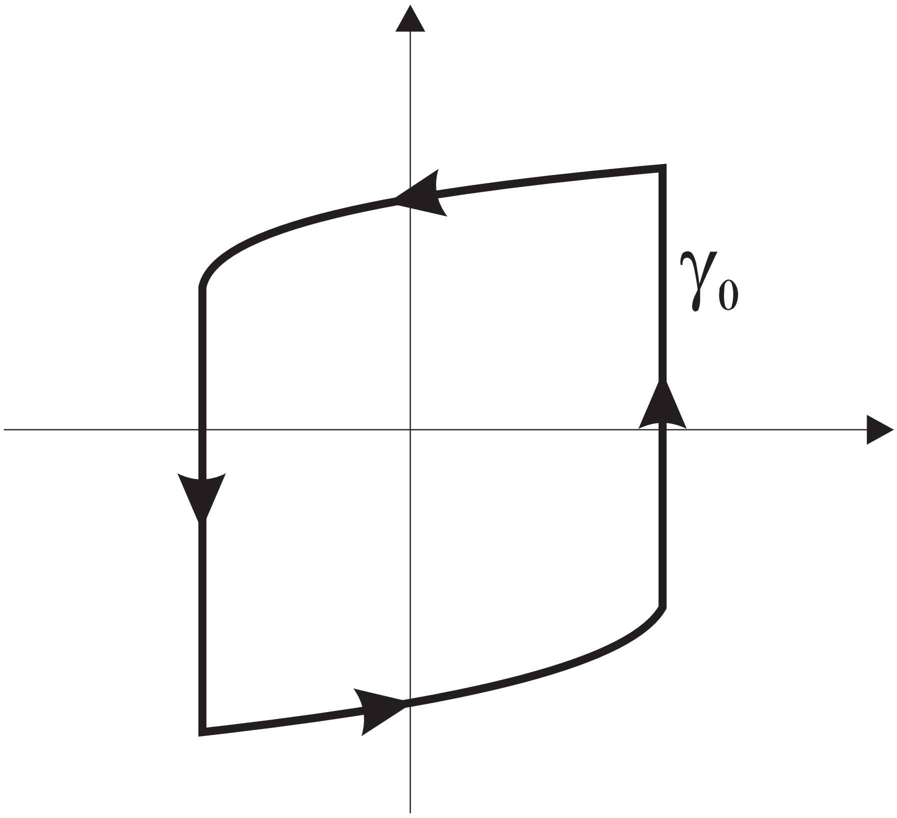
Rozważmy teraz ogólną sytuację. Mamy **układ niezaburzony**

$$\dot{x} = f(x, y), \qquad \dot{y} = 0,$$

($x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^l$); tutaj x to **szybkie współrzędne** a y to **wolne współrzędne**. Mamy też **układ zaburzony**

$$\dot{x} = F(x, y; \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon G(x, y; \varepsilon), \qquad F(x, y; 0) = f(x, y).$$

Definicja 4.19. Powierzchnia $S = \{f(x, y) = 0\}$ nazywa się **powolną powierzchnią**.



Rysunek 4.5. Drgania relaksacyjne.

Powolna powierzchnia dzieli się na **obszary stabilności** i **niestabilności** układu niezaburzonego; odpowiadają one sytuacjom gdy $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = 1, \dots, k$, $A = \frac{\partial f}{\partial x}$, i gdy istnieje $\mathrm{Re}\lambda_j(A) > 0$.

Na powolnej powierzchni mamy pole wektorowe definiowane następująco. Bierzemy pole

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(F\partial_x + \varepsilon G\partial_y\right)|_{\varepsilon=0} = f_1(x,y)\partial_x + g(x,y)\partial_y$$

w punkcie $(x,y) \in S$ i rzutujemy je na $T_{(x,y)}S$ wzdłuż zmiennych y. Jest to **pole ruchu powolnego**.

Przypomnę, że na początku tego rozdziału mówiliśmy, że drgania relaksacyjne charakteryzują się własnością, ze mały parametr występuje po lewej stronie. Aby się o tym przekonać wprowadzamy czas powolny $\tau = \varepsilon t$. Wtedy dostajemy układ

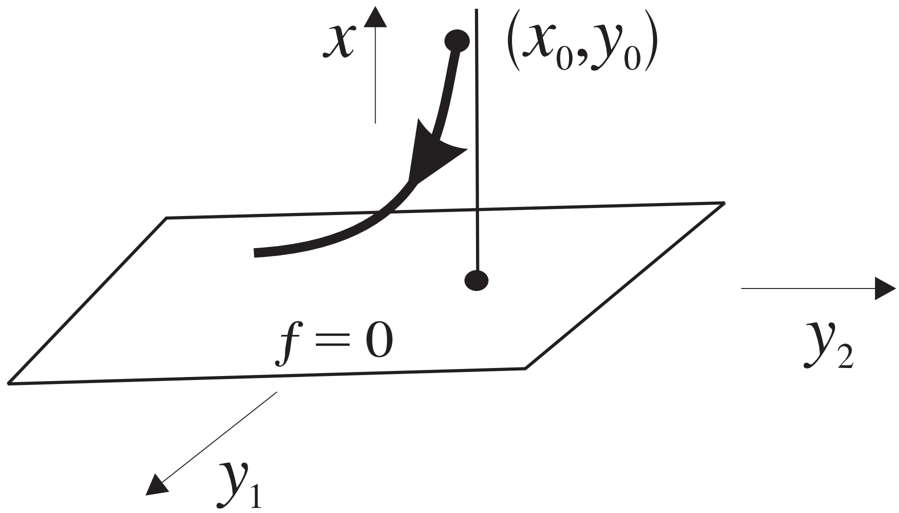
$$\varepsilon\frac{dx}{d\tau} = f(x,y) + O(\varepsilon), \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x,y) + O(\varepsilon).$$

Teraz *równanie ruchu powolnego* na S (lokalnie parametryzowanej przez y) jest postaci

$$\frac{dy}{d\tau} = h(y) + O(\varepsilon)$$

(z odpowiednią funkcją h).

Przeanalizujmy ruch typowego punktu (x_0, y_0). Składa się on z kawałków trzech rodzajów: dochodzenie do powierzchni powolnej, ruch wzdłuż powierzchnii powolnej i ruch w obszarze przejściowym.



Rysunek 4.6. Dochodzenie do powierzchni powolnej.

4.20. Dochodzenie do powierzchni powolnej. Niech punkt (x_0, y_0) spoza S rzutuje się (wzdłuż współrzędnych y) na punkt (x_*, y_0), $x_* = x_*(y_0)$, na S w obszarze stabilności (patrz Rysunek 4.6). To znaczy, że punkt x_0 leży w basenie przyciągania punktu x_* dla równania $\dot{x} = f(x, y_0)$ (y_0 stałe). Rozważmy obszar $U = \{|x - x_*(y_0)| < \delta,\ y_0 \in V\}$, gdzie V jest pewnym obszarem odpowiadającum podzbiorowi obszaru stabilności w S. Okazuje się, że powolny czas dochodzenia rozwiązania z warunkiem początkowym (x_0, y_0) do U jest rzędu $\tau_1 \sim C_1\varepsilon\,|\ln\varepsilon|$, co odpowiada rzeczywistemu czasowi

$$t_1 \sim C_1\,|\ln\varepsilon|$$

(stała C_1 zależy od U i od F, G).

4.21. Ruch powolny. W obszarze U mamy ruch powolny, opisywany równaniem $dy/d\tau = h(y) + O(\varepsilon)$. Trwa on do momentu $\tau_2 = T = O(1)$, co odpowiada długiemu czasowi rzeczywistemu $t_2 = T/\varepsilon$.

4.22. Ruch w obszarze przejściowym. Obszar przejściowy leży blisko granicy pomiędzy obszarami stabilności i niestabilności w S. Mamy dwie typowe możliwości (jak w teorii bifurkacji):

A. $\lambda_1(A) = 0$ (gdzie $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{f=0}$);
B. $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0$.

A. Zryw. Ten przypadek (który odpowiada bifurkacji siodło–węzeł) zanalizujemy dla sytuacji gdy $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ (można do tego wszystko zredukować). Po odpowiednich przeskalowaniach mamy następujący układ

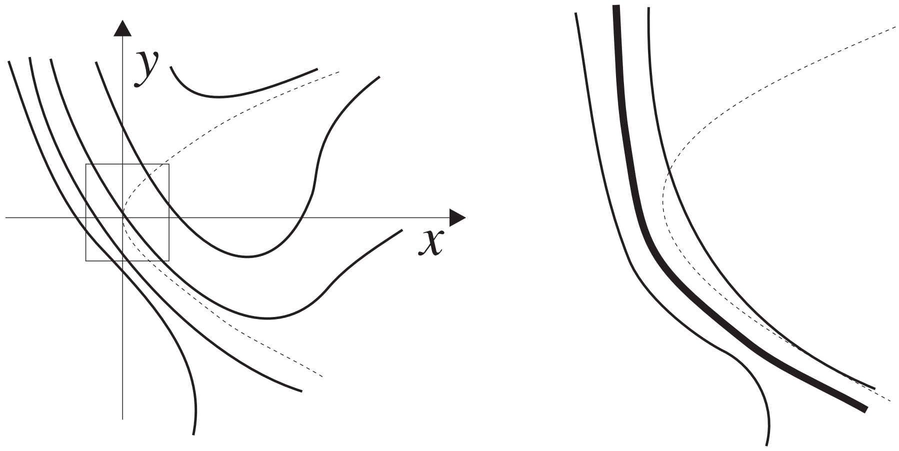
$$\dot{x} = x^2 - y + \dots, \quad \dot{y} = -\varepsilon + \dots$$

Dokonujemy normalizacji

$$\varepsilon = \mu^3, \quad x = \mu X, \quad y = \mu^2 Y.$$

łatwo sprawdzić, że prowadzi to do pola

$$\dot{X} = \mu\left\{X^2 - Y + O(\mu)\right\}, \quad \dot{Y} = \mu\left\{-1 + O(\mu)\right\}$$



Rysunek 4.7. Zjawisko ‘zrywu’.

orbitalnie równoważnemu polu $\left(X^2 - Y\right)\partial_X - \partial_Y$. Jego portret fazowy jest zadany równaniem Riccatiego

$$dX/dY = X^2 - Y \tag{4.12}$$

i jest przedstawiony na Rysunku 4.7[3]. Zjawisko, które tutaj obserwujemy nosi nazwę **zrywu**.

B. Opóźnienie utraty stabilności. W tym przypadku, który odpowiada bifurkacji Andronowa–Hopfa, problem redukuje się do następującego modelowego układu

$$\dot{z} = (y + i\omega)\,z + cz\,|z|^2\,, \quad \dot{y} = \varepsilon, \tag{4.13}$$

$zx_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$. Oczywiście $y = \varepsilon t$ jest ‘płynącym’ parametrem. Załóżmy jeszcze, że

$$c = -1;$$

przypadek $c > 0$ jest mniej ciekawy. Dla amplitudy $r = |z|$ dostajemy równanie Bernoulliego

$$\dot{r} = r\left(\varepsilon t - r^2\right).$$

Połóżmy warunek początkowy

$$y(t_0) = -\mu, \qquad r(t_0) = r_0, \quad t_0 = -\mu/\varepsilon,$$

gdzie $\mu > 0$ jest ustaloną (nie za dużą i nie za małą) stałą. To zagadnienie początkowe ma następujące rozwiązanie

$$r(t) = r_0\left\{e^{\varepsilon\left(t_0^2 - t^2\right)} + 2r_0^2\int_{t_0}^{t} e^{\varepsilon\left(s^2 - t^2\right)}ds\right\}^{-1/2} \tag{4.14}$$

(Zadanie 4.24). Zbadamy asymptotyczne zachowanie się tego rozwiązania przy $\varepsilon \to 0$ dzieląc zakres czasu t na cztery obszary:

(a) $0 < t - t_0 < O(1)$, czyli $0 < y + \mu < O(\varepsilon)$.

Niech $u = t - t_0$. Wtedy $\varepsilon\left(t_0^2 - t^2\right) = \varepsilon(t_0 + t)u \approx 2\mu u$ i $\varepsilon\left(s^2 - t^2\right) \approx 2\mu(u - v)$, gdzie $v = s - t_0$. Zatem

$$\int_{t_0}^{t} e^{\varepsilon\left(s^2 - t^2\right)}ds \approx \int_0^u e^{2\mu(u-v)}dv = \frac{1}{2\mu}(e^{2\mu u} - 1)$$

[3] Równanie (4.12) jest chyba najprostszym przykładem równania różniczkowego, którego nie można rozwiązać w tzw. kwadraturach.

oraz

$$r(t) \approx r_0 \left\{ e^{2\mu u} + r_0^2 (e^{2\mu u} - 1)/\mu \right\}^{-1/2}$$

jest malejącą funkcją od u.

(b) $y = \varepsilon t$ jest ustalone tak, że $-\mu < y < \mu$.
Tutaj $e^{\varepsilon\left(t_0^2 - t^2\right)} \approx e^{\left(\mu^2 - y^2\right)/\varepsilon} \to \infty$. Zatem

$$r(t) < C_1 e^{-C_2/\varepsilon} \to 0,$$

przy czym jest to bardzo szybkie dążenie do zera.

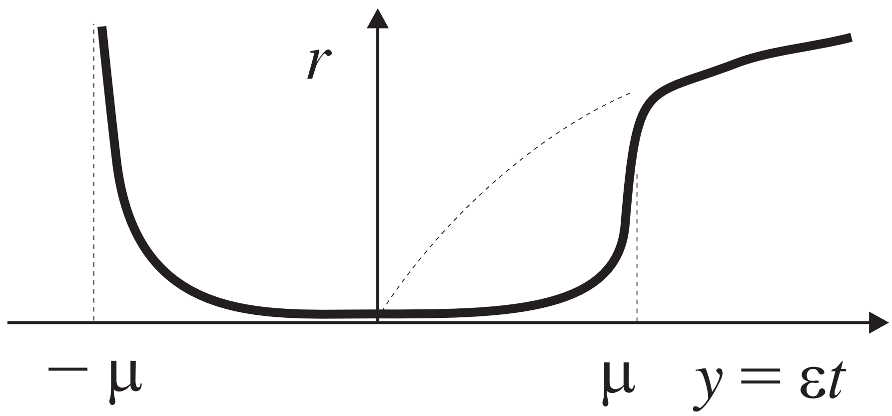
(c) $0 < |t_0| - t < O(1)$, czyli $0 < \mu - y < O(\varepsilon)$.
Wprowadźmy zmienną $w = |t_0| - t$. Jak w punkcie (a) mamy $e^{\varepsilon\left(t_0^2 - t^2\right)} \approx e^{2\mu w}$.
Obszar całkowania dla całki we wzorze (4.14) podzielimy na trzy odcinki: od t_0 do $t_0/2 < 0$, od $t_0/2$ do $|t_0|/2$ i od $|t_0|/2$ do t. Przez I_1, I_2 i I_3 oznaczymy odpowiednie całki. Podobnie jak w punkcie (a) pokazuje się, że $I_1 = O(1)$ i $I_3 = O(1)$. Z rachunków w punkcie (b) wynika, że $I_2 \to 0$ bardzo szybko. Zatem

$$r(t) = O(1).$$

(d) $|t_0| < t$, czyli $y > \mu$ i jest ustalone. Teraz $\exp\left\{\varepsilon\left(t_0^2 - t^2\right)\right\} \approx \exp\left\{-(y^2 - \mu^2)/\varepsilon\right\} \to 0$. Następnie $\varepsilon\left(s^2 - t^2\right) \approx (s - t) \cdot 2y$ dla s bliskich t, tj. dla tych s, dla których wkład do całki jest dominujący. Dostajemy $\int^t e^{2y(s-t)} ds \approx \frac{1}{2y}$. Stąd

$$r(t) \approx r_0 \left\{ r_0^2 / 2y \right\}^{-1/2} = \sqrt{y}.$$

Możemy podsumować powyższe obliczenia.



Rysunek 4.8. Zjawisko opóźnienia utraty stabilności.

Twierdzenie 4.23. *W przypadku B opisywanego układem (4.13) z $c < 0$ zachodzi zjawisko opóźnienia utraty stabilności. Polega ono na tym, przy zmianie zmiennej y (która jest współczynnikiem stabilności ruchu niezaburzonego) od wartości ujemnej $y(t_0) = -\mu$ do wartości dodatniej μ układ (względem z) jest cały czas stabilny, a zmiana stabilności rozwiązania następuje dla parametru $y = \mu$, przy czym dalej amblituda oscylacji rośnie jak w zwykłej bifurkacji Andronowa–Hopfa.*

Zjawisko **opóźnienia utraty stabilności** można objaśnić fizycznie. Zmienna y jest ujemna przez bardzo długi czas, rzędu $1/\varepsilon$. Wtedy układ fizyczny zdąży podejść bardzo blisko położenia równowagi; na tyle blisko, że potrzeba potem tyle samo czasu, aby od położenia równowago odejść (patrz Rysunek 4.8).

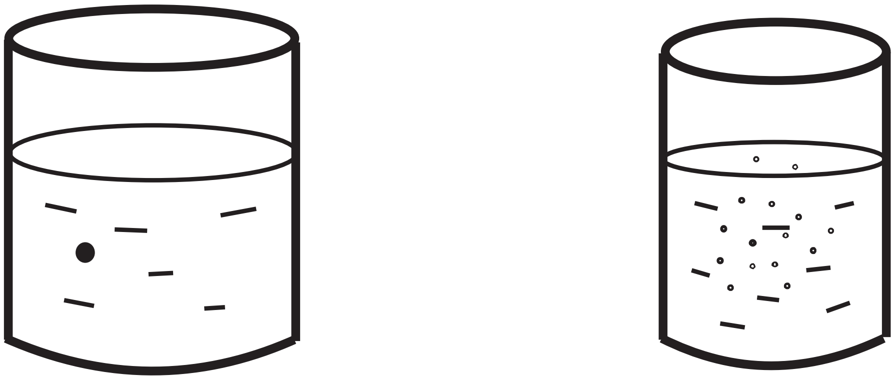
ZADANIA

Zadanie 4.24. Udowodnić wzór (4.14).

5. Chaotyczna dynamika w równaniach różniczkowych

5.1. Wstęp do teorii chaosu i jeden przykład

Dla autonomicznego pola wektorowego w $\mathbb{R}^2$ portret fazowy i ruch jest w pełni zdeterminowany; to zostało opisane w Rozddziale 2.4. Ale gdy przestrzeń fazowa nie jest tak prosta, to mogą się zdarzać ciekawe zjawiska.



Rysunek 5.1. Tranzytywność i mieszanie.

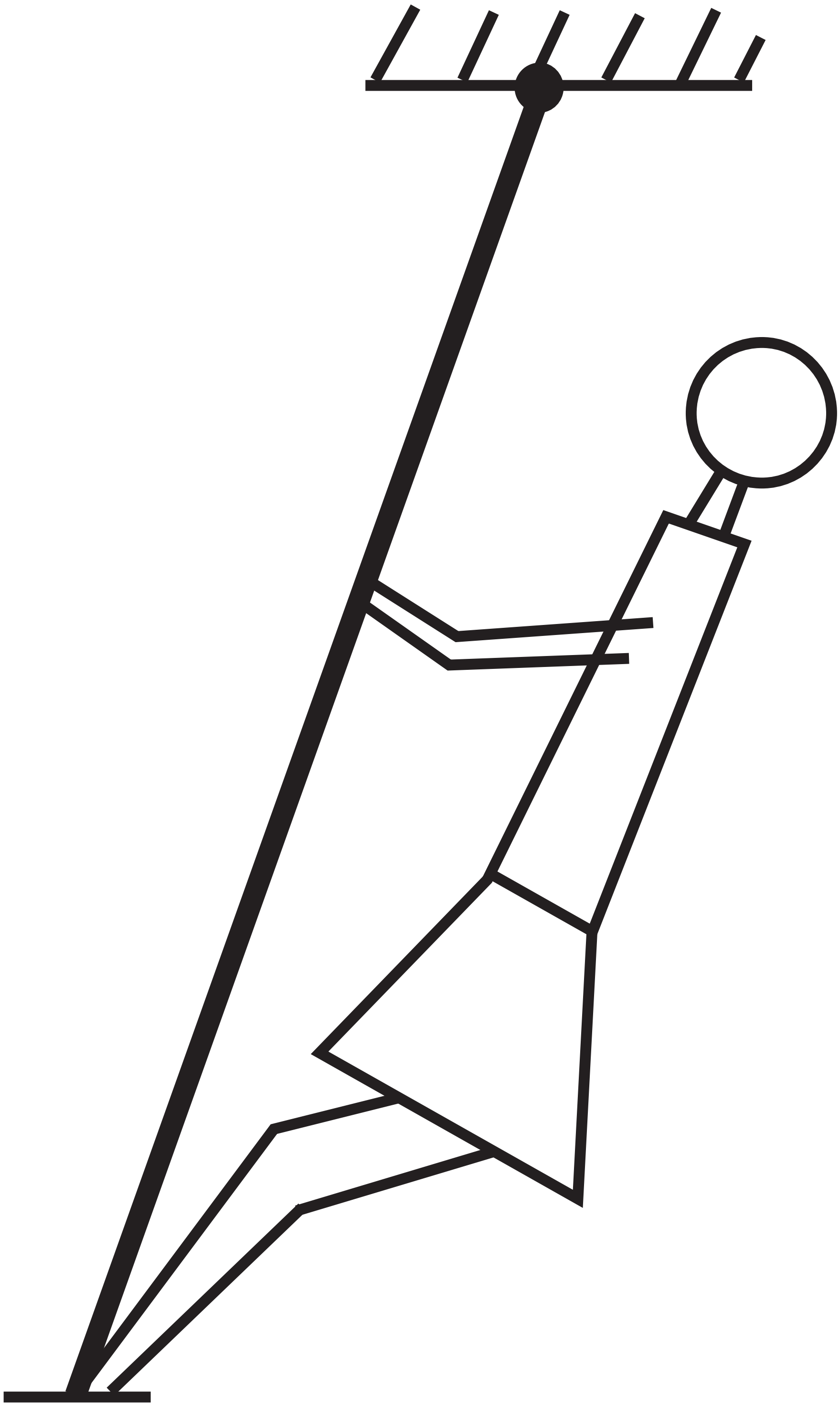
Na przykład, stałe pole wektorowe

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \dot{\varphi}_2 = \omega_2$$

na torusie $\mathbb{T}^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2)\}$ może mieć gęste krzywe fazowe, tj. gdy ω_2/ω_1 jest niewymierne. Wtedy krzywe fazowe są obmotkami (jak na Rysunku 4.1 powyżej) a ruch jest *prawie okresowy*, co oznacza, że rozwiązanie powraca z grubsza okresowo do każdego małego obszaru przestrzeni fazowej. Ponadto, z każdego małego obszaru można dojść do dowolnego innego małego obszaru. Taka własność nazywa się *tranzytywnością* w teorii Układów Dynamicznych. Ruch nie jest w pełni deterministyczny, dlatego że po długim czasie trudno powiedzieć, gdzie znajduje się ewoluująca cząstka. Jednak nie jest to ruch chaotyczny, ponieważ, jeśli na początku mieliśmy skupiony obszar przestrzeni fazowej, to ten obszar zachowuje swój skupiony kształt w trakcie ewolucji. Tymczasem w *ruchu chaotycznym* taka komórka zaczyna 'rozpływać się' w przestrzeni fazowej.

Przykład 5.1 (Tranzytywność i chaos)**.** Dobrym przykładem sytuacji obrazującej różnicę pomiędzy tranzytywnością a chaosem są dwie szklanki z wodą takie, że w jedną wpuszczono małą kropelkę oliwy a w drugą wlano taką samą ilość soku (Rysunek 5.1). Kropelka oliwy będzie dryfować, odwiedzając każde miejsce w wodzie, a sok zacznie się rozpuszczać, zapełniając równomiernie cały obszar wody (ta własność jest też nazywana *mieszaniem*).

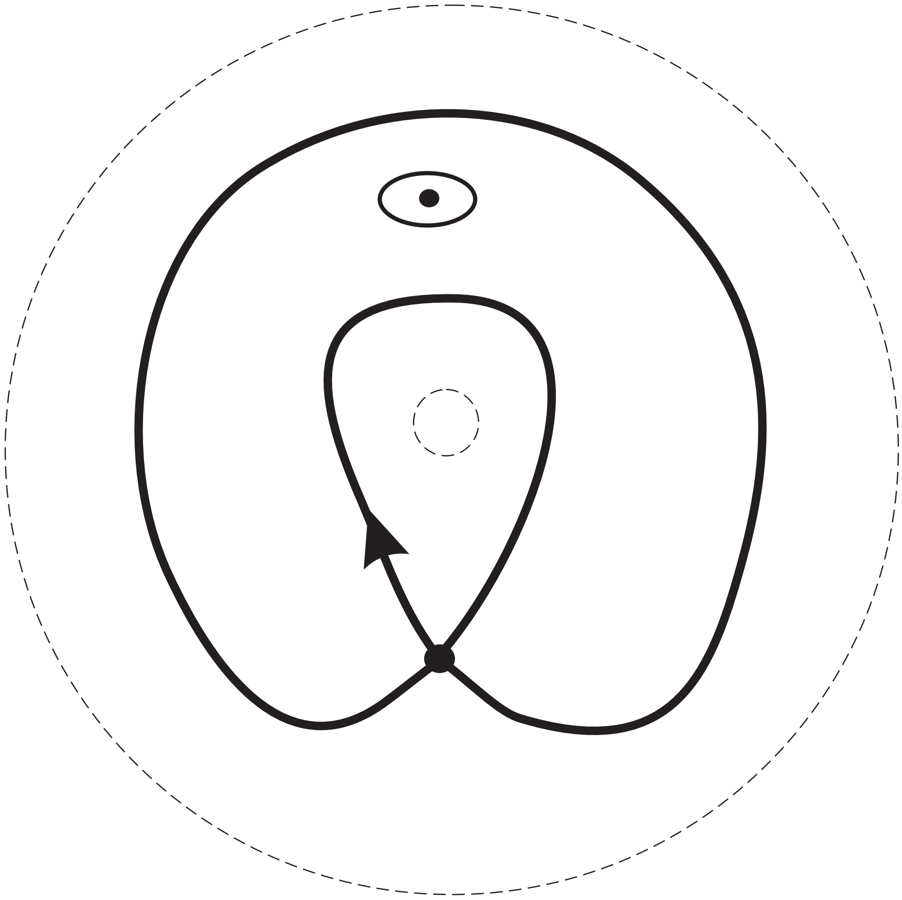
Chyba najprostszymi układami różniczkowymi, w których można zaobserwować chaos są okresowe nieautonomiczne układy postaci



Rysunek 5.2. Huśtawka.

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in M, \quad v(t + T, x) = v(t, x), \tag{5.1}$$

gdzie M jest 2−wymiarową rozmaitością. Jak wiemy, taki układ można potraktować jako autonomiczny w rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{S}^1 \times M$. Wtedy wygodnie jest pracować z **prze-**



Rysunek 5.3. Portret fazowy dla wahadła.

kształceniem monodromi (po okresie)

$$\mathcal{P} : M \longmapsto M, \quad \mathcal{P} = g_0^T,$$

gdzie g_s^t jest 2−parametrową rodziną dyfeomorfizmów definiujących ewolucję. W terminach rozszerzonej przestrzeni fazowej jest to przekształcenie powrotu na hiperpowierzchnię $\{0\} \times M$.

W monografii J. Guckenheimera i P. Holmes'a [11] jest zanalizowany przykład układu Duffinga z siłą zewnętrzną

$$\ddot{x} = x - x^3 + \varepsilon \left\{\cos(\omega t) - ax\right\}.$$

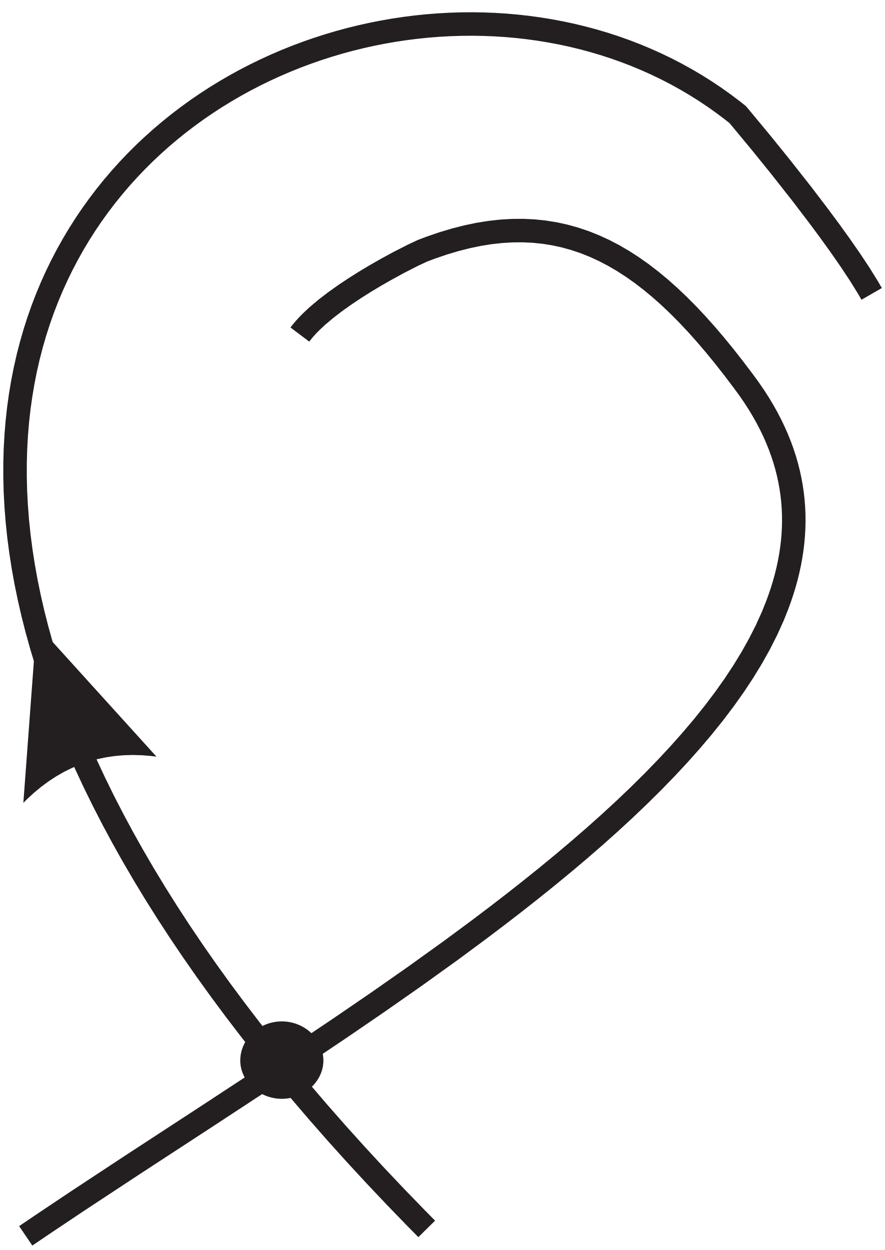
My zajmiemy się nieco innym przykładem.

Przykład 5.2 (Huśtawka)**.** Jest to równanie

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos(\omega t),$$

gdzie $\varepsilon \cos(\omega t)$ jest małą okresową siłą zewnętrzną, z okresem $T = 2\pi/\omega$. Można to interpretować jak równanie huśtawki z dziewczynką, która wykonuje okresowe przykucnięcia (patrz Rysunek 5.2). Można też potraktować ten układ jako podukład 4−wymiarowego układu autonomicznego

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x + \varepsilon z, \quad \dot{z} = \omega u, \quad \dot{u} = -\omega z.$$



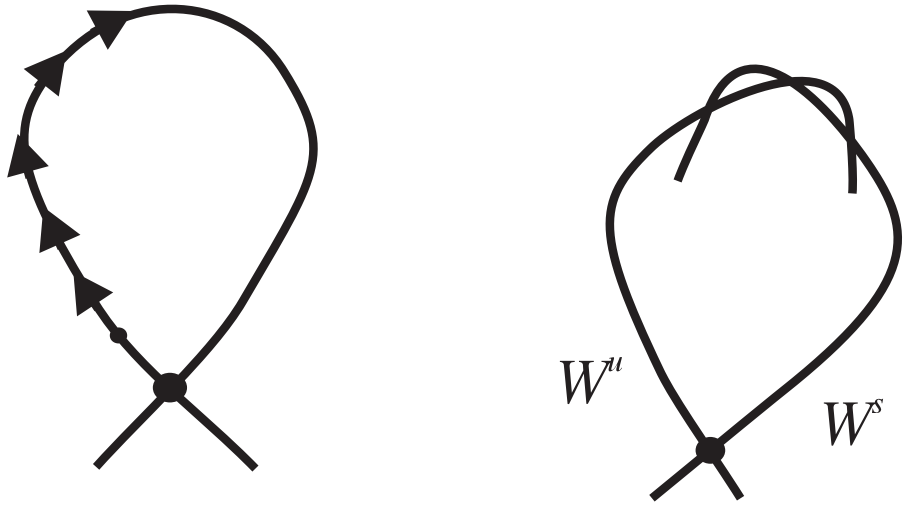
Rysunek 5.4. Rozczepienie separatrys siodła dla pola wektorowego.

Skupmy się jednak na rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{S}^1 \times M$, gdzie $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ jest cylindrem i mamy

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x + \varepsilon \cos(\omega t). \tag{5.2}$$

Dla sytuacji niezaburzonej ($\varepsilon = 0$) portret fazowy jest znany (patrz Rysunek 2.1 powyżej); my go przedstawiamy na Rysunku 5.3, gdzie górna i dolna krawędzie walca są przedstawione jako koncentryczne przerywane okręgi. Nas interesuje, co będzie się działo z pętlą separatrys Γ punktu siodłowego $x = \pi$, $y = 0$.

Gdyby zaburzenie było niezależne od czasu, to oczekiwany portret fazowy zaburzonego pola byłby jak na Rysunku 5.4, czyli separatrysy punktu siodłowego rozdzieliłyby się. Jednak w przypadku układu nieautonomicznym, ale okresowym ze względu na czas, portret fazowy układu niezaburzonego należy traktować jako dynamikę przekształcenia monodromii. Przy tym w układzie zaburzonym separatrysy nie mają obowiązku rozłączyć się. Spodziewamy się, że będą one przecinać się transwersalnie, jak na Rysunku 5.5. Niżej to wykażemy.



Rysunek 5.5. Rozczepienie separatrys siodła dla dyfeomorfizmu.

Rozwiązanie układu niezaburzonego, odpowiadające górnej pętli separatrys, jest następujące

$$x = x_0(t) = \pi - 4\tan^{-1} e^{-(t-t_0)}, \quad y = y_0(t) = 2/\cosh(t - t_0) \tag{5.3}$$

(porównaj Zadanie 2.44). Ma ono tę własność, że $x(t_0) = 0$, $y(t_0) = 2$ i wartość całki pierwszej

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \tag{5.4}$$

wynosi 1 (patrz Rysunek 5.6).

Do badania ukladu zaburzonego ($\varepsilon \neq 0$) użyjemy całej rodziny przekształceń monodromii

$$\mathcal{P}_z = g_z^{z+T} : M \longmapsto M, \qquad z \in [0, T],$$

gdzie $M = \mathbb{S}^1 \times R$ jest utożsamiane z cięciem $\{z\} \times M$ w rozszerzonej przestrzeni fazowej $(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \times M$. Każde przekształcenie $\mathcal{P}_z$ ma swój punkt stały $q(z)$ (utożsamiany z $p(z) = q(z) + (2\pi, 0)$; ten punkt zależy od z i od ε i leży blisko punktu $x = -\pi$, $y = 0$. Ponieważ jest to punkt stały i hiperboliczny (siodło) to ma swoją podrozmaitość stabilną $W^s(p(z))$ i niestabilną $W^u(q(z))$ (patrz Rysunek 5.6); oczywiście te podrozmaitości też zależą od z i ε.

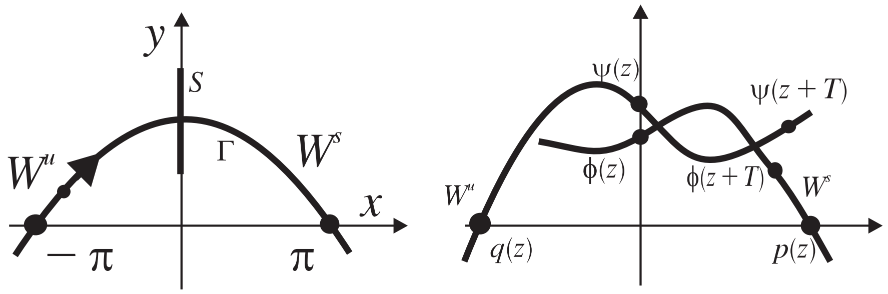
Wybierzmy cięcie $S = \{x = 0, 1 < y < 3\}$ transwersalne do $W^s(p(z))$ i do $W^u(q(z))$. Niech $\phi(t)$ (odpowiednio $\psi(t)$) będzie rozwiązaniem z warunkiem początkowym $\phi(z) = S \cap W^s(p(z))$ (odpowiednio $\psi(z) = S \cap W^u(q(z))$)). Oczywiście $\phi(t) \to p(z)$ przy $t \to +\infty$ i $\psi(t) \to q(z)$ przy $t \to -\infty$. Ponadto $\mathcal{P}_z(\phi(z)) = \phi(z+T)$ i $\mathcal{P}_z(\psi(z)) = \psi(z+T)$ (niezmienniczość podrozmaitości).

Punkt przecięcia podrozmaitości stabilnej i niestabilnej odpowiada sytuacji, gdy $\phi(z) = \psi(z)$ dla odpowiedniego z. Jak w przypadu autonomicznych zaburzeń układów hamiltonowskich (patrz Przykład 4.5) odległość pomiędzy $\phi(z)$ i $\psi(z)$ liczymy za pomocą różnicy wartości całki pierwszej w tych punktach,

$$\Delta H|_S = H(\psi(z)) - H(\phi(z)) = \{H(\psi(z) - H(q(z))\} + \{H(p(z)) - H(\phi(z)\}\,.$$

Mamy

$$\begin{array}{rcl} H(\psi(z) - H(q(z)) & = & \int_{-\infty}^{z} \dot{H} dt = \varepsilon \int_{-\infty}^{z} y \cos{(\omega t)}\, dt, \\ H(p(z)) - H(\phi(z)) & = & \int_{z}^{\infty} \dot{H} dt = \varepsilon \int_{z}^{\infty} y \cos{(\omega t)}\, dt. \end{array}$$



Rysunek 5.6. Wyznaczenie całki Mielnikowa.

Zatem $\Delta H = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} y \cos(\omega t)\, dt$, którą to całkę przybliżmy kładąc $y = y_0(t)$ ze wzoru (5.3). Dostajemy tzw. **całkę Mielnikowa** (analog całki abelowej)

$$\Delta H = \varepsilon M(z) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\cosh(t-z)} dt + O(\varepsilon^2). \tag{5.5}$$

Nietrudno pokazać następujący

Lemat 5.3. *Jeśli $M(z_0) = 0$ i $M'(z_0) \neq 0$, to podrozmaitości $W^s(p(z))$ i $W^u(q(z))$ przecinają się transwersalnie w punkcie bliskim S* (Zadanie 5.5).

Okazuje się, że całka Mielnikowa ze wzoru (5.5) jest policzalna. Podstawiając $s = e^{-t}$ (z $ds = -sdt$) dostajemy

$$M(z) = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega z} s^{-i\omega} + e^{-i\omega z} s^{i\omega}}{1+s^2} ds.$$

Wyliczymy całkę $I = \int_0^\infty s^{i\alpha}(1+s^2)^{-1} ds$ metodą konturową. Całka wzdłuż konturu z Rysunku 5.7, w granicy z promieniami okręgów dążących do 0 i ∞ odpowiednio, wynosi

$$\begin{aligned}(1 - e^{-2\pi i\alpha})I &= 2\pi i \left\{\mathrm{res}_{s=i} s^{i\alpha}(1+s^2)^{-1} + \mathrm{res}_{s=-i} s^{i\alpha}(1+s^2)^{-1}\right\} \\ &= \tfrac{2\pi i}{2i}\left(e^{-\pi\alpha/2} - e^{-3\pi\alpha/2}\right) = 2\pi e^{-\pi\alpha} \sinh(\pi\alpha/2).\end{aligned}$$

To daje $I = \pi/(2\cosh(\pi\alpha/2))$ i

$$M(z) = -2\pi \frac{\cos(\omega z)}{\cosh(\pi\omega/2)}.$$

Łatwo widać, że ta funkcja spełnia wymaganie $M'|_{M=0} \neq 0$.

Znaleźliśmy przynajmniej jeden punkt r_0 przecięcia się rozmaitości stabilnej i niestabilnej punktu stałego $q = q(0)$ dla dyfeomorfizmu

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 : U \longmapsto U,$$

gdzie U jest pewnym otoczeniem pętli separatrys Γ siodła $x = \pm\pi$, $y = 0$, a $\mathcal{P}_0$ jest wyróżnionym przekształceniem monodromii z rodzimy $\{\mathcal{P}_z\}$ (z hiperbolicznymi punktami stałymi $q(z)$). Ale takich punktów jest znacznie więcej; są one postaci $r_n = \mathcal{P}^n(r_0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Przy $n \to \infty$ i przy $n \to -\infty$ punkty r_n dążą do punktu stałego q_0.

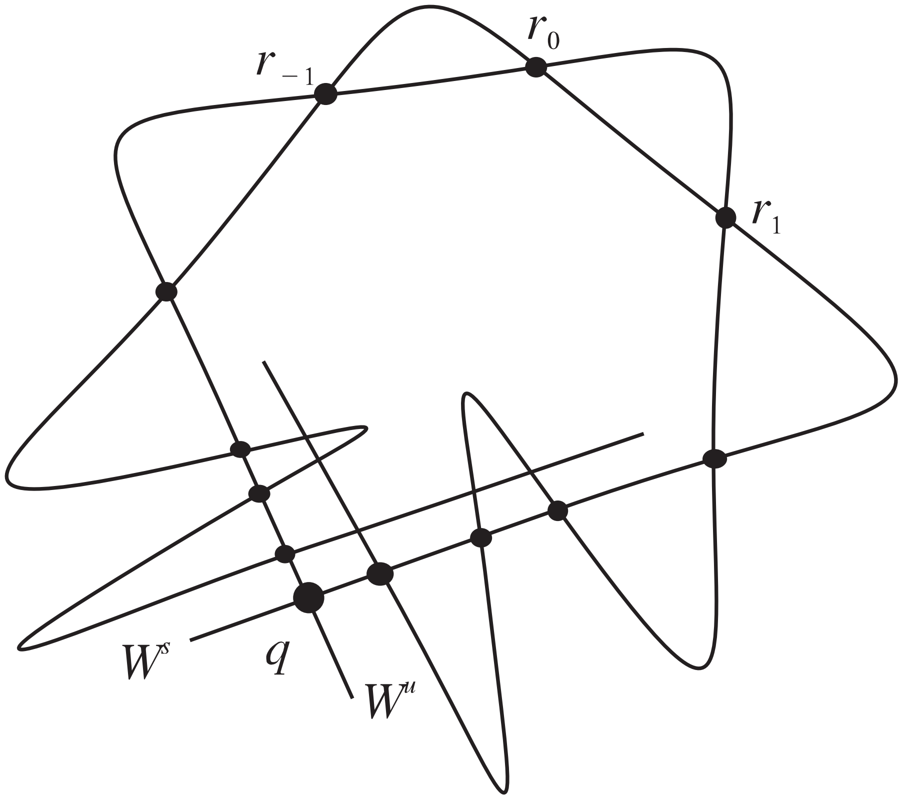
Jednakże podrozmaitości $W^s = W^s(q(0))$ i $W^u = W^u(q(0))$ zachowują się co najmniej niestandardowo. Na przykład, rozmaitość W^u przechodząc przez coraz dalsze punkty r_n ($n \to \infty$) zaczyna być coraz bardziej równoległa do samej siebie, ale w okolicy siodła q (czyli do lokalnej rozmaitości niestabilnej W^u_{loc}). Przy tym oczywiście, pomiędzy punktami r_n i r_{n+1} wykonuje

Rysunek 5.7. Kontur całkowania.

ostry zakręt. To samo mniej więcej dzieje się z rozmaitością W^s przy przejściu przez punkty r_n dla $n \to -\infty$ i pomiędzy tymi punktami. W szczególności wyróżnione powyżej kawałki W^u i W^s zaczynają się przecinać w innych puktach (niż r_n). Aż strach pomyśleć, co się dzieje przy dalszych iteracjach; np. kawałki W^u równoległe do W^u_{loc} zaczynają być coraz dłuższe (patrz Rysunek 5.8).

ZADANIA

Zadanie 5.4. Pokazać, że jeśli g_s^t jest $2-$parametrową rodziną dyfeomorfizmów definiujących ewolucję nieautonomicznego pola wektorowego $\dot{x} = v(t, x)$, które jest okresowe z okresem T względem czasu, to $g_{s+T}^{t+T} = g_s^t$.



Rysunek 5.8. Przecinanie się podrozmaitości stabilnej z podrozmaitością niestabilną.

Zadanie 5.5. Udowodnić Lemat 5.3.

Wskazówka: Po pierwsze, pokazać, że (jako bliskie krzywej fazowej z równania (5.3)) w otoczeniu punktu $x = 0$, $y = 1$ podrozmaitości $W^s(p(z))$ i $W^u(q(z))$ leżą poziomo, czyli są wykresami pewnych funkcji od x. Dla $z = z_0$ będziemy trakować je jako wykresy funkcji F i G odpowiednio z pewnego odcinka J (na osi $x-$ów) do cięcia S, przy czym S jest parametryzowane przez $H|_S$.

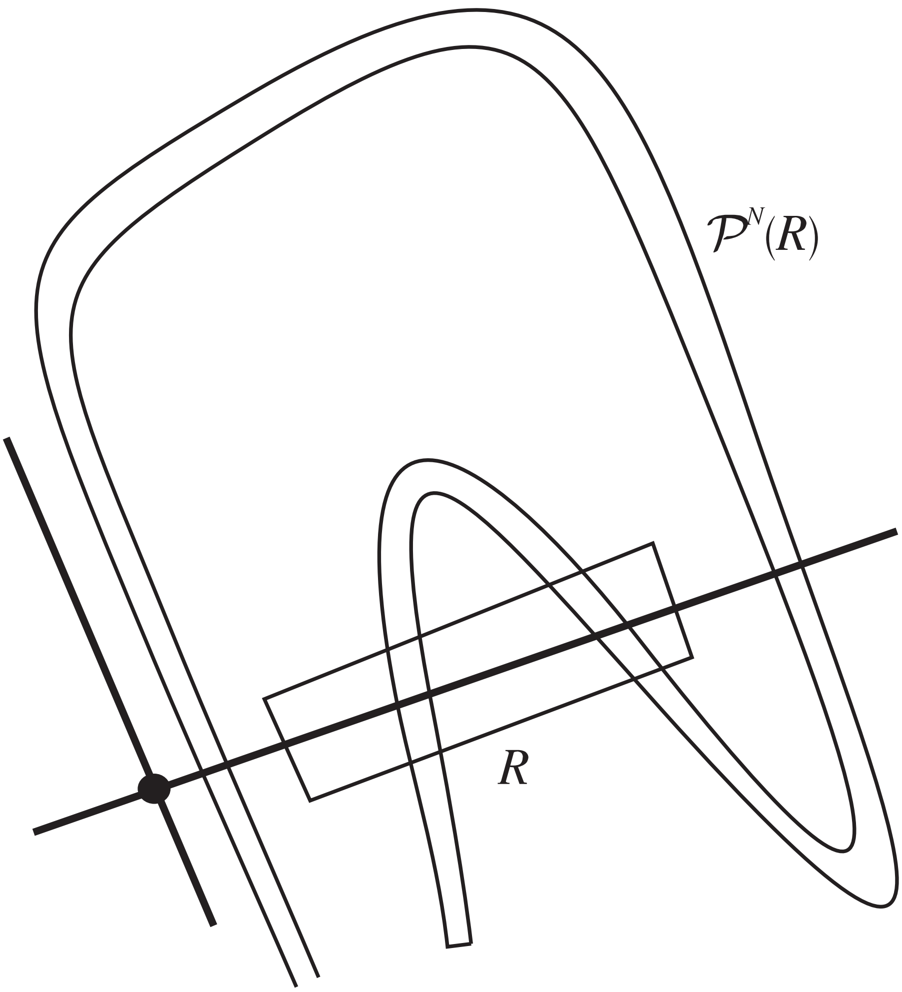
Po drugie. przekształcenia $\mathcal{P}_{z_0}$ i $\mathcal{P}_z$ są sprzężone, $\mathcal{P}_z = g^z_{z_0} \circ \mathcal{P}_{z_0} \circ \left(g^z_{z_0}\right)^{-1}$. Wywnioskować stąd, że $W^s(p(z)) = g^z_{z_0}(W^s(p(z)))$ i podobnie jest z W^u. Przekształcenia $g^z_{z_0}$ są bliskie przekształceniom $g_0^{z-z_0}|_{\varepsilon=0}$ potoku fazowego niezaburzonego układu (5.2), które w otoczeniu punktu $x = 0$, $y = 2$ jest z grubsza 'ruchem w prawo'. Stąd wynika, że przy zmianie z rozmaitości $W^s(p(z))$ powstają z rozmaitości $W^s(p(z_0))$ przez 'przesuwanie' jej. Stąd wynika, że jeśli $x_0(t)$ jest zadane jak w (5.3), to funkcję $H = F(x)$, której wykresem jest $W^s(p(z_0))$, można zadać w pierwszym przybliżeniu jako

$$F(x) \approx H \circ \phi \left(x_0^{-1}(x)\right).$$

Podobnie wykres funkcji $G(x) \approx H \circ \psi \left(x_0^{-1}(x)\right)$ w pierwszym przybliżeniu zadaje $W^u(q(z_0))$. Różnica $G(x) - F(x) \approx \Delta H \approx \varepsilon M(z)$. Pokazać, że warunek transwersalności W^s i W^u wynika z własności: $\frac{d}{dx}(G - F) \neq 0$ dla $G - F = 0$.

5.2. Podkowa Smale'a, dyfeomorfizmy Anosowa i atraktory

Prawdopodobnie S. Smale był pierwszym, który dobrze zrozumiał zjawisko z końca poprzedniego rozdziału i opisał je w ścisłych matematycznych terminach. Na Rysunku 5.9 widzimy (nieco krzywoliniowy) 'prostokąt ' R wzdłuż lokalnej rozmaitości stabilnej W^s_{loc}, który pod działaniem odpowiednio wysokiej iteracji przekształcenia $\mathcal{P}$ przechodzi na figurę, która przecina R w dwu miejscach. Można dobrać parametry definiujące prostokąt R, aby to rzeczywiście miało miejsce; (my tego nie robimy, ale możemy odesłać czytelnika do książek R. Devaney'a [9], C. Robinsona [17] i W. Szlenka [18]).



Rysunek 5.9. Generowanie przekształcenia podkowy.

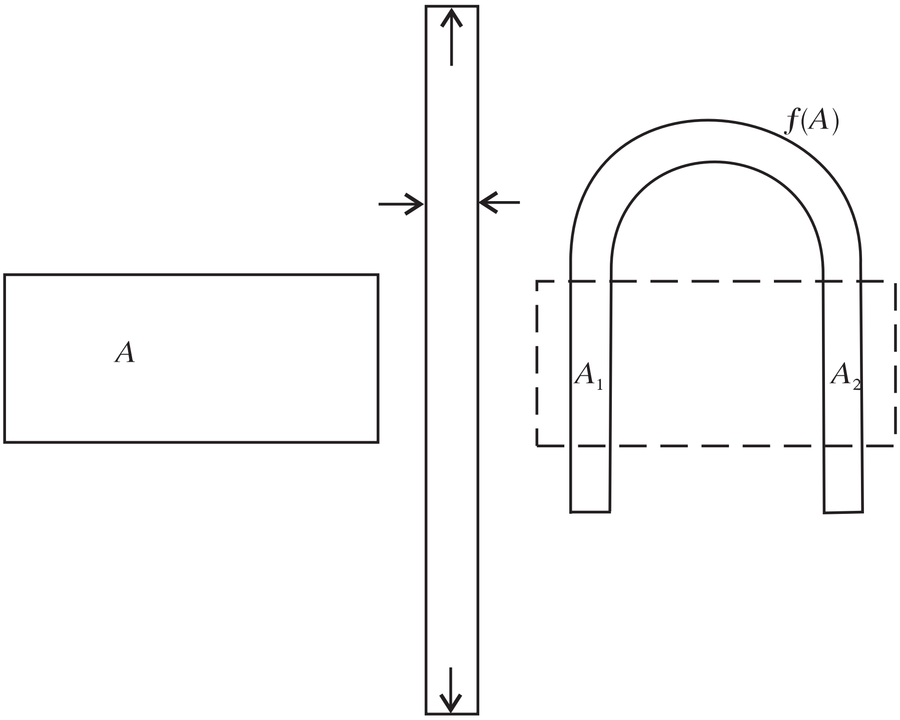
Modelowy przykład przekształcenia jak na Rysunku 5.9 to przekształcenie podkowy Smale'a przedstawione na Rysunku 5.10.

Definicja 5.6 (Podkowa Smale'a)**.** Mamy (autentyczny) prostokąt A na płaszczyźnie, z którym dokonujemy następującej operacji. Najpierw wydłużmy go w kierunku pionowym i zwężamy w kierunku poziomym. Następnie zaginamy nasz wydłużony prostokąt i kładziemy na płaszczyznę tak ,aby przecinał wyjściowy prostokąt wzdłuż dwóch równoległych pionowych pasków

$$f(A) \cap A = A_1 \cup A_2.$$

W ten sposób dostajemy nową figurę, oznaczaną $f(A)$, gdzie $f : A \longmapsto f(A)$ jest **dyfeomorfizmem podkowy**.[1]

Podkowa Smale'a, chociaż prosto zdefiniowana, wcale taka prosta nie jest. Latwo stwierdzić, że $f^2(A) \cap A$ składa się z 4 pionowych pasków; ogólniej, $f^n(A) \cap A$ składa się z 2^n pionowych pasków (Zadanie 5.14). Z drugiej strony, $f^{-1}(A) \cap A = f^{-1}(A \cap f(A))$ składa się z dwu poziomych pasków; ogólniej, $f^{-n}(A) \cap A$, $n > 0$, składa się z 2^n poziomych i cienkich pasków (Zadanie 5.15). Zatem $f^n(A) \cap f^{-m}(A)$, $m, n > 0$, składa się z $2^n \times 2^m$ małych prostokącików. Bardzo ważny jest następujący zbiór



Rysunek 5.10. Podkowa Smale'a.

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A). \tag{5.6}$$

Łatwo sprawdzić, że jest to zbiór niezmienniczy względem f : $f(\Lambda) = f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ (Zadanie 5.16). Można powiedzieć więcej o Λ i o $f|_\Lambda$, ale najpierw powinniśmy wprowadzić jedną definicję.

Definicja 5.7. Niech $\Sigma = \Sigma_k = \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{Z}}$ będzie przeliczalnym iloczynem kartejańskim ustalonego zbioru $k-$elementowego; składa się ona z ciągów $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$, $a_j \in \{1, \ldots, k\}$. Zdefiniujemy przekształcenie $\sigma : \Sigma \longmapsto \Sigma$ następująco:

$$(\sigma a)_j = a_{j+1}.$$

Układ dynamiczny (Σ, σ) zdefiniowany powyżej nazywa się **układem symbolicznym**, albo *przesunięciem*.

[1] Można to przekształcenie przedłużyć. Doklejmy do dolnej i górnej podstaw A półkola i oznaczmy nową figurę przez M. Przedłużmy f na ba półkola, tak aby ich obrazy przylegały do dolnych końców $f(A)$. Zakładając, że nowa figura leży całkowicie w M, dostajemy dobrze określony dyfeomorfizm $f : M \longmapsto M$.

Na przetrzeni Σ wprowadza się topologię produktową, gdzie otoczeniami danego ciągu symboli $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ są *zbiory cylindryczne* postaci

$$\{b = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots) : b_{-M} = a_{-M}, b_{-M+1} = a_{-M+1}, \ldots, b_N = a_N\}$$

(dla ustalonych M, N). Σ jest też przestrzenią metryczna, bo odległość dwóch ciągów to $\operatorname{dist}(a, b) = \sum_{n \in Z} 2^{-|n|} |a_n - b_n|$.

Ma miejsce następujące

Twierdzenie 5.8. *Istnieje ciągły homeomorfizm $\Phi : \Lambda \longmapsto \Sigma_2$, który sprzęga σ z $f|_\Lambda$:*

$$\sigma \circ \Phi = \Phi \circ f.$$

Dowód. Przekształcenie Φ jest łatwe do zdefiniowania. Jeśli $x \in \Lambda$, to kładziemy $\Phi(x) = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$, gdzie

$$a_n = 1 \;\text{ gdy }\; f^n(x) \in A_1 \;\text{ i }\; a_n = 2 \;\text{ gdy }\; f^n(x) \in A_2.$$

Własność sprzęgania sprawdza się bezpośrednio (Zadanie 5.18). Pozostaje zatem tylko sprawdzić ciągłość i odwracalność przekształcenia Φ.

Te dwie własności wynikają z hiperboliczności przekształcenia podkowy: w kierunku poziomym jest ściskanie ze stałą $\lambda_1 < 1$ a w kierunku pionowym mamy rozciąganie ze stałą $\lambda_1 > 1$. Zatem prostokąciki, pojawiające się przy lokalizacji punktów x, tzn.

$$\left\{x : f^{-M}(x) \in A_{a_{-M}}, \ldots, f^N(x) \in A_{a_N}\right\}, \tag{5.7}$$

stają się eksponencjalnie małe przy M i N bardzo dużych. W granicy dostaniemy tylko jeden punkt (odwracalność). Małe rozmiary zbiorów (5.7) odpowiadają małości odpowiednich zbiorów cylindrycznych w Σ; jest to dokładnie ciągłość Φ i Φ^{-1}. □

Ponieważ Λ jest jedynym zbiorem niezmienniczym w prostokącie A, to cała interesująca dynamika przekształcenia podkowy ogranicza się do dynamiki $f|_\Lambda$. Dzięki powyższemu twierdzeniu jest to taka sama dynamika, jak dla przekształcenia symbolicznego σ na Σ. Z drugiej strony, przekształcenie symboliczne jest przyjemne do badania. Ma ono następujące ciekawe włsności.

Stwierdzenie 5.9. *Punkty okreowe dla σ są gęste w przestrzeni symbolicznej Σ.*

Dowód. Niech $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in \Sigma$. Dla dużego $N > 0$ wszyskie ciągi $b = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)$ takie, że $b_{-N} = a_{-N}, \ldots, b_N = a_N$ są bliskie a. Zatem bliski jest też ciąg utworzony z bloku $(a_{-N}, \ldots, a_N)$ (długości $2N + 1$) i powtarzanego periodycznie. Odpowiada on puktowi okresowemu dla σ o okresie $2N + 1$. □

Stwierdzenie 5.10. *Układ dynamiczny (Σ, σ) jest tranzytywny, tzn. dla dowolnych podzbiorów otwartych $U, V \subset \Sigma$ istnieje i $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy U i V są zbiorami cylindrycznymi definiowanymi przy pomocy bloków $(a_1, \ldots, a_M)$ i $(b_1, \ldots, b_N)$. Wtedy wystaczy wziąć dowolny ciąg z blokiem $(a_1, \ldots, a_M, b_1, \ldots b_N)$ (długości $M + N$). □

Uwaga 5.11. Można wprowadzić na Σ probabilistyczną miarę produktową μ, taką, że $\mu(\{a_0 = j\}) = 1/k$ (miara Bernoulliego). Okazuje się ona być niezmiennicza względem przesunięcia σ. Ponadto zachodzi własność mieszania, o której wspomniałem na początku rozdziału a której nie chcę ściśle definiować. Zatem układ podkowy Smale'a a także układ huśtawki są układami chaotycznymi.

Podzbiór $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, niezmienniczy dla przekształcenia podkowy Smale's, ma jeszcze jedną ważną własność. Mianowicie jest **hiperboliczny**, co oznacza, że indukowane przekształcenia liniowe $f_*(x) : T_x\mathbb{R}^2 \longmapsto T_{f(x)}\mathbb{R}^2$ są hiperboliczne (mają jedną wartość własną $\lambda_1 \in (0,1)$ i drugą $\lambda_2 > 1$).

Niestety, zbiór Λ jest bardzo cienki (jego wymiar Hausdorffa zależy od λ_1 i λ_2) i na pewno nie jest rozmaitością (nawet lokalnie). Ale istnieją chaotyczne układy dynamiczne ze strukturą hiperboliczną na całej rozmaitości. Są to tzw. **dyfeomorfizmy Anosowa**, których najbardziej znanym reprezentatnem jest następujący

Przykład 5.12 (Hiperboliczny automorfizm torusa)**.** Utożsamijmy dwuwymiatowy torus z płaszczyzną podzieloną przez kratę, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zadaje przekształcenie płaszczyzny, które punkty o współrzędnych całkowitych przekształca na podobne punkty. Zatem definiuje ono przekształcenie $f : \mathbb{T}^2 \longmapsto \mathbb{T}^2$. Ponieważ wyznacznik naszej macierzy jest równy 1, to i przekształcenie odwrotne zachowuje kratę; zatem f jest dyfeomorfizmem.

Przekształcenie f ma dokładnie jeden punkt stały, odpowiadający punktowi $(0,0)$. Za to równania na punkty okresowe o okresie 2 przyjmują postać $4x_1 + 3x_2 = m_1$, $3x_1 + x_2 = m_2$, $m_{1,2} \in \mathbb{Z}$. Nietrudno zobaczyć, że daje to 25 rozwiązań. Ogólnie, ze wzrostem n liczba punktów okresowych dla f o okresie $\leqslant n$ rośnie do nieskończoności; w szczególności, punkty z wymiernymi obiema współrzędnymi są okresowe (Zadanie 5.19).

Macierz pochodnej $f_*(x) : T_x\mathbb{T}^2 \longmapsto T_{f(x)}\mathbb{T}^2$ w każdym punkcie x jest taka sama i równa A. Z kolei macierz A jest hiperboliczna, z wartościami własnymi $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < 1$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) > 1$. Zatem f ma (równomierną) strukturę hiperboliczną. (Ta własność wchodzi w definicję dyfeomorfizmu Anosowa, której nie przytaczam).

Co więcej, przez każdy punkt $x \in \mathbb{T}^2$ przechodzą dwie specjalne krzywe: jedna $W^s(x)$ odpowiada prostej w kierunku własnym odpowiadającym λ_1, i druga $W^u(x)$ odpowieda prostej w drugim kierunku własnym. Ponieważ wartości własne są niewymierne, to współczynniki nachylenia obu kierunków własnych są niewymierne. Zatem każda z rozmaitości $W^s(x)$ i $W^u(x)$ jest gęsta w torusie (tworzy obmotkę); w topologii mówi się o podrozmaitościach immersyjnych.

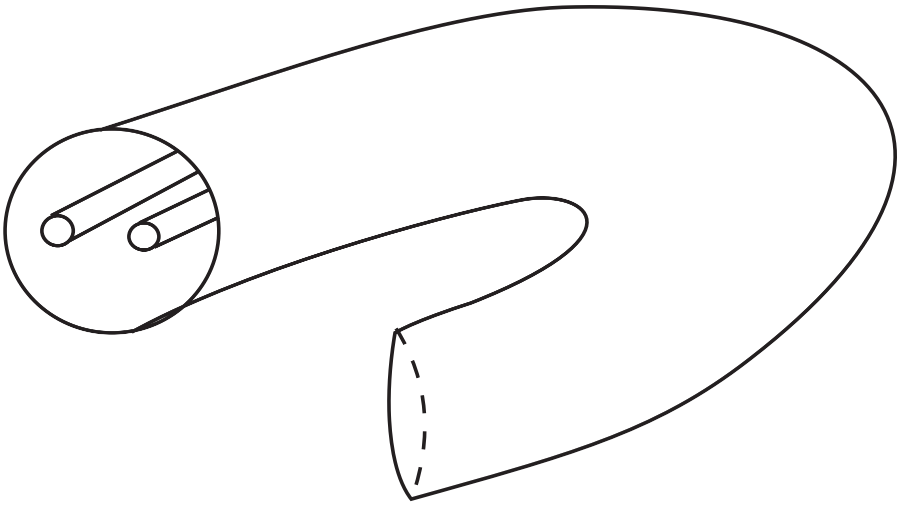
Okazuje się, że hiperboliczny automorfizm torusa ma własność tranzytywności mieszania względem miary Lebesque'a (która jest zachowana przez f).

Na koniec, poinformuję czytelników, że dyfeomorfizm f jest strukturalnie stabilny. To znaczy, że dowolny bliski niemu dyfeomorfizm g jest z nim sprzężony przy pomocy pewnego homeomorfizmu torusa h (analog Twierdzenia Grobmana–Hartmana). Jest to ogólna własność dyfeomorfizmów Anosowa.

Innym naturalny układem typu Anosowa jest potok geodezyjny na powierzchni o stałej ujemnej krzywiźnie.

Bardzo ważnymi przykładami układów dynamicznych są tzw. **atraktory hiperboliczne**. Są to przekształcenia gładkie (nawet niekoniecznie odwracalne) $f : M \longmapsto M$ dla których istnieje domknięty podzbiór niezmienniczy $\Lambda \subset M$ z otoczeniem $U \supset \Lambda$ takim, że $\Lambda = \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(U)$. Lokalnie Λ ma postać $N \times C$, gdzie N jest regularną rozmaitością (z $0 < \dim N < \dim M$) a C jest zbiorem typu Cantora.

Ponadto Λ ma strukturę hiperboliczną w tym sensie, że $f_*(x)$ jednostajnie rozciąga w kierunku N i jednostajnie ściska w kierunku transwersalnym do N.



Rysunek 5.11. Selenoid.

Przykład 5.13 (Selenoid)**.** Niech $M = D^2 \times \mathbb{S}^1 = \{(z, y)\}$ będzie pełnym torusem, gdzie $D^2 = \{z : |z| \leqslant 1\} \subset \mathbb{C}$ to dysk a $\mathbb{S}^1 = \{y \bmod \mathbb{Z}\}$. Przekształcenie jest zadane następująco

$$f : (z, y) \longmapsto \left(\frac{1}{4}z + \frac{1}{2}e^{2\pi i y}, 2y \bmod \mathbb{Z}\right).$$

Obrazem $f(M) \subset M$ będzie torus czterokrotnie cieńczy i dwukrotnie dłuższy oraz włożony w M tak, że owija się dwukrotnie wokół 'równika' M przy tym lekko skręcając (patrz Rysunek 5.11).

Oczywiście $\Lambda = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(M)$ jest zbiorem niezmienniczym i spełnia wymagania, które nałożyłem powyżej na hiperboliczne atraktory.

Na koniec, chciałbym zauważyć, że w teorii układów dynamicznych trudny do rozwiązania problem stanowią tzw. *dziwne atraktory*, które spełniają własność $\Lambda = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(U)$, ale nie chcą być równomiernie hiperboliczne. Najbardziej znane to **atraktor Hènona** zadany odwzorowaniem

$$(x, y) \longmapsto \left(y + 1 - ax^2, bx\right)$$

(gdzie np. $a = 1.4$ i $b = 0.3$) i **atraktor Lorenza** zadany polem wektorowym

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz$$

(gdzie np. $\sigma = 10$, $r - 28$ i $b = 8/3$).

ZADANIA

Zadanie 5.14. Narysować $f^2(A)$.

Zadanie 5.15. Pokazać, że $f^{-n}(A) \cap A$, $n > 0$, składa się z 2^n poziomych pasków.

Zadanie 5.16. Udowodnić, że Λ ze wzoru (5.6) jest zbiorem niezmienniczym.

Zadanie 5.17. Pokazać, że Λ (z (5.6)) jest homeomorficzne z $C \times C$, gdzie C jest (odpowiednio zdefiniowanym) zbiorem Cantora.

Zadanie 5.18. Sprawdzić, że Φ sprzęga f z σ.

Zadanie 5.19. Udowodnić, że zbiór punktów okresowych przekształcenia z Przykładu 5.12 pokrywa się ze zbiorem punktów o wymierych obu współrzędnych.

Wskazówka: Zbiór $\left\{\left(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}\right) \mod \mathbb{Z}^2 : \ p, q \in \mathbb{N}\right\}$ dla ustalonego $N \in \mathbb{N}$ jest skończony i niezmienniczy względem f. Ponadto równania na punkty okresowy o okresie n przyjmują postać $(A^n - I)\, x = m$, gdzie $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$.

6. Dodatek. Podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii RRZ

6.1. Definicje

Pod *równaniem różniczkowym zwyczajnym* rozumiemy równanie postaci

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v(t,x), \tag{6.1}$$

gdzie $t \in I \subset \mathbb{R}$ jest czasem rzeczywistym (I to otwarty odcinek), x należy do *przestrzeni fazowej* (rozmaitości) M a v jest zależnym od czasu polem wektorowym na M, $v : I \times M \longmapsto TM$ spełnia $v(t,x) \in T_x M$. Często $M = U$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$; wtedy $v : I \times U \longmapsto \mathbb{R}^n$ i mówimy o układzie równań różniczkowych zwyczajnych. Jeśli v nie zależy od czasu, $v = v(x)$, to równanie (6.1) jest *równaniem autonomicznym* (a v jest *autonomicznym polem wektorowym*), w przeciwnym przypadku mamy do czynienia z nieautonomicznym równaniem. Przestrzeń $I \times M$ nazywa się *rozszerzoną przestrzenią fazową.*

Rozwiązaniem równania (6.1) nazywamy dowolną różniczkowalną krzywą $\varphi : J \longmapsto M$, $J \subset I$, która spełnia równanie

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) \equiv v(t;\varphi(t)).$$

Zagadnieniem początkowym nazywamy następujące dwa warunki

$$\dot{x} = v(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{6.2}$$

z których drugi nazywa się *warunkiem początkowym. Rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (6.2) nazywamy rozwiązanie

$$\varphi(t) = \varphi(t; x_0, t_0)$$

równania (6.1), które ma własność $\varphi(t_0) = x_0$.

Jeśli $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem układu (6.1), to krzywą $\{(t,\varphi(t)) : t \in J\} \subset I \times M$ (tj. wykres rozwiązania) nazywamy *krzywą całkową*; jeśli, dodatkowo, układ (6.1) jest autonomiczny, to krzywą $\{\varphi(t) : t \in J\}$ (tj. obraz rozwiązania) nazywamy *krzywą fazową.*

Uwaga 6.1. Wprowadzając nowy czas τ możemy przepisać nieautonomiczne równanie (6.1) w postaci następującego układu autonomicznego

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = v(t,x) \tag{6.3}$$

w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Wtedy krzywe całkowe dla równania (6.1) okażą się krzywymi fazowymi dla układu (6.3).

Równanie różniczkowe rzędu n, czyli

$$\frac{d^n x}{dx^n} = x^{(n)} = f(t,x,x^{(1)},\ldots,x^{(n-1)}), \quad t \in I, \; x \in \mathbb{R}, \tag{6.4}$$

zastępuje się układem równań pierwszego rzędu

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3, \ldots,\ \dot{y}_{n-1} = y_n,\ \dot{y}_n = f(t, y_1, \ldots, y_n) \tag{6.5}$$

przy pomocy podstawienia $x = y_1$, $x^{(1)} = y_2, \ldots, x^{(n-1)} = y_n$. Naturalnym warunkiem początkowym dla równania (6.4) jest

$$x(t_0) = x_0,\ x^{(1)}(t_0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \tag{6.6}$$

Zauważmy, że stosując trick z Uwagi 6.1 możemy zastąpić (na ogól) nieautonomiczny układ (6.5) odpowiednim układem autonomicznym w $\mathbb{R}^{n+1}$.

Uwaga 6.2. W książkach o równaniach różniczkowych rozważane są także *równania uwikłane względem pochodnej*, typu

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Okazuje się, że, jeśli równanie $F(t, x, p) = 0$ da się rozwikłać w otoczeniu pewnego punktu (t_0, x_0, p_0) w postaci $x = g(t, p)$, to równanie (6.7) można przepisać w postaci układu autonomicznego

$$\frac{dt}{d\tau} = g_p'(t, p), \quad \frac{dp}{d\tau} = p - g_t'(t, p),$$

gdzie τ jest nowym 'czasem'. Rzeczywiście, mamy $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = p\frac{dt}{d\tau}$. Zatem, różniczkując tożsamość $x(\tau) = g(t(\tau), p(\tau))$, dostajemy warunek $p\frac{dt}{d\tau} \equiv g_t'\frac{dt}{d\tau} + g_p'\frac{dp}{d\tau}$. Jest on spełniony dla powyższego pola wektorowego.

Podobny układ można napisać, gdy równanie $F = 0$ rozwikłuje się względem t, a także gdy $x \in \mathbb{R}^n$ i $F \in \mathbb{R}^n$. W tym skrypcie równania typu (6.7) nie są badane, ale przytoczyliśmy je, aby zademonstrować pewną uniwersalną własność autonomicznych równań różniczkowych.

Z autonomicznym równaniem

$$\dot{x} = v(x) \tag{6.8}$$

wiąże się pojęcie potoku fazowego. Zauważmy, że rozwiązania $\varphi(t; x_0, 0)$ równania (6.8) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ zadają rodzinę odwzorowań

$$g^t : D_t \longmapsto M, \quad x_0 \longmapsto \varphi(t; x_0, 0),$$

gdzie D_t jest dziedziną odwzorowania g^t. Ta rodzina powinna spełniać dwie naturalne własności

$$g^0 = id, \tag{6.9}$$
$$g^t \circ g^s = g^{t+s}. \tag{6.10}$$

Własność (6.9) to definicja warunku początkowego. Własność (6.10), która powinna być spełniona dla $x_0 \in D_s \cap (g^s)^{-1}(D_t)$, oznacza, że jeśli wystartujemy w momencie czasu 0 z punktu x_0 i dojedziemy (wzdłuż rozwiązania) do punktu $y_0 = g^s(x_0)$ a następnie wyzerowujemy stoper i jedziemy z y_0 po czasie t, to dojedziemy do tego samego punktu, jak byśmy jechali po czasie s $t + s$ z x_0 bez zerownia stopera. Oczywiście, tutaj istotne jest, że $v(s, y_0) = v(0, y_0) = v(y_0)$ (autonomiczność).

Rodzina $\{g^t\}_{t\in I}$, $g^t : D_t \longmapsto M$, spełniająca warunki (6.9)–(6.10) nazywa się *lokalnym potokiem fazowym.* Rodzina

$$g^t : M \longmapsto M, \quad t \in \mathbb{R},$$

(globalnych) dyfeomorfizmów przestrzeni fazowej M, spełniająca własności (6.9)–(6.10) nazywa się *potokiem fazowym* na M. Inaczej mówiąc, odwzorowanie $t \longmapsto g^t$ jest homomorfizmen z grupy $\mathbb{R}$ do grupy $Diff(M)$ dyfeomorfizmów rozmaitości M.

Przykład 6.3. Równanie

$$\dot{x} = x^2 + 1$$

definiuje globalne pole wektorowe na przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \infty$ (gdzie współrzędna $y = 1/x$ w otoczniu $x = \infty$ spełnia równanie $\dot{y} = -1 - y^2$). Tutal lokalny potok fazowy okazuje sie być potokiem fazowym na $\mathbb{RP}^1$ złożonym z przekształceń Möbiusa

$$g^t(x_0) = \frac{x_0 \cos t + \sin t}{\cos t - x_0 \sin t}.$$

Uwaga 6.4. W przypadku nieautonomicznego pola wektorowego mamy do czynienia z $2-$parametrową rodziną przekształceń

$$g_s^t : M \longmapsto M$$

(ściślej, z jej lokalną wersją) definiowaną tak, że $g_s^t(x_0) = \varphi(t; x_0; s)$, czyli wartość w chwili t rozwiązania startującego z x_0 w chwili s. Zachodzą oczywiste tożsamości

$$g_t^t = id, \quad g_s^t \circ g_u^s = g_u^t.$$

6.2. Twierdzenia

Poniżej czytelnik znajdzie szereg twierdzeń, które są podstawowe w teorii równań różniczkowych zwyczajnych i które są podane bez dowodów. Po więcej szczegółów odsyłam do [3], [15].

Twierdzenie 6.5 (O istnieniu i jednoznaczności lokalnych rozwiązań)**.** *Załóżmy, że pole $v(t, x)$ jest klasy C^1 na zbiorze otwartym $I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Niech $(t_0, x_*) \in I \times U$.*

Wtedy istnieje odcinek $I_0 \subset I$, zawierający moment początkowy t_0, oraz otoczenie $U_0 \subset U$ punktu x_* takie, że dla dowolnego $x_0 \in U_0$ zagadnienie początkowe $\dot{x} = v(t; x)$, $x(t_0) = x_0$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(t; x_0)$.

Ponadto odwzorowanie

$$(t, x_0) \longmapsto \varphi(t; x_0) \tag{6.11}$$

jest ciągłe, a w przypadku, gdy pole $v(t, x)$ jest analityczne, to to odwzorowanie też jest analityczne.

Przypomnimy, że podstawowa idea dowodu tego twierdzenia polega na zastąpieniu zagadnienia początkowego (6.2) równaniem całkowym

$$\varphi(t; x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t, \varphi(s; x_0))ds. \tag{6.12}$$

To równanie jest traktowane jako równanie punktu stałego $\varphi = \mathcal{T}(\varphi)$ dla operatora $\mathcal{T}$ definiowanego po prawej stronie równania (6.12) działającego w odpowiedniej przestrzeni Banacha odwzorowań $\varphi(t, x_0)$. Na ogół jest to przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na $I_0 \times U_0$ z normą supremum, przy tym warunek zwężania dla operatora T wynika z warunku Lipschitza względem x dla pola $v(t,x)$. W przypadku analitycznym jako przestrzeń Banacha wybiera się przestrzeń funkcji holomorficznych w pewnym obszarze w $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ z normą supremum (Zadanie 6.25)

Przykład 6.6. Równanie

$$\dot{x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$$

posiada dwa rozwiązania z tym samym warunkiem początkowym $x(0)=0$: $\varphi_1(t)=0$ dla $t<0$ i $\varphi_1(t)=t^{3/2}$ dla $t\geqslant 0$ oraz $\varphi_2(t)\equiv 0$. Ten standardowy przykład pokazuje, jak ważny jest warunk Lipschitza; tutaj on nie zachodzi w $x=0$.

Twierdzenie 6.7 (O zależności od warunku początkowego)**.** *Jeśli w Twierdzeniu 6.5 założymy, że v jest klasy C^2, to odwzorowanie (6.11) będzie klasy C^1. Ogólniej, jeśli v jest klasy C^r, $1\leqslant r\leqslant\infty$, to φ jest klasy C^{r-1}.*

Twierdzenie 6.8 (O zależności od parametrów)**.** [1] *Jeśli pole v zależy dodatkowo od parametru $\lambda\in V\subset\mathbb{R}^k$ i $v(t,x;\lambda)$ jest klasy C^r, $r\geqslant 2$, to rozwiązanie $\varphi(t;x_0;\lambda)$ jest klasy C^{r-1}.*

W dowodach ostatnich dwóch twierdzeń wykorzystuje się ważnie pojęcie równania w wariacjach. *Równaniem w wariacjach względem warunku początkowego* nazywamy równanie

$$\dot{y} = A(t)y, \quad A(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,\varphi_0(t)). \tag{6.13}$$

Tutaj $\varphi_0(t)$, $\varphi_0(t_0)=x_0$, jest zadanym rozwiązaniem, a równanie (6.13) otrzymuje się przez podstawienie zaburzenia $x=\varphi_0(t)+\varepsilon y(t)+O(\varepsilon^2)$ (z małym ε) do zagadnienia początkowego (6.2) z warunkiem początkowym $x(t_0)=x_0+\varepsilon y_0$ i przyrównania wyrazów rzędu ε. Pochodną czastkową $\partial\varphi/\partial(x_0)_j$ rozwiązania względem warunku początkowego otrzymuje się jako rozwiązanie układu (6.13) z warunkiem początkowym $y_0=e_j$ (gdzie (e_j) to standardowa baza w $\mathbb{R}^n$).

Równaniem w wariacjach względem parametru nazywamy równanie

$$\dot{y} = A(t)y + b(t), \quad b(t) = \frac{\partial v}{\partial\lambda}(t,\varphi_0(t);\lambda_0). \tag{6.14}$$

Tutaj $\varphi_0(t)$ jest wyróżnionym rozwiązaniem zagadnienia początkowego $\dot{x}=v(t,x,\lambda_0)$, $x(t_0)=x_0$, tzn. dla ustalonego parametru $\lambda=\lambda_0$, i macierz $A(t)$ jest taka sama jak w (6.13). To równanie otrzymuje się przez podstawienie $x=\varphi_0(t)+\varepsilon y(t)+O(\varepsilon^2)$ do zagadnienia początkowego $\dot{x}=v(t,x;\lambda_0+\epsilon\nu_0)$, $x(t_0)=x_0$, i porównanie wyrazów liniowych względem małego ε.

W dowodach Twierdzeń 6.7 i 6.8 problem sprowadza się do układu $\dot{x}=v(t,x)$, $\dot{y}=\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)y$ lub do układu $\dot{x}=v(t,x;\lambda)$, $\dot{y}=\frac{\partial v}{\partial x}(t,x;\lambda)y+\frac{\partial v}{\partial\lambda}(t,x;\lambda)$ i stosuje Twierdzenie 6.5 (Zadania 6.26 i 6.27).

Z powyższych twierdzeń wynikają ważne wnioski o jakościowym zachowaniu się rozwiązań równania (6.1).

Twierdzenie 6.9 (O prostowaniu dla układu nieautonomicznego) **.** *Jeśli $v(t,x)$ jest klasy C^r, $r\geqslant 2$, i $(t_0,x_*)\in I\times U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, to istnieje lokalny dyfeomeorfizm*

$$f:(t,x)\longmapsto(t,y),$$

[1] W niektórych źródłach (np. [13], [12]) dowodzi się klasy C^r zależności rozwiązań od parametrów. Dla naszych celów klasa C^{r-1} jest wystarczająca, zwłaszcza, jeśli uwzględni się prostotę poniższego szkicu dowodu tego twierdzenia.

z otoczenia punktu (t_0, x_*) *, który przeprowadza układ (6.1) w układ*

$$\dot{y} = 0.$$

W dowodzie dyfeomeorfizm f jest definiowany tak, że jeśli punkt $x = \varphi(t; x_0, t_0)$, tj. jest wartością rozwiązania po czasie t i z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, to kładziemy $y = x_0$ (Zadanie 6.28).

Twierdzenie 6.10 (O prostowaniu dla układu autonomicznego) **.** *Jeśli autonomiczne pole wektorowe* $v(x)$ *jest klasy* C^r, $r \geqslant 2$, *na* U *i punkt* $x_* \in U$ *jest taki, że*

$$v(x_*) \neq 0, \tag{6.15}$$

to istnieje lokalny dyfeomorfizm $f : x \longmapsto y$ *z otoczenia punktu* x_**, który przeprowadza układ* $\dot{x} = v(x)$ *w układ*

$$\dot{y}_1 = 1,\ \dot{y}_2 = 0, \ldots,\ \dot{y}_n = 0.$$

Jak można się domyślić, zmienna y_1 to czas t wdłuż rozwiązań $\varphi(t; x_0)$, które startują przy $t = 0$ z pewnej hiperpłaszczyzny H prostopadłej do wektora $v(x_*)$. Pozostałe zmienne y_j pochodzą od jakiegoś układu współrzędnych na hiperpłaszczyźnie H i są stałe wzdłuż rozwiązań (Zadanie 6.29).

Uwaga 6.11. Powyższe twierdzenie można nazwać pierwszym twierdzeniem jakościowej teorii równań różniczkowych zwyczajnych.[2] Mówi ono, że lokalnie każde pole wektorowe spełniające warunek (6.15) jest takie samo z matematycznego punktu widzenia. Istotne różnice pojawiają się przy badaniu zachowania globalnych rozwiązań. Warunek (6.15) implikuje pewną prostotę pola wektorowego. W pierwszym rozdziale niniejszego skryptu badamy sytuację gdy ten warunek jest naruszony.

Twierdzenie 6.12 (O lokalnym potoku fazowym)**.** *Dla autonomicznego pola wektorowego* $v(x)$ *klasy* C^r, $r \geqslant 2$, *istnieje lokalny potok fazowy* $\{g^t\}$, $x_0 \longmapsto g^t(x_0)$ *(spełniający warunki (6.9)–(6.10)) zadany przez rozwiązania* $\varphi(t; x_0)$ *zagadnień początkowych* $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x_0$.

Oczywiście to twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności lokalnych rozwiązań dla układu (6.1) z autonomicznym polem $v(x)$.

Twierdzenie 6.13 (O przedłużniu rozwiązań)**.** *Niech pole* $v(t, x)$ *będzie klasy* C^r, $r \geqslant 1$, *w zbiorze otwarym* $I \times U$ *i niech* $F \subset U$ *będzie zwarym podzbiorem. Wtedy dowolne lokalne rozwiązanie* $\varphi(t; x_0; t_0)$ *starujące z* $x_0 \in F$ *albo przedłuża się dla wszystkich czasów* $t_0 \leqslant t < \infty$ *pozostając w* F*, albo wychodzi z* F *po skończonym czasie* $T(x_0) \geqslant t_0$.

Taka sama alternatywa ma miejsce dla rozwiązań $\varphi(t; x_0; t_0)$ *przy* $t < t_0$.

W pewnym sensie to twierdzenie jest oczywiste. Następujący przykład pokazuje, że założenie o zwartości F jest istotne.

Przykład 6.14. Równanie

$$\dot{x} = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

ma rozwiązania $\varphi = x_0/(1 - tx_0)$, które uciekają do nieskończoności po skończonym czasie $T = 1/x_0$.

[2] W angojęzycznej literaturze występuje ono pod nazwą ‘Flow Box Theorem’.

6.3. Metody rozwiązywania

Poniżej przedstawiamy listę klas równań różniczkowych zwyczajnych, które dają się scałkowac i podajemy metody ich całkowania. Wszystkie rozważane tutaj równania mają postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{6.16}$$

albo równoważną postać *równania Pfaffa*

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0.$$

Przykład 6.15. *Równania z rozdzielonymi zmiennymi.* Są to równania postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x)}{P(y)}.$$

Oczywiście rozwiązania są zadane w postaci uwikłanej

$$\int_{x_0}^{x} Q(z)dz = \int_{y_0}^{y} P(y)dy.$$

Przykład 6.16. *Równania jednorodne* są postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(y/x\right).$$

Tutaj podstawienie $u = \frac{y}{x}$ prowadzi do równania z rozdzielonymi zmiennymi

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Do tej klasy można zaliczyć równania postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+\alpha}{cx+dy+\beta}\right), \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Poprzez przesunięcie początku układu współrzędnych do punktu przecięcia się prostych $ax + by + \alpha = 0$ i $cx + dy + \beta = 0$ staje się ono ewidentnie jednorodne. Gdy $ad - bc = 0$ równanie łatwo sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 6.17. *Równania quasi-jednorodne* charakteryzują się niezmienniczością względem symetrii typu

$$x \longmapsto \lambda x, \quad y \longmapsto \lambda^{\gamma} y, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0,$$

która uogólnia analogiczną symetrię z $\gamma = 1$ dla równania jednorodnego. Tutaj podstawienie $u = y/x^{\gamma}$ prowadzi do równania z rozdzielonymi zmiennymi.

Przykład 6.18. *Równania liniowe*

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \tag{6.17}$$

dzielą się na jednorodne, gdy $b(x) \equiv 0$, i niejednorodne. Ogólne rozwiązanie równania jednorodnego $\frac{dy}{dx} = a(x)y$ stowarzyszonego z równaniem (6.17) ma postać

$$\varphi_{jedn} = C \cdot \exp A(x),$$

gdzie $A(x)$ jest funkcją pierwotną dla funkcji $a(x)$. Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego φ_{jedn} i pewnego szczególnego rozwiązania φ_{szcz} równania niejednorodnego. To ostatnie rozwiązanie poszukujemy *metodą uzmienniania sta łej*, tzn. w postaci

$$\varphi_{szcz} = C(x) \cdot \exp A(x).$$

Po podstawieniu do równania (6.17) dostajemy równanie $C'(x) = e^{-A(x)}b(x)$.

Ogólne rozwiązanie ma postać

$$y = e^{A(x)}C + \int^{x} e^{A(x)-A(z)}b(z)dz. \tag{6.18}$$

Przykład 6.19. *Równanie Bernoulliego*

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^n$$

sprowadza się do równania liniowego przez podstawienie

$$z = y^{1-n}.$$

Przykład 6.20. *Równanie z czynnikiem całkującym* ma postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \frac{-MH'_x}{MH'_y},$$

lub

$$M(H'_x dx + H'_y dy) = MdH = 0.$$

Tutaj $M = M(x, y)$ jest *czynnikiem całkującym* a $H = H(x, y)$ jest *całką pierwszą* równania, tzn. funkcja H jest stała na krzywych całkowych równania, $H(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}$. Oczywiście, tutaj rozwiązania $y = \varphi(x)$ są uwikłane w postaci równań

$$H(x, y) = h.$$

Naturalne jest pytanie, jak z postaci funkcji P i Q odgadnąć, czy istnieje czynnik całkujący i całka pierwsza. Wygodnie jest operować autonomicznym polem wektorowym

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{6.19}$$

związanym z równaniem (6.16).

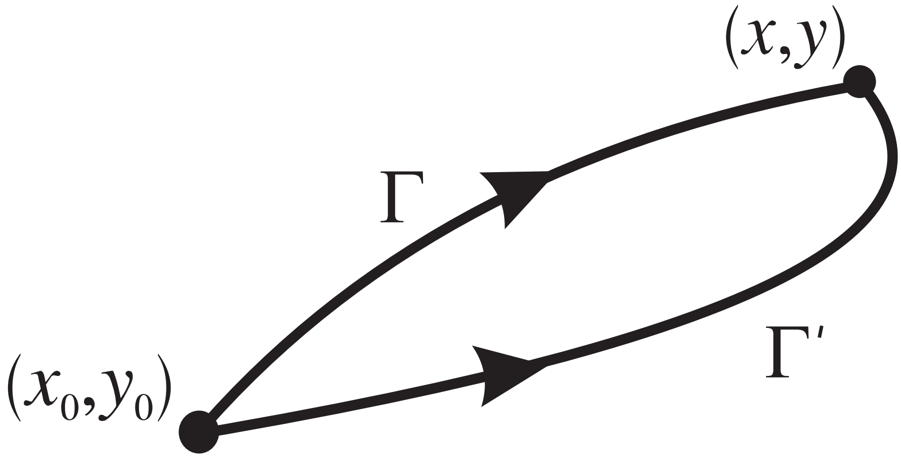
Zauważmy, że przypadek z $M(x, y) \equiv 1$ z całką pierwszą $H(x, y)$ odpowiada sytuacji, gdy układ (6.19) jest *hamiltonowski* z H jako funkcją Hamiltona (hamiltonianem),

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x.$$

Oczywiście wtedy mamy

$$\operatorname{div} V = P'_x + Q'_y \equiv 0, \tag{6.20}$$

tzn. dywergencja pola wektorowego $V = Q\partial_x + P\partial_y$ zeruje się, lub, równoważnie,



$$d\,(Qdx - Pdy) = 0.$$

Jest to warunek konieczny dla hamiltonowskości układu (6.19). Gdy div$V \equiv 0$ to można zdefiniować funkcję H następująco

$$H(x,y) = \int_{\Gamma(x.y)} (Qdx - Pdy)\,,$$

gdzie $\Gamma(x,y)$ jest drogą z ustalonego punktu (x_0, y_0) do (x,y) . Jeśli obszar $U \subset \mathbb{R}^2$, w którym jest zdfiniowany układ (6.19) jest jednospójny (każda pętla jest ściągalna do punktu), to definicja $H(x,y)$ nie zależy od wyboru drogi $\Gamma = \Gamma(x,y)$: różnica pomiędzy tą wartością i wartością zdefiniowaną dla innej drogi Γ' jest całką po zamkniętej pętli $\Gamma - \Gamma'$ (która ogranicza obszar Ω) z $1-$formy $\omega = Qdx - Pdy$, która jest zamknięta, zatem wzór Stokes'a daje $\oint_{\Gamma-\Gamma'} \omega = \iint_\Omega d\omega = 0$.

Przykład równania

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$$

w $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, które spełnia warunek (6.20), i posiada lokalną (ale nie globalną) całkę pierwszą $H = \arg(x+iy)$ pokazuje, że założenie jednospójności jest istotne.

Przypadek, gdy istnieje nietrywialny czynnik całkujący M jest dużo trudniejszy. Pozwolę sobie tutaj zacytować wynik M. Singera, który dotyczy przypadku, gdy P i Q są wielomianami.

Twierdzenie 6.21 (Singer)**.** *Jeśli równanie (6.16) z wielomanami P i Q posiada czynnik całkujący M i całkę pierwszą, które można przedstawić w kwadraturach, to czynnik całkujący M można wybrać w tzw. postaci Darboux*

$$M = e^{g(x,y)} f_1^{a_1}(x,y)\dots f_r^{a_r}(x,y),$$

gdzie $g(x,y)$ jest funkcją wymierną, $f_j(x,y)$ są wielomianami a $a_j \in \mathbb{C}$.

Odsyłam czytelnika do książki [20], w której można znaleźć definicję funkcji przedstawialnych w kwadraturach oraz dowód twierdzenia Singera.

6.4. Układy i równania liniowe

Układy liniowe równań różniczkowych zwyczajnych są uogólnieniami równań (6.17) i mają postać

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.21}$$

Równolegle rozpatruje się liniowe równania różniczkowe rzędu n postaci

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x = b(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.22}$$

Wiadomo, że rozwiązania $x = \varphi(t; x_0; t)$ takich układów i równań przedłużają się do całego odcinka I (Zadanie 6.40). W przypadku jednorodnym, tzn. gdy $b(t) \equiv 0$, zbiór rozwiązań tworzy $n-$wymiarową przestrzeń wektorową. Każda baza tej przestrzeni tworzy tzw. *układ fundamentalny* $(\varphi_j)_{j=1}^n$. Taki układ fundamentalny zadaje *macierz fundamentalną* $\mathcal{F}(t) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ w przypadku układu (6.21) i

$$\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1^{(1)} & \ldots & \varphi_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

w przypadku równania (6.22). Wyznacznik macierzy fundamentalnej nazy- wa się Wrońskianem

$$W(t) = \det \mathcal{F}(t) \tag{6.23}$$

(od nazwiska polskiego matematyka J. Hoene-Wrońskiego).

Ogólne rozwiązanie układu jednorodnego (6.21) (z $b \equiv 0$) ma postać

$$\varphi(t) = \mathcal{F}(t) \cdot C, \tag{6.24}$$

gdzie C jest stałym wektorem (wyznaczanym z warunków początkowych); w szczególności, gdy układ fundamentalny jest tak dobrany aby $\mathcal{F}(t_0) = I$, to rozwiązanie $\varphi(t) = \mathcal{F}(t)x_0$ spełnia warunek początkowy $\varphi(t_0) = x_0$. W przypadku jednorodnego równania (6.22) (z $b \equiv 0$) ogólne rozwiązanie ma postać

$$\varphi(t) = (\mathcal{F}(t) \cdot C)_1 = C_1\varphi_1(t) + \ldots + C_n\varphi_n(t),$$

tzn. pierwsza składowa wektora stojącego po prawej stronie równania (6.24).

Nietrudno domyślić się, że ogólne rozwiązanie układu lub równania niejednorodnego (tj. z $b(t) \not\equiv 0$) jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego φ_{jedn} i szczególnego rozwiązania układu lub równania niejednorodnego φ_{szcz}. Aby rozwiązać układ lub równanie niejednorodne, znając macierz fundamentalną, stosujemy *metodę uzmienniania stałych*, tzn. robimy podstawienie $x = \mathcal{F}(t) \cdot C(t)$. Rozwiązując odpowiednie równanie na $C(t)$ znajdziemy ogólne rozwiązanie układu (6.21) w postaci

$$x = \mathcal{F}(t)C + \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(t)\mathcal{F}^{-1}(s)b(s)ds.$$

Oczywiście, podstawowym problemem jest znalezienie macierzy fundamentalnej $\mathcal{F}(t)$.

W przypadku, gdy macierz $A(t) = A$ w układzie (6.21) lub współczynniki $a_j(t) = a_j$ w równaniu (6.22) nie zależą od czasu, mówimy o *układzie o stałych współczynnikach* lub o *równaniu o stałych współczynnikach*. W tym przypadku macierz fundamentalna ma postać

$$\mathcal{F}(t) = \exp At = I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots,$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

w przypadku równania.

Dla równania (6.21) o stałych współczynnikach ogólne rozwiązanie równania jednorodnego można otrzymać bezpośrednio z *równania charakterystycznego*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \tag{6.25}$$

Ma ono postać

$$\begin{aligned} \varphi_{jedn}(t) &= (C_{1,0} + C_{1,1}t + \dots + C_{1,k_1-1}t^{k_r-1})e^{\lambda_1 t} + \dots \\ &\quad +(C_{r,0} + \dots + C_{r,k_r-1}t^{k_r-1})e^{\lambda_r t}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

gdzie λ_j są pierwiastkami równania charakterystycznego krotności k_j; w przypadku występowania par zespolonych pierwiastków $\lambda_j = \bar{\lambda}_{j+1} = \alpha_j + i\beta_j$, $i = \sqrt{-1}$, odpowiednie wspólczynniki w sumie w (6.26) są sprzężone, $C_{j+1,l} = \bar{C}_j, l$, i te dwa składniki dają wyrażenie

$$D_{j,l}t^l e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) + E_{j,l}t^l e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)$$

(ze stałymi $D_{j,l}$ i $E_{j,l}$).

Również istnieje recepta na szczególne rozwiązanie niejednorodnego równania (6.22) o stałych współczynnikach, w przypadku gdy funkcja $b(t)$ (po prawej stronie równania) jest tzw. *quasi-wielomianem* postaci

$$b(t) = e^{\mu t}p(t). \tag{6.27}$$

Tutaj μ nazywa się wykładnikiem quasi-wielomianu a $p(t)$ jest zwykłym wielomianem stopnia m, nazywanym stopniem quasi-wielomianu. Również funkcje postaci $e^{\nu t}\cos(\xi t)p(t)$ i $e^{\nu t}\sin(\xi t)p(t)$ są odpowiednio częściamu rzeczywistą i urojoną quasi-wielomianu z zespolonym wykładnikiem $\mu = \nu + i\xi$.

Twierdzenie 6.22. *Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać (6.26).*

Jeśli prawa strona równania niejednorodnego (6.22) ma postać (6.27) i wykładnik μ quasi-wielomianu jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (6.25) krotności k, to szczególne rozwiązanie równania można wybrać w postaci quasi-wielomianu

$$\varphi_{szcz} = t^k e^{\mu t} q(t),$$

gdzie $q(t)$ jest wielomianem stopnia $m = \deg p(t)$.

Następujące twierdzenie, pochodzące od J. Liouville'a, jest uogólnieniem elementarnej algebraicznej tożsamości

$$\det\exp A = \exp \mathrm{tr} A$$

i ma olbrzymie zastosowanie w Jakościowej Teorii.

Twierdzenie 6.23 (Liouville)**.** *Wrońskian $W(t)$ związany z macierzą fundamentalną $\mathcal{F}(t)$ układu (6.21) (wzór (6.23)) spełnia równanie*

$$\dot{W} = \mathrm{tr}A(t) \cdot W.$$

Dowód sprowadza się do policzenia granicy

$$\lim_{s\to 0}\frac{\det(I+sA(t))-1}{s},$$

bo $\mathcal{F}(t+s)=(I+sA(t))\mathcal{F}(t)+O(s^2)$. Latwo sprawdzić, korzystając ze standardowej definicji wyznacznika $\det(I+sA)=\sum(-1)^{\pi}\prod(I+sA)_{j,\pi(j)}$, że człony pochodzące od nietrywialnych permutacji π dają wkład rzędu s^2. Człon $\prod(I+sA)_{j,j}=\prod(1+sa_{jj})$ równa się $1+s\sum a_{jj}+O(s^2)$.

W przypadku gdy macierz fundamentalna $\mathcal{F}(t)$ spełnia własność $\mathcal{F}(t_0)=I$, wyznacznik Wrońskiego ma naturalną interpretację ($n-$wymiarowej) objętości równoległościanu rozpiętego przez wektory $f_i(t)=g_{t_0}^t e_i$, $i=1,\dots n$, gdzie $g_{t_0}^t$ jest to 2$-$parametrowa rodzina przekształceń ewolucji układu (które są zdefiniowane w Uwadze 6.4 i które są liniowe) a (e_i) to standardowa baza w $\mathbb{R}^n$. Inaczej mówiąc, zachodzą tożsamości

$$\left|g_{t_0}^t(V)\right|=W(t)\cdot|V|,\qquad \frac{d}{dt}\left|g_{t_0}^t(V)\right|=\mathrm{tr}A(t)\cdot\left|g_{t_0}^t(V)\right|,\tag{6.28}$$

dla obszaru $V\subset\mathbb{R}^n$, gdzie $|V|$ oznacza objętość.

Zastosujmy tę obserwację do równania w wariacjach względem warunków początkowych (6.13) w przypadku autonomicznego pola wektorowego $\dot{x}=v(x)$. To równanie w wariacjach ma postać $\dot{y}=A(t)y$, gdzie $A(t)=\frac{\partial v}{\partial x}(\varphi_0(t))$ jest macierzą pochodnych cząstkowych $\partial v_i/\partial x_j$ składowych v_i pola wzdłuż wyróżnionego rozwiązania $\varphi_0(t)$. Łatwo sprawdzić tożsamość

$$\mathrm{tr}A(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\varphi_0(t))=\mathrm{div}\,v(\varphi_0(t),\tag{6.29}$$

gdzie div oznacza dywergencję.

Niech $V\subset\mathbb{R}^n$ będzie obszarem takim, że rozwiązania starujące z V są określone dla czasów pomiędzy 0 i t. Podzielmy obszar V na prostokątne kostki Δ_j o małej krawędzi ε i z wyróżnionymi punktami $z_j\in\Delta_j$. Pod działaniem potoku g^t te kostki przejdą na nielinowe obszarki $g^t(\Delta_j)$, które są bliskie równoległościankom rozpiętym przez wektory postaci $\varepsilon\cdot f_i(t)$, gdzie każdy wektor $f_i(t)$ jest jak powyżej dla przekształcenia g_0^t związanego z równaniem w wariacjach wzdłuż rozwiązania $\varphi_j(t)$ startującego z z_j. Następnie sumujemy objętości obszarków $g^t(\Delta_j)$ i przechodzimy do granicy z $\varepsilon\to 0$, korzystając z własności (6.28) i (6.29). W rezultacie otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 6.24. *Dla obszaru $V \subset \mathbb{R}^n$ i potoku g^t generowanego przez autonomiczne pole vektorowe $v(x)$ zachodzi tożsamość*

$$\frac{d}{dt}\left|g^t(V)\right| = \int_{g^t(V)} \operatorname{div} v(x) d^n x.$$

W szczególności, jeśli $\operatorname{div} v(x) < 0$, *to potok g^t ma własność zmniejsznia objętości, a jeśli* $\operatorname{div} v(x) > 0$, *to potok ma własność rozszerzania obszarów.*

ZADANIA

Zadanie 6.25. W zależności od stałych $M = \sup_{I\times U} |v(t,x)|$ i $L = \sup \frac{|v(t,x_1)-v(t,x_2|}{|x_1-x_2|}$ (stała Lipschitza) dobrać ε w $I_0 = (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ i promienie w kulach $U_0 = B(x_*, r) = \{|x-x_*| < r\} \subset U$ i $\mathcal{B}(x_0, R) = \{\varphi : I_0 \times U_0 \longmapsto \mathbb{R}^n : \sup|\varphi(t,x_0) - x_0| < R\}$, aby: (i) $\mathcal{T}$:

$\mathcal{B}(x_0, R) \longmapsto \mathcal{B}(x_0, R)$ oraz (ii) $\mathcal{T}$ było kontrakcją na $\mathcal{B}(x_0, R)$. To da uzupełnienie dowodu Twierszenia 6.5.

Zadanie 6.26. Uzupełnić dowody Twierdzeń 6.7 i 6.8.
Wskazówka: W dowodzie Twierdzenia 6.7 rozważyć ciąg przybliżeń $x = \varphi_n(t; x_0)$, $z = \psi_n(t; x_0)$ dla zagadnienia początkowego $\dot{x} = v(t; x), \dot{z} = \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)z$, $x(t_0) = x_0$, $z(t_0)I$, gdzie $z(t; x_0)$ przyjmuje wartości w przestrzenie macierzy $n \times n$. W dowodzie Twierdzenia 6.8 skorzystać z Twierdzenia 6.7.

Zadanie 6.27. Udowodnić, że jeśli $v(t, x; \lambda)$ zależy w sposób analityczny od zwoich argumentów, to rozwiązanie $\varphi(t; x_0; \lambda)$ też jest analityczne.

Zadanie 6.28. Uzupełnić dowód Twierdzenia 6.9.

Zadanie 6.29. Uzupełnić dowód twierdzenia 6.10.

Zadanie 6.30. Znaleźć rozwiązanie równania $x^2 \frac{dy}{dx} - \cos 2y = 1$ spełniające warunek $y(+\infty) = \frac{9\pi}{4}$.

Zadanie 6.31. Rozwiązać równanie $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Zadanie 6.32. Rozwiązać równanie $x\frac{dy}{dx} = y - xe^{y/x}$.

Zadanie 6.33. Rozwiązać równanie $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2/x^2$.

Zadanie 6.34. Rozwiązać równanie $2ydx + (x^2y + 1)xdy = 0$.

Zadanie 6.35. Rozwiązać równanie $xy' - 2y = 2x^4$.

Zadanie 6.36. Rozwiązać równanie $xydy = (y^2 + x)dx$.

Zadanie 6.37. Rozwiązać następujące równanie Riccatiego $y' = 2xy - y^2 + 5 - x^2$.
Wskazówka: Zgadnąć jedno rozwiązanie.

Zadanie 6.38. Rozwiązać równanie $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2+by^2+1}{2xy}$.
Wskazówka: Poszukać czynnika całkującego w postaci x^α.

Zadanie 6.39. Rozwiązać równanie $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$.

Zadanie 6.40. Rozważmy układ liniowy $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, z ciągłymi $A(t)$ i $b(t)$ oraz z oszacowaniami $\|A(t)\| \leqslant C_1(t)$ i $|b(t)| \leqslant C_1(t)$. Pokazać oszacowania $\left|\frac{d}{dt}|x|^2\right| \leqslant 2C_1(t)|x|^2 + 2C_2(t)|x| \leqslant C_3(t)|x|^2$, gdzie ostatnia nierówność zachodzi dla dostatecznie dużych $|x|$ i pewnej ciągłej funkcji $C_3(t)$. Wywnioskować stąd, że rozwiązania nie mogą uciec do nieskończoności po skończonym czasie.

Zadanie 6.41. Podać ogólne rozwiązanie układu $\dot{x} = x - y - z$, $\dot{y} = x + y$, $\dot{z} = 3x + z$.

Zadanie 6.42. Podać ogólne rozwiązanie układu $\dot{x} = x - y + 1/\cos t$, $\dot{y} = 2x - y$.

Zadanie 6.43. Podać ogólne rozwiązanie równania $\frac{d^4}{dt^4}x + 4x = 0$.

Zadanie 6.44. Podać ogólne rozwiązanie równania $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t(e^{-t} - \cos t)$.

Zadanie 6.45. Dla jakich k i ω równanie $\ddot{x} + k^2x = \sin\omega t$ posiada przynajmniej jedno okresowe rozwiązanie.

Literatura

[1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. Halsted Press (A division of John Wiley York-Toronto, Ont., 1973. Translated from the Russian by D. Louvish.

[2] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Halsted Press [A division of John Wiley York-Toronto, Ont., 1973. Translated from the Russian by D. Louvish.

[3] W. I. Arnold. *Równania różniczkowe zwyczajne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1975. Translated from the first Russian edition by Alicja Derkowska and Gabriel Derkowski.

[4] W. I. Arnold. *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1981. Translated from the Russian by Piotr Kucharczyk.

[5] W. I. Arnold. *Teoria równań różniczkowych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1983. Translated from the Russian by Maciej Wojtkowski.

[6] D. K. Arrowsmith, C. M. Place. *Ordinary differential equations. A qualitative approach with applications*. Chapman and Hall Mathematics Series. Chapman & Hall, London, 1982.

[7] N. N. Bautin, E. A. Leontovich. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*, wolumen 11 serii *Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka*. Nauka, Moscow, 1990.

[8] N. V. Butenin, Yu. I. Neimark, N. A. Fufaev. *Vvedenie v teoriyu nelineinykh kolebanii*. Nauka, Moscow, 1987.

[9] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1986.

[10] A. F. Filippov. *Sbornik zadach po differentsialnym uravneniyam*. Nauka, Moscow, 1973.

[11] J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, wolumen 42 serii *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[12] J. K. Hale. *Ordinary differential equations*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Huntington, N.Y., wydanie second, 1980.

[13] P. Hartman. *Ordinary differential equations*, wolumen 38 serii *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.

[14] J. E. Marsden, M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag, New York, 1976. With contributions by P. Chernoff, G. Childs, S. Chow, J. R. Dorroh, J. Guckenheimer, L. Howard, N. Kopell, O. Lanford, J. Mallet-Paret, G. Oster, O. Ruiz, S. Schecter, D. Schmidt and S. Smale, Applied Mathematical Sciences, Vol. 19.

[15] A. Palczewski. *Równania różniczkowe zwyczajne*. Wydawnictwa Naukowo–Techniczne (WNT), Warszawa, 1999.

[16] L. S. Pontrjagin. *Równania różniczkowe zwyczajne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1964.

[17] C. Robinson. *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[18] W. Szlenk. *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, wolumen 56 serii *Biblioteka Matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1982.

[19] H. Żołądek. Twierdzenie kołmogorowa–arnolda–mosera i ograniczony problem trzech ciał. *Wiadomomości Matematyczne*, 29:47–56, 1990.

[20] H. Żołądek. *The monodromy group*, wolumen 67 serii *Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series) [Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series)]*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.