

Matematyka stosowana

Wstęp do teorii Układów Dynamicznych

Anna Zdunik

Anna.Zdunik@mimuw.edu.pl

<http://adres.strony1.www>

Uniwersytet Warszawski, 2011



Streszczenie. Ten materiał jest przeznaczony dla słuchaczy wykładu Układy Dynamiczne. Zawiera opis podstawowych narzędzi i idei pojawiających się w teorii gładkich układów dynamicznych. Ze względu na niewielki zakres wykładu, część poświęcona bardzo ważnemu opisowi przy użyciu metod probabilistycznych (ergodycznych) jest tu ograniczona. Tekst skryptu będzie stopniowo rozszerzany.

Wersja internetowa wykładu:

<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=ud1>

(może zawierać dodatkowe materiały)



Niniejsze materiały są dostępne na [licencji Creative Commons 3.0 Polska](#):
Uznanie autorstwa — Użycie niekomercyjne — Bez utworów zależnych.

Copyright © A.Zdunik, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011. Niniejszy plik PDF został utworzony 23 czerwca 2011.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego.



Skład w systemie L^AT_EX, z wykorzystaniem m.in. pakietów **beamer** oraz **listings**. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

1. Układy dynamiczne- definicje i przykłady	5
1.1. Co to jest układ dynamiczny	5
1.2. Najprostsze przykłady	5
1.3. Topologiczna tranzytywność: przykład- przesunięcie na torusie	7
2. Układy dynamiczne na okręgu	9
2.1. Najprostszy układ- obrót na okręgu	9
2.2. Homeomorfizmy okręgu. Liczba obrotu	10
2.3. (Pół)sprężenie z obrotem i Twierdzenie Denjoy	11
3. Strukturalna stabilność. Układy Morse’a-Smale’a na okręgu	15
3.1. Pojęcie strukturalnej stabilności dla przekształceń i dla pól wektorowych	15
3.1.1. Metryki i topologie w przestrzeniach przekształceń i w przestrzeniach pól wektorowych	15
3.1.2. Równoważność i sprzężenie między polami wektorowymi i dyfeomorfizmami	15
3.1.3. Strukturalna stabilność	16
3.2. Strukturalnie stabilne dyfeomorfizmy okręgu	16
3.3. Strukturalnie stabilne pola wektorowe na okręgu	18
4. Przekształcenia odcinka. Chaos na odcinku	20
4.1. O poszukiwaniu punktów okresowych dla przekształceń odcinka	20
4.2. Twierdzenie Szarkowskiego	21
4.3. Bifurkacja podwajania okresu. Obserwacja Feigenbauma	22
5. Pola wektorowe na rozmaitościach. Zbiory graniczne i zbiór punktów niebłądzących. Pola gradientowe	23
5.1. Zachowanie asymptotyczne trajektorii. Zbiór ω -graniczny.	23
5.2. Pola gradientowe	24
5.3. Cięcia transversalne i przekształcenie Poincare’go w otoczeniu orbity okresowej	26
6. Rozmaitości stabilne i niestabilne. Twierdzenia o ich istnieniu i własnościach	28
6.1. Hiperboliczne punkty stałe i stacjonarne	28
6.2. Twierdzenia Grobmana- Hartmana	28
6.3. Twierdzenie Hadamarda-Perrona	32
6.4. Globalne rozmaitości stabilne i niestabilne	32
7. Pola Morse’a-Smale’a. Dyfeomorfizmy Morse’a- Smale’a. Ω-eksplozja i podkowa Smale’a	34
7.1. Pola wektorowe i dyfeomorfizmy Morse’a- Smale’a	34
7.2. Ω -eksplozja	35
7.3. λ lemat	38
7.4. Podkowa Smale’a	40
8. Zbiory hiperboliczne. Dyfeomorfizmy i potoki Anosowa. Stabilność zbiorów hiperbolicznych.	47
8.1. Solenoid	50
8.2. Dyfeomorfizmy Anosowa	52
8.3. Stabilność zbiorów hiperbolicznych	54
8.4. DA atraktor	55
9. Przekształcenia zachowujące miarę	58

9.1. Podstawowe definicje i fakty	58
9.2. Twierdzenie ergodyczne	59
9.3. Przykłady przekształceń ergodycznych	62
10. Jak szukać miar niezmienniczych	63
10.1. Twierdzenie Kryłowa- Bogoliubowa	63
10.2. O sposobach szukania miar niezmienniczych w klasie miary Lebesgue'a. Operator Perrona-Frobeniusa	65
11. O gładkich miarach niezmienniczych	69
11.1. Twierdzenie Liouville'a	69
11.2. Równania Lagrange'a i Hamiltona. Potoki geodezyjne	71
12. Potok geodezyjny na rozmaitości o stałej ujemnej krzywiznie- ważny przykład potoku Anosowa	75
12.1. Metryka hiperboliczna	75
12.2. Potok geodezyjny w $\mathbb{H}^2$	76
13. Zbiory hiperboliczne i ergodyczność	79
13.1. Geometryczny dowód ergodyczności dla prostego układu hiperbolicznego	79
13.2. Potok geodezyjny na rozmaitości o stałej ujemnej krzywiznie- ergodyczność	80
13.3. Potoki geodezyjne na wybranych powierzchniach; przykłady całkowalnych potoków geodezyjnych	81
13.3.1. Potok geodezyjny na sferze	81
13.3.2. Potok geodezyjny na torusie $\mathbb{T}^2$	82
13.3.3. Potok geodezyjny na elipsoidzie	82
14. O entropii metrycznej	83
14.1. Entropia rozbicia	83
14.2. Entropia przekształcenia	84
14.3. Jak liczyć entropię metryczną	85
15. O entropii topologicznej	87
15.1. Definicja entropii	87
15.2. Związki z entropią metryczną	88
15.3. Związki ze stopniem przekształcenia	88
Literatura	90

1. Układy dynamiczne- definicje i przykłady

1.1. Co to jest układ dynamiczny

- Układ dynamiczny (topologiczny)
 X -przestrzeń topologiczna (najczęściej- metryczna), $\phi : X \rightarrow X$ - przekształcenie ciągłe.
- Układ dynamiczny (metryczny)
 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - przestrzeń z miarą probabilistyczną.
 $\phi : X \rightarrow X$ przekształcenie mierzalne zachowujące miarę μ .

Tu definicja:

Definicja 1.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ przestrzeń z miarą. Mówimy że przekształcenie $\phi : X \rightarrow X$ jest mierzalne jeśli dla każdego $A \in \mathcal{M}$ przeciwobraz $\phi^{-1}(A)$ również należy do σ - ciała $\mathcal{M}$.

Definicja 1.2. Przekształcenie mierzalne $\phi : X \rightarrow X$ zachowuje miarę μ jeśli dla każdego $A \in \mathcal{M}$ $\mu(\phi^{-1}(A)) = \mu(A)$.

- Układ dynamiczny (gładki), z czasem dyskretnym
 M - gładka rozmaitość, $f : M \rightarrow M$ dyfeomorfizm (lub endomorfizm) klasy C^1
- Układ dynamiczny (gładki) z czasem ciągłym
 M - gładka rozmaitość (na ogół zakłada się też zwartość), X - pole wektorowe na M , klasy C^1 , ϕ_t - potok pola wektorowego X . Jest to rodzina dyfeomorfizmów, tzn $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x)|_{t=t_0} = X(\phi^{t_0}(x))$$

Jeśli rozmaitość jest zwarta to z twierdzenia o przedłużaniu trajektorii wynika że potok pola wektorowego X jest określony dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Rodzina przekształceń ϕ^t jest więc jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów M .

Definicja 1.3. Niech T będzie układem dynamicznym z czasem dyskretnym. Trajektorię punktu x nazywamy ciąg nieskończony $x, Tx, \dots T^n x, \dots$

1.2. Najprostsze przykłady

Przykład 1.1 (Obrót na okręgu). Niech $\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$; określamy przekształcenie

$$T_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$$

To przekształcenie zachowuje oczywiście miarę Lebesgue'a na okręgu. Zauważmy że jeśli α jest wymierne- każda trajektoria jest okresowa, a gdy α jest niewymierne- każda trajektoria jest gęsta (dlaczego?).

Przykład 1.2 (Przesunięcie na torusie). Torus możemy utożsamiać z przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; gdzie relacja utożsamienia jest następująca:

$$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \iff (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Zatem - torus można też utożsamiać z produktem dwóch okręgów $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Na płaszczyźnie rozważamy przekształcenie $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$. Wyznacza ono przekształcenie torusa

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ni (z_1, z_2) \mapsto w_1 z_1, w_2 z_2$$

gdzie $w_1 = e^{2\pi ia}$, $w_2 = e^{2\pi ib}$.

Zauważmy że jeśli w_1, w_2 są pierwiastkami z jedynki (równoważnie- jeśli a, b są wymierne) to każda trajektoria jest okresowa.

Załóżmy że a, b są niezależne nad pierścieniem $\mathbb{Z}$, to znaczy $na + mb \in \mathbb{Z}$ ma tylko jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych: $n = m = 0$. Poniżej sprawdzimy że wtedy każda trajektoria jest gęsta w $\mathbb{T}^2$.

Natomiast jeśli a, b są zależne nad $\mathbb{Z}$, ale przynajmniej jedna z tych liczb jest niewymierna, to mamy jeszcze inną sytuację (niewidoczną w przypadku jednowymiarowym): niech, np $a \notin \mathbb{Q}, b = 0$. Wówczas torus jest sumą niezmienniczych okręgów; każda trajektoria jest gęsta na "swoim" okręgu, ale żadna trajektoria nie jest gęsta na torusie.

W następnym rozdziale zbadamy ogólną sytuację przesunięcia na n -wymiarowym torusie. Wprowadzimy też ważne w Układach Dynamicznych pojęcie topologicznej tranzytywności.

Przykład 1.3 (Układ z ciągłym czasem na torusie). Określamy jednoparametrową grupę przekształceń torusa:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ni (z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i \alpha t} z_1, e^{2\pi i \beta t} z_2)$$

Te przekształcenia w $\mathbb{R}^2$ przed utożsamieniem, mają postać

$$(x, y) \mapsto x + \alpha t, y + \beta t.$$

Jest to więc potok pola wektorowego (równania różniczkowego) na płaszczyźnie:

$$\dot{x} = \alpha, \dot{y} = \beta$$

Przykład 1.4 (Układ z ciągłym czasem na płaszczyźnie).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \mu x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Ten układ we współrzędnych biegunowych ma postać

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 1 \\ \dot{r} &= \mu r(1 - r^2)\end{aligned}$$

Zatem - dla każdego punktu (x, y) , poza stacjonarnym punktem $(0, 0)$, zbiór punktów granicznych trajektorii jest okręgiem $|z| = 1$, ten okrąg jest trajektorią zamkniętą.

Przykład 1.5 (Układ z ciągłym czasem na płaszczyźnie).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \mu y(2y^2 - 2x^2 + x^4)\end{aligned}$$

Jest to zaburzenie układu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić że dla tego drugiego układu funkcja $H(x, y) = 2y^2 - 2x^2 + x^4$ jest całką pierwszą. Zatem - trajektorie są zawarte w poziomicach funkcji H .

Ćwiczenie 1.1. Naszkicować poziomice H . Następnie, badając znak pochodnej $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t))$ dla wyjściowego układu, naszkicować jego trajektorie. Zbadać punkty skupienia trajektorii.

1.3. Topologiczna tranzytywność: przykład- przesunięcie na torusie

Definicja 1.4. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą, $T : X \rightarrow X$ - przekształceniem ciągłym. Mówimy że T jest *topologicznie tranzytywne* jeśli dla dowolnych otwartych podzbiorów $U, V \in X$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie że

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad (1.1)$$

Wykażemy

Stwierdzenie 1.1. Niech X będzie metryczną przestrzenią zwartą i ośrodkową. Niech $T : X \rightarrow X$ będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas T jest topologicznie tranzytywne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $x \in X$ takie że trajektoria x jest gęsta w X .

Dowód. Jeśli istnieje gęsta trajektoria to istnieją $k, l > k$ takie że $T^k(x) \in U$, $T^l(x) \in V$. Zatem $T^{(l-k)}(U) \cap V \neq \emptyset$. Aby dowieść drugą implikację, ustalmy przeliczalną bazę topologii U_n . Ustalamy jeden zbiór z tej rodziny U_{n_0} . Rozpatrzmy teraz zbiór D_{n_0} złożony z punktów, których trajektorie omijają U_{n_0} :

$$D_{n_0} = \{x \in X : \forall n \geq 0 \quad T^n x \notin U_{n_0}\}.$$

Ten zbiór jest domknięty i brzegowy (ta druga własność wynika stąd że założyliśmy (1.1)). Z Twierdzenia Baire'a (zauważmy że przestrzeń X jest zupełna) wynika że zbiór

$$D = \bigcup_n D_n$$

jest brzegowy, i -w szczególności- niepusty. Każdy punkt $x \in X \setminus D$ ma gęstą trajektorię. □

Zbadamy teraz topologiczną tranzytywność przesunięć na n -wymiarowych torusach. Oczywiście, przesunięcie na $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ jest dane wzorem

$$T(z_1, z_2 \dots z_n) = (\exp(2\pi i a_1) z_1, \exp(2\pi i a_2) z_2 \dots \exp(2\pi i a_n) z_n). \quad (1.2)$$

Mamy

Stwierdzenie 1.2. Niech T będzie przesunięciem na torusie $\mathbb{T}^n$. Wówczas T jest topologicznie tranzytywne wtedy i tylko wtedy gdy $a_1, a_2, \dots, a_n$ są niezależne nad $\mathbb{Z}$, tj. jeśli dla pewnych $k_1, k_2 \dots k_n \in \mathbb{Z}$

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots k_n a_n \in \mathbb{Z}$$

to $k_1 = k_2 = \dots = 0$.

Dowód. Załóżmy że współrzędne przesunięcia $(a_1, \dots, a_n)$ są zależne; $k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \in \mathbb{Z}$. Rozważmy funkcję

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

Wówczas $\phi \circ T = \phi$ (mówimy że funkcja ϕ jest T - niezmiennicza). Rozważmy $\psi = \operatorname{re} \phi$; ta funkcja też jest T - niezmiennicza. Widzimy że dla pewnego $t \in \mathbb{R}$ zbiory $U_t = \{x : \psi(x) < t\}$ i $V_t = \{x : \psi(x) > t\}$ są niepuste. Ponadto, są one otwarte i T -niezmiennicze: $T(U_t) = U_t$, $T(V_t) = V_t$. Przeczy to tranzytywności.

Założmy teraz że T nie jest tranzytywne, czyli dla pewnych otwartych U, V i dla wszystkich naturalnych n $T^n(U) \cap V = \emptyset$. Biorąc $\tilde{U} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(U)$ i $\tilde{V} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(V)$ widzimy że są to dwa otwarte, rozłączne, T - niezmiennicze podzbiory.

Rozważmy funkcję $g = 1_{\tilde{U}}$ - czyli funkcję charakterystyczną $\tilde{U}$

Chcemy użyć rozwinięcia Fouriera tej funkcji, dokładniej- mamy

Stwierdzenie 1.3. W przestrzeni $L^2(T^n)$ mamy ortonormalną bazę daną przez funkcje postaci

$$z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n},$$

$$(k_1, k_2 \dots k_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Korzystając z tego stwierdzenia, możemy napisać

$$g = \sum_{(k_1, k_2 \dots k_n)} b_{(k_1, k_2 \dots k_n)} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$$

i rozkład ten jest jednoznaczny.

Wówczas

$$g \circ T = \sum_{(k_1, k_2 \dots k_n)} b_{(k_1, k_2 \dots k_n)} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} \exp(2\pi i k_1 a_1) \exp(2\pi i k_2 a_2) \dots \exp(2\pi i k_n a_n)$$

Z jednoznaczności rozwinięcia Fouriera wynika więc że

$$b_{(k_1, k_2 \dots k_n)} = b_{(k_1, k_2 \dots k_n)} \cdot \exp(2\pi i a_1) \exp(2\pi i a_2) \dots \exp(2\pi i a_n)$$

Ponieważ funkcja g nie jest stała, jej rozwinięcie ma więcej niż jeden składnik. Wynika stąd że dla pewnych $k_1, \dots k_n$ (nie wszystkich równych zero) mamy

$$k_1 a_1 + \dots k_n a_n \in \mathbb{Z}.$$

□

Zauważmy jeszcze

Uwaga 1.1. Dla przesunięcia na torusie mamy równowżność: pewna trajektoria jest gęsta jest równoważne temu że każda trajektoria jest gęsta. Wynika to stąd że trajektorie dwóch różnych punktów różnią się o przesunięcie (mnożenie przez element grupy $\mathbb{T}^n$)

2. Układy dynamiczne na okręgu

2.1. Najprostszy układ- obrót na okręgu

Oznaczamy okrąg przez S^1 , zaś znormalizowaną miarę Lebesgue'a na S^1 przez l . Oznaczmy przez T_α obrót na okręgu o kąt $2\pi\alpha$. Równoważnie: rozpatrzmy na prostej $\mathbb{R}$ przekształcenie (przesunięcie o α):

$$F_\alpha(x) = x + \alpha.$$

Przy naturalnym rzutowaniu $\pi : x \mapsto e^{2\pi i x}$ mamy

$$T_\alpha \circ \pi = \pi \circ F_\alpha$$

Dowód poniższego stwierdzenia pozostawiamy jako zadanie:

Stwierdzenie 2.1. — (a) Jeśli α jest wymierne ($\alpha = \frac{p}{q}$), to każda trajektoria jest okresowa z okresem q .

— (b) Jeśli α jest niewymierne, to każda trajektoria jest gęsta w S^1 .

— (c) Jeśli α jest niewymierne to dla każdej funkcji ciągłej $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mamy:

$$\frac{\phi + \phi \circ T_\alpha + \dots + \phi \circ T_\alpha^{n-1}}{n} \Rightarrow \int \phi dl$$

— (d) Jeśli α jest niewymierne to dla każdego $z \in S^1$ i dla każdego łuku $I \subset S^1$

$$\frac{\#(k \leq n : T_\alpha^k(z) \in I)}{n} \rightarrow l(I)$$

Uwaga 2.1. Z punktu (c) poprzedniego stwierdzenia możemy wywnioskować że

$$\frac{\delta_z + \delta_{T_\alpha(z)} + \dots + \delta_{T_\alpha^{n-1}(z)}}{n} \rightarrow l$$

a nawet więcej: dla każdej miary borelowskiej probabilistycznej ν na S^1 i dla każdej funkcji ciągłej ϕ mamy:

$$\begin{aligned} & \frac{\nu + (T_\alpha)_*\nu + \dots + (T_\alpha^{n-1})_*\nu}{n}(f) \\ &= \frac{\nu(f) + \nu(f \circ T_\alpha) + \dots + \nu(f \circ T_\alpha^{n-1})}{n} \\ &= \nu\left(\frac{\phi + \phi \circ T_\alpha + \dots + \phi \circ T_\alpha^{n-1}}{n}\right) \rightarrow \int \phi dl \end{aligned}$$

Użyta tutaj zbieżność miar to słaba-* zmierzność (inaczej- zbieżność według rozkładu).

Zatem ciąg miar

$$\frac{\nu + (T_\alpha)_*\nu + \dots + (T_\alpha^{n-1})_*\nu}{n}$$

jest zbieżny słabo-* (inaczej: zbieżny według rozkładu) do znormalizowanej miary Lebesgue'a na S^1 .

Wynika stąd, że istnieje tylko jedna probabilistyczna borelowska miara niezmiennicza dla T_α - jest to miara Lebesgue'a.

2.2. Homeomorfizmy okręgu. Liczba obrotu

Niech f będzie homeomorfizmem okręgu S^1 zachowującym orientację. Wówczas istnieje ściśle monotoniczna funkcja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka że $\pi \circ F = f \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. Oczywiście funkcja F (zwana *podniesieniem* f) nie jest wyznaczona jednoznacznie; wszystkie inne podniesienia są postaci $F(x) + k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zauważmy własność podniesienia F :

$$F(x+1) = F(x) + 1$$

Oczywiście, podniesieniem obrotu T_α jest przekształcenie F_α

Udowodnimy

Twierdzenie 2.1 (o istnieniu liczby obrotu). *Jeśli f jest homeomorfizmem S^1 zachowującym orientację, F jego dowolnym podniesieniem, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \rho(F)$$

Ta granica nie zależy od punktu x . Ponadto, jeśli $\tilde{F} = F + k$ jest innym podniesieniem, to $\rho(\tilde{F}) = \rho(F) + k$. Zatem część ułamkowa $\{\rho(F)\}$ nie zależy od podniesienia. Oznaczamy ją $\rho(f)$ i nazywamy liczbą obrotu homeomorfizmu f .

Ponadto $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma punkt okresowy.

Dowód. Załóżmy że f ma punkt okresowy x , $f^q(x) = x$. Wybierzmy punkt $X \in \mathbb{R}$ leżący "nad" x , tzn taki że $\pi(X) = e^{2\pi i X} = x$. Wówczas $F^q(X) = X + p$ dla pewnego $p \in \mathbb{Z}$. Zatem

$$F^{2q}(X) = F^q(F^q(X)) = F^q(X + p) = F^q(X) + p = X + 2p$$

i przez indukcję:

$$F^{kq}(X) = X + kp$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ znajdujemy k takie że $kq \leq n < (k+1)q$ i zapisujemy

$$\frac{F^n(X)}{n} = \frac{F^{n-kq}(F^{kq}(X))}{n} = \frac{F^{kq}(X)}{n} + \frac{F^{n-kq}F^{kq}(X) - F^{kq}(X)}{n}$$

Teraz widzimy że pierwszy składnik dąży do $\frac{p}{q}$ gdy $n \rightarrow \infty$ zaś drugi dąży do zera (wystarczy zauważyć że licznik jest ograniczony).

Założmy teraz że granica $\frac{F^n(X)}{n}$ istnieje. Jeśli wybierzemy inny punkt $Y \in \mathbb{R}$, to $Y \in [X + k, X + k + 1)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Możemy zatem zapisać:

$$F^n(X) + k + 1 = F^n(X + k + 1) > F^n(Y) \geq F^n(X + k) = F^n(X) + k$$

Po podzieleniu przez n widzimy że granica $\frac{F^n(Y)}{n}$ istnieje i jest taka sama jak dla punktu X .

Założmy że f nie ma punktu okresowego. Ustalamy $X, m \in \mathbb{Z}$. Wówczas $X + k < F^m(X) < X + k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Stosując tę obserwację ponownie, mamy:

$$X + 2k < F^m(X) + k < F^{2m}(X) < F^m(X) + k + 1 < X + 2(k + 1)$$

i, przez indukcję:

$$X + nk < F^{nm}(X) < X + n(k+1),$$

czyli

$$nk = F^{nm}(X) - X < n(k+1).$$

Oznaczając $a_n = \frac{F^n(X) - X}{n}$ mamy:

$$\frac{k}{m} < a_{nm} < \frac{k+1}{m}$$

oraz (kładąc $n = 1$)

$$\frac{k}{m} < a_m < \frac{k+1}{m}$$

Zatem $|a_{nm} - a_m| < \frac{2}{m}$ i podobnie (zamieniając m i n rolami) $|a_{nm} - a_n| < \frac{2}{n}$. Stąd

$$|a_n - a_m| < \frac{2}{m} + \frac{2}{n}$$

Widzimy że ciąg a_n spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny.

Pozostaje do pokazania że jeśli f nie ma punktu okresowego to $\rho(f)$ nie jest liczbą wymierną. Niech $\alpha = \frac{p}{q}$; pokażemy że $\alpha \neq \rho(f)$. Zauważmy że $F^q(X) - X - p \neq 0$ dla każdego X . Ponieważ funkcja $F^q(X) - X - p$ jest okresowa, wynika stąd że $|F^q(X) - X - p| > \delta$ dla pewnego dodatniego δ . Możemy założyć że $F^q(X) - X - p > \delta$. Mamy wówczas (przez indukcję) $F^{kq}(X) - pk > k\delta$ a stąd:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(X)}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^{kq}(X)}{kq} > \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q}$$

□

Uwaga 2.2. Dla liczby obrotu homeomorfizmy nie zachowujące orientacji nie są ciekawe. Sprawdzić że homeomorfizm zmieniający orientację ma dwa punkty stałe na okręgu i zerową liczbę obrotu.

2.3. (Pół)sprzężenie z obrotem i Twierdzenie Denjoy

Dla $x \in \mathbb{S}^1$ oznaczmy przez $\omega(x)$ zbiór punktów skupienia trajektorii w przód punktu x . Udowodnimy najpierw

Stwierdzenie 2.2. *Niech f będzie homeomorfizmem okręgu zachowującym orientację, $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Wówczas albo*

- dla każdego $x \in S^1$ $\omega(x) = S^1$ albo
- dla każdego $x \in S^1$ $\omega(x)$ jest (tym samym dla wszystkich x !) zbiorem doskonałym, nigdziegęstym.

Dowód. Dowód oprzemy na następującym łatwym lemacie:

Lemat 2.1. *Niech f będzie homeomorfizmem okręgu, $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Niech $m, n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{S}^1$, I -odcinek o końcach $f^m(x), f^n(x)$. Wówczas dla każdego $y \in S^1$ orbita $y, f(y), \dots$ przecina I .*

Dowód. Załóżmy że $m < n$. Zauważmy że $f^{m-n}(I)$ jest odcinkiem przylegającym do I , $f^{2(m-n)}I$ przylega do $f^{m-n}(I)$ itd. Otrzymujemy więc ciąg odcinków zawartych w $\omega(x)$ z których następny przylega do poprzedniego. Twierdzimy że te odcinki pokryją cały okrąg. Istotnie, gdyby tak nie było- końce odcinków zbiegałyby do pewnego punktu $z \in \mathbb{S}^1$, stałego dla f^{m-n} , więc okresowego dla f . Ale f nie ma punktów okresowych.

Skoro tak określone odcinki pokrywają cały okrąg- istnieje $k \geq 0$ takie że $y \in f^{k(m-n)}(I)$. Wtedy $f^{k(n-m)}(y) \in I$. $\square$

Z lematu natychmiast wynika że zbiór $\omega(x)$ nie zależy od x . Istotnie, niech $p \in \omega(x)$ i niech $f^{n_i}(x)$ będzie ciągiem obrazów x zbieżnym do p . Weźmy dowolne $y \in \mathbb{S}^1$. Wówczas między każdymi dwoma punktami $f^{n_i}(x)$, $f^{n_{i+1}}$ znajdzie się jakiś punkt z trajektorii y , a zatem - istnieje ciąg obrazów y zbieżny do p .

Założmy teraz że $\omega(x)$ ma niepuste wnętrze. Wówczas istnieje odcinek $I \subset \omega(x)$ o końcach $f^n(x)$, $f^m(x)$ (gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$). Wtedy $f^{m-n}(I)$ jest odcinkiem przylegającym do I , $f^{2(m-n)}I$ przylega do $f^{m-n}(I)$ itd. Otrzymujemy więc ciąg odcinków zawartych w $\omega(x)$ z których następny przylega do poprzedniego. Tak jak w dowodzie lematu - sprawdzamy że odcinki te muszą pokryć cały okrąg. Zatem $\omega(x) = \mathbb{S}^1$.

Pozostaje do wykazania że zbiór $\omega(x)$ jest doskonały. Domkniętość wynika z samej definicji $\omega(x)$. Niech $p \in \omega(x)$. Wiemy już że zbiór graniczny $\omega(x)$ nie zależy od x , w takim razie $\omega(x) = \omega(p)$ i $p \in \omega(p)$. Zatem- istnieje ciąg $f^{n_i}(p) \rightarrow p$. Wszystkie punkty $f^{n_i}(p)$ należą do $\omega(p) = \omega(x)$. Więc p jest granicą ciągu punktów należących do $\omega(x)$. Wykazaliśmy że $\omega(x)$ jest doskonały. $\square$

Twierdzenie 2.2 (o półsprzężeniu z obrotem). *Niech $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ będzie homeomorfizmem zachowującym orientację i $\alpha = \rho(f)$ niewymiernie. Wówczas istnieje ciągle i zachowujące orientację przekształcenie $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ stopnia 1 takie że*

$$h \circ f = T_\alpha \circ h$$

Ponadto, h jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy $P(f) = \mathbb{S}^1$.

Uwaga 2.3. Inaczej możemy wyrazić własności h następująco: Jeśli $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest podniesieniem h to $H(x+1) = H(x)+1$ i H jest monotoniczne (choć niekoniecznie ściśle monotoniczne). W istocie przekonamy się że jeśli zbiór $P(f)$ nie jest całym okręgiem (wówczas - jak już wiemy- $\mathbb{S}^1 \setminus P(f)$ jest otwarty i gęsty w $\mathbb{S}^1$) to funkcja h przekształca każdą składową spójną zbioru $\mathbb{S}^1 \setminus P(f)$ w jeden punkt.

Dowód twierdzenia o półsprzężeniu.. Wybieramy jakieś podniesienie F homeomorfizmu f . Wybieramy jakiś punkt $x \in P(f)$ i jego podniesienie $X \in \mathbb{R}$. Rozpatrujemy zbiór $O_X = \{F^n(X) + m\}$ (jest to dokładnie- podniesienie orbity $\{f^n(x)\}$ do prostej przy kanonicznym rzutowaniu π). Określamy przekształcenie

$H : O_X \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem:

$$F^n(X) + m \mapsto n\alpha + m.$$

Zauważmy następujące własności tego przekształcenia (zostawiamy sprawdzenie jako ćwiczenie):

Stwierdzenie 2.3. *Przekształcenie H zachowuje porządek, tzn.*

$$F^{n_1}(X) + m_1 > F^{n_2}(X) + m_2 \iff n_1\alpha + m_1 > n_2\alpha + m_2.$$

Ponadto

$$H \circ F(Y) = H(Y) + \alpha, \quad H(Y + 1) = H(Y) + 1, \quad (2.1)$$

dla $Y \in O_X$.

Przekształcenie H można teraz przedłużyć do ciągłego na $\overline{O_X} = \pi^{-1}(P(f))$. Istotnie, dla $x \in \overline{O_X}$ kładziemy:

$$H(x) = \sup_{y \in O_X, y < x} H(y) = \inf_{y \in O_X, y > x} H(y).$$

Te dwie wartości (sup i inf) pokrywają się. Wynika to stąd że H jest ściśle rosnące na O_X i że obraz $H(O_X) = \{n\alpha + m\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$. Widzimy też (z określenia H na domknięciu O_X) że jeśli I jest składową uzupełnienia O_X to $H|_I$ jest stała.

Rozszerzona funkcja H ma oczywiście też własności opisane w równaniu (2.1). Ponieważ H ma własność $H(x+1) = H(x) + 1$, H wyznacza ciągłe przekształcenie $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Z własności (2.1) wynika że $h \circ f = T_\alpha \circ h$. $\square$

Wykażemy teraz że przy pewnych założeniach na gładkość f h jest homeomorfizmem.

Dowód poprzedzimy spostrzeżeniem:

Stwierdzenie 2.4. *Jeśli f jest homeomorfizmem z niewymierną liczbą obrotu, $P(f) \neq \mathbb{S}^1$, I -składowa $\mathbb{S}^1 \setminus P(f)$, to I jest zbiorem (łukiem) błędzącym:*

$$f^n(I) \cap f^m(I) = \emptyset$$

dla $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$.

Dowód. Wystarczy zauważyć że jeśli a, b są końcami I to $f^n(I)$ jest łukiem o końcach $f^n(a), f^n(b)$. Z niezmienniczości zbioru $P(f)$ wynika że punkty $a, b, f^n(a), f^n(b) \in P(f)$ i że $f^n(I)$ jest inną składową $\mathbb{S}^1 \setminus P(f)$. $\square$

Wniosek 2.1. *Przekształcenie h skonstruowane w Twierdzeniu 6.1 jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy f nie ma odcinka (łuku) błędzącego.*

Twierdzenie 2.3 (Twierdzenie Denjoy). *Jeśli $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ jest dyfeomorfizmem klasy C^2 o niewymiernej liczbie obrotu, to f jest topologicznie sprzężone z obrotem o kąt $\alpha = \rho(f)$.*

Uwaga 2.4. Oczywiście dla wymiernej liczby obrotu twierdzenie jest nieprawdziwe. Dla obrotu o kąt wymierny wszystkie punkty są okresowe.

Dowód Twierdzenia Denjoy. Zgodnie z poprzednim stwierdzeniem, wystarczy pokazać że f nie ma odcinka (łuku) błędzącego. Niech I będzie takim odcinkiem. Mamy wówczas

$$|f^n(I)| = |(f')(z_1^n)| |I|, \quad |f^{-n}(I)| = |I| \cdot \frac{1}{|(f^n)'(z_2^n)|}$$

dla pewnych punktów $z_1^n \in I$, $z_2^n \in f^{-n}(I)$. Mnożąc stronami otrzymujemy:

$$\frac{|f^n(I)| \cdot |f^{-n}(I)|}{|I|} = |(f^n)'(z_1^n)| \cdot \frac{1}{|(f^n)'(z_2^n)|}$$

Logarytmując mamy:

$$\left| \log \left(\frac{|f^n(I)| \cdot |f^{-n}(I)|}{|I|} \right) \right| = |\log |(f^n)'(z_1^n)| - \log |(f^n)'(z_2^n)|| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\log |f'(f^i(z_1^n))| - \log |f'(f^i(z_2^n))||$$

Ponieważ f jest dyfeomorfizmem klasy C^2 - funkcja $\log |f'|$ jest lipschitzowska. Zatem ostatnią sumę możemy oszacować z góry przez

$$L \cdot \sum |[f^i(z_1^n), f^i(z_2^n)]|$$

gdzie $L = \sup \frac{f''}{f'}$ jest stałą Lipschitza dla funkcji $\log |f'|$, zaś przez $[f^i(z_1^n), f^i(z_2^n)]$ oznaczyliśmy odcinek (łuk) o końcach $f^i(z_1^n)$, $f^i(z_2^n)$.

Zauważmy teraz że wyrażenie po lewej stronie nierówności dąży do nieskończoności gdy $n \rightarrow \infty$ (wynika to stąd że długości odcinków $f^n(I)$, $f^{-n}(I)$ muszą dążyć do zera, skoro jest to odcinek błędzący). Zatem, jeśli wskażemy nieskończony ciąg n -ów, dla którego odcinki $[f^i(z_1^n), f^i(z_2^n)]$ ($i < n$) będą parami rozłączne- dostaniemy sprzeczność, bo wówczas wyrażenie po prawej stronie będzie się szacowało z góry przez długość okręgu.

Taki ciąg n ów jest wskazany w następnym stwierdzeniu (które kończy dowód tw Denjoy)

Stwierdzenie 2.5. *Niech I będzie odcinkiem błędzącym dla f , V_n -minimalnym łukiem zawierającym I , $f^{-n}(I)$, ale nie zawierającym $f(I)$. Wówczas dla nieskończenie wielu n odcinki $V_n, f(V_n) \dots f^{n-1}(V_n)$ są parami rozłączne.*

Dowód. Ze względu na półsprzężenie f z obrotem o kąt α wystarczy udowodnić że dla nieskończenie wielu n odcinek (łuk) W_n łączący punkty x i $T_\alpha^{-n}(x)$ ma analogiczną własność: $W_n, T_\alpha(W_n) \dots T_\alpha^{n-1}(W_n)$ są parami rozłączne. Można łatwo się przekonać że tak jest jeśli wybieramy n jako czas "najbliższego podejścia do początku trajektorii", tzn takie n że $d(x, T^j(x)) > d(x, T^n(x))$ dla wszystkich $j = 1, 2, \dots, n-1$. $\square$

Wniosek 2.2. *Dla tak wybranych n (łuki) $[f^i(z_1^n), f^i(z_2^n)]$ ($i = 0, \dots, n-1$) są parami rozłączne, bo $[f^i(z_1^n), f^i(z_2^n)] \subset f^i(V_n)$.*

$\square$

3. Strukturalna stabilność. Układy Morse'a-Smale'a na okręgu

3.1. Pojęcie strukturalnej stabilności dla przekształceń i dla pól wektorowych

Mówiąc nieformalnie, przekształcenie (lub pole wektorowe) chcemy nazwać strukturalnie stabilnym- w jakiejś klasie, jeśli po małym zaburzeniu - w obrębie tej klasy- przekształcenie (pole wektorowe) zachowa swoje własności, czyli dynamika nie zmienia się.

Poniżej formalizujemy tę definicję. Najpierw musimy wprowadzić jakieś formalne pojęcie odległości w przestrzeni przekształceń, dyfeomorfizmów i pól wektorowych.

3.1.1. Metryki i topologie w przestrzeniach przekształceń i w przestrzeniach pól wektorowych

O wszystkich rozmaitościach które tu rozpatrujemy, będziemy zakładali że są klasy C^∞ i że są zanurzone w $\mathbb{R}^s$ (dla pewnego s). Niech M będzie taką rozmaitością, $m = \dim M$, założmy dodatkowo że M jest zwarta. Istnieje skończony atlas- rodzina map $\varphi_i : B(0, 1) \rightarrow M$ (można oczywiście założyć że $B(0, 1)$ jest wspólną dziedziną dla wszystkich map z atlasu. Wówczas, dla pewnego $\rho < 1$ obrazy mniejszej kuli $B(0, \rho)$ przy φ_i też pokrywają M . Jeśli $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ to możemy określić odległość f i g :

$$d_{C^r}(f, g) = \max_i \|f \circ \varphi_i - g \circ \varphi_i\|_{C^r|_{B(0, \rho)}}$$

Sprawdzenie następującego faktu pozostawiamy jako zadanie:

Stwierdzenie 3.1. *Tak zdefiniowana metryka zależy oczywiście od wyboru atlasu, ale topologia wyznaczona przez te metrykę nie zależy od atlasu, ani od wyboru ρ .*

Ponieważ każde pole wektorowe na rozmaitości M zanurzonej w $\mathbb{R}^s$ można traktować jak funkcję określoną na rozmaitości, o wartościach w $\mathbb{R}^s$, w ten sposób mamy zdefiniowaną topologię C^r w przestrzeni pól wektorowych klasy C^r na M .

Podobnie, jeśli N jest rozmaitością gładką zanurzoną w $\mathbb{R}^k$, to mamy w ten sposób określoną topologię C^k w przestrzeni przekształceń $f : M \rightarrow N$.

Będziemy dalej rozpatrywali dyfeomorfizmy klasy C^r , $f : M \rightarrow M$.

Stwierdzenie 3.2. *W przestrzeni wszystkich przekształceń $f : M \rightarrow M$ klasy C^r dyfeomorfizmy stanowią otwarty podzbiór.*

3.1.2. Równoważność i sprzężenie między polami wektorowymi i dyfeomorfizmami

Definicja 3.1. Niech M będzie gładką zwartą rozmaitością. Mówimy że dwa pola wektorowe X, Y na rozmaitości M są topologicznie równoważne jeśli istnieje homeomorfizm $h : M \rightarrow M$ przekształcający trajektorie (krzywe całkowite) pola X na trajektorie pola Y , z zachowaniem orientacji (ale niekoniecznie czasu!)

Definicja 3.2. Pola X, Y na M są topologicznie sprzężone jeśli istnieje homeomorfizm $h : M \rightarrow M$ sprzęgający potoki tych pól. Dokładniej- niech φ^t będzie potokiem pola X , ψ^t -potokiem pola Y . Sprzężenie oznacza że

$$h \circ \varphi^t = \psi^t \circ h$$

Stwierdzenie 3.3. Jeśli h jest topologiczną równoważnością między polami X i Y to

1. $p \in M$ jest punktem stacjonarnym pola $X \iff h(p)$ jest punktem stacjonarnym pola Y .
2. trajektoria pola X przechodząca przez punkt $p \in M$ jest zamknięta wtedy i tylko wtedy gdy trajektoria pola Y przechodząca przez punkt $h(p) \in M$ jest zamknięta.
3. $h(\omega(p)) = \omega(h(p))$

Ćwiczenie 3.1. Zbudować sprzężenie topologiczne między polami na płaszczyźnie:

$$X(x, y) = (x, y)$$

$$Y(x, y) = (x + y, -x + y)$$

Ćwiczenie 3.2. Pole wektorowe na płaszczyźnie

$$Z(x, y) = (y, -x)$$

nie jest sprzężone i nie jest równoważne żadnemu z pól X, Y .

Definicja 3.3. Niech M będzie gładką rozmaitością, $f, g : M \rightarrow M$ - dyfeomorfizmy. Mówimy że f i g są topologicznie sprzężone jeśli istnieje homeomorfizm $h : M \rightarrow M$ taki że $h \circ f = g \circ h$.

3.1.3. Strukturalna stabilność

Definicja 3.4. Niech M będzie zwartą rozmaitością, X - polem wektorowym klasy C^r na M . Mówimy że X jest C^r - strukturalnie stabilne jeśli istnieje otoczenie U pola X w C^r topologii w przestrzeni pól wektorowych na M takie że każde pole wektorowe $Y \in U$ jest topologicznie równoważne polu X .

Definicja 3.5. Niech M będzie zwartą rozmaitością, $f : M \rightarrow M$ dyfeomorfizmem klasy C^r . Mówimy że f jest strukturalnie stabilne jeśli istnieje otoczenie $W \ni f$ w $C^r(M, M)$ takie że każdy dyfeomorfizm $g \in W$ jest topologicznie sprzężony z f .

3.2. Strukturalnie stabilne dyfeomorfizmy okręgu

W tym rozdziale podamy pełną charakteryzację C^1 - strukturalnie stabilnych dyfeomorfizmów okręgu.

Definicja 3.6. Dyfeomorfizm $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ klasy C^1 zachowujący orientację nazywamy dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a jeśli $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ oraz dla każdego punktu okresowego x mamy $|(f^q)'(x)| \neq 1$ (gdzie q jest okresem, wspólnym dla wszystkich punktów okresowych). (Punkt okresowy o tej własności nazywamy niezdegenerowanym.)

Twierdzenie 3.1 (O strukturalnie stabilnych dyfeomorfizmach okręgu). —

Dyfeomorfizm $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ jest strukturalnie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a.

— *Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a stanowią gęsty podzbiór przestrzeni dyfeomorfizmów $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ w C^1 metryce.*

Dowód. Najpierw wykażemy że dyfeomorfizm Morse’a-Smale’a jest strukturalnie stabilny. Niech $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Przechodząc do iteracji $g = f^q$ mamy $\rho(g) = 0$. Ponieważ wszystkie punkty stałe dla g są niezdegenerowane, jest ich skonczenie wiele. Oznaczmy je $p_1, \dots, p_m$. Oczywiście istnieje otoczenie punktów p_i , $U = \bigcup U_i$ takie że dla $X \notin U$ $|G(X) - X| > \varepsilon$, zaś dla $X \in U$ $G'(X) > 1 + \varepsilon$. Stąd widac że jeśli zaburzyć f do $\tilde{f}$ na tyle mało w C^1 że $\tilde{G}$ - odpowiednio podniesienie $\tilde{g} = \tilde{f}^q$ jest $\frac{\varepsilon}{2}$ blisko G , to $\tilde{G}$ ma tyle samo punktów stałych co G i są one tego samego typu (źródła lub ścieki). Okrąg jest więc podzielony przez punkty okresowe f na łuki między odpowiadającymi sobie wzajemnie punktami okresowymi (dla f i tak samo dla $\tilde{f}$). Wybierzmy jeden z tych łuków $[r, s]$ i odpowiadający mu łuk $[\tilde{r}, \tilde{s}]$. Pokażemy jak zbudować homeomorfizm sprzęgający g i $\tilde{g}$ na odcinkach $[r, s]$ i $[\tilde{r}, \tilde{s}]$.

Rysunek 3.1. Budowa sprzężenia h .

(tu rysunek)

Wybieramy dowolny punkt $x \in [r, s]$ i dowolny punkt $\tilde{x} \in [\tilde{r}, \tilde{s}]$. Przekształcamy odcinek $J = [x, g(x)]$ na $\tilde{J} = [\tilde{x}, \tilde{g}(\tilde{x})]$ jakimkolwiek homeomorfizmem h . Ponieważ $[r, s] = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} g^i(J)$, można przedłużyć h na cały odcinek $[r, s]$ kładąc $h(g^i(y)) = \tilde{g}^i(h(y))$. Mamy więc na odcinku $[r, s]$

$$h(f^q(x)) = \tilde{f}^q(h(x)) \quad (3.1)$$

Przedłużamy teraz sprzężenie h na całą orbitę odcinka $[r, s] \cup_{i \leqslant f^i}([r, s])$ tak aby otrzymać sprzężenie pomiędzy f i $\tilde{f}$. Jest tylko jeden sposób na przedłużenie h : trzeba położyć

$$h(f^i(x)) = \tilde{f}^i(h(x)).$$

Ćwiczenie 3.3. Sprawdzić, używając równości (3.1) że tak zdefiniowane rozszerzenie $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ rzeczywiście jest sprzężeniem pomiędzy f i $\tilde{f}$.

Zatem wykazaliśmy strukturalną stabilność dyfeomorfizmów Morse’a-Smale’a.

Pokażemy teraz że jeśli f jest dyfeomorfizmem klasy C^2 i $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ to można f zaburzyć dowolnie mało w metryce C^2 tak że zmieni się liczba obrotu.

Użyjemy sprzęgającego z obrotem o kąt $\alpha = \rho(f)$ homeomorfizmu, danego przez twierdzenie Denjoy. $T_\alpha \circ h = h \circ f$. Rozpatrujemy teraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$f_\varepsilon = T_\varepsilon \circ f, \varepsilon > 0$$

(w poniesieniu odpowiada to wzięciu funkcji $F_\varepsilon(X) = \varepsilon + F(X)$). Zauważmy że $h(T_\varepsilon(x)) = \phi(x)$ jest przekształceniem okręgu o dodatniej liczbie obrotu (w podniesieniu mamy

$$H(X + \varepsilon) = X + \Phi(X),$$

$\Phi(X) > 0$).

Zatem $h \circ f_\varepsilon \circ h^{-1}$ ma większą liczbę obrotu niż f . Stad i samo f_ε ma większą niż f liczbę obrotu.

Skorzystamy z następującego faktu:

Stwierdzenie 3.4. *Każdy dyfeomorfizm okręgu klasy C^1 można przybliżyć w metryce C^1 dyfeomorfizmami klasy C^2 (a nawet C^∞).*

Z poprzedniego stwierdzenia wynika od razu że każdy dyfeomorfizm klasy C^1 który jest C^1 strukturalnie stabilny musi mieć wymierną liczbę obrotu.

Wykażemy teraz że dyfeomorfizmy Morse’a-Smale’a klasy C^1 stanowią gęsty podzbiór w metryce C^1 w przestrzeni C^1 dyfeomorfizmów okręgu.

Weźmy dowolny dyfeomorfizm g klasy C^1 . W jego dowolnie małym otoczeniu możemy znaleźć dyfeomorfizm f klasy C^2 . Jeśli ten dyfeomorfizm ma wymierną liczbę obrotu, ustalamy go. Jeśli nie- to zaburzamy f w taki sam sposób jak powyżej, tworząc rodzinę f_ε . Ponieważ, jak widzieliśmy, w ten sposób można zwiększyć liczbę obrotu i ponieważ liczba obrotu dla f_ε jest ciągłą funkcją ε , istnieje dowolnie małe ε takie że f_ε ma wymierną liczbę obrotu. Zatem- w dowolnie małym C^1 otoczeniu funkcji g możemy wskazać dyfeomorfizm f klasy C^2 z wymierną liczbą obrotu. Ustalmy ten dyfeomorfizm, nazwijmy go f .

Pokażemy że f można zaburzyć dowolnie mało w metryce C^2 (więc tym bardziej- w C^1) tak żeby wszystkie punkty okresowe stały się niezdegenerowane.

Najpierw założmy że istnieje przynajmniej jeden punkt okresowy niezdegenerowany dla f . Ten punkt dzieli okrąg na q łuków; w podniesieniu mamy odcinek długości 1 podzielony na q odcinków. Ustalamy jeden z tych odcinków, nazwijmy go $[r, s]$. Weźmy teraz nieco mniejszy odcinek $[r', s'] \subset (r, s)$ taki że w $(r, s) \setminus [r', s']$ nie ma żadnych punktów okresowych dla f (a dokładniej: podniesień punktów okresowych). Taki odcinek można wybrać bo trajektoria okresowa do której należą punkty r, s jest niezdegenerowana. Zmniejszając odcinek $[r, s]$ możemy też założyć że istnieje $\delta > 0$ takie że jeśli $\tilde{f}$ jest dyfeomorfizmem okręgu δ - bliskim f w metryce C^1 i $\tilde{f}^q(r) = r$, $\tilde{f}^q(s) = s$ to w odcinku $(r, s) \setminus [r', s']$ nie ma innych punktów stałych dla $\tilde{f}$. Niech $\phi = \phi_\varepsilon$ będzie gładką funkcją określoną w $[r, s]$ taką że $\phi = \varepsilon$ na odcinku $[r', s']$, $\phi = 0$ w otoczeniu punktów r, s . Przedłużamy funkcję ϕ do równej zero poza $[r, s]$. (**rysunek** Określamy nową rodzinę funkcji (w podniesieniu) $F_\varepsilon = \phi_\varepsilon \circ F$. Dla małych ε funkcja F_ε (odpowiednio f_ε) jest δ - bliska F (odpowiednio- f). Zatem jeśli $x \in [r, s]$ jest punktem stałym dla f_ε^q to albo $x = r$, albo $x = s$, albo $x \in [r', s']$. Zauważamy teraz że x jest punktem okresowym zdegenerowanym dla f_ε wtedy i tylko wtedy gdy X jest punktem krytycznym i miejscem zerowym dla funkcji $F_\varepsilon^q(X) - (X + p)$. Ponieważ każda trajektoria długości q zawarta w $[r', s']$ (a właściwie: jej podniesienie) przecina dokładnie raz odcinek $F([r', s'])$, a funkcja F pozostaje niezmienną poza tym odcinkiem, widzimy że na odcinku $F^{-(q-1)}([r', s'])$ mamy $F_\varepsilon^q = F^q + \varepsilon$. Zatem jeśli istnieją punkty okresowe zdegenerowane dla f_ε , to $p + \varepsilon$ jest wartością krytyczną dla funkcji $X \mapsto F^q(X) - X$. Aby pokazać że dla wielu ε to jest niemożliwe, skorzystamy z prostej wersji twierdzenia Sarda:

Lemat 3.1 (Twierdzenie Sarda na prostej). *Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 . Wówczas zbiór wartości krytycznych dla h ma miarę Lebesgue'a równą zero.*

Korzystając z tego lematu, możemy więc wybrać dowolnie małe ε , dla którego $\varepsilon + p$ nie jest wartością krytyczną dla $F^q(X) - X$. Zatem nasze F_ε nie ma niezdegenerowanych punktów okresowych.

Dla zakończenia dowodu pozostaje upewnić się że zawsze można mało zaburzyć f aby otrzymać przynajmniej jeden punkt okresowy niezdegenerowany. $\square$

Przykład 3.1. Rozważmy przekształcenie F dane wzorem $F(X) = X + \varepsilon \sin(2\pi kX)$. Jeśli $0 < 2k\pi\varepsilon$ to F jest ściśle rosnąca i $F(X+1) = F(X)$. Zatem F wyznacza dyfeomorfizm okręgu. f ma $2k$ punktów stałych; są to punkty odpowiadające wartościom na prostej $X = (\frac{j}{2k})_{j=0, \dots, 2k-1}$. Dla j nieparzystych mamy ścieki, dla j parzystych-źródła.

Przykład 3.2. Teraz niech $F(X) = X + \frac{1}{k} + \varepsilon \sin(2\pi kX)$. Tym razem mamy dwie orbity okresowe o okresie k ; punkty $\frac{2j}{2k}$ stanowią orbitę odpychającą, zaś punkty $\frac{2j+1}{2k}$ - orbitę przyciągającą. $\rho(f) = \frac{1}{k}$.

3.3. Strukturalnie stabilne pola wektorowe na okręgu

Poniżej- ważna definicja *strukturalnej stabilności*

Definicja 3.7. Mówimy że pole wektorowe v na zwartej gładkiej rozmaitości jest *strukturalnie stabilne* jeśli istnieje otoczenie U pola v w metryce C^1 , takie że dla każdego $w \in U$ istnieje homeomorfizm $h : M \rightarrow M$ przekształcający trajektorie pola v na trajektorie pola w .

Uwaga 3.1. Tu pojawia się konieczność precyzyjnego określenia C^1 topologii w przestrzeni pól wektorowych na zwartej gładkiej rozmaitości.

W tym rozdziale ograniczamy się jednak do pól wektorowych na okręgu S^1 . Ustalmy orientację na S^1 ; w każdym punkcie $x \in S^1$ mamy więc wyznaczony jednostkowy wektor styczny, dodatnio zorientowany 1_x . Pole wektorowe jest więc wyznaczone przez funkcję $v(x) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ($v(x) = v(x) \cdot 1_x$), lub- równoważnie - przez okresową funkcję $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zauważmy że jeśli ϕ^t jest potokiem pola wektorowego na prostej $\dot{x} = V(x)$, to $\pi \circ \phi^t$ (gdzie π jest rzutowaniem z prostej na okrąg) jest potokiem pola wektorowego na okręgu $\dot{x} = v(x)$. Następującą charakteryzację C^1 strukturalnie stabilnych pól wektorowych na S^1 można udowodnić modyfikując (a właściwie-upraszczając) odpowiedni dowód dla dyfeomorfizmów.

Stwierdzenie 3.5. *Pole wektorowe v klasy C^1 jest C^1 -strukturalnie stabilne wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie stacjonarne punkty pola v są niezdegenerowane (tzn. jeśli $V(X) = 0$, to $V'(X) \neq 0$). Zbiór takich pól wektorowych na S^1 jest otwarty i gęsty w C^1 topologii.*

4. Przekształcenia odcinka. Chaos na odcinku

4.1. O poszukiwaniu punktów okresowych dla przekształceń odcinka

Rozpatrzmy ciągłe przekształcenie $f : I \rightarrow I$ gdzie I jest odcinkiem domkniętym.

Mówimy że odcinek (domknięty) $J \subset I$ *nakrywa* odcinek domknięty K jeśli $K \subset f(J)$.
Oznaczenie: $J \longrightarrow K$.

Lemat 4.1. *Niech $J, K \subset I$ będą odcinkami. Załóżmy że $J \longrightarrow K$. Wówczas istnieje domknięty odcinek $L \subset J$ taki że $f(L) = K$.*

Dowód. Oznaczmy odcinek K przez $[a, b]$. Weźmy $c = \max\{x \in J : f(x) = a\}$, $d = \min\{y > c : f(y) = b\}$. Jeśli takie d istnieje, odcinek $[c, d]$ jest szukanym odcinkiem L . Jeśli takie d nie istnieje (wartość b nie jest przyjmowana na prawo od c), to istnieje $d < c$ takie że $f(x) = b$. Wybieramy największe d o takiej własności. Jeśli wartość a nie jest przyjmowana w odcinku $[d, c]$, to jest to nasz szukany odcinek L . W przeciwnym razie modyfikujemy (zmniejszamy) c , zastępując je najmniejszym $x > d$ takim że $f(x) = a$. $\square$

Lemat 4.2. *Jeśli $J \longrightarrow J$ to f ma punkt stały w J .*

Dowód. Korzystamy z poprzedniego lematu. Mamy odcinek $L = [c, d]$ taki że $f(c) = a < c$, $f(b) = d > b$. Zatem funkcja $f(x) - x$ zmienia znak w odcinku $[c, d]$, a stąd istnieje punkt $e \in (c, d)$ taki że $f(e) = e$. $\square$

Przez prostą indukcję dostajemy następujące uogólnienie Lematu 4.1

Lemat 4.3. *Jeśli*

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_n$$

to w odcinku I_0 można znaleźć odcinek L_n taki że $f^n(L_n) = I_n$.

Dowód. Znajdujemy odcinek $L_1 \subset I_0$ taki że $f(L_1) = I_1$. Ponieważ $I_1 \longrightarrow I_2$ więc istnieje odcinek $L'_1 \subset I_1$ taki że $f(L'_1) = I_2$. Zatem $L_1 \longrightarrow L'_1$ i istnieje odcinek $L_2 \subset L_1$ taki że $f(L_2) = L'_1$, czyli $f^2(L_2) = I_2$. Dalej postępujemy przez indukcję: mamy już $L_k \subset I_0$ takie że $f(L_k) = I_k$; skoro $I_k \longrightarrow I_{k+1}$ to istnieje $L'_k \subset I_k$ takie że $f(L'_k) = I_{k+1}$. Wówczas $L_k \longrightarrow L'_k$ (przy f^k) więc istnieje $L_{k+1} \subset L_k$ takie że $f^k(L_{k+1}) = L'_k$, czyli $f^{k+1}(L_{k+1}) = I_{k+1}$. $\square$

Wniosek 4.1. *Jeśli*

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$$

to istnieje punkt okresowy x o okresie n taki że $x \in I_0, f(x) \in I_1 \dots f^{n-1}(x) \in I_{n-1}$.

Ostatni wniosek służy do "produkowania" orbit okresowych o zadanej trajektorii.

Udowodnimy następujące twierdzenie, pochodzące od Li i Yorka.

Twierdzenie 4.1 ("Okres 3 implikuje chaos"). *Założmy że $f : I \rightarrow I$ ciągła i że f ma punkt o okresie 3. Wówczas f ma punkty okresowe o wszystkich okresach.*

Dowód. Oznaczmy orbitę o okresie 3 przez $z_1 < z_2 < z_3$. Załóżmy że $f(z_2) = z_3$. Oznaczmy $I_1 = [z_1, z_2]$, $I_2 = [z_2, z_3]$. Wówczas, skoro $z_1 \mapsto z_2 \mapsto z_3$, mamy $I_1 \longrightarrow I_2, I_2 \longrightarrow I_1, I_2 \longrightarrow I_2$. Zatem możemy z naszym przekształceniem związać graf o dwóch wierzchołkach (1), (2) i strzałkach $(1) \rightarrow (2), (2) \rightarrow 1, (2) \rightarrow (2)$. Po pierwsze, zauważmy że skoro $(2) \rightarrow (2)$, to z wniosku powyżej wynika że f ma punkt stały zawarty w odcinku I_2 .

Każdej pętli w grafie odpowiada jakiś punkt okresowy. Rozważmy więc pętlę $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (2) \rightarrow \dots \rightarrow (1)$. Z wniosku 4.1 wynika że istnieje orbita okresowa $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0$ taka że $x_0 \in I_1, x_i \in I_2$ dla $i = 1, \dots, n-1$. Sprawdźmy że n jest okresem podstawowym dla x_0 . Jeśli $x_0 = x_j$ dla pewnego $j < n$, to (biorąc pod uwagę że jeden z tych punktów leży w I_1 a drugi w I_2), x_0 musi być wspólnym końcem odcinków I_1 i I_2 , $x_0 = z_2$. To jednak jest niemożliwe. Istotnie, jeśli $n = 2$ to $f^2(x_0) = x_0$ podczas gdy $f^2(z_2) \neq z_2$. Jeśli zaś $n \geq 3$ to sprzeczność wynika z faktu że $f^2(z_2) = z_1 \in I_1$, podczas gdy $f^2(x_0) \in I_2$. □

4.2. Twierdzenie Szarkowskiego

W latach sześćdziesiątych ukraiński matematyk Szarkowski wykazał że istnieje pewien niestandardowy porządek liniowy w zbiorze liczb naturalnych, "rządzący" pojawianiem się punktów okresowych dla funkcji ciągłych określonych na odcinku.

Zacniemy od wprowadzenia tego porządku.

Definicja 4.1. Porządek Szarkowskiego:

Najpierw liczby nieparzyste większe niż 1 ustawiamy w porządku malejącym:

$$3 >_s 5 >_s 7 >_s 9 \dots$$

Następnie pojawiają się w tym porządku wszystkie liczby będące iloczynem dwójki i liczby nieparzystej (zaczynając od $2 \cdot 3$), liczby postaci $2^2 \cdot$ liczba nieparzysta etc.

Mamy więc

$$3 >_s 5 >_s 7 >_s 9 >_s \dots >_s 2 \cdot 3 >_s 2 \cdot 5 >_s 2 \cdot 7 >_s \dots >_s 2^2 \cdot 3 >_s 2^2 \cdot 5 >_s 2^2 \cdot 7 >_s \dots >_s 2^n \cdot 3 >_s 2^n \cdot 5 >_s \dots$$

W ten sposób uporządkowane zostały wszystkie liczby poza potęgami dwójki. Ustawiamy je na końcu, w porządku malejącym

$$\dots >_s 2^3 >_s 2^2 >_s 2^1 >_s 2^0 = 1$$

Zatem: największą liczbą w tym porządku jest 3, zaś najmniejszą 1.

Możemy teraz sformułować

Twierdzenie 4.2. *Twierdzenie Szarkowskiego.*

Niech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas, jeśli f ma punkt o okresie (podstawowym) n , to f ma punkty o wszystkich okresach mniejszych (w porządku Szarkowskiego) od n .

Uwaga 4.1. Oczywiście twierdzenie 4.1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Szarkowskiego. Liczba 3 jest największa w porządku Szarkowskiego, zatem istnienie punktu o okresie 3 implikuje istnienie punktów o wszystkich innych okresach.

4.3. Bifurkacja podwajania okresu. Obserwacja Feigenbauma

Z twierdzenia Szarkowskiego wynika że istnienie jednych orbit okresowych wynika istnienie innych i że "najwcześniejszymi" orbitami okresowymi są orbity o okresach będących potęgami 2. W "modelowej" rodzinie przekształceń odcinka $x \mapsto ax(1-x)$, $a \in [0, 4]$ obserwujemy pojawianie się kolejnych orbit okresowych o okresach 2^n ; dokładniej- bifurkacja polega na tym że orbita okresowa przyciągająca o okresie 2^{n-1} staje się odpychająca (pochodna iteracji ma moduł większy od 1), a blisko niej - tworzy się nowa orbita przyciągająca, o dwukrotnie dłuższym okresie. Niech a_n oznacza parametr w którym pojawia się orbita okresowa o okresie 2^n . Feigenbaum zauważył (choć nie umiał tego udowodnić) że ilorazy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} \quad (4.1)$$

mają prawdopodobnie granicę. Zauważył też że ta granica pozostaje niezmienną gdy rodzinę funkcji $x \mapsto ax(1-x)$ zastąpił inną rodziną. Tę wspólną granicę ciągów (4.1) nazywa się stałą Feigenbauma.

Badania nad wyjaśnieniem tego zjawiska doprowadziły do rozpatrywania tzw. operatora renormalizacji (zdefiniowanego w odpowiedniej przestrzeni funkcji), wykazania istnienia punktu stałego dla tego operatora i *hiperboliczności* tego punktu stałego, oraz badania tzw *rozmaitości stabilnej* w tym punkcie. (Pojęcie hiperboliczności i rozmaitości stabilnych dla przekształceń określonych w $\mathbb{R}^m$ bądź na rozmaitości pojawi się w następnych rozdziałach; opis problemu renormalizacji wykracza jednak poza zakres tego wykładu).

5. Pola wektorowe na rozmaitościach. Zbiory graniczne i zbiór punktów niebłądzących. Pola gradientowe

Będziemy mówili o trajektoriach pola wektorowego na rozmaitości M zanurzonej w $\mathbb{R}^n$. Będziemy również zakładali że rozmaitość M jest zwarta. Z twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań wynika że wówczas *potok* pola wektorowego ϕ^t jest określony dla wszystkich czasów $t \in \mathbb{R}$. Mamy więc jednoparametrową rodzinę dyfeomorfizmów określonych na rozmaitości M .

Duża część rozważań ma jednak charakter lokalny, więc wystarczy wtedy wykazać odpowiednie twierdzenia dla pola określonego na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^m$ i skorzystać z następującej obserwacji:

Stwierdzenie 5.1 (O trajektoriach pola w parametryzacji). *Niech X będzie polem wektorowym określonym na gładkiej, m -wymiarowej rozmaitości M zanurzonej w $\mathbb{R}^n$. Niech ψ będzie parametryzacją otwartego podzbioru M . ψ jest zatem określone na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^m$. Rozważmy pole $Y = \psi^*X$, czyli Y określone na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^m$ wzorem:*

$$Y(p) = \psi^*X(p) = (D\psi(p))^{-1}(X(\psi(p)))$$

Wówczas $c(t)$ jest krzywą całkową równania $\dot{x} = X(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\tilde{c}(t) = \psi \circ c(t)$ jest krzywą całkową równania $\dot{x} = X(x)$.

Dowód. Załóżmy że:

$$\frac{d}{dt}c(t) = Y(c(t))$$

Sprawdzamy że

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}(t) = X(\tilde{c}(t))$$

Mamy

$$\frac{d}{dt}\psi(c(t)) = D\psi(c(t))(\dot{c}(t)) = D\psi(c(t))(Y(c(t))) = (D\psi \circ Y)(c(t)) = X(c(t))$$

Dowód odwrotnej implikacji jest analogiczny. □

5.1. Zachowanie asymptotyczne trajektorii. Zbiór ω -graniczny.

Definicja 5.1. Niech X będzie polem wektorowym na rozmaitości gładkiej zwartej M , ϕ^t -potokiem tego pola. Mówimy że $y \in M$ jest punktem ω - granicznym trajektorii x , $y \in \omega(x)$ jeśli istnieje ciąg czasów $t_n \rightarrow \infty$ taki że

$$\phi^{t_n}(x) \rightarrow y.$$

Twierdzenie 5.1 (Własności zbioru ω -granicznego). Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na zwartej rozmaitości M . Niech $p \in M$. Wówczas:

- $\omega(p) \neq \emptyset$
- $\omega(p)$ jest domkniętym podzbiorem M .
- $\omega(p)$ jest niezmienniczym (ze względu na potok pola X) podzbiorem M , to znaczy $\omega(p)$ jest sumą pewnych trajektorii pola X .
- $\omega(p)$ jest zbiorem spójnym.

Dowód. Pierwsza własność wynika natychmiast ze zwartości M . Druga własność wynika z następującej obserwacji: jeśli φ_t jest potokiem pola X i $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow q$ dla pewnego ciągu $t_n \rightarrow \infty$, to

$$\varphi_{t_n+t_0}(p) = \varphi_{t_0}(\varphi_{t_n}(p)) \rightarrow \varphi_{t_0}(q),$$

zatem $\varphi_{t_0}(q) \in \omega(p)$. Spójność wykażemy niewprost: założmy że $\omega(p)$ jest sumą dwóch rozłącznych domkniętych zbiorów $\omega(p) = A \cup B$. Ponieważ są to domknięte rozłączne podzbiory, możemy znaleźć otoczenia $V_1 \supset A$, $V_2 \supset B$ takie że $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Ponieważ $A \subset \omega(p)$ więc istnieje ciąg $t_n \rightarrow \infty$ taki że $\varphi_{t_n}(p) \in V_1$. Ponieważ $B \subset \omega(p)$, dla każdego t_n znajdzie się $t'_n > t_n$ taki że $\varphi_{t'_n}(p) \notin V_1 \cup V_2$. Zatem (pamiętamy że $M \setminus (V_1 \cup V_2)$ jest zwarty) istnieje punkt $q \in \omega(p)$ w $V_1 \cup V_2$. Otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Przykład 5.1 (Obmotka na torusie). Rozpatrzmy stałe pole wektorowe na $\mathbb{R}^2$: $X(x, y) = (a, b)$. Trajektorie tego pola w $\mathbb{R}^2$ to oczywiście proste $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a, b)$. To samo pole można rozważać na torusie - przestrzeni ilorazowej $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Trajektoriami na torusie są linie powstałe jako rzutowania prostych $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a, b)$. Jeśli iloraz $\frac{a}{b}$ jest liczbą wymierną to każda trajektoria na torusie jest okresowa. Jeśli iloraz jest niewymierny to każda trajektoria jest gęsta. W tym drugim przypadku mamy: $\omega(x) = \mathbb{T}^2$ dla każdego $x \in \mathbb{T}^2$.

Definicja 5.2 (Zbiór punktów niebłądzących $\Omega(X)$). Mówimy że punkt $x \in M$ jest błądzący jeśli istnieje jego otoczenie U i $t_0 > 0$ że dla każdego $t > t_0$ mamy $\varphi^t(U) \cap U = \emptyset$. Uzupełnienie zbioru punktów błądzących nazywamy zbiorem punktów niebłądzących i oznaczamy $\Omega(X)$.

Uwaga 5.1. Zbiór $\Omega(X)$ jest niezmienniczy ze względu na działanie pola X (tzn $\varphi^t(\Omega(X)) = \Omega(X)$) i domknięty.

Uwaga 5.2. Oczywiście zbiór $\omega(x)$ jest zawarty w $\Omega(X)$.

5.2. Pola gradientowe

Przykład- potoki gradientowe

Niech M będzie gładką m - wymiarową podrozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. W przestrzeni stycznej do M mamy zdefiniowany iloczyn skalarny i normę dziedziczną z $\mathbb{R}^n$. (Mamy więc strukturę Riemannowską dziedziczną z $\mathbb{R}^n$).

Niech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^{r+1} . Wówczas różniczką f w punkcie $p \in M$, $d_p f$ jest 1- formą (przekształceniem liniowym $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Zatem istnieje dokładnie jeden wektor $X(p)$ w przestrzeni stycznej $T_p M$, taki że $d_p f(v) = \langle X(p), v \rangle$. Ten wektor nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie p . Otrzymujemy w ten sposób *pole wektorowe* klasy C^r na M . Jeśli funkcja f jest określona nie tylko w M , ale również na otoczeniu M w $\mathbb{R}^n$, to łatwo można związać gradient $f|_M$ ze zwykłym wektorem gradientu w $\mathbb{R}^n$. Możemy policzyć "zwykłą" różniczkę f w $\mathbb{R}^n$, Df , i "zwykły" gradient $Grad(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Wówczas dla $v \in T_p M$

$$df(v) = Df(v) = \langle v, Grad f \rangle = \langle v, v_n + v_{st} \rangle = \langle v, v_{st} \rangle$$

Zatem $\text{grad}f$ (gradient f "wzdłuż" rozmaitości M jest rzutem prostopadłym gradientu policzonego w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $\text{Grad}f$, na przestrzeń styczną do M .

Definicja 5.3. Punkt q jest punktem osobliwym pola wektorowego X jeśli $X(q) = 0$.

Stwierdzenie 5.2 (Własności pola gradientowego). *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie gładką rozmaitością, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ -funkcją klasy C^{r+1} na M , zaś $X = \text{grad}f$ - gradientowym polem wektorowym (klasy C^r na M). Wówczas*

- Pole gradientowe X nie ma trajektorii zamkniętych.
- Dla każdego $p \in M$ zbiór ω - graniczny $\omega(p)$ jest zawarty w zbiorze punktów osobliwych pola X .

Dowód. Zauważmy że dla każdej trajektorii pola $\phi^t(x)$ mamy:

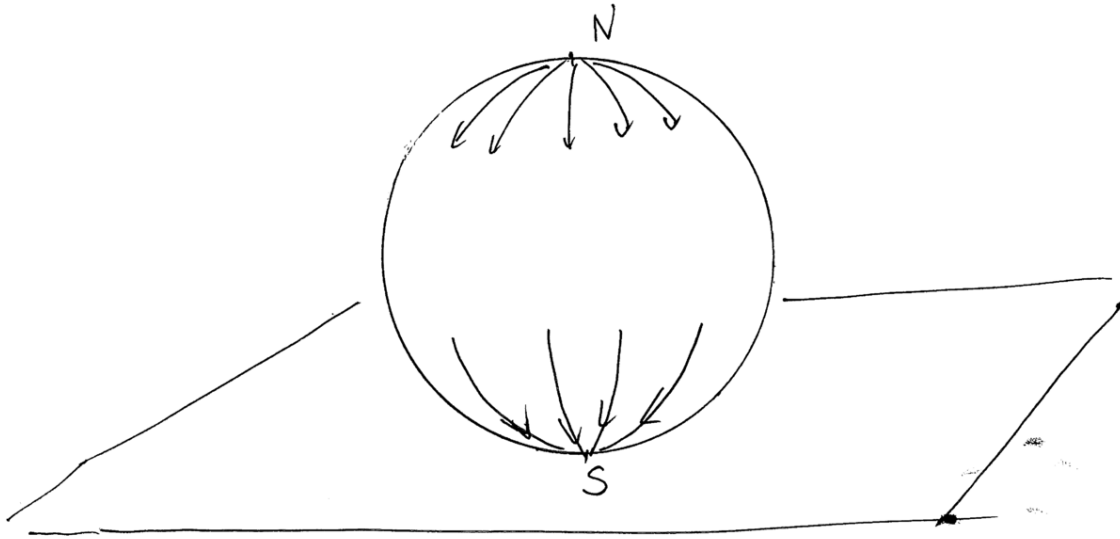
$$\frac{d}{dt}f(\phi^t(x)) = df(\dot{\phi}^t(x)) = df(\text{grad}f(\phi^t(x)) = \langle \text{grad}f(\phi^t(x)), \text{grad}f(\phi^t(x)) \rangle \geq 0.$$

Zatem funkcja f jest niemalejąca wzdłuż każdej trajektorii, a dokładniej- ściśle rosnąca wzdłuż każdej "niestacjonarnej trajektorii".

Wynika stąd oczywiście że pole nie ma orbit zamkniętych.

Załóżmy teraz że punkt $y \in \omega(x)$ i $X(y) \neq 0$. Wówczas w otoczeniu punktu y poziomica N funkcji f przechodząca przez y jest podrozmaitością M prostopadła do linii pola X . Z twierdzenia o prostowaniu trajektorii wynika że każda trajektoria pola startująca dostatecznie blisko punktu y musi przeciąć poziomice N . Jeśli $y \in \omega(x)$ to trajektoria x , $\phi^t(x)$ musi zatem przeciąć nieskończenie wiele razy poziomice N . Ponieważ jednak, jak już wiemy, funkcja f jest ściśle rosnąca wzdłuż tej trajektorii, jest to oczywiście niemożliwe. $\square$

Przykład 5.2. Pole gradient wysokości na sferze. To pole ma dwa punkty osobliwe N i S . Punkt N jest źródłem, punkt S -ściekiem. Dla każdego punktu $x \neq N$ mamy $\omega(x) = \{S\}$ (rysunek 5.1)



Rysunek 5.1. Gradient wysokości na sferze.

Przykład 5.3. Pole wektorowe gradientowe na postawionym torusie. Tu $f(x, y, z) = -z$. To pole ma cztery punkty stacjonarne: N, S, R, Q . N jest źródłem, S -ściękiem, R, Q -siodłami. Zauważmy że tym razem zbiór ω - graniczny zależy od punktu, w szczególności istnieją punkty dla których $\omega(x)$ jest siodłem. Istnieją też *połączenia między siodłami*- trajektorie $\phi^t(x)$ takie że dla $t \rightarrow -\infty$ $\phi^t(x) \rightarrow R$, zaś dla $t \rightarrow \infty$ $\phi^t(x) \rightarrow Q$. (rysunek 5.2).

Rysunek 5.2. Gradient wysokości na torusie.

5.3. Cięcia transwersalne i przekształcenie Poincare'go w otoczeniu orbity okresowej

Rozważmy pole wektorowe X klasy C^r określone (dla uproszczenia) w otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^m$. Niech γ będzie zamkniętą trajektorią tego pola, t_0 - okresem tej trajektorii, $p \in \gamma$. Możemy założyć że $X_m(p) \neq 0$. Rozważmy hiperpowierzchnię $\Sigma = \{x : x_m = p_m\}$. Zatem pole jest w punkcie p transwersalne do Σ . Dla x bliskich p trajektoria pola wychodząca z x wróci po czasie bliskim t_0 do Σ . Formalne sprawdzenie: Niech φ^t będzie potokiem pola X , określamy funkcję

$$\Psi(x, t) = \varphi_m^t(x) - p_m$$

Wówczas $\psi(t, x) = 0 \iff \varphi^t(x) \in \Sigma$ i $\psi(t_0, p) = 0$.

Mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)_{(p, t_0)} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_m^t(x)_{(p, t_0)} = X_m(p) \neq 0$$

Zatem- z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika że istnieje otoczenie (p, t_0) w $\Sigma \times \mathbb{R}$ w którym to równanie wyznacza t jako funkcję x , tej samej klasy co X . Oznaczamy tę funkcję $\tau(x)$.

Mamy więc w otoczeniu p w Σ zdefiniowane przekształcenie klasy C^r :

$$x \mapsto \varphi^{\tau(x)}(x)$$

Nazywamy je przekształceniem Poincare'go, oznaczenie: P_p .

Pytamy o związek między wartościami własnymi dla pochodnej przekształcenia Poincare'go w punkcie p i różniczki potoku pola: $D\varphi^{t_0}(p)$.

Wiemy już że jedną z wartości własnych $D\varphi^{t_0}(p)$ jest 1, bo $D\varphi^{t_0}(p)(X(p)) = X(p)$.

Twierdzenie 5.2. Wartości własne różniczki $D\varphi^{t_0}(p)$, różne od 1, są takie same jak wartości własne różniczki $DP_p(p)$.

Dowód. W $\mathbb{R}^m$ wprowadzamy układ współrzędnych, w którym jednym z wektorów bazowych jest $X(p)$, a pozostałe wektory- to baza Σ . Weźmy wektor styczny dla Σ , ma on postać (w układzie współrzędnych w $\mathbb{R}^m$ z wyróżnioną ostatnią współrzędną) $(v, 0)$. Różniczka $D\varphi^{t_0}$ w tej bazie to

$$D\varphi^{t_0} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Tutaj A jest macierzą $(n-1) \times (n-1)$. Przekształcenie Poincarego $P(x) = \varphi(\tau(x), x)$. Zatem

$$D_p P(v, 0) = X(p)D\tau(p)(v, 0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p, \tau(p))(v, 0) = X(p)D\tau(p)(v, 0) + \begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skądinąd wiemy że obrazem $D_p P(v, 0)$ musi być wektor styczny do Σ , więc współrzędna w kierunku pola X znika i ostatecznie

$$D_p P(v, 0) = (Av, 0)$$

To zaś oznacza że $D_p P$ ma takie same wartości własne jak różne od 1 wartości własne $D\varphi^{t_0}(p)$. $\square$

Definicja 5.4. Mówimy że orbita okresowa γ , o okresie t_0 pola X jest hiperboliczna jeśli dla punktu $p \in \gamma$ różniczka $D\varphi^{t_0}(p)$ ma tylko jedną -pojedynczą- wartość własną równą 1. Równoważnie- jeśli dla cięcia Poincare'go Σ różniczka przekształcenia Poincare'go P nie ma wartości własnych różnych od 1.

6. Rozmaitości stabilne i niestabilne. Twierdzenia o ich istnieniu i własnościach

6.1. Hiperboliczne punkty stałe i stacjonarne

Definicja 6.1. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$ (albo nad $\mathbb{C}$), niech $L : V \rightarrow V$ będzie odwracalnym przekształceniem liniowym. Mówimy że L jest przekształceniem hiperbolicznym jeśli wszystkie wartości własne L mają moduł różny od 1.

Definicja 6.2. Niech f będzie dyfeomorfizmem określonym na otoczeniu 0 w $\mathbb{R}^m$, takim że $f(p) = 0$ i różniczka $Df(p)$ jest hiperbolicznym przekształceniem liniowym. Wówczas mówimy że p jest hiperbolicznym punktem stałym dla f . Jeśli p jest okresowy dla f , $f^k(p) = p$ i różniczka $Df^k(p)$ jest hiperbolicznym przekształceniem liniowym, to mówimy że p jest hiperbolicznym punktem okresowym.

Definicja 6.3. Jeśli f jest dyfeomorfizmem rozmaitości M , $f(p) = p$ to mówimy że f jest punktem stałym hiperbolicznym jeśli dla mapy φ , określonej na otoczeniu zera, takiej że $\varphi(0) = p$, punkt 0 jest hiperbolicznym punktem stałym przekształcenia $\varphi^{-1} \cdot f \cdot \varphi$ (ta definicja nie zależy od wyboru mapy!)

Definicja 6.4. Niech X będzie polem wektorowym klasy C^1 , określonym w pewnym otoczeniu p w $\mathbb{R}^m$ takim że $X(p) = 0$ i różniczka A pola X w punkcie p (rozumianego jako funkcja o wartościach w $\mathbb{R}^m$) nie ma wartości własnych o zerowej części rzeczywistej. Taki punkt stacjonarny p nazywamy hiperbolicznym.

Definicja 6.5. Niech X będzie polem wektorowym klasy C^1 , określonym w pewnym otoczeniu $p \in M$ (M – gładka rozmaitość). $X(p) = 0$. Mówimy że p jest punktem stacjonarnym hiperbolicznym dla pola X jeśli dla mapy φ określonej na otoczeniu zera, takiej że $\varphi(0) = p$, punkt 0 jest punktem stacjonarnym hiperbolicznym dla pola $\varphi^*(X)$ (ta definicja nie zależy od wyboru mapy).

6.2. Twierdzenia Grobmana- Hartmana

To twierdzenie jest znane z kursu Jakościowej Teorii Równań Różniczkowych; przytaczamy je w wersji potrzebnej do naszych celów i podajemy szkic dowodu.

Twierdzenie 6.1 (Twierdzenie Grobmana-Hartmana o lokalnej stabilności).

— *Wersja dla dyfeomorfizmów:* Niech f będzie dyfeomorfizmem określonym na otoczeniu 0 w $\mathbb{R}^m$, takim że $f(0) = 0$ i różniczka $Df(0)$ jest hiperbolicznym przekształceniem liniowym. Wówczas istnieje homeomorfizm h określony w pewnym otoczeniu zera U taki że dla $x \in U$ mamy:

$$h \circ f(x) = L \circ h(x)$$

— *Wersja dla potoków:* Niech X będzie polem wektorowym klasy C^1 , określonym w pewnym otoczeniu zera w $\mathbb{R}^m$ takim że $X(0) = 0$ i różniczka A pola X w punkcie 0 (rozumianego jako funkcja o wartościach w $\mathbb{R}^m$) nie ma wartości własnych o zerowej części rzeczywistej. Wówczas istnieje homeomorfizm h określony w pewnym otoczeniu zera U taki że dla $x \in U$ potok φ^t pola wektorowego X jest sprzężony przez h z potokiem ψ^t pola liniowego z macierzą A (czyli z potokiem $x \mapsto \psi^t(x) = \exp(tA)x$).

Dowód. Podamy najpierw szkic dowodu dla dyfeomorfizmów.

Lemat 6.1. Niech V będzie przestrzenią Banacha. Niech $\mathcal{L}$ będzie przekształceniem liniowym ciągłym $\mathcal{L} : V \rightarrow V$, takim że $\|\mathcal{L}\| < a < 1$, niech G będzie odwracalnym przekształceniem liniowym takim że $\|G^{-1}\| < a < 1$. Wówczas

1. $I + \mathcal{L}$ jest odwracalne i $\|(I + \mathcal{L})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$
2. $I + G$ jest odwracalne i $\|(I + G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$

Lemat 6.2. Dla hiperbolicznego przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ istnieje norma w $\mathbb{R}^m$ taka że jeśli $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ jest rozkładem na (niezmiennicze) podprzestrzenie odpowiadające wartościom własnym mniejszym (większym) co do modułu od 1, to $\|L\|_{E^s} < a < 1$, $\|L^{-1}\|_{E^u} < a < 1$

Następujące Stwierdzenie jest kluczowym krokiem dowodu:

Stwierdzenie 6.1. Niech L będzie hiperbolicznym przekształceniem liniowym. Istnieje $\varepsilon > 0$ takie że jeśli $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą mniejszą niż ε , to L i $L + \varphi$ są topologicznie sprzężone w $\mathbb{R}^m$ czyli istnieje homeomorfizm $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ taki że

$$h \circ L = (L + \varphi) \circ h$$

Dowód. Szukamy homeomorfizmu h w postaci $h = I + u$, gdzie $u \in C_b(\mathbb{R}^m)$. Żądamy więc aby

$$(I + u) \circ L = (L + \varphi)(I + u) \tag{6.1}$$

czyli

$$\begin{aligned} L + u \circ L &= L + L \circ u + \varphi(I + u), \\ \varphi(I + u) &= u \circ L - L \circ u. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Sprawdzimy że równanie (6.2) ma dokładnie jedno rozwiązanie w $C_b(\mathbb{R}^m)$. Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\mathcal{L} : C_b(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^m)$ określone $\mathcal{L}(u) = u \circ L - L \circ u$.

Lemat 6.3. Przekształcenie $\mathcal{L}$ jest odwracalne. Ponadto

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1-a}.$$

Dowód. Możemy zapisać

$$\mathcal{L}(u) = L \circ (u - L^{-1} \circ u \circ L),$$

czyli jako złożenie dwóch operacji: najpierw $u \mapsto u - L^{-1} \circ u \circ L$, potem $v \mapsto L \circ v$. Wystarczy oczywiście sprawdzić że ta pierwsza operacja jest odwracalna, a w tym celu wystarczy sprawdzić że przekształcenie liniowe $u \mapsto L^{-1} \circ u \circ L$ ma normę mniejszą niż 1. Możemy zapisać $u = u^s + u^u$ (korzystając z rozkładu $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$), i rozłożyć w ten sposób przestrzeń $C_b(\mathbb{R}^m)$ na sumę prostą $F_1 \oplus F_2$. Nasze przekształcenie zachowuje ten rozkład. Funkcja u^s jest przekształcana na $L^{-1}u^sL$. To ostatnie przekształcenie jest odwracalne (odwrotne to oczywiście $u \mapsto L \circ u \circ L^{-1}$) i ma normę mniejszą niż 1. Z lematu 6.1 wynika że $\mathcal{L}|_{F_1}$ jest odwracalne. Podobnie sprawdzamy że $\mathcal{L}|_{F_2}$ jest odwracalne. $\square$

Szukane u jest postaci

$$u = \mathcal{L}^{-1}(\varphi(I + u)).$$

Zauważmy że, przy małym ε , przekształcenie $u \mapsto \mathcal{L}^{-1}(\varphi(I + u))$ jest kontrakcją. Tak jest bo

$$\|\mathcal{L}^{-1}\varphi(I + u_1) - \mathcal{L}^{-1}\varphi(I + u_2)\| \leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \varepsilon \|u_1 - u_2\|$$

Stąd wynika że istnieje dokładnie jeden punkt stały tego przekształcenia w $C_b(\mathbb{R}^m)$. Otrzymujemy zatem u spełniające (6.1). Do końca dowodu potrzeba wykazać że $I + u$ jest homeomorfizmem. Możemy w tym celu skorzystać z jedności rozwiązania. Zauważamy (należy to sprawdzić) że w ten sam sposób jak powyżej można uzyskać również jedyne rozwiązanie nieco ogólniejszego zagadnienia:

$$(L + \varphi_1) \cdot (I + v) = (I + v) \cdot (L + \varphi_2)$$

(o ile φ_1, φ_2 spełniają warunek Lipschitza z odpowiednio małą stałą). Zatem, jeśli v spełnia

$$(L) \cdot (I + v) = (I + v) \cdot (L + \varphi)$$

to

$$(I + u)(I + v)(L + \varphi) = (I + u)L(I + v) = (L + \varphi)(I + u)(I + v)$$

To złożenie $(I + u)(I + v)$ jest oczywiście postaci I plus jakaś funkcja z $C_b(\mathbb{R}^m)$, i - sprzęga $L + \varphi$ z samym sobą. Z jedności rozwiązania wynika że

$$(I + u)(I + v) = I$$

Tak samo sprawdzamy że $(I + v)(I + u) = I$. W takim razie $I + u$ jest homeomorfizmem. $\square$

Dla zakończenia dowodu twierdzenia należy jeszcze wykazać

Lemat 6.4. *Jeśli f spełnia założenia twierdzenia to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje przedłużenie f z pewnego otoczenia zera U na całe $\mathbb{R}^m$, postaci $L + \varphi$, gdzie $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$ i stała Lipschitza φ nie przekracza ε .*

Dowód. Dowód polega na zastosowaniu standardowej procedury: Weźmy funkcję S klasy C^∞ określoną w $(0, \infty)$ taką że $S(x) = 1$ dla $x \in (0, \frac{1}{2}]$, $S(x) = 0$ dla $x \geq 1$. Oczywiście S spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą C . Ponieważ $Df(0) = L$ to funkcja $\psi = f - L$ spełnia $\psi(0) = 0$, $D\psi(0) = 0$; $\|D\psi(x)\| < \frac{\varepsilon}{2C}$ jeśli $\|x\| < \delta$ i δ jest odpowiednio bliskie zera.

Wówczas funkcja

$$\varphi(x) = S\left(\frac{\|x\|}{\delta}\right) \cdot \psi(x)$$

jest szukanym rozszerzeniem. $\square$

□

Pozostaje udowodnić twierdzenie dla potoku pola wektorowego.

Wystarczy udowodnić twierdzenie dla pola wektorowego określonego w otoczeniu zera w $\mathbb{R}^m$. Rozważmy więc równanie różniczkowe zadane przez

$$\dot{x} = g(x)$$

gdzie $g(0) = 0$ i macierz $A = Dg(0)$ nie ma wartości własnych o zerowej części rzeczywistej.

Podobnie jak poprzednio, modyfikujemy funkcję g do $\tilde{g}$. Funkcja $\tilde{g}$ jest równa g na pewnym otoczeniu zera i równa A poza pewnym (większym) otoczeniem zera.

Niech φ^t będzie potokiem pola wektorowego wyznaczonego przez funkcję $\tilde{g}$. Nierówność Gronwalla gwarantuje że rozwiązania równania przedłużają się do nieskończoności (dlaczego?), zatem potok jest dobrze określony dla wszystkich t .

Sprawdźmy (poniżej) że dyfeomorfizm φ^1 spełnia założenia Stwierdzenia 6.1. Istnieje więc homeomorfizm h sprzęgający φ^1 z jego częścią liniową $L = \exp A$; $\varphi^1 \circ h = h \circ \varphi^1$. Ten homeomorfizm sprzęga również całe potoki, tzn. $\varphi^t \circ h = h \circ \varphi^t$. Aby to sprawdzić, zauważmy że jeśli zdefiniować $\tilde{h} = \varphi^t \circ h \circ e^{-At}$ to $\tilde{h}$ jest również sprzężeniem między φ^1 z jego częścią liniową $L = \exp A$.

Istotnie:

$$\varphi^1 \circ \tilde{h} = \varphi^1 \circ \varphi^t \circ h \circ e^{-At} = \varphi^t \circ \varphi^1 \circ h \circ e^{-At} = \varphi^t \circ h \circ e^{-At} \circ e^A = \tilde{h} \circ e^A$$

Ale $\tilde{h}$ jest, podobnie jak h małym (tzn. ograniczonym) zaburzeniem identyczności (pamiętamy że teraz t jest ustalone):

$$\tilde{h} - I = \varphi^t(I + u) \circ e^{-At} - I = (\varphi^t - e^{At}) \circ h \circ e^{-At} + e^{At}(h - I) \circ e^{-At}$$

Pierwszy składnik jest ograniczony bo różnica w nawiasie jest równa zero dla argumentów o dużym module. Drugi składnik jest ograniczony bo $(h - I)$ jest ograniczone. Z jedyności sprzężenia w pierwszej, już udowodnionej części twierdzenia, wynika że $\tilde{h} = h$.

Pozostaje więc do sprawdzenia że dyfeomorfizm φ^1 spełnia założenia Stwierdzenia 6.1. Zapisując $\tilde{g} = A + r$, mamy

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-At} \varphi^t(x) \right) = -Ae^{-At} \varphi^t(x) + e^{-At}(A + r)\varphi^t(x) = e^{-At} r \varphi^t(x)$$

Wiec:

$$e^{-At} \varphi^t(x) = \int_{s=0}^t e^{-As} r(\varphi^s(x)) ds + e^{-A \cdot 0} \varphi^0(x)$$

czyli

$$\varphi^t(x) = e^{At} x + \int_{s=0}^t e^{A(t-s)} r(\varphi^s(x)) ds$$

$$\varphi^t(x) = Lx + \tilde{r}$$

gdzie $\tilde{r} = \int_{s=0}^1 e^{A(1-s)} r(\varphi^s(x)) ds$. Jeśli r jest lipschitzowskie z małą stałą, to $\tilde{r}$ też.

6.3. Twierdzenie Hadamarda-Perrona

Twierdzenie Grobmana -Hartmana gwarantuje istnienie lokalnych zbiorów stabilnych i niestabilnych- są to obrazy przy homeomorfizmie h podprzestrzeni liniowych E^s i E^u . Możemy więc wywnioskować że są to topologiczne podrozumności. W istocie- są to podrozumności różniczkowalne, tej samej klasy co wyjściowe przekształcenie.

Definicja 6.6. Niech f będzie dyfeomorfizmem klasy C^r , określonym na otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^m$. Zakładamy że $f(p) = p$ i że różniczka $Df(p)$ jest hiperbolicznym przekształceniem liniowym. Dla $\beta > 0$ określamy

$$W_\beta^s(p) = \{x \in B_\beta(p) : f^n(x) \in B_\beta(p) \forall n \geq 0\}$$

$$W_\beta^u(p) = \{x \in B_\beta(p) : f^n(x) \in B_\beta(p) \forall n \leq 0\}$$

Zbiory te nazywamy- odpowiednio- stabilną i niestabilną lokalną rozmaitością punktu p ,

Twierdzenie poniżej uzasadnia nazwę

Twierdzenie 6.2 (Twierdzenie Hadamarda-Perrona). *Niech f będzie dyfeomorfizmem klasy C^r , określonym na otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^m$. Zakładamy że $f(p) = p$ i że różniczka $Df(p)$ jest hiperbolicznym przekształceniem liniowym. Wówczas, dla małego β , zbiory $W_\beta^s(p)$ i $W_\beta^u(p)$ są różniczkowalnymi podrozumnościami klasy C^r . Przestrzenią styczną do $W_\beta^s(p)$ w punkcie p jest E^s , przestrzenią styczną do $W_\beta^u(p)$ w punkcie p jest E^u .*

Ponadto, dla $x \in W_\beta^s(p)$ mamy $f^n(x) \rightarrow p$ gdy $n \rightarrow +\infty$; dla $x \in W_\beta^u(p)$ mamy $f^n(x) \rightarrow p$ gdy $n \rightarrow -\infty$

6.4. Globalne rozmaitości stabilne i niestabilne

Niech teraz f będzie dyfeomorfizmem gładkiej m - wymiarowej rozmaitości M i niech p będzie punktem stałym hiperbolicznym. Wówczas istnieją lokalne rozmaitości- stabilna i niestabilna- punktu p . Są to obrazy przy parametryzacji odpowiednich rozmaitości skonstruowanych dla przedstawienia f w mapie: $\tilde{f} = \circ f \circ \varphi^{-1}$. Są to więc C^r - podrozumności M .

Definicja 6.7. Globalną rozmaitością stabilną punktu stałego hiperbolicznego nazywamy zbiór

$$W^s(p) = \{x \in M : f^n(x) \rightarrow p \text{ gdy } n \rightarrow +\infty\}$$

Zatem:

$$W^s(p) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_\beta^s(p))$$

Wykażemy

Twierdzenie 6.3. *Jeśli p jest hiperbolicznym punktem stałym dla dyfeomorfizmu f klasy C^r na rozmaitości M , to $W^s(p)$ jest immersyjną podrozumnością M , klasy C^r .*

Dowód. Niech ψ będzie parametryzacją otoczenia p w $W_\beta^s(p)$ (już wiemy że $W_\beta^s(p)$ jest podrozmaitością). ψ jest zatem określone na otwartym podzbiorze $W \subset \mathbb{R}^s$; można założyć że $\psi(0) = p$. Różniczka $D\psi$ ma rząd s . Rozpatrzmy

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi \quad (6.3)$$

Różniczka Dg ma wszystkie wartości własne mniejsze co do modułu od 1 (dlaczego?). Wówczas niekoniecznie norma różniczki $Dg(0)$ jest mniejsza niż 1 (klatki Jordana!) ale można zmienić normę w $\mathbb{R}^s$, aby to uzyskać (taka zmiana normy była już w dowodzie twierdzenia Grobmana-Hartmana). Wówczas istnieje otoczenie zera U takie że dla każdego $x \in U$ $\|Dg(x)\| < 1$.

Ćwiczenie 6.1. Istnieje rozszerzenie przekształcenia g do $\hat{g}$ określonego na całym $\mathbb{R}^s$ takie że $\hat{g}$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^s$ i $\|D\hat{g}\| < \alpha < 1$.

Używając $\hat{g}$ budujemy immersję $\psi : \mathbb{R}^s \rightarrow W^s(p)$, to znaczy różniczkowalne przekształcenie różnowartościowe i takie że w każdym punkcie różniczka ma maksymalny, równy s rząd:

$$\psi(x) = f^{-m} \circ \psi \circ \hat{g}^m(x)$$

Ponieważ dla każdego x istnieje m takie że $\hat{g}^m(x) \in W$, rozszerzenie ψ jest określone dla wszystkich x . Poprawność definicji wynika z określenia g (6.3). □

Zdefiniujemy teraz rozmaitości stabilne i niestabilne dla elementów krytycznych (tzn. punktów stacjonarnych i orbit zamkniętych) pól wektorowych.

Niech X będzie polem klasy C^r na gładkiej zwartej rozmaitości M , niech φ^t będzie potokiem tego pola. Niech p będzie hiperbolicznym punktem stacjonarnym X .

Definicja 6.8. Globalną rozmaitością stabilną (niestabilną) dla p nazywamy zbiór

$$W_X^s(p) = \{x : \varphi^t(x) \rightarrow p \text{ gdy } t \rightarrow +\infty\}$$

(odpowiednio dla $W_X^u(p)$ $t \rightarrow -\infty$).

Twierdzenie 6.4. Przy powyższych założeniach, $W^s(p)$, $W^u(p)$ są immersyjnymi podrozmaitościami M , tej samej klasy co pole wektorowe X .

Dowód. Dowód wynika z wykazanego już faktu dla dyfeomorfizmów i z następującego faktu (pozostawiamy udowodnienie jako zadanie)

Ćwiczenie 6.2. Przy założeniach jak powyżej- niech $f = \varphi^1$ będzie "dyfeomorfizmem po czasie 1 dla pola X . (Wówczas oczywiście $f(p) = p$ i p jest punktem stałym hiperbolicznym dla f). Wtedy

$$W_X^s(p) = W_f^s(p)$$

(i tak samo dla W^u)); przez $W_f^s(p)$ oznaczyliśmy globalną rozmaitość stabilną punktu p dla f . □

7. Pola Morse'a-Smale'a. Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a. Ω -eksplozja i podkowa Smale'a

7.1. Pola wektorowe i dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a

Definicja 7.1. Niech M będzie zwartą rozmaitością wymiaru n , zaś X - polem wektorowym klasy C^r na M . Mówimy że X jest polem Morse'a-Smale'a jeśli

- 1 X ma skończenie wiele elementów krytycznych i wszystkie elementy krytyczne są hiperboliczne.
- 2 Jeśli σ_1, σ_2 są elementami krytycznymi, to rozmaitości $W^u(\sigma_1), W^s(\sigma_2)$ przecinają się transwersalnie.
- 3 $\Omega(X)$ - zbiór punktów niebłądzących- jest sumą elementów krytycznych.

Dla dyfeomorfizmów mamy odpowiednio definicję:

Definicja 7.2. Dyfeomorfizm $f : M \rightarrow M$ jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a jeśli:

- 1 f ma skończenie wiele punktów okresowych i wszystkie są hiperboliczne.
- 2 Wszystkie przecięcia $W^s(p) \cap W^u(q)$ są transwersalne
- 3 $\Omega(f) = Per(f)$

Jak wiemy, jeśli X jest polem wektorowym na zwartej rozmaitości, to X generuje rodzinę dyfeomorfizmów (potok pola) φ^t . Warto w tym miejscu zastanowić się czy jeśli X jest polem Morse'a Smale'a to dyfeomorfizm φ^t jest dyfeomorfizmem Morse'a Smale'a. Łatwo sprawdzić że mamy

Ćwiczenie 7.1. Niech X będzie polem wektorowym Morse'a -Smale'a na zwartej gładkiej rozmaitości M . Wówczas dyfeomorfizm φ^t ($t \neq 0$) jest dyfeomorfizmem Morse'a Smale'a wtedy i tylko wtedy gdy X nie ma orbit zamkniętych (tzn zbiór elementów krytycznych X składa się tylko z punktów krytycznych).

W rozdziale trzecim uzyskaliśmy pełną charakteryzację C^1 strukturalnie stabilnych dyfeomorfizmów i pól wektorowych na okręgu (okazało się że są to dokładnie pola wektorowe i dyfeomorfizmy Morse'a - Smale'a). Zatem- naturalne jest pytanie czy te wyniki przenoszą się na przypadek wyższych wymiarów.

Mamy następujące twierdzenie, wykazane przez J. Palisa (nie będziemy go tu dowodzić):

Twierdzenie 7.1 (O otwartości zbiorów dyfeomorfizmów i pól wektorowych Morse'a-Smale'a). *Niech M będzie gładką zwartą rozmaitością. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ zbiór dyfeomorfizmów Morse'a -Smale'a klasy C^r jest niepusty oraz otwarty w przestrzeni $Dif f_r(M)$. Podobnie, zbiór pól wektorowych Morse'a -Smale'a klasy C^r jest niepusty i otwarty w przestrzeni $\mathcal{F}^r(M)$ pól wektorowych klasy C^r na M .*

Twierdzenie 7.2. *Jeśli X jest polem Morse’a -Smale’a to X jest (C^1) strukturalnie stabilne. Podobnie, jeśli f jest dyfeomorfizmem Morse’a -Smale’a to f jest strukturalnie stabilne.*

Różnica pomiędzy sytuacją jednowymiarową (okrąg) a ogólną polega jednak na tym, że w ogólnym przypadku dyfeomorfizmy i pola wektorowe Morse’a Smale’a nie stanowią zbioru gęstego i nie wypełniają wszystkich przykładów strukturalnie stabilnych.

7.2. Ω -eksplozja

Zajmiemy się teraz opisaniem ważnego przykładu (który jednocześnie pokazuje dlaczego w wyższych wymiarach nie można spodziewać się gęstości dyfeomorfizmów Morse’a-Smale’a.

Twierdzenie 7.3 (Ω -eksplozja). *Na rozmaitości M wymiaru $d \geq 2$ dyfeomorfizmy Morse’a-Smale’a nie są gęste w przestrzeni dyfeomorfizmów $Df f^1(M)$.*

szkic. Rozważamy na sferze S^2 pole wektorowe X które ma cztery punkty krytyczne. Punkty s_1 i s_2 są ściekami, punkt s_3 jest siodłem, zaś s_4 -źródłem. Ponadto istnieje trajektoria dla której zbiorem α i ω -granicznym jest ten sam punkt S_3 - bowiem globalne rozmaitości stabilna i niestabilna punktu s_3 pokrywają się. Niech φ^t będzie potokiem tego pola; oznaczmy przez $f = \varphi^1$ "dyfeomorfizm po czasie 1". Na rysunkach 7.1 i 7.2 przedstawiono portret fazowy wyjściowego pola wektorowego (*widziany* na płaszczyźnie i na sferze).

Zaburzymy teraz dyfeomorfizm f w ten sposób że punkt s_3 pozostanie siodłem, ale dla nowego zaburzonego przekształcenia (oznaczanego dalej przez g) $W^u(s_3)$ będzie przecinać się z $W^s(s_3)$ transversalnie.

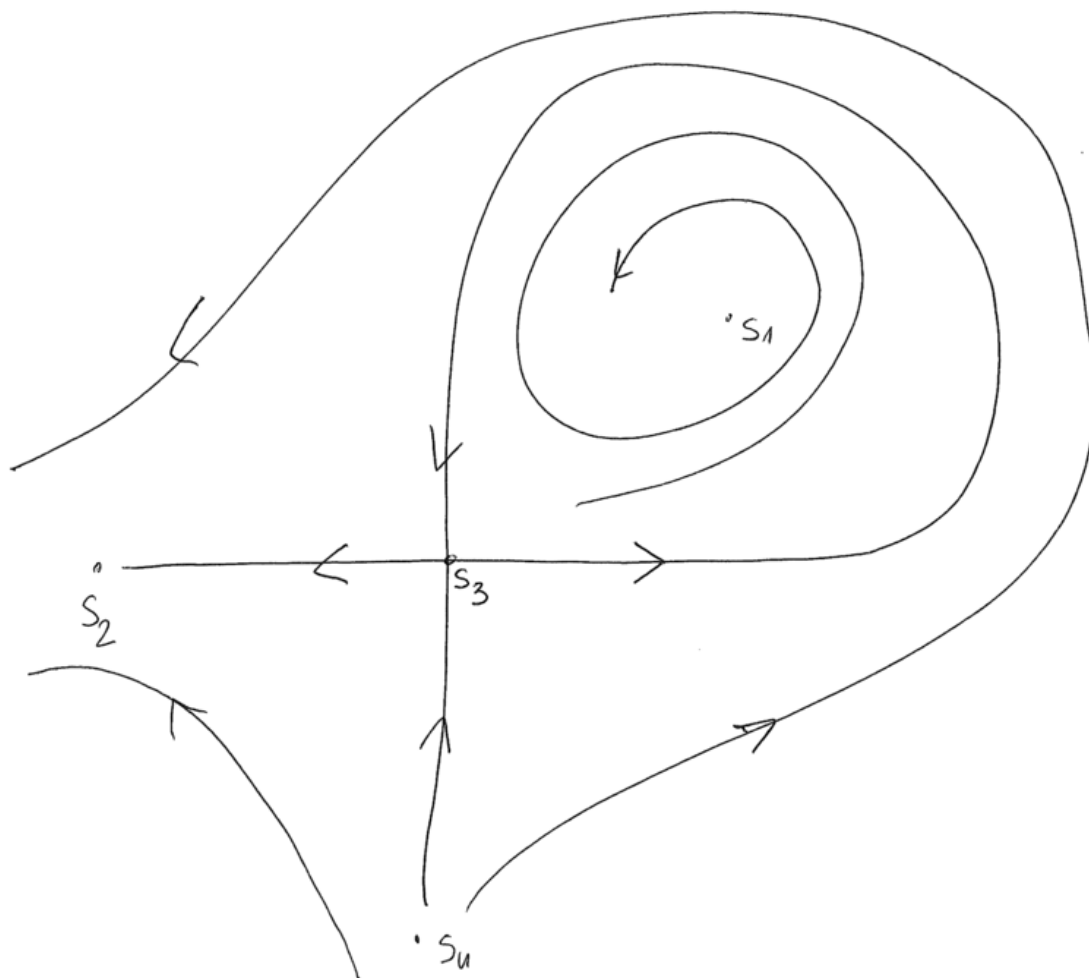
Wybieramy punkt $p \in W^u(s_3)$ i otoczenie punktu p takie że $f^{-1}(U) \cap U = \emptyset$. Użyjemy "lokalnej deformacji"- przekształcenia (dyfeomorfizmu) i takiego że $i = \text{id}$ poza U oraz, dodatkowo, $i(p) = p$, ale $i(W^u(s_3)) \cap U$ przecina teraz transversalnie ($W^u(s_3) \cap U$ w punkcie p . (Mówiąc nieformalnie, i "wykrzywiło" lokalnie rozmaitość $W^u(s_3)$). Na rysunkach 7.3 i 7.4 przedstawiono deformację i i efekt jej zastosowania.

Rozpatrujemy teraz dyfeomorfizm $g = i \circ f$. Zauważmy że g pokrywa się z f poza zbiorem $f^{-1}(U)$. W wyniku tej deformacji globalna rozmaitość niestabilna (zdefiniowana, przypomnijmy, jako $\bigcup g^n(W_{loc}^u)$ zmienia się w otoczeniu punktu p (dokładniej- ten fragment rozmaitości niestabilnej, który jest zawarty w U zostanie zastąpiony przez jego obraz przy przekształceniu i). Natomiast fragment rozmaitości stabilnej $W^s(s_3)$ zawarty w U pozostanie niezmieniony. Pojawi się zatem w punkcie p transversalne przecięcie rozmaitości stabilnej i niestabilnej (rysunki 7.3 i 7.4).

Zauważamy teraz

Stwierdzenie 7.1. *Punkt p jest niebłądzacy dla zaburzonego przekształcenia g .*

Dowód. Niech $W \subset U$ będzie małym otoczeniem p ; l niech będzie fragmentem rozmaitości niestabilnej $W^u(s_3)$ zawartym w W . Rozpatrujemy kolejne obrazy l przy przekształceniu g (rysunek 7.4). Rysunek pokazuje że obrazy (a dokładniej: ich fragmenty) zbliżają się do fragmentu rozmaitości niestabilnej zawartego między punktami s_3 i p i układają "równolegle"

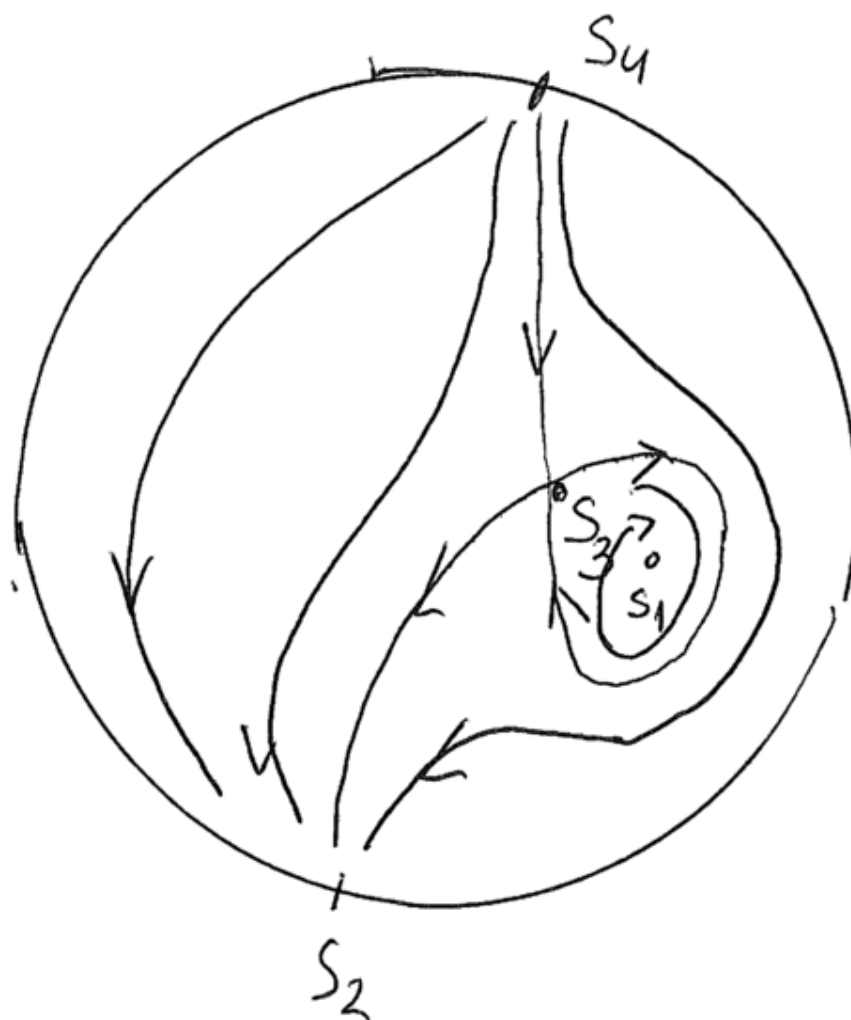
Rysunek 7.1. Potok pola φ^t .

do niego. Zatem- muszą przeciąć W . Formalny dowód wymaga wykorzystania tzw λ -lematu, którego sformułowanie podajemy na końcu tego wykładu. $\square$

Możemy teraz wyjaśnić dlaczego opisane tu zjawisko nazywa się Ω -ekspozją. Zauważmy że wyjściowe pole wektorowe X miało bardzo prosty zbiór punktów niebłądzących $\Omega(X) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Również dyfeomorfizm f ma ten sam zbiór punktów niebłądzących. Z konstrukcji wynika że możemy dowolnie mało zaburzyć f (i to zaburzenie możemy uczynić małym w C^r topologii) tak aby pojawił się dodatkowy punkt niebłądzący. Naprawdę, tych nowych punktów niebłądzących pojawi się więcej- są to przynajmniej wszystkie obrazy i przeciwobrazy p . W następnym rozdziale (7.4) wykazemy że, w istocie zbiór punktów niebłądzących dla g jest nieprzeliczalny.

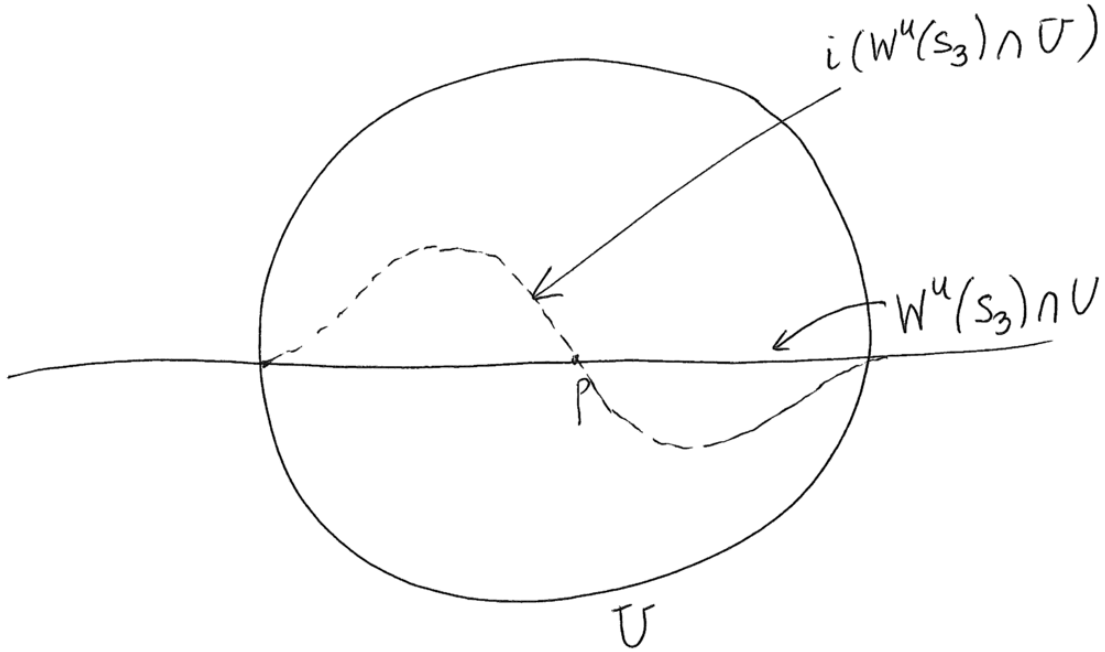
Oczywiście g nie jest dyfeomorfizmem Morse'a Smale'a. Aby dokończyć dowód wystarczy wykazać że istnieje otoczenie g w C^1 topologii złożone z dyfeomorfizmów, które również nie są Morse'a Smale'a. Wystarczy w tym celu wykazać

Stwierdzenie 7.2. *Jeśli $\tilde{g}$ jest dyfeomorfizmem odpowiednio bliskim dyfeomorfizmowi g w C^1 topologii, to $\tilde{g}$ ma punkt stały $\tilde{s}_3$ bliski s_3 , będący też siodłem i rozmaitości niestabilna i stabilna (dla $\tilde{g}$ i siodła $\tilde{s}_3$) przecinają się traswersalnie.*

Rysunek 7.2. Potok pola φ^t .

Istotnie, ze Stwierdzenia 7.2 wynika że żaden dyfeomorfizm $\tilde{g}$ nie jest Morse'a -Smale'a (bo ma punkty nieładzące- punkty przecięcia rozmaitości stabilnej i niestabilnej dla siodła) które nie są okresowe.

□

Rysunek 7.3. Zaburzenie i .

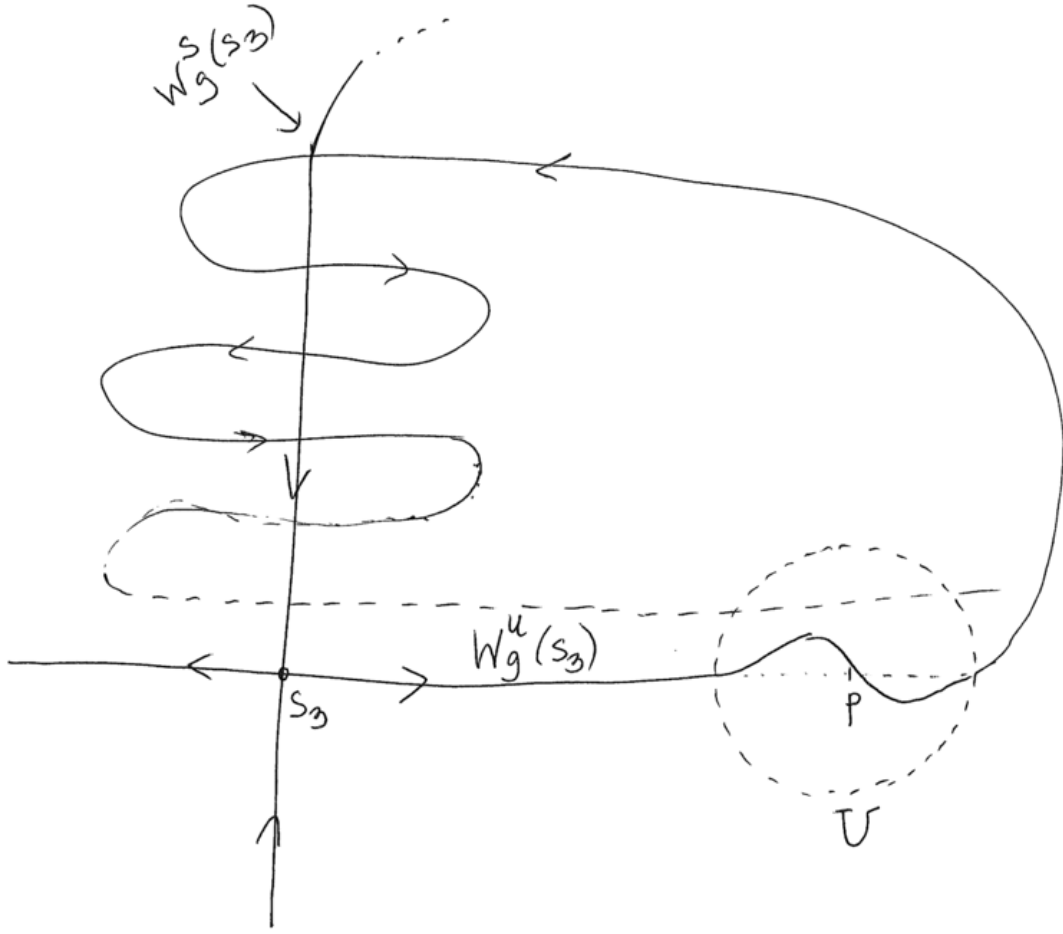
7.3. λ lemat

Niech p będzie punktem stałym (okresowym) hiperbolicznym dyfeomorfizmu f na rozma-
itości n wymiarowej M . Wprowadźmy w otoczeniu p układ współrzędnych taki że p jest w tym
układzie obrazem $0 \in \mathbb{R}^n$. W tym układzie współrzędnych rozmaitości stabilna i niestabilna
punktu p są podrozmaitościami stycznymi w 0 odpowiednio do E^s , $E^u \subset \mathbb{R}^n$. W_{loc}^s jest wy-
kresem funkcji $\varphi_s : U_s \rightarrow E^u$ (gdzie U_s jest otoczeniem zera w E^s) takiej że $D\varphi_s(0) = 0$,
podobnie W_{loc}^u jest wykresem funkcji $\varphi_u : U_u \rightarrow E^s$ (gdzie U_u jest otoczeniem zera w E^u), takiej
że $D\varphi_u(0) = 0$.

Wówczas przekształcenie

$$\varphi(x_s, x_u) = (x_s - \varphi_u(x_u), x_u - \varphi_s(x_s))$$

jest dyfeomorfizmem przekształcającym W_{loc}^s na otoczenie zera w E^s , zaś W_{loc}^u na otoczenie zera
w E^u . W tych współrzędnych najłatwiej jest sformułować λ lemat:



Rysunek 7.4. Przekształcenie g . Teraz rozmaiwości stabilna i niestabilna punktu s_3 przecinają się transversalnie .

Twierdzenie 7.4 (λ -lemat). Niech $V = B_\delta^s \times B_\delta^u$ (w opisanym układzie współrzędnych; zatem $B_\delta^s = W_{loc}^s$, $B_\delta^u = W_{loc}^u$). Rozważmy $q \in W_{loc}^u = B_\delta^u$ i immersyjnie zanurzony dysk D^u o wymiarze $u = \dim E^u$, transwersalny do W_{loc}^s w punkcie q .

Oznaczmy przez D_u^n tę spójną składową $f^n(D^u) \cap V$, do której należy punkt $f^n q$.

Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie że jeśli $n > n_0$ to D_u^n jest ε bliskie B_δ^u (to znaczy: jest wykresem funkcji $g : B_\delta^u \rightarrow E^s$ o wartościach i pochodnej mniejszych co do normy od ε)

rysunek

λ -lemat mówi więc że każdy dyski D^u , po odpowiedniej dalekiej iteracji, ma w obrazie podzbiór otwarty "prawie równoległy" do $W_{loc}^u = B_\delta^u$.

7.4. Podkowa Smale'a

Najpierw zdefiniujemy pewien układ dynamiczny w przestrzeni symbolicznej.

Definicja 7.3. Niech n będzie liczbą naturalną niech

$$\Sigma = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$$

W przestrzeni Σ określamy odległość: jeśli $x = (x_i), y = (y_i) \in \Sigma$ to

$$d(x, y) = \frac{1}{2^N}$$

gdzie N jest największą liczbą naturalną taką że $(x_{-N}, \dots, x_N) = (y_{-N}, \dots, y_N)$. Jeśli takie N nie istnieje, to kładziemy $d(x, y) = 2$. W przestrzeni Σ mamy naturalne przekształcenie σ -przesunięcie w lewo:

$$\sigma(x_i)_{i=-\infty}^{\infty} = (x_{i+1})_{i=-\infty}^{\infty}$$

Opiszemy teraz dyfeomorfizm sfery $\mathbb{S}^2$ który ma interesujący podzbiór niezmienniczy.

Zaczynamy od kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. W tym kwadracie wyróżniamy dwa rozłączne prostopadłościany: H_1 i H_2 oraz dwa rozłączne pionowe prostokąty V_1 i V_2 , położone jak na rysunku

Chcemy aby dyfeomorfizm f przekształcał H_1 na V_1 , H_2 na V_2 afinicznie, i aby $D \cap f^{-1}(D) = H_1 \cup H_2$. Nieformalnie mówiąc- rozciągamy wzdłuż kwadrat D , a otrzymany prostokąt zginaemy w "podkowę" (rysunek 7.5).

Aby rozszerzyć takie przekształcenie, doklejamy do kwadratu dwa topologiczne dyski (np półkola) U , i V (otrzymujemy w ten sposób nowy dysk topologiczny $N = D \cup U \cup V$ tak że $f(G_2) \subset V$, $f(G_1) \subset U$, $f(G_3) \subset U$. Teraz trzeba jeszcze zdefiniować f na U i na V . Obrazy tych półkoli są przedstawione na rysunku 7.6.

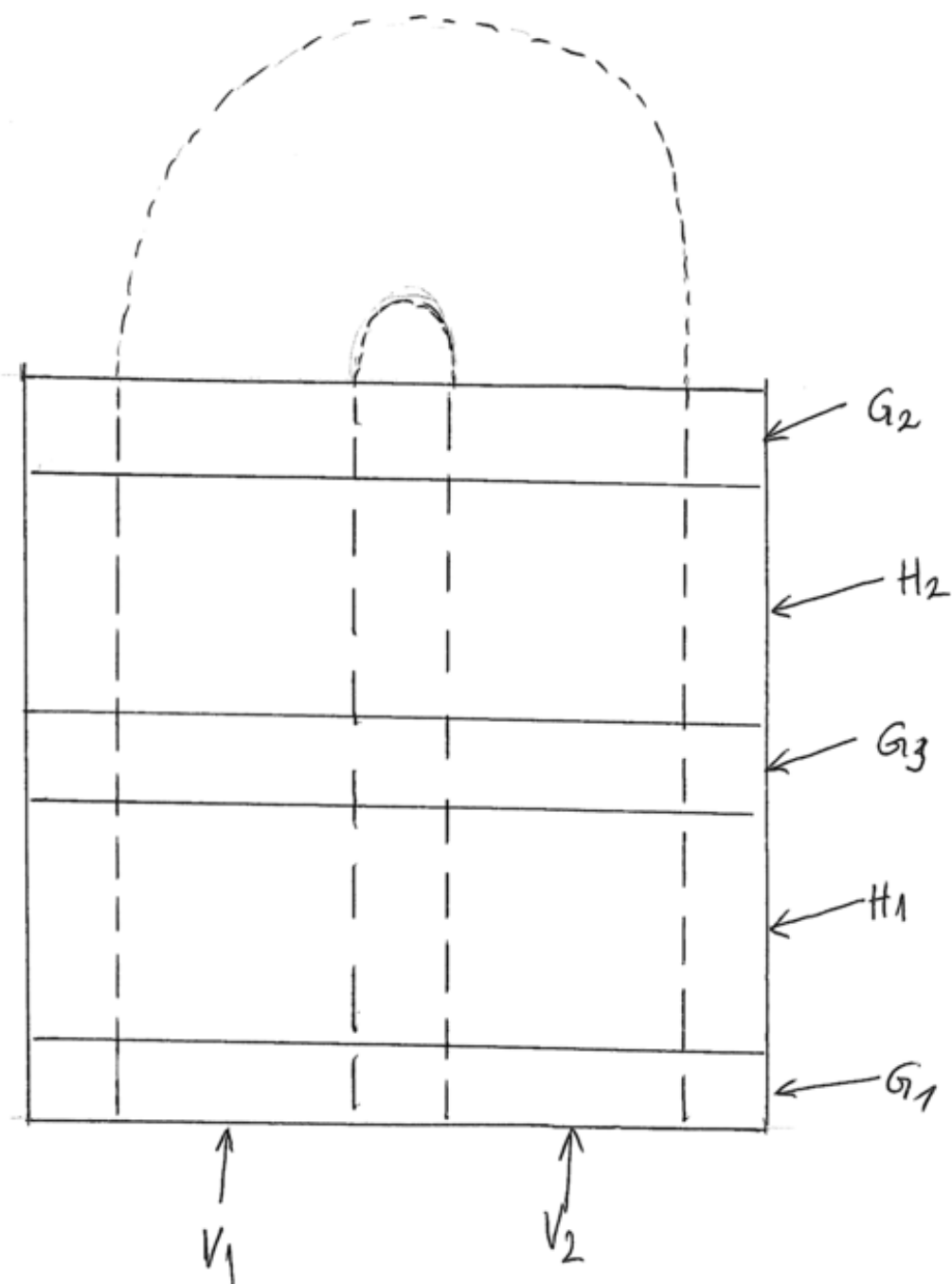
f jest zdefiniowane na U w ten sposób że wewnątrz $f(U)$ jest umieszczony punkt stały przyciągający S i $\bigcap f^n(U) = \{s\}$. Wynika stąd że dla każdego $q \in U$ (a także dla każdego $q \in V$) $\omega(q) = \{p\}$. Mamy więc zdefiniowany dyfeomorfizm $N \rightarrow f(N)$ i $\text{cl}(f(N)) \subset N$. Tak zdefiniowane przekształcenie możemy przedłużyć też do dyfeomorfizmu całej sfery $\mathbb{S}^2$ (N można utożsamić przez dyfeomorfizm z górną półsferą; na dolnej półsferze S definiujemy dyfeomorfizm tak aby $f(S) = \mathbb{S}^2 \setminus f(N)$ (zatem $f(S) \supset S$), umieszczając punkt stały na przykład w biegunie południowym r . Wówczas dla każdego $q \in f(S) = \mathbb{S}^2 \setminus f(N)$ mamy $\alpha(q) = \{r\}$. Z tych obserwacji wynika że zbiór punktów niebłądzących różnych od r, s $\Omega(f) \setminus \{r, s\}$ jest zawarty w wyjściowym kwadracie D . Istotnie, jeśli $p \in S$ to ujemna trajektoria punktu p i całego jego otoczenia jest przyciągana do bieguna południowego r , zatem istnieje takie otoczenie U punktu p że $f^n(U) \cap U = \emptyset$ dla wszystkich n . Podobnie, jeśli $p \in U$, to p jest przyciągane przy iteracji w przód do punktu stałego s , i, z tych samych powodów p jest punktem błądzącym. Ponieważ $f(V) \subset U$ i zbiór punktów niebłądzących Ω jest niezmienniczy, więc również zbiór V nie przecina $\Omega(f)$. Korzystając jeszcze raz z niezmienniczości zbioru $\Omega(f)$ wykazaliśmy zatem

Stwierdzenie 7.3. Zbiór punktów niebłądzących $\Omega(f)$ jest zawarty w zbiorze

$$D_\infty = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D) \cup \{r, s\}$$

(zauważmy że zbiór D_∞ składa się z punktów których trajektorie przez cały czas pozostają w D)

Wykażemy teraz że cały zbiór D_∞ jest zawarty w zbiorze punktów niebłądzących $\Omega(f)$. W tym celu skonstruujemy sprzężenie topologiczne pomiędzy przekształceniem $f : D_\infty \rightarrow D_\infty$ i przesunięciem w lewo σ na przestrzeni symbolicznej.

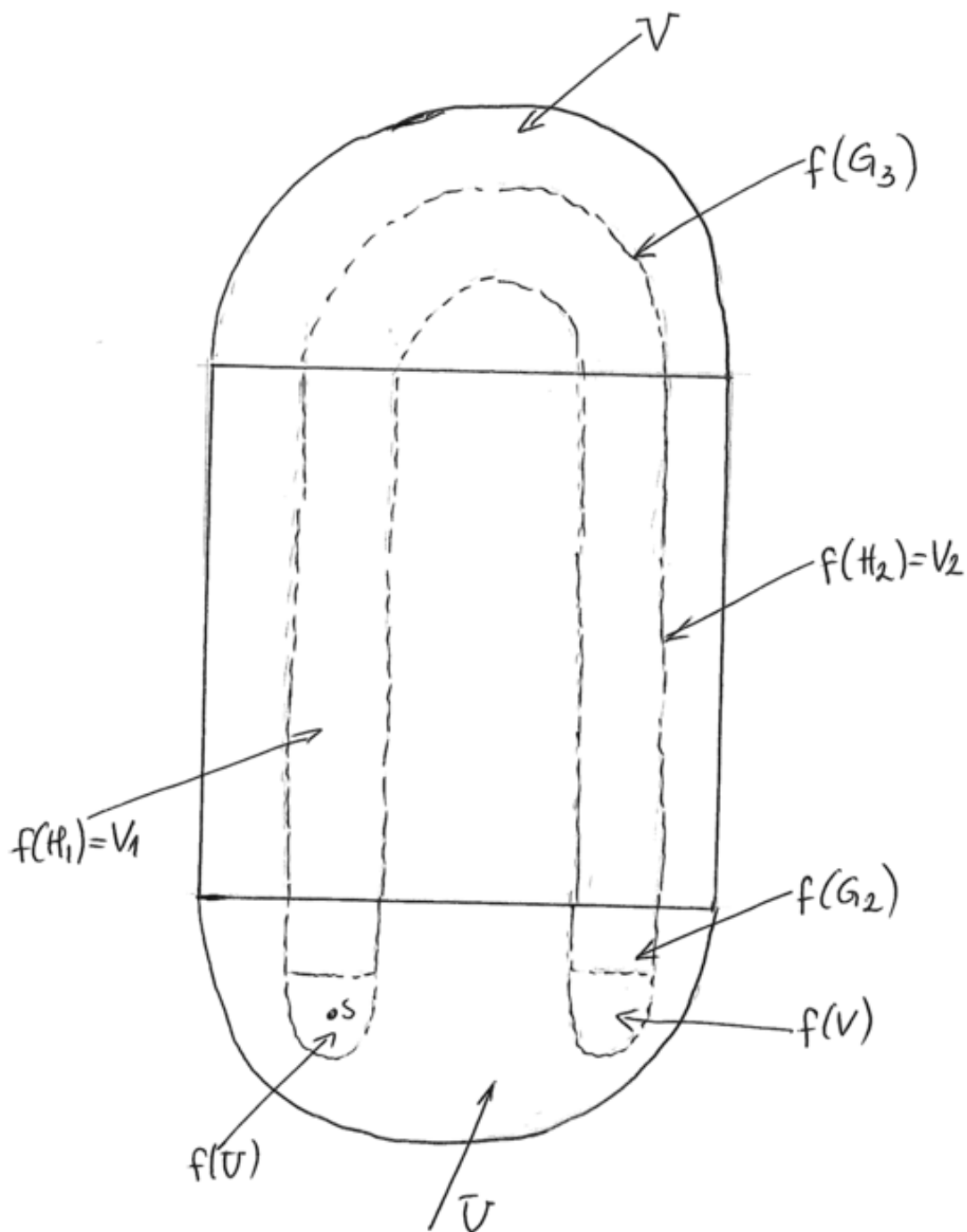


Rysunek 7.5. Podkowa Smale'a.

Rozważmy zbiór

$$D_0^n = \bigcap_{i=0}^n f^i(D)$$

Widzimy (tu będzie rysunek że $D_0^n = \bigcap_{i=0}^n f^i(D)$ jest sumą 2^n pionowych prostokątów,



Rysunek 7.6. Rozszerzenie przekształcenia.

których szerokości maleją wykładniczo z n ; w szczególności- D_0^1 jest sumą dwóch pionowych prostokątów V_1, V_2 . Ponadto, w każdym prostokącie P pojawiającym się w D_0^n są zawarte dokładnie dwa prostokąty następnej generacji; przy czym suma szerokości tych prostokątów jest równa szerokości P pomnożonej przez α . Zatem $D_0^\infty = \bigcap_{i=0}^\infty f^i(D)$ jest produktem zbioru

Cantora i odcinka. Zbiór ten składa się dokładnie z punktów które przez całą swoją historię w przeszłości pozostawały w D .

Podobnie, zbiór

$$D_{-n}^0 = \bigcap_{i=-n}^0 f^i(D)$$

składa się z 2^n poziomych prostokątów; w szczególności D_{-1}^0 jest to podzbiór D złożony z punktów, które w pierwszej iteracji trafiają do D . Zbiór

$$D_{-\infty}^0 = \bigcap_{i=-\infty}^0 f^i(D)$$

składa się zatem z punktów które przez całą swoją przyszłość pozostaną w D ; podobnie jak poprzednio- widzimy że jest to produkt "pionowego" zbioru Cantora i poziomego odcinka.

Oczywiście D_∞ jest przecięciem tych dwóch zbiorów; jest to zatem produkt kartezjański dwóch zbiorów Cantora. W szczególności D_∞ jest zwarty.

Każdemu punktowi $x \in D_\infty$ możemy przyporządkować jego "kod"- nieskończony ciąg symboli $(x_i) = \pi(x)$ w przestrzeni symbolicznej $\Sigma = \{1, 2\}^\infty$: $x_i = 1$ jeśli $f^i(x) \in H_1$, $x_i = 2$ jeśli $f^i(x) \in H_2$.

Wykażemy

Twierdzenie 7.5. *Przekształcenie $f : D_\infty \rightarrow D_\infty$ jest topologicznie sprzężone z przesunięciem σ na przestrzeni symbolicznej Σ ; sprzężenie jest zadane przez kodowanie π :*

$$\sigma \circ \pi = \pi \circ f$$

Dowód. Formuła $\sigma \circ \pi = \pi \circ f$ wynika wprost z definicji kodowania π . Pozostaje więc do sprawdzenia że π jest homeomorfizmem. Sprawdzimy najpierw że π jest wzajemnie jednoznaczne. Różnowartościowość π wynika z obserwacji, że zbiór punktów które mają ten sam kod $x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n$ jest domkniętym prostokątem P_n o rozmiarach malejących wykładniczo z n . Ponadto $P_{n+1} \subset P_n$. Zatem przecięcie jest jednopunktowe. Z konstrukcji wynika też że przekształcenie π jest "na"- każdy kod jest realizowany. Wykażemy że π^{-1} jest ciągle. Wystarczy w tym celu sprawdzić że jeśli ciąg kodów $(x_i^{(k)}) \rightarrow (x_i^{(0)})$ to ciąg odpowiadających punktów $\pi^{-1}(x_i^{(k)}) \rightarrow \pi^{-1}(x_i^{(0)})$. Z definicji metryki w przestrzeni Σ wynika że dla każdego N istnieje takie k_0 że dla każdego $k > k_0$ ciągi $(x_i^{(k)})$ oraz $(x_i^{(0)})$ mają te same wyrazy dla wszystkich k takich że $|k| < N$. Stąd zaś wynika że odpowiadające im przy przekształceniu π^{-1} punkty leżą w tej samej spójnej składowej (prostokącie) zbioru $D_{-N}^0 \cap D_0^N$. Ponieważ długości boków tego prostokąta maleją wykładniczo z N , dowodzi to zbieżności $\pi^{-1}(x_i^{(k)}) \rightarrow \pi^{-1}(x_i^{(0)})$. Mamy więc ciągłą bijekcję pomiędzy dwiema przestrzeniami metrycznymi zwartymi, zatem- homeomorfizm. $\square$

Zauważmy że mamy następujące stwierdzenie (pozostawiamy dowód jako ćwiczenie)

Stwierdzenie 7.4. *W przestrzeni Σ punkty (ciągi) okresowe przy przekształceniu σ stanowią gęsty podzbiór.*

Stąd zaś wniosek

Wniosek 7.1. *W zbiorze D_∞ punkty okresowe dla f są gęste.*

Ponieważ każdy punkt okresowy jest zawarty w zbiorze punktów niebłądzących $\Omega(f)$, i zbiór $\Omega(f)$ jest domknięty, porównując ze Stwierdzeniem 7.3, otrzymujemy

Twierdzenie 7.6. *Zbiór punktów niebłądzących $\Omega(f)$ dla dyfeomorfizmu f jest równy*

$$D_\infty = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D) \cup \{r, s\}$$

Punkty okresowe stanowią gęsty podzbiór $\Omega(f)$.

do zadan: rozmaitości stabilne i niestabilne w podkowie, continuum Knastera.

Podkowa Smale'a to pewien abstrakcyjnie zdefiniowany układ dynamiczny. Jego ważność wyjaśnia poniższe twierdzenie

Twierdzenie 7.7 (Punkt homokliniczny produkuje podkowę). *Niech f będzie dyfeomorfizmem rozmaitości M , p -hiperbolicznym punktem stałym. Załóżmy że istnieje punkt homokliniczny q (czyli punkt transversalnego przecięcia rozmaitości stabilnej $W^s(p)$ i niestabilnej $W^u(p)$, różny od p). Wówczas zbiór punktów niebłądzących $\Omega(f)$ zawiera zwarty niezmienniczy podzbiór Λ , homeomorficzny ze zbiorem granicznym podkowy D_∞ ; homeomorfizm ten sprzęga działanie $f|_\Lambda$ z działaniem opisanego przekształcenia na podkowie.*

Szkic dowodu. Używamy wprowadzonego powyżej układu współrzędnych. Niech $V = B_\delta^s \times B_\delta^u$. Możemy założyć że $q \in V$. Istotnie, jeśli q jest punktem homoklinicznym to wszystkie jego obrazy – też. Ponieważ $q \in W^s(p)$ więc $f^n(q) \rightarrow p$; zatem któryś obraz q leży w V .

Twierdzimy że dla wszystkich odpowiednio dużych k zbiór $f^k(V) \cap V$ ma co najmniej dwie składowe; punkty q i p należą do różnych składowych (rysunek 7.7).

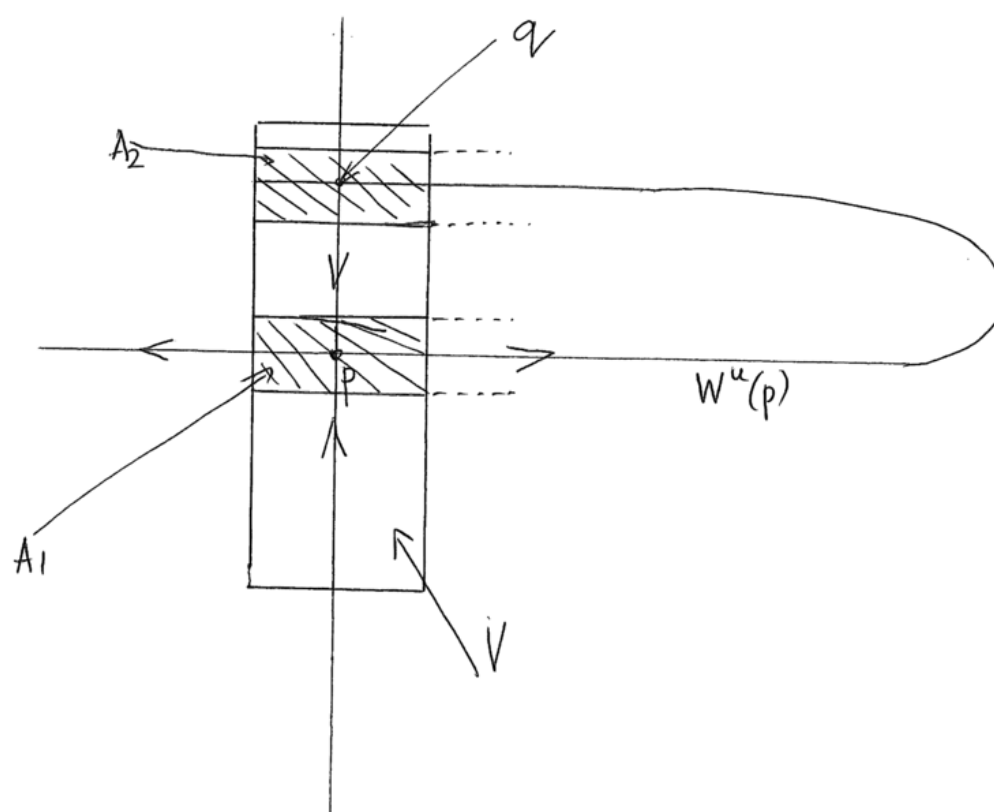
Na rysunku 7.8 przedstawiono przecięcie zbiorów A_1 i A_2 z ich kolejnymi obrazami. W odróżnieniu modelu liniowego, żadne z używanych tu przekształceń nie jest liniowe. Ponieważ używamy iteracji $(f^k)^n = f^{nk}$, więc obrazy pasków mogłyby bardzo się zdeformować. Trzeba więc sprawdzić że można wybrać k na początku tak duże że wszystkie paski pozostaną "prawie poziome". Wybór k można przeprowadzić na przykład tak:

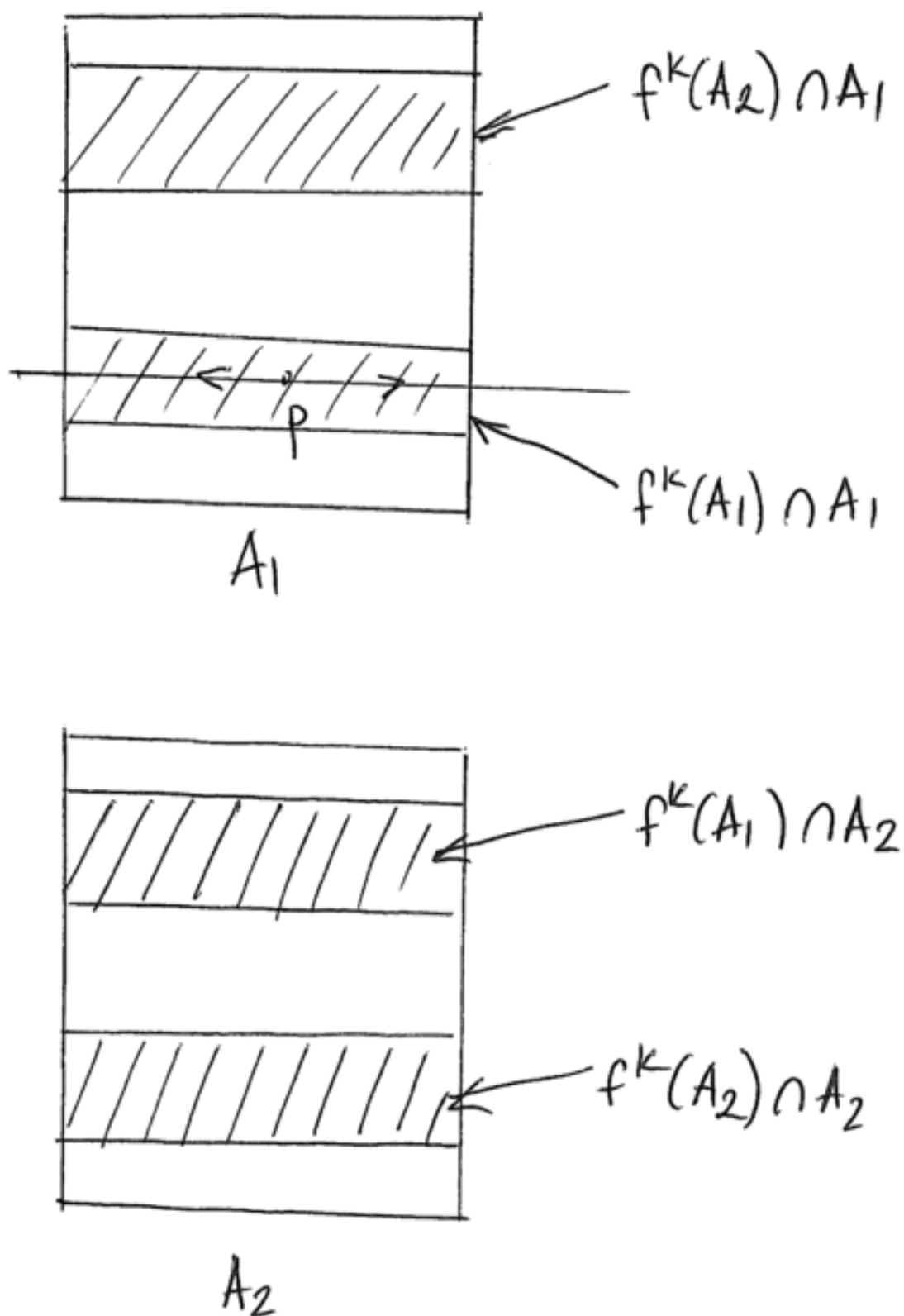
1. Istnieje n_0 takie że $f^{n_0}(B_\delta^u)$ zawiera całą składową zbioru $V \cap W^u(p)$ do której należy punkt x (wynika to stąd że w tych lokalnych współrzędnych B_δ^u jest lokalną rozmaitością W_{loc}^u , więc $\bigcup f^n(B_\delta^u) = W^u(p)$).
2. Ustalamy małe $\varepsilon_0 > 0$.
3. Ustalamy $\eta = \eta(n_0, \varepsilon_0)$ takie że obraz $f^{n_0}(\gamma)$ jest ε_0 bliski (C^1) zbiorowi $f^{n_0}(B_\delta^u)$ o ile γ jest η -bliskie (C^1) B_δ^u .
4. Ustalamy $l \in \mathbb{N}$ na tyle duże że każdy immersyjnie zanurzony dysk zawarty w V , i ε -bliski w C^1 dyskowi $W^u(p) \cap A_2$ jest przekształcany przez f^l na zbiór (dysk immersyjny) γ taki że $\gamma \cap V$ jest η -bliskie B_δ^u .

Tutaj wykorzystujemy λ -lemat.

5. Ustalamy $k = n_0 + l$

□

Rysunek 7.7. Składowe A_1 , A_2 .

Rysunek 7.8. Obrazy składowych A_1, A_2 .

8. Zbiory hiperboliczne. Dyfeomorfizmy i potoki Anosowa. Stabilność zbiorów hiperbolicznych.

W poprzednim wykładzie opisaliśmy skomplikowany zbiór niezmienniczy dla dyfeomorfizmu-
Podkowe Smale'a. Teraz opiszemy kilka innych przykładów zbiorów hiperbolicznych.

Definicja 8.1. Niech f będzie dyfeomorfizmem gładkiej zwartej rozmaitości M . Zakładamy, jak zawsze w tym wykładzie, że M jest zanurzona w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^N$, i ma, w takim razie, odziedziczoną z $\mathbb{R}^N$ strukturę Riemannowską (w szczególności, długości wektorów w przestrzeni stycznej mierzymy używając długości zmierzonej w $\mathbb{R}^N$).

Niech Λ będzie zwartym niezmienniczym podzbiorem M . Mówimy że Λ ma strukturę hiperboliczną jeśli w każdym punkcie p zbioru Λ istnieje rozkład przestrzeni stycznej $T_p M$ na sumę prostą dwóch podprzestrzeni: $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$. Rozkład ten ma być niezmienniczy ze względu na f :

$$D_p f(E_p^u) = E^u(f(p))$$

$$D_p f(E_p^s) = E^s(f(p))$$

Ponadto, żądamy aby istniały stałe $C > 0, \lambda > 1$ takie że

$$\|D_p f^n(v)\| \leq C \lambda^{-n} \|v\|$$

dla $v \in E_p^s$ oraz

$$\|D_p f^{-n}(v)\| \leq C \lambda^{-n} \|v\|$$

dla $v \in E_p^u$.

Uwaga 8.1. Warto zauważyć że jeśli wektor $v \in T_p M$ ma (w rozkładzie na sumę prostą $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$ niezerową drugą składową, to długości obrazów wektora $Df^n(v)$ ($n > 0$) rosną z n wykładniczo szybko.

Mamy następujące ważne Twierdzenie

Twierdzenie 8.1 (Twierdzenie o rozmaitości stabilnej dla zbiorów hiperbolicznych).
 Niech $f : M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^k . Niech Λ będzie niezmienniczym zbiorem hiperbolicznym dla f . Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ i $\tilde{\lambda} < \lambda$, $\tilde{C} > 0$ takie że dla każdego $p \in \Lambda$ zbiory

$$W_\varepsilon^s(p, f) = \{q \in M : \forall n \geq 0 f^n(q) \in B(f^n p, \varepsilon)\} = \{q \in M : \forall n \geq 0 d(f^n(q), f^n(p)) < \tilde{C}\tilde{\lambda}^{-n}\}$$

oraz

$$W_\varepsilon^u(p, f) = \{q \in M : \forall n \geq 0 f^{-n}(q) \in B(f^{-n}p, \varepsilon)\} = \{q \in M : \forall n \geq 0 d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) < \tilde{C}\tilde{\lambda}^{-n}\}$$

są gładkimi podrozmaitościami klasy C^k w M . Ponadto $T_p W_\varepsilon^s(p, f) = E_p^s$ oraz $T_p W_\varepsilon^u(p, f) = E_p^u$

Uwaga 8.2. Zauważmy że równość definiująca $W_\varepsilon^s(p, f)$ (i podobnie $W_\varepsilon^u(p, f)$) na dwa różne sposoby też wymaga dowodu!

Dowód. do napisania □

Definicja 8.2. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Mówimy że odwracalne przekształcenie $T : X \rightarrow X$ jest *ekspansywne* jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ takie że dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie że $T^n(x), T^n(y) > \varepsilon$.

Wniosek 8.1. Obcięcie dyfeomorfizmu do zbioru hiperbolicznego jest przekształceniem ekspansywnym.

Zauważmy że w definicji zbioru hiperbolicznego nie żądamy żeby przestrzenie E_p^u, E_p^s zależały w sposób ciągły od punktu. Wynika to jednak z innych własności:

Stwierdzenie 8.1. Przestrzenie E_p^s, E_p^u zależą w sposób ciągły od p .

Dowód. Weźmy ciąg punktów $\Lambda \ni p_n \rightarrow p \in \Lambda$. W każdej przestrzeni $E_{p_m}^s$ wybieramy bazę ortonormalną

$$(v_m^1, \dots, v_m^s)$$

. Przechodząc do podciągu, można założyć że

$$v_m^i \rightarrow v^i \in T_p M.$$

Skoro

$$\|Df_{p_m}^n v_m^i\| \leq C\lambda^{-n}\|v_m^i\|$$

to (z ciągłości) mamy także

$$\|Df_{p_m}^n v^i\| \leq C\lambda^{-n}\|v^i\|$$

Zatem, $v^i \in E_p^s$.

Pokazaliśmy więc że

$$\lim E_{p_m}^s \subset E_p^s.$$

W ten sam sposób sprawdzamy że

$$\lim E_{p_m}^u \subset E_p^u.$$

Skoro $E_p^s \oplus E_p^u = T_p M$ to musi być

$$\lim E_{p_m}^s = E_p^s,$$

$$\lim E_{p_m}^u = E_p^u$$

□

Wniosek 8.2. Podprzestrzenie E_p^s i E_p^u są "jednostajnie transwersalne", tzn istnieje α_0 takie że dla każdego $p \in \Lambda$ i dla dowolnych $v \in E_p^s$, $w \in E_p^u$ kąt między wektorami v, w jest większy niż α_0 .

Dowód. Niech $\alpha(p)$ będzie minimalnym kątem między $v \in E_p^s$, $w \in E_p^u$. z poprzedniego stwierdzenia wynika że $\alpha(p)$ jest ciągłą funkcją p . Ze zwartości Λ wynika że $\alpha(p) \geq \alpha_0 > 0$. □

Definicja 8.3. Globalna rozmaitość stabilna (niestabilna)

Przy założeniach takich jak w poprzednim twierdzeniu definiujemy zbiory

$$W^s(p, f) = \{q \in M : d(f^n(q), f^n(p)) \rightarrow 0 \text{ gdy } n \rightarrow \infty\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(W_{\varepsilon}^s(p, f))$$

oraz

$$W^u(p, f) = \{q \in M : d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \rightarrow 0 \text{ gdy } n \rightarrow \infty\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(W_{\varepsilon}^u(p, f))$$

Zbiory te nazywamy odpowiednio globalną rozmaitością stabilną i niestabilną. Ta definicja wymaga uzasadnienia:

Ćwiczenie 8.1. Przy założeniach jak w poprzednim Twierdzeniu, wykazać że zbiory $W^s(p, f)$ i $W^u(p, f)$ są immersyjnymi podrozmaitościami klasy C^k w M

Ćwiczenie 8.2. Sprawdzić że podkova Smale'a, zdefiniowana w poprzednim wykładzie, jest zbiorem hiperbolicznym.

Stwierdzenie 8.2 (Zbiór hiperboliczny dla bliskiego przekształcenia). Niech Λ będzie zbiorem hiperbolicznym dyfeomorfizmu f . Wówczas istnieje otoczenie V zbioru Λ takie że jeśli g jest dyfeomorfizmem, dostatecznie bliskim (w C^1 metryce) f na V , to zbiór

$$\Lambda_V^g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\bar{V})$$

jest hiperboliczny.

Uwaga 8.3. Nie wiemy jeszcze jak zbiór Λ_V^g jest związany z Λ , a nawet- czy jest niepusty.

Dowód. Na zbiorze Λ mamy rozkład przestrzeni stycznej $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$, zależny w sposób ciągły od p . Możemy ten rozkład rozszerzyć do ciągłego (niekoniecznie niezmienniczego!) na pewne otoczenie $\Lambda \subset \tilde{V}$.

Rozpatrujemy teraz rodzinę stożków poziomych i pionowych. Stożki poziome to

$$H_x^\gamma = \{v + w : v \in E_x^u, w \in E_x^s, \|w\| \leq \gamma \|v\|\}$$

□

8.1. Solenoid

W tym rozdziale skonstruujemy pewien hiperboliczny atraktor (czyli zbiór który przyciąga całe swoje otoczenie). Do tej pory mieliśmy do czynienia z przekształceniami (lub potokami) Morse'a Smale'a, w których jedynymi atraktorami były punkty stałe (stacjonarne) lub orbity okresowe. Ten atraktor jest zupełnie innego rodzaju.

Rozpatrzmy pełny torus $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$. Okrąg parametryzujemy argumentem t ($t \mapsto e^{2\pi it}$), zaś na dysku jednostkowym D używamy zespolonej zmiennej z . Na okręgu rozpatrujemy przekształcenie z^2 czyli $t \mapsto 2t_{\text{mod } 1}$. Rozpatrujemy przekształcenie $f : M \rightarrow M$ dane wzorem

$$f(t, z) = \left(g(t), \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}e^{2\pi it} \right)$$

f przekształca zatem każdy dysk D_t odpowiadający $t = \text{const}$ na mniejszy dysk, o promieniu czterokrotnie zmniejszonym, zawarty w dysku o dwukrotnie powiększonym argumentcie. Łatwo można zobaczyć jak wygląda dysk $t = t_0$ przecięty z obrazem $f(M)$: jest to suma dwóch rozłącznych dysków, każdy o promieniu $\frac{1}{4}$. (Powstały jako obrazy odpowiednich dysków dla argumentów $\frac{t_0}{2}$ i $\frac{t_0}{2} + \pi$).

rysunek

Niech $M_k = \bigcap_j = 0^k f^j(M) = f^j(M)$. Następujące stwierdzenie wynika łatwo z konstrukcji

Stwierdzenie 8.3. *Dla każdego t zbiór $M_k \cap D_t$ jest sumą 2^k rozłącznych domkniętych dysków o promieniu $\frac{1}{4^k}$ każdy. Dla każdego odcinka $[t_1, t_2]$ zbiór $M_k \cap \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} D_t$ jest sumą 2^k rozłącznych pełnych walców (oczywiście mówimy o zbiorach dyfeomorficznych z walcami, nie o walcach geometrycznych).*

dwa rysunki Niech wreszcie $\Lambda = \bigcap f^j(M)$. Jest to nasz atraktor; z definicji wynika że jeśli $x_1 M$ to $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$. Nietrudno sprawdzić że przecięcie $D_t \cap \Lambda$ jest homeomorficzne ze zbiorem Cantora.

Wykażemy

Twierdzenie 8.2 (Własności topologiczne Solenoidu). *Zbiór Λ ma następujące własności:*

1. Λ jest spójny.
2. Λ nie jest lokalnie spójny.
3. Λ nie jest łukowo spójny.
4. Punkty okresowe dla f stanowią gęsty podzbiór Λ .
5. $f|_\Lambda$ jest topologicznie tranzytywne: dla dowolnych otwartych podzbiorów U, V przecinających Λ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie że $f^n(U) \cap V \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Szkic dowodu. Spójność Λ wynika stąd że $\Lambda = \bigcap M_k$; jest to zstępujący ciąg zbiorów zwartych i spójnych.

Przypomnijmy że lokalna spójność oznacza że dla każdego $x \in \Lambda$ mamy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta) \exists G \subset \Lambda \text{ spójny taki że } x, y \in G$$

. Tymczasem (rysunek) zbiór M_k przecięty z $\bigcup_{t \in [t_1, t_2]} D_t$ jest sumą 2^k skreślonych walców; jeśli punkty x, y należą do różnych walców to nie da się ich połączyć spójnym podzbiorem Λ o małej średnicy (jedynie "połączenie" między tymi walcami prowadzi dookoła torusa).

Wykażemy teraz że zbiór Λ nie jest łukowo spójnym tzn że nie każde dwa punkty Λ dadzą się połączyć krzywą zawartą w Λ . Rozważmy w tym celu dysk D_0 ; oczywiście $f(D_0) \subset D_0$. Wybierzmy punkt $p \in D_0 \cap \Lambda$.

Zbiór $M_k \cap D_0$ jest sumą rodziny $D_{k,0}$ złożonej z 2^k dysków, które można łączyć drogami wzdłuż rozciągniętego torusa $f^k(M)$. Po wykonaniu jednego obrotu, trafiamy do kolejnego dysku w zbiorze $M_k \cap D_0$; po wykonaniu 2^k obrotów- trafiamy do wyjściowego dysku. Zatem możemy wybrać punkt q_1 w tym dysku, który jest otrzymany z dysku zawierającego punkt p przez 2^{k-1} obrotów. Zatem- każda droga łącząca w M_k punkty p i q_k musi przeciąć D_0 przynajmniej 2^{k-1} razy, i wykonać pełny obrót wokół torusa pomiędzy każdymi dwoma przecięciami. W następnym kroku konstrukcji, w dysku z rodziny $D_{k,0}$ zawierającym p pojawiają się na dwa dyski z rodziny $D_{k+1,0}$. Wybieramy ten z nich, który zawiera punkt p ; oznaczmy go D_{k+1}^p . Podobnie, w dysku k -tej generacji zawierającym q_k pojawiają się dwa dyski $k+1$ -szej generacji. Jeden z tych dysków da się połączyć z D_{k+1}^p drogą która obraca się wokół torusa 2^{k-1} razy; drugi- drogą która obraca się 2^k razy. Wybieramy ten drugi, i jakiś punkt q_{k+1} w tym dysku. Oczywiście tak zdefiniowany ciąg q_k jest zbieżny i jego granica q jest w Λ . Z konstrukcji wynika że każda droga w Λ , łącząca p i q , musiałaby przecinać D_0 przynajmniej k razy i pomiędzy dwoma przecięciami wykonać przynajmniej jeden obrót wokół torusa. Ponieważ tak musi być dla każdego k , taka droga nie istnieje (przeczy to ciągłości drogi).

Sprawdźmy gęstość orbit okresowych. Zauważmy najpierw że istnieje gęsty zbiór argumentów t dla których dysk D_t jest przekształcany przez pewną iterację f^n (zależna od t) w siebie (są to po prostu argumenty t odpowiadające punktom okresowym dla przekształcenia z^2 na okręgu). Oczywiście w każdym takim dysku znajdzie się, w takim razie, punkt stały dla f^n . Zatem- w każdym zbiorze postaci $\bigcup_{t \in t_1, t_2} D_t$ jest jakiś punkt okresowy dla f . Rozważmy teraz dowolne otoczenie U dowolnego punktu $p \in \Lambda$. Istnieje "cienki cylinder" - czyli zbiór postaci $C_k = M_k \cap \{t \in T_1, T_2\}$ (dla pewnych T_1, T_2) zawarty w U (dlaczego?). Wystarczy teraz zauważyć że $f^k(C_k)$ jest zbiorem postaci $\bigcup_{t \in t_1, t_2} D_t$. Zatem znajdzie się w nim jakiś punkt okresowy dla f . Skoro w nim- to także w zbiorze C_k , a więc- także w U . □

Stwierdzenie 8.4. Λ jest zbiorem hiperbolicznym.

Szkic dowodu. Zapiszemy różniczkę przekształcenia f we współrzędnych (t, z) :

$$Df(t, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \pi i \exp(2\pi i t) & \frac{1}{4} Id \end{pmatrix}$$

Wektor styczny zapisujemy jako (u, v) , gdzie $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}$. Pod działaniem różniczki wektor $(0, v)$ jest przekształcany na wektor $(0, \frac{1}{4}v)$; mamy więc wyznaczoną wiązkę stabilną. Wykazanie istnienia wiązki niestabilnej jest trudniejsze. Metoda opisana poniżej nazywana jest metodą stożków niezmienniczych.

Wykażemy najpierw że istnieje "wiązka niezmiennicza stożków niestabilnych". W każdym punkcie solenoidu S rozważamy stożek (podzbiór przestrzeni stycznej zaczepionej w tym punkcie), opisany nierównością:

$$S(p) = \{(u, v) \in T_p M : |u| > \frac{1}{2} \|v\|\}$$

(Zatem jest to rodzina stożków położonych "poziomo"). Różniczka f nie zachowuje kierunku poziomego, czyli wektora postaci $(u, 0)$ (tak jest tylko dla $t = 0$). Ale- zachowuje rodzinę stożków poziomych

Ćwiczenie 8.3. Sprawdzić że dla każdego $p \in S$ mamy

$$Df(S(p)) \subset S(f(p))$$

Widzimy teraz jak można próbować uzyskać szukaną foliację niestabilną: skoro $Df(S(p)) \subset S(f(p))$, to również $Df(S(f^{-1}p)) \subset S(p)$, itd i otrzymujemy zstępujący ciąg stożków:

$$Df^n(S(f^{-n}(p))) \subset S(p)$$

Jeśli wykażemy że przecięcie tego ciągu stożków, zaczepionych w punkcie p jest jedną prostą (zawartą w $T_p(M)$) otrzymamy jednowymiarową niezmienniczą foliację. Jeśli dodatkowo sprawdzimy, że Df rozciąga wektory należące do prostych z tak wybranej foliacji- otrzymamy brakującą foliację niestabilną.

Najpierw sprawdzimy warunek rozciągania: Na stożkach $S(p)$ możemy użyć dowolnej normy równoważnej z normą euklidesową (czyli np z normą $|u| + |v|$). Ponieważ $|v| \leq 2|u|$, więc na stożkach $S(p)$ równoważną normą jest po prostu $|||(u, v)||| = |u|$. Oczywiście, ta norma jest mnożona przez 2 przy działaniu różniczki Df . Zatem warunek rozciągania został sprawdzony.

Aby sprawdzić że przecięcie $Df^n(S(f^{-n}(p)))$ jest jedną prostą, zobaczymy jak zmniejsza (zwiększa) się stożek $S(p)$ po zastosowaniu operatora różniczki Df_p . Weźmy dwa wektory $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in S(p)$. "Nachylenia" tych wektorów to wartości $\frac{v_1}{u_1}, \frac{v_2}{u_2}$. Niech teraz $(U_1, V_1) = Df((u_1, v_1))$, $(U_2, V_2) = Df((u_2, v_2))$. Z wzoru na różniczkę Df dostajemy od razu:

$$\left| \frac{V_1}{U_1} - \frac{V_2}{U_2} \right| = \frac{1}{8} \left| \frac{v_1}{u_1} - \frac{v_2}{u_2} \right|$$

Zatem różnica między nachyleniami obrazów przy Df^k dwóch dowolnych wektorów należących do stożka maleje wykładniczo z k . Wynika stąd oczywiście że przecięcie zstępującego ciągu stożków

$$Df^n(S(f^{-n}(p))) \subset S(p)$$

składa się dokładnie z jednej prostej. Jest to szukana przez nas foliacja niestabilna E^u . □

8.2. Dyfeomorfizmy Anosowa

Zacniemy od przykładu. Rozważmy automorfizm algebraiczny torusa $\mathbb{T}^2$ określony wzorem:

$$T(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \quad (8.1)$$

Mówiąc precyzyjniej, przekształcenie T najpierw jest określone wzorem 8.1 na płaszczyźnie. Ponieważ T jest liniowe i przekształca punkty o współrzędnych całkowitych na punkty o współrzędnych całkowitych, T indukuje gładkie przekształcenie torusa $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Zauważmy że f jest odwracalne (ponieważ wyznacznik macierzy jest równy 1); przekształcenie odwrotne jest indukowane przez przekształcenie liniowe płaszczyzny o macierzy:

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x$$

Punkt $p = (0, 0)$ jest punktem stałym hiperbolicznym. Wartości własne dla macierzy przekształcenia T to $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ i $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$. Odpowiednie (wzajemnie prostopadłe) kierunki własne to $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$, $y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$. Oznaczmy prostą wyznaczoną przez pierwsze równanie na płaszczyźnie przez L_1 , drugą prostą przez L_2 . Wówczas $T(L_1) = L_1$ (ta prosta jest rozciągana przy działaniu T); podobnie $T(L_2) = L_2$ (ta prosta jest ściągana przy działaniu T).

Zauważmy dalej że jeśli p jest dowolnym punktem płaszczyzny, to obrazem prostej afinicznej $p + L_1$ jest prosta afiniczna $T(p) + L_1$; podobnie dla L_2 . Mamy więc w każdym punkcie płaszczyzny wyznaczony kierunek stabilny E^s i niestabilny E^u . Mamy też globalne rozmaitości niestabilną $p + L_1$ i stabilną $p + L_2$. Po zrzutowaniu na torus proste $p + L_1$, $p + L_2$ utworzą foliację stabilną i niestabilną dla przekształcenia f . Zrzutowane proste są gęsto nawiniętymi obmotkami na torusie.

Wniosek 8.3. *Dla tego dyfeomorfizmu cała rozmaitość $\mathbb{T}^2$ jest zbiorem hiperbolicznym.*

Stwierdzenie 8.5. *Zdefiniowany powyżej dyfeomorfizm $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ma gęsty zbiór orbit okresowych.*

Dowód. Dowód pozostawimy jako zadanie:

Ćwiczenie 8.4. Wykazać że jeśli f jest hiperbolicznym automorfizmem torusa $\mathbb{T}^m$ to punkt $x \in \mathbb{T}^m$ jest okresowy wtedy i tylko wtedy $x = \pi(X)$ dla pewnego punktu $X \in \mathbb{R}^m$ o wymiernych współrzędnych.

□

Zauważmy że ten dyfeomorfizm jest bardzo różny od dyfeomorfizmów Morse'a- Smale'a, omawianych przez nas wcześniej. Dla tamtych dyfeomorfizmów zbiór punktów niebłądzących składał się ze skończonej liczby hiperbolicznych orbit okresowych. Dowód ich strukturalnej stabilności (przeprowadziliśmy dowód dla dyfeomorfizmów okręgu w wykładzie ???) rozpoczynał się od sprawdzenia że przy małym zaburzeniu wszystkie orbity zachowują się.

W tej nowej sytuacji mamy nieskończenie wiele hiperbolicznych orbit okresowych. Mimo to, przy małym zaburzeniu wszystkie te orbity zachowują się! Twierdzenie to ma daleko idące uogólnienia (stabilność dowolnych zbiorów hiperbolicznych). Najpierw podamy elegancki dowód (pochodzący od J. Mosera) dla automorfizmu algebraicznego torusa.

Twierdzenie 8.3. *Hiperboliczny automorfizm torusa $\mathbb{T}^m$ jest C^1 strukturalnie stabilny.*

Dowód. Będziemy dla uproszczenia zakładali że mamy do czynienia z automorfizmem f dwuwymiarowego torusa. Jest on reprezentowany przez macierz przekształcenia liniowego T na płaszczyźnie. Niech g będzie dyfeomorfizmem torusa bliskim f w C^1 topologii. Twierdzimy że wówczas istnieje dyfeomorfizm płaszczyzny G , który jest C^1 bliski T , i taki że $\pi \circ G = g$. Istotnie, mamy $f \circ \pi = \pi \circ T$. Zatem, jeśli $g(x)$ jest ε bliski $f(x)$ to dla każdego $X \in \pi^{-1}(x)$ istnieje dokładnie jeden punkt $Y \in \pi^{-1}(g(x))$ który jest ε bliski punktowi $T(X)$ na płaszczyźnie. Kładziemy $G(X) = Y$. G jest zatem dobrze określone; jest gładkie ponieważ -lokalnie G zapisuje się jako $\pi^{-1} \circ g \circ \pi$ (dla pewnej gałęzi π^{-1}). Zastosujemy do przekształcenia liniowego T i do dyfeomorfizmu G twierdzenie Grobmana- Hartmana. Możemy je zastosować bo G jest C^1 małym zaburzeniem T w całym $\mathbb{R}^2$. Zatem G możemy zapisać jako $G = T + \phi$ gdzie ϕ jest klasy C^1 i jest C^1 bliski zera.

Wspomniane Twierdzenie gwarantuje istnienie homeomorfizmu $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, który jest sprzężeniem między T i G :

$$H \circ T = G \circ H \quad (8.2)$$

Oczywiście, nie wynika stąd że homeomorfizm H da się zrzutować do homeomorfizmu h na torusie, sprzęgającego działanie f i g . Przypomnijmy, że w dowodzie twierdzenia Grobmana- Hartmana (rozdział 6) homeomorfizm H otrzymuje się w postaci $I + u$ (I jest przekształceniem

identycznościowym). Na to żeby $H = I + u$ rzutowało się do T^2 potrzeba aby dla każdego $p \in \mathbb{Z}^2$ istniało $q \in \mathbb{Z}^2$ takie że

$$(I + u)(X + p) = q + (I + u)(X)$$

czyli $u(X + p) = q + X + u(X)$, $u(X + p) - X = q - p$. Jeśli H ma być bliskie identyczności (czyli $\|u\|$ ma być małe) to trzeba aby $u(x + p) = u(x)$, czyli żeby u było (dwu)okresowe. Wówczas $h = \pi \circ (I + u) \circ \pi^{-1}$ jest dobrze określone i jest homeomorfizmem torusa. Musimy zatem wykazać że w dowodzie twierdzenia Grobmana- Hartmana możemy poszukiwać rozwiązania zagadnienia 8.2 w postaci $H = I + u$ gdzie u należy do podprzestrzeni przestrzeni $C_b^0(\mathbb{R}^2)$ złożonej z funkcji dwuokresowych. Oznaczmy tę podprzestrzeń przez $\mathcal{P}$. Tak jak w dowodzie twierdzenia Grobmana- Hartmana, wprowadzamy operator S działający w przestrzeni funkcji $C_b^0(\mathbb{R}^2)$, określony wzorem $S(u) = u \circ T - T \circ u$. Tak samo jak poprzednio, stwierdzamy że S jest odwracalny, skoro T jest hiperboliczny. Zauważamy teraz że S przekształca funkcję dwuokresową u na funkcję dwuokresową. Zatem S zachowuje przestrzeń $\mathcal{P}$. Przekształcenie

$$K(u) = S^{-1}(\phi(I + u))$$

jest kontrakcją w normie C_b^0 i zachowuje domkniętą podprzestrzeń $\mathcal{P}$. Zatem jedyny punkt stały u leży w podprzestrzeni $\mathcal{P}$.

Punkt stały u spełnia równanie

$$(I + u) \circ T = (T + \phi)(I + u)$$

czyli $H = I + u$ spełnia

$$H \circ T = G \circ H$$

. Wówczas homeomorfizm H rzutuje się do homeomorfizmu $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, czyli $\pi \circ H = h \circ \pi$ i h jest szukanym sprzężeniem: $h \circ f = g \circ h$. $\square$

Wniosek 8.4. *Jest to jeszcze jeden sposób na przekonanie się że w wymiarze ≥ 2 dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a na gładkiej zwartej rozmaitości nie stanowią gęstego podzioru w C^1 topologii.*

8.3. Stabilność zbiorów hiperbolicznych

Stwierdzenie 8.6 (Zbiór hiperboliczny dla bliskiego przekształcenia). *Niech Λ będzie zbiorem hiperbolicznym dyfeomorfizmu f . Wówczas istnieje otoczenie V zbioru Λ takie że jeśli g jest dyfeomorfizmem, dostatecznie bliskim (w C^1 metryce) f na V , to zbiór*

$$\Lambda_V^g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\bar{V})$$

jest hiperboliczny.

Uwaga 8.4. Nie wiemy jeszcze jak zbiór Λ_V^g jest związany z Λ , a nawet- czy jest niepusty.

Dowód. Na zbiorze Λ mamy rozkład przestrzeni stycznej $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$, zależny w sposób ciągły od p . Możemy ten rozkład rozszerzyć do ciągłego (niekoniecznie niezmienniczego!) na pewne otoczenie $\Lambda \subset \tilde{V}$.

Rozpatrujemy teraz rodzinę stożków poziomych i pionowych. Stożki poziome to

$$H_x^\gamma = \{v + w : v \in E_x^u, w \in E_x^s, \|w\| \leq \gamma \|v\|\},$$

stożki pionowe:

$$V_x^\gamma = \{v + w : v \in E_x^u, w \in E_x^s, \quad \|v\| \leq \gamma \|w\|\}.$$

Jeśli $x \in \Lambda$, to stożek poziomy H_x^γ jest przekształcany przez $D_x f$ w stożek poziomy zaczepiony w punkcie $f(x)$; podobnie stożek pionowy V_x^γ jest przekształcany przez $D_x f^{-1}$ w stożek pionowy w punkcie $f^{-1}(x)$; dokładniej- mamy nawet pewien "zapas"- obraz H_x^γ jest zawarty w $H_{\lambda^{-2}x}^\gamma$; podobnie dla stożków pionowych. Dzięki temu, jeśli g jest bliskie f w C^1 metryce, to również $D_x g$ zachowuje tę rodzinę stożków poziomych i pionowych; nie tylko dla $x \in \Lambda$ ale też dla $x \in V$, gdzie V jest pewnym otoczeniem Λ .

Wykażemy że stąd wynika dla punktów $x \in \Lambda_V^g$ istnienie niezmienniczego rozkładu $T_x M$ na podprzestrzeń stabilną i niestabilną przy działaniu g .

W tym celu udowodnimy następujący

Lemat 8.1. *Niech $L_m : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}$ będzie ciągiem przekształceń liniowych takich że*

1. $L_m(H^\gamma) \subset \text{int} H^\gamma$
2. $L_m^{-1}V^\gamma \subset \text{int} V^\gamma$
3. $\|L_m(u)\| > \lambda \|u\|$ dla $u \in H^\gamma$
4. $\|L_m(v)\| < \lambda^{-1} \|v\|$ dla $v \in L_m^{-1}(V^\gamma)$.

Wówczas zbiory

$$E_m^u = \bigcap_{i=0}^{\infty} L_{m-1} \circ L_{m-2} \circ \cdots \circ L_{m-i} H^\gamma$$

oraz

$$E_m^s = \bigcap_{i=0}^{\infty} L_m^{-1} \circ L_{m+1}^{-1} \circ \cdots \circ L_{m+i}^{-1} V^\gamma$$

są (odpowiednio) s - i u - wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^n$

□

do skończenia

8.4. DA atraktor

do uzupełnienia Naszkicujemy konstrukcję interesującego atraktora, który powstaje dla przekształcenia uzyskanego przez modyfikację automorfizmu ergodycznego torusa (stąd nazwa: *Derived from Anosov*). Zaczynamy od opisanego w poprzednim rozdziale hiperbolicznego automorfizmu torusa f wyznaczonego przez przekształcenie liniowe

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x$$

Punkt $p = (0, 0)$ jest punktem stałym hiperbolicznym. Zmodyfikujemy przekształcenie w otoczeniu punktu p tak aby stał się źródłem; blisko pojawią się dwa inne punkty stałe (siodła). Ustalmy więc małe otoczenie U punktu p ; będziemy w nim używali współrzędnych w bazie wyznaczonej przez kierunki własne. Zatem zapis wektora (u_1, u_2) oznacza że wektor ten jest kombinacją liniową $(u_1 v_u + u_2 v_s)$. Zmodyfikujemy przekształcenie f "likwidując" ściąganie w kierunku stabilnym. Formalnie, można to zrobić na przykład tak: Weźmy pomocniczą funkcję φ klasy C^∞ o wykresie w kształcie "dzwonu": $\varphi(x) = 1$ dla $|x| < r_0$, $\varphi(x) = 0$ dla $|x| > r_0$. Rozpatrujemy w otoczeniu punktu $(0, 0)$ pole wektorowe o równaniu:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 0 \\ \dot{u}_2 = u_2 \varphi(\|u\|) \end{cases}$$

Oznaczając przez F_t potok tego pola widzimy że

$$DF_t(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

i że poza otoczeniem zera $\|u\| < r_0$ F_t jest identycznością.

Nasze nowe przekształcenie to

$$g = F_t \circ f$$

gdzie t jest na tyle duże że e^t jest większe od odwrotności mniejszej wartości własnej T . We współrzędnych w bazie wektorów własnych T macierz różniczki g ma postać

$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & e^t \lambda_s \end{pmatrix}$$

Zatem punkt $(0,0)$ stał się źródłem. Nowe przekształcenie też jest dyfeomorfizmem.

Wykażemy

Twierdzenie 8.4. *Dla dyfeomorfizmu g mamy:*

$$\Omega(g) = \{p\} \cup \Lambda$$

gdzie Λ jest hiperbolicznym atraktorem. Wymiar topologiczny Λ jest równy 1. $g|_\Lambda$ jest topologicznie tranzytywne. Orbity okresowe są gęste w Λ

Dowód. Rozmaitość stabilna dla f (jest to podprzestrzeń liniowa stabilna) W^s jest zachowywana oczywiście również przez g ; podobnie- podprzestrzeń niestabilna. Przekształcenie obcięte do rozmaitości niestabilnej pozostaje niezmiennicze. Natomiast na rozmaitości stabilnej (rysunek) pojawiają się dwa nowe punkty stałe p_1, p_2 . **rysunek**

Twierdzimy że są to siodła. Istotnie, w kierunku stabilnym różniczka ma wartość własną mniejszą niż 1. Zauważmy że macierz różniczki dyfeomorfizmu F_t ma postać

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Wynika to stąd że potok F_t zachowuje współrzędną u_1 . Zatem Dg ma postać

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Dla różniczki wyliczonej w punktach p_1 i p_2 wyraz zaznaczony $*$ ma moduł mniejszy niż 1 (por. wykres przekształcenia g obciętego do podprzestrzeni stabilnej f . Zatem p_1, p_2 są siodłami.

Z naszych rozważań wynika też że w całym zbiorze U różniczka g ma postać

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Dla różniczki policzonej w punkcie p oczywiście b jest równe 0, zaś c ma moduł większy od 1.

Ustalmy teraz otoczenie V punktu p takie że

1. Dla $q \in V$ wyraz c w wyrażeniu na różniczkę $Dg(q)$ jest większy (co do modułu) od 1.
2. $0 < c < 1$ dla różniczki policzonej w punktach $q \notin g(V)$ (czyli poza V g pozostaje ściągające wzdłuż wyjściowego kierunku stabilnego E^s).
3. $g(V) \supset V$

Rysunek 8.1. Konstrukcja DA atraktora.

Istnienie takiego V wynika z linearyzacji g w otoczeniu p .

Skoro $V \subset g(V)$ to $V \subset W_g^u(p)$; ponadto $W_g^u(p) = \bigcup_{j=0}^{\infty} g^j(V)$. Niech $Z = \mathbb{T}^2 \setminus V$. Wówczas $g(Z) \subset Z$.

Definiujemy $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W_g^u(p) = \bigcap_{n=0}^{\infty} g^n(Z)$

Widać jak powstaje zbiór Λ . Operacja zamiany f na g prowadzi do "rozszczenia" rozmaitości stabilnej punktu p ; staje się on źródłem, a dodatkowo powstają dwa siodła p_1 i p_2 . "Szczelina" pomiędzy $W^s(p_1)$ i $W^s(p_2)$ to $W_g^u(p)$. Uzupełnienie tego zbioru to Λ .

□

9. Przekształcenia zachowujące miarę

9.1. Podstawowe definicje i fakty

Rozpatrujemy przestrzeń z miarą probabilistyczną $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ($\mathcal{F}$ jest σ ciałem zbiorów mierzalnych).

Definicja 9.1. Mówimy że przekształcenie $T : X \rightarrow X$ jest mierzalne względem σ -ciała $\mathcal{F}$ jeśli dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$ zbiór $T^{-1}(A)$ też należy do σ -ciała $\mathcal{F}$.

Definicja 9.2. Mówimy że mierzalne przekształcenie zachowuje miarę μ jeśli dla każdego $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad (9.1)$$

tu będą przykłady: z^2 , namiot, $2 - z^2$, ułamki łańcuchowe

Uwaga 9.1. Jeśli dodatkowo T jest odwracalne i T^{-1} jest mierzalne, to warunek 9.1 możemy zapisać

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$

Twierdzenie 9.1 (Twierdzenie Poincaré'go o powracaniu). *Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną $T : X \rightarrow X$ - zachowuje miarę μ , $A \in \mathcal{F}$. Wówczas dla μ -prawie każdego $x \in A$ istnieje nieskończenie wiele czasów n takich że $T^n(x) \in A$.*

Dowód. Zbiór

$$B = \{x \in A : \exists m > 0 : \forall n \geq m \quad T^n(x) \notin A\}$$

jest mierzalny (dlaczego?). Pokażemy że $\mu(B) = 0$. Wystarczy pokazać że $\mu(C) = 0$ gdzie

$$C = \{x \in A : \forall n \geq 1 \quad T^n(x) \notin A\}$$

Zauważamy że zbiory $C, T^{-1}(C), \dots, T^{-n}(C) \dots$ są parami rozłączne. Jest ich nieskończenie wiele, miara X jest skończona, Zatem wszystkie te zbiory muszą mieć miarę zero. $\square$

Podamy teraz ważną definicję:

Definicja 9.3 (Ergodyczność). Przekształcenie mierzalne przestrzeni z miarą X nazywamy ergodycznym jeśli dla każdego A zbioru mierzalnego mamy

$$\mu(A \div T^{-1}(A)) = 0 \implies \mu(A) = 0 \quad \text{lub} \quad \mu(X \setminus A) = 0$$

Uwaga 9.2. W tej definicji ergodyczności nie zakładamy ani niezmienniczości miary μ dla przekształcenia T ani skończoności miary μ . Jeśli T dodatkowo spełnia implikację $\mu(A) = 0 \implies \mu(T^{-1}(A)) = 0$, w szczególności jeśli T zachowuje miarę μ to definicję ergodyczności można równoważnie zapisać (taką definicję spotyka się na ogół)

Definicja 9.4 (Ergodyczność miary niezmienniczej). Przekształcenie mierzalne T przestrzeni z miarą X , zachowujące tę miarę jest ergodyczne jeśli dla każdego A zbioru mierzalnego mamy

$$A = T^{-1}(A) \implies \mu(A) = 0 \text{ lub } \mu(X \setminus A) = 0$$

Zdefiniujemy teraz σ -ciało zbiorów "prawie" niezmienniczych

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0\}$$

Mamy łatwe

Stwierdzenie 9.1. *Jeśli funkcja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ -ciała $\mathcal{G}$ to ϕ jest prawie na pewno stała na trajektoriach:*

$$\mu\{x : \phi(Tx) = \phi(x)\} = 1$$

Dowód. . Załóżmy przeciwnie, że $D = \{x : \phi(Tx) \neq \phi(x)\}$ ma dodatnią miarę. Wówczas istnieje takie $a \in \mathbb{Q}$ że zbiór $D_a = \{x \in D : \phi(x) < a \text{ i } \phi(Tx) > a\}$ ma dodatnią miarę (albo dodatnią miarę ma zbiór D_a zdefiniowany przez przeciwne nierówności). Ale D_a nie przecina się z $T^{-1}(D_a)$ (wystarczy spojrzeć na definicję zbioru D_a); z drugiej strony D_a jest elementem σ ciała $\mathcal{G}$. Wynika stąd że $\mu(D_a) = 0$, wbrew przypuszczeniu (zbiory z σ -ciała $\mathcal{G}$ różnią się przecież od swojego przeciwobrazu o zbiór miary zero). $\square$

Zanotujmy jeszcze oczywiste ale ważne fakty:

Stwierdzenie 9.2. *Jeśli $T : X \rightarrow X$ jest przekształceniem zachowującym miarę, to T jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy gdy σ -ciało $\mathcal{G}$ jest trywialne (składa się wyłącznie ze zbiorów miary 0 i zbiorów miary 1).*

Wniosek 9.1. *Jeśli $T : X \rightarrow X$ jest ergodyczne, to każda funkcja mierzalna $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ która jest T -niezmiennicza (tzn $\phi \circ T = \phi$ prawie wszędzie) jest stałą prawie wszędzie.*

Gdzies troszke dalej w forma zadania moze, trzeba umiescic różne warunki równoważne na ergodyczność

9.2. Twierdzenie ergodyczne

Twierdzenie Ergodyczne jest jednym z najważniejszych wyników w teorii przekształceń zachowujących miarę. Rozważmy funkcję mierzalną $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (czyli - w języku rachunku prawdopodobieństwa- zmienną losową). Mamy wówczas ciąg funkcji mierzalnych (zmiennych losowych)

$$\phi, \phi \circ T, \phi \circ T^2, \dots, \phi \circ T^n, \dots \quad (9.2)$$

(mamy więc jakąś funkcję (obserwabłę) określoną na naszej przestrzeni X i wyliczamy jej wartości wzdłuż trajektorii).

Otrzymujemy w ten sposób ciąg zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (dlaczego?), ale oczywiście nie niezależnych. Twierdzenie Ergodyczne jest odpowiednikiem Prawa Wielkich Liczb, dla takiego właśnie ciągu jednakowo rozłożonych i całkowalnych ale zależnych (przez sposób w jaki zostały zdefiniowane) zmiennych losowych.

Twierdzenie 9.2 (Twierdzenie Ergodyczne). *Niech $T : X \rightarrow X$ będzie przekształceniem zachowującym miarę probabilistyczną μ określoną na σ -ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów X . Niech $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary μ ($\phi \in L^1(\mu)$). Wówczas mamy*

$$\frac{\phi + \phi \circ T + \phi \circ T^2 + \dots + \phi \circ T^{n-1}}{n} \rightarrow E(\phi|\mathcal{G}) \quad (9.3)$$

(gdzie $E(\phi|\mathcal{G})$ oznacza warunkową wartość oczekiwaną względem σ -ciała $\mathcal{G}$). Zbieżność jest tutaj prawie wszędzie i w L^1 .

Uwaga 9.3. Zauważmy że (jak wynika ze Stwierdzenia 9.1) funkcja $E(\phi|\mathcal{G})$ jest (prawie wszędzie) T -niezmiennicza. Zatem w twierdzeniu ergodycznym otrzymujemy zbieżność do funkcji T -niezmienniczej, oczywiście o tej samej całce co ϕ .

Wniosek 9.2. *Jeśli dodatkowo założymy że T jest ergodyczne, mamy*

$$\frac{\phi + \phi \circ T + \phi \circ T^2 + \dots + \phi \circ T^{n-1}}{n} \rightarrow E(\phi) \quad (9.4)$$

prawie wszędzie (zatem dla ergodycznego przekształcenia T teza twierdzenia jest dokładnym odpowiednikiem Prawa Wielkich Liczb).

Wniosek 9.3 (Częstość odwiedzin). *Jeśli $T : X \rightarrow X$ jest ergodyczne, $A \in \mathcal{F}$ to z Twierdzenia Ergodycznego, zastosowanego dla $\phi = \chi_A$ otrzymujemy*

$$\frac{\text{card} \{i \leq n : T^i(x) \in A\}}{n} \rightarrow \mu(A) \quad (9.5)$$

prawie wszędzie.

Dowód Twierdzenia Ergodycznego. Najpierw udowodnimy następujący Lemat:

Lemat 9.1 (Maksymalne Twierdzenie Ergodyczne). *Niech $f \in L^1(\mu)$. Zdefiniujmy zbiór A następująco:*

$$A = \{x \in X : \sup \sum_{k=0}^n f(T^k(x)) = \infty\}$$

Wówczas

$$\int_A f \geq 0$$

Dowód. Określamy

$$F_n = \max \left(\sum_{i=0}^{k-1} f \circ T^i, \quad 1 \leq k \leq n \right) \quad (9.6)$$

Zauważmy że

$$F^{n+1}(x) - F^n(Tx) = f(x) - \min(0, F_n(Tx)) \quad (9.7)$$

Wynika stąd po pierwsze że ciąg $F^{n+1}(x) - F^n(Tx)$ jest nierosnący, a po drugie – że dla $x \in A$ mamy

$$F_{n+1}(x) - F_n(Tx) \rightarrow f(x) \quad (9.8)$$

a stąd:

$$0 \leq \int_A (F_{n+1} - F_n) d\mu = \int_A (F_{n+1} - F_n \circ T) \rightarrow \int_A f d\mu \quad (9.9)$$

Równość wynika stąd że z niezmienniczości miary μ mamy $\int_{f^{-1}(A)} F_n \circ T = \int_A F_n$, a dzięki temu że zbiór A jest niezmienniczy ($A = f^{-1}(A)$), możemy następnie $f^{-1}(A)$ zastąpić przez A .

Ostatnie przejście do granicy jest uprawnione, bo ciąg funkcji $F_{n+1} - F_n \circ T$ jest nierosnący, i zbieżny na zbiorze A do całkownej funkcji f . Formuła ?? kończy dowód Maksymalnego Twierdzenia Ergodycznego. $\square$

Założmy teraz że $E(f|\mathcal{G}) < 0$ prawie wszędzie. Skoro A jest niezmienniczy, to oczywiście $A \in \mathcal{G}$, zatem

$$\int_A f = \int_A E(f|\mathcal{G}) < 0$$

Zatem: jeśli $E(f|\mathcal{G}) < 0$ prawie wszędzie, to z Maksymalnego Twierdzenia Ergodycznego wynika że $\mu(A) = 0$. Poza zbiorem A mamy zaś oczywiście:

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq 0 \quad (9.10)$$

Zastosujemy tę obserwację do funkcji

$$f = \phi - E(\phi|\mathcal{G}) - \varepsilon$$

(ε jest tu dowolną liczbą dodatnią). Oczywiście $E(f|\mathcal{G}) = -\varepsilon < 0$

Mamy zatem

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\phi - E(\phi|\mathcal{G}) - \varepsilon) \circ T^k \leq 0 \quad (9.11)$$

Stwierdzenie refniezm pozwala teraz zauważyć że funkcja $E(\phi|\mathcal{G})$ jest T - niezmiennicza, zatem nierówność 9.11 możemy (prawie wszędzie) przepisać:

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\phi \circ T^k) \leq E(\phi|\mathcal{G}) + \varepsilon \quad (9.12)$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz zauważyć że ε jest dowolne, zatem

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\phi \circ T^k) \leq E(\phi|\mathcal{G})$$

prawie wszędzie (wystarczy wybrać ciąg epsilonów zbieżny do zera), zaś zamieniając ϕ na $-\phi$ otrzymujemy:

$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\phi \circ T^k) \geq E(\phi|\mathcal{G})$$

Pozostaje do sprawdzenia że zbieżność jest także w L^1 $\square$

Sformułujemy teraz kilka warunków równoważnych ergodyczności; pozostawimy je jako zadanie:

Ćwiczenie 9.1 (Warunki równoważne ergodyczności). Niech $T : X \rightarrow X$ będzie przekształceniem zachowującym miarę μ . Wykazać równoważność następujących warunków:

- 1. T jest ergodyczne
- 2. każda funkcja $f \in L^1(\mu, T)$ - niezmiennicza jest stała prawie wszędzie.
- 2'. każda funkcja $f \in L^2(\mu, T)$ - niezmiennicza jest stała prawie wszędzie.
- 3. dla każdej funkcji $\phi \in L^1(\mu)$ mamy

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k \rightarrow \int \phi d\mu$$

- 3'. dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\text{card}\{i \leq n : T^i(x) \in A\} \right) \rightarrow \mu(A)$$

μ - prawie wszędzie.

- 4. dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{F}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}(B)) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

Następne ćwiczenie pokazuje że dla tego samego przekształcenia miary ergodyczne niezmiennicze są dla siebie "wzajemnie niewidoczne".

Ćwiczenie 9.2. Niech $T : X \rightarrow X$ będzie przekształceniem mierzalnym względem σ -ciała $\mathcal{F}$. Wykazać że jeśli μ_1, μ_2 są dwiema różnymi miarami określonymi na $\mathcal{F}$, to μ_1, μ_2 są wzajemnie singularne.

Wskazówka. Skoro miary są różne, to istnieje $A \in \mathcal{F}$ taki że $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$. Skorzystać z własności 3' z poprzedniego zadania.

9.3. Przykłady przekształceń ergodycznych

obrot na okręgu, przesunięcia na torusie, automorfizmy torusa, układy symboliczne

10. Jak szukać miar niezmienniczych

10.1. Twierdzenie Kryłowa- Bogoliubowa

Rozważmy przekształcenie mierzalne względem σ -ciała $\mathcal{F}$, $T : X \rightarrow X$. Czy X ma jakąś miarę niezmienniczą określoną na $\mathcal{F}$? Otóż- nie musi tak być. Rozważmy

Przykład 10.1. Rozważmy przekształcenie $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ określone wzorem $T(x) = \frac{1}{2}x$ dla $x \neq 0$, $T(0) = 1$. Wówczas T jest oczywiście mierzalne względem σ -ciała zbiorów borelowskich na $[0, 1]$, ale nie istnieje borelowska miara niezmiennicza dla T . Istotnie, ponieważ $(0, 1] = T^{-1}(0, \frac{1}{2}] = T^{-2}(0, \frac{1}{4}] = \dots T^{-n}(0, \frac{1}{2^n}]$, mamy $\mu((0, 1]) = \mu((0, \frac{1}{2}])$, czyli $\mu((\frac{1}{2}, 1]) = 0$ i, podobnie, sprawdzamy że $\mu(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}] = 0$. Zatem jedyna miara niezmiennicza musiałaby być skupiona w punkcie 0, ale, ponieważ $T(0) \neq 0$, ta miara też nie jest niezmiennicza

Widzimy, że powyższy przykład jest nieco sztuczny; ciągłe przekształcenie zostało zmodyfikowane w punkcie stałym i w ten sposób wyrugowaliśmy jedyną miarę niezmienniczą dla wyjściowego, ciągłego przekształcenia domkniętego odcinka $[0, 1]$.

Istotnie mamy następujące

Twierdzenie 10.1 (Twierdzenie Kryłowa- Bogoliubowa). *Jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą, $T : X \rightarrow X$ przekształceniem ciągłym, to istnieje przynajmniej jedna borelowska miara niezmiennicza dla T .*

Uwaga 10.1. Zauważmy że to twierdzenie jest nietrywialne, o ile T nie ma żadnej orbity okresowej. Jeśli bowiem $x, Tx, \dots T^n x = x$ jest orbitą okresową, to miara

$$\mu_x = \frac{1}{n} (\delta_x + \delta_{Tx} + \dots + \delta_{T^{n-1}(x)})$$

jest niezmienniczą miarą borelowską.

Zanim przystąpimy do dowodu Twierdzenia, zapiszemy warunek na niezmienniczość miary w innej, równoważnej formie: Przypomnijmy, że niezmienniczość miary oznacza że $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ dla każdego mierzalnego zbioru A . Z przekształceniem ciągłym $T : X \rightarrow X$ możemy związać ciągłe przekształcenie $T_* : C(X) \rightarrow C(X)$ dane wzorem

$$T_*(\phi)(f) = \phi(f \circ T)$$

Stwierdzenie 10.1. *Jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą, $T : X \rightarrow X$ przekształceniem ciągłym to borelowska miara regularna jest niezmiennicza dla T wtedy i tylko wtedy gdy $T_*\mu = \mu$.*

Dowód. Załóżmy że $T_*\mu = \mu$. Mamy pokazać że dla każdego borelowskiego zbioru A mamy $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Z regularności miary wynika że dla każdego dodatniego ε istnieją zbiory $E \supset A \supset F$ (E - otwarty, F - domknięty) takie że $\mu(E) < \mu(A) - \varepsilon < \mu(A) + \varepsilon < \mu(F)$ oraz $\mu(T^{-1}E) < \mu(T^{-1}A) - \varepsilon < \mu(T^{-1}A) + \varepsilon < \mu(T^{-1}F)$ Istnieje funkcja ciągła $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ taka że $f|_F = 1$, $f|_{X \setminus E} = 0$, $0 \leq f \leq 1$. Mamy zatem

$$|\mu(f) - \mu(A)| < 2\varepsilon$$

,

$$|\mu(f \circ T) - \mu(T^{-1}A)| < 2\varepsilon$$

Stąd (skoro $\mu(f \circ T) = \mu(f)$)

$$|\mu(T^{-1}(A) - \mu(A)| < 4\varepsilon$$

Wobec dowolności ε , $\mu(T^{-1}(A) = \mu(A)$. Odwrotnie, jeśli dla każdego A borelowskiego $\mu(T^{-1}(A) = \mu(A)$, to możemy napisać dla funkcji ciągłej $f \geq 0$, (ale także dla dowolnej borelowskiej, $f \geq 0$

$$\int f d\mu = \int_{[0, \infty)} \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt$$

Z tego zapisu widać od razu że $\int f \circ T = \int f$. Ponieważ dowolną funkcję ciągłą f możemy teraz zapisać jako różnicę dwóch funkcji ciągłych nieujemnych $f = f_+ - f_-$, dowód jest zakończony. $\square$

Dowód Twierdzenia Kryłowa- Bogoliubowa. Przypomnijmy że każda borelowska regularna miara na X jest ciągłym funkcjonałem liniowym działającym na przestrzeni funkcji ciągłych $C(X)$ i, odwrotnie, każdy nieujemny (tj przyjmujący nieujemne wartości na funkcjach nieujemnych) funkcjonał ciągły na $C(X)$ jest dany przez pewną miarę borelowską regularną. (Ta odpowiedniość jest dana przez formułę: **uscislic**

$$\mu(f) = \int_X f d\mu$$

W przestrzeni miar probabilistycznych rozpatrujemy słabą* topologię (to znaczy topologię pochodzącą z utożsamienia miar z funkcjonałami liniowymi na $C(X)$, czyli elementami $(C(X))^*$. Zastosujemy znane twierdzenie Banacha- Alaoglu, mówiące że kula jednostkowa w przestrzeni sprzężonej do przestrzeni Banacha jest zwarta w słabej-* topologii.

Uwaga 10.2. Słaba* topologia w przestrzeni miar unormowanych jest metryzowalna **uzupełnić**

Wybermy dowolny punkt $x \in X$ i rozpatrzmy ciąg miar

$$\mu_n = \frac{1}{n} (\delta_x + \delta_{Tx} + \dots \delta_{T^{n-1}(x)})$$

wybermy podciąg słabo zbieżny:

$$\mu_{n_k} = \frac{1}{n_k} (\delta_x + \delta_{Tx} + \dots \delta_{T^{n_k-1}(x)}) \rightarrow \mu_0 \quad (10.1)$$

Miara μ_0 jest wówczas szukaną miarą niezmienniczą.

Istotnie, sprawdzimy że $T_*\mu = \mu$. Mamy

$$T_*\mu_{n_k} = \frac{1}{n_k} (\delta_{Tx} + \delta_{T^2x} + \dots \delta_{T^{n_k}(x)}) = \mu_{n_k} + \frac{1}{n_k} (\delta_{T^{n_k}(x)} - \delta_x) \quad (10.2)$$

Pozostaje jeszcze zauważyć że $T_*\mu_{n_k} \rightarrow t_*\mu_0$,zaś $\frac{1}{n_k} (\delta_{T^{n_k}(x)} - \delta_x) \rightarrow 0$. $\square$

Przykład 10.2. Obrót o kąt niewymierny (dokładniej: niewspółmierny z π) na okręgu ma tylko jedną miarę niezmienniczą (jest nią oczywiście miara Lebesgue'a) - por. Stwierdzenie 2.1. Przekształcenia które mają tylko jedną miarę niezmienniczą nazywa się ściśle ergodycznymi.

Ćwiczenie 10.1. uogólnienie na przesunięcia na torusach

Ćwiczenie 10.2 (Inna konstrukcja pólspżenia homeomorfizmu okręgu z obrotem). Niech f będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu, o niewymiernej liczbie obrotu. Niech μ będzie borelowską miarą niezmienniczą. Wykazać że miara μ jest bezatomowa. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{S}^1$ i oznaczmy przez $[x_0, x]$ dodatnio zorientowany łuk między punktami $x_0, x \in \mathbb{S}^1$. Określamy przekształcenie $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ wzorem

$$h(x) = \exp(2\pi i \mu([x_0, x])).$$

Niech $\beta = \mu([x_0, f(x_0)])$. Wykazać że wówczas h jest "pólspżeniem f z obrotem T_β o kąt $2\pi\beta$, tj.

$$h \circ f = T_\beta \circ h.$$

Jaki jest związek β z liczbą obrotu dla f ?

10.2. O sposobach szukania miar niezmienniczych w klasie miary Lebesgue'a. Operator Perrona-Frobeniusa

Jeśli rozważane przez nas przekształcenie jest określone na podzbiorze $\mathbb{R}^n$ o dodatniej mierze Lebesgue'a, lub na rozmaitości gładkiej, to naturalne jest pytanie o zachowanie trajektorii punktów typowych w sensie miary Lebesgue'a. Twierdzenie ergodyczne daje taką odpowiedź, pod warunkiem że istnieje miara niezmiennicza (najlepiej: ergodyczna) bezwzględnie ciągle względem miary Lebesgue'a.

Przykład 10.3. Rozważmy kawałkami afiniczne przekształcenie odcinka $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Mamy: $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$. Każdy z odcinków $[a_i, a_{i+1}]$ jest przekształcany afinicznie na cały odcinek $[0, 1]$.

Dla tego przekształcenia miara Lebesgue'a jest niezmiennicza (dlaczego?)

Jeśli teraz rozważymy podobne przekształcenie - ale dopuścimy żeby T przekształcało ściśle monotonicznie i gładko każdy z odcinków naszego podziału na cały odcinek $[0, 1]$ ale niekoniecznie afinicznie - to miara Lebesgue'a (na ogół) nie jest już niezmiennicza. NA tym prostym przykładzie omówimy technikę, która pozwala (również w znacznie ogólniejszych sytuacjach) rozstrzygać o istnieniu miary niezmienniczej w klasie miary Lebesgue'a i o jej własnościach. Wykres przekształcenia T jest przedstawiony na rysunku 10.1.

Rysunek 10.1. Wykres przekształcenia T .

Twierdzenie 10.2. Niech $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = 1$. Oznaczmy $I = [a_{i-1}, a_i]$ (zatem $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^k I_i$).

Rozpatrujemy przekształcenie $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o następujących własnościach:

- (1) T jest klasy C_2 na każdym odcinku I_i i przekształca ściśle monotonicznie odcinek I_i na $[0, 1]$.
- (2) $|T'|_{I_i} > \alpha > 1$
- (3) T rozszerza się do przekształcenia klasy C^2 na trochę większy odcinek (zatem druga pochodna $|T''|$ jest ograniczona na I_i)

Wówczas istnieje miara niezmiennicza bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Ponadto, gęstość g tej miary względem miary Lebesgue'a jest ograniczona z góry i z dołu: istnieją stałe c, C takie że

$$0 < c < g(x) < C$$

Dowód. Będziemy postępować według dowodu twierdzenia Kryłowa- Bogoliubowa, biorąc za punkt startowy- miarę Lebesgue'a na odcinku $[0, 1]$. Oznaczmy ją przez ν . Rozpatrujemy ciąg miar $\nu_n = T_*^n \nu$. Następnie rozpatrzmy (tak jak w dowodzie tw Kryłowa- Bogoliubowa) średnie miar ν_n

$$\mu_n = \frac{1}{n} (\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n)$$

Nie jest trudno zauważyć że każda z tych miar jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Ale oczywiście nie wynika stąd że słaba granica podciągu jest też absolutnie ciągła. Dlatego udowodnimy trzy pomocnicze stwierdzenia. Najpierw wprowadzimy oznaczenie

$$\text{int} I_{i_1, \dots, i_n}^n = I_{i_1} \cap T^{-1}(I_{i_2}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{i_n})$$

Zauważmy że odcinek $[0, 1]$ jest podzielony na rozłączne $\text{int} I_{i_1, \dots, i_n}^n$ i że każdy odcinek $\text{int} I_{i_1, \dots, i_n}^n$ jest przekształcany przez iterację T^n ściśle monotonicznie na $[0, 1]$.

Stwierdzenie 10.2. Miara ν_n jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a z gęstością

$$g_n(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{1}{|(T^n)'(y)|} \quad (10.3)$$

Funkcja g_n jest klasy C^1

Dowód. Wzór na gęstość obrazu miary Lebesgue'a przy przekształceniu T wynika bezpośrednio z wzoru na całkowanie przez podstawienie. Zostawiamy jako ćwiczenie. $\square$

Stwierdzenie 10.3. Ciąg funkcji $g_n(x)$ jest wspólnie ograniczony z góry i z dołu: istnieją stałe c, C takie że

$$0 < c < g_n(x) < C$$

Dowód. Weźmy dwa punkty $x, z \in [0, 1]$. Wówczas każdy z tych punktów na k^n przeciwobrazów przy T^n ; każdy w innym odcinku $\text{int} I_{i_1, \dots, i_n}^n$. Możemy je więc w naturalny sposób połączyć w pary. Zatem dwa przeciwobrazy $y \in T^{-n}(x), w \in T^{-n}(z)$ są w parze jeśli dla każdego $0 \leq j < n$ punkty $T^j(x)$ i $T^j(w)$ należą do tego samego przedziału monotoniczności T . Ponieważ na każdym takim przedziale T'' jest ograniczona, $T' > 1$, więc funkcja $\log |T'|$ spełnia warunek

Lipschitza. Oznaczmy przez L wspólną stałą Lipschitza (dla wszystkich przedziałów). Możemy teraz porównać $|(T^n)'(y)|$ i $|(T^n)'(w)|$: Mamy

$$\begin{aligned} \left| \log \left| \frac{(T^n)'(y)}{(T^n)'(w)} \right| \right| &= |\log |(T^n)'(y)| - \log |(T^n)'(w)|| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \log |T'(T^i(y))| - \sum_{i=0}^{n-1} \log |T'(T^i(w))| \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\log |T'(T^i(y))| - \log |T'(T^i(w))|| \\ &\leq L \sum_{i=0}^{n-1} |T^i(y) - T^i(w)| \end{aligned} \quad (10.4)$$

Ponieważ przekształcenie T jest kawałkami rozszerzające ($|T'| > \alpha > 1$), więc $|T^i(x) - T^i(w)| < \alpha^{n-i}$. Ostatnie wyrażenie można więc oszacować z góry przez uniwersalną stałą, niezależną od n (sumę odpowiedniego szeregu geometrycznego). Stąd wynika że

$$C^{-1} < \left| \frac{(T^n)'(y)}{(T^n)'(z)} \right| < C$$

dla pewniej stałej C . Z wzoru (10.3) natychmiast wynika teraz że

$$\frac{g_n(x)}{g_n(z)} < C$$

Ponieważ g_n jest gęstością miary $T_*^n(\text{Leb})$, więc $\int g_n = 1$. Istnieje zatem punkt y taki że $g_n(y) \leq 1$. Stąd zaś wynika że dla każdego x mamy $g_n(x) < C$. Z tego samego powodu: $g_n(x) > \frac{1}{C}$ dla każdego x .

□

Ostatnie stwierdzenie jest ogólne; nie dotyczy tylko tej konkretnej sytuacji:

Stwierdzenie 10.4. *Jeśli ciąg miar probabilistycznych μ_n na prostej jest słabo-* zbieżny do miary μ i gęstości miar μ_n są wspólnie ograniczone z góry i z dołu przez stałe dodatnie c, C , to miara graniczna μ też jest bezwzględnie ciągła i gęstość jest ograniczona przez te same stałe (prawie wszędzie).*

Dowód. Skorzystamy z równoważnej charakteryzacji słabej zbieżności miar (rozkładów) na prostej: ciąg miar jest słabo zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy ciąg dystrybuant jest zbieżny punktowo, w każdym punkcie ciągłości dystrybuanty miary granicznej. Zatem- jeśli $\mu_n \rightarrow \mu$ i rozpatrzmy odcinek $J = [a, b]$ taki że $\mu(\partial J) = 0$ (czyli μ nie ma atomów w końcach przedziału) to

$$\mu(J) = \lim \mu_n(J) = \lim \int_J g_n \leq C|J|$$

Zatem- dla każdego odcinka J którego końce nie są atomami miary μ

$$\mu(J) \leq C|J|. \quad (10.5)$$

Atomów jest tylko przeliczalnie wiele, więc każdy odcinek J można przybliżyć z góry odcinkami o końcach nie będących atomami. Łatwo stąd widać że nierówność (10.5) zachodzi dla wszystkich przedziałów $J \subset [0, 1]$. Ponieważ dla każdego zbioru borelowskiego w $[0, 1]$ można znaleźć zawierający go zbiór otwarty (czyli sumę przeliczanej liczby otwartych odcinków) o mierze Lebesgue'a dowolnie blisko przybliżającej miarę naszego zbioru, łatwo stąd otrzymujemy nierówność (10.5)

dla dowolnego zbioru borelowskiego. Wynika stąd że miara μ jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a i że gęstość jest ograniczona z góry przez C . Podobnie otrzymujemy teraz ograniczenie z dołu gęstości przez c . Szczegóły pomijamy. $\square$

Z tych trzech stwierdzeń teza naszego Twierdzenia wynika natychmiast; wystarczy zauważyć że ograniczenia na gęstość miar ν_n z góry i z dołu przenoszą się od razu na takie same ograniczenia dla gęstości miar μ_n . Szukana miara niezmiennicza jest słabą granicą pewnego podciągu ciągu miar μ_n . $\square$

Wykażemy jeszcze

Twierdzenie 10.3. *Miara μ jest ergodyczna.*

Szkic dowodu. Do dowodu ergodyczności posłużymy się twierdzeniem Lebesgue'a o punktoach gęstości. Załóżmy zatem że miara μ nie jest ergodyczna; istnieje wówczas w pełni niezmienniczy podzbiór E miary niezerowej i niepełnej. Wówczas również $\text{Leb}(E) > 0$ i $\text{Leb}(E^c) > \beta > 0$. Z twierdzenia Lebesgue'a wynika że prawie każdy punkt $x_0 \in E$ jest punktem gęstości tego zbioru.

Niech $I_{i_1, \dots, i_n}^n$ będzie odcinkiem n -tego podziału do którego należy x_0 . Z szacowania (10.4) zastosowanego do dowolnych punktów $z, w \in I_{i_1, \dots, i_n}^n$ wynika że wahanie pochodnej $(T^n)'$ na odcinkach n -tego podziału jest ograniczone przez stałą C . Stąd i z niezmienniczości zbioru E wnioskujemy że

$$\frac{\text{Leb}(E^c \cap I_{i_1, \dots, i_n}^n)}{\text{Leb}(I_{i_1, \dots, i_n}^n)} > C^{-1}\beta \quad (10.6)$$

Jeśli teraz B jest kulą o środku w x_0 i promieniu równym długości odcinka $I_{i_1, \dots, i_n}^n$, to otrzymujemy stąd

$$\frac{\text{Leb}(E^c \cap B)}{\text{Leb}(B)} > \frac{1}{2}C^{-1}\beta \quad (10.7)$$

co oczywiście przeczy temu że x_0 jest punktem gęstości. $\square$

11. O gładkich miarach niezmienniczych

11.1. Twierdzenie Liouville’a

To twierdzenie jest znane z kursu Równań Różniczkowych Zwyczajnych.

Rozważmy równanie różniczkowe $\dot{x} = F(x)$ (gdzie F jest funkcją klasy C^1 na gładkiej zwartej rozmaitości, albo (dla uproszczenia) w R^m). Na rozmaitości zwartej każde rozwiązanie takiego równania można przedłużyć na całą prostą; w R^m tak nie musi być, ale - jest tak na pewno na przykład wtedy gdy funkcja F jest ograniczona lub gdy mamy równanie hamiltonowskie i poziomicie hamiltonianu są zwarte.

Niech φ^t będzie potokiem tego pola wektorowego, zatem $\frac{d}{dt}\varphi^t(x)|_{t=0} = F(x)$. Dla t bliskich zeru mamy więc

$$\varphi^t(x) = x + F(x) \cdot t + O(t^2) \quad (11.1)$$

Niech D będzie obszarem; oznaczmy $D(t) = \text{vol}(\varphi^t(D))$.

Twierdzenie 11.1. *Jeżeli $\text{div} F \equiv 0$ to funkcja $D(t)$ jest stała, czyli potok pola zachowuje objętość w przestrzeni fazowej.*

Dowód. Sprawdzimy że

$$\frac{d}{dt}D(t)|_{t=0} = \int_D \text{div} F dx$$

Istotnie, mamy policzyć

$$\frac{d}{dt} \int_D |\text{Jac} \varphi^t(x)| dx = \frac{d}{dt} \int_D \text{Jac} \varphi^t(x) dx|_{t=0}$$

Oprócz 11.1 mamy, dla t bliskich zeru:

$$D_x \varphi^t(x) = I + t \frac{\partial F}{\partial x} + O(t^2)$$

Ten drugi wzór wyraża twierdzenie mówiące iż $D_x \varphi^t(x)$ - funkcja zmiennej t o wartościach macierzowych, spełnia równanie różniczkowe liniowe $\dot{Y} = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi^t(x))Y$ z warunkiem początkowym $Y(0) = I$.

Jeśli- licząc wyznacznik macierzy $D_x \varphi^t(x)$ interesujemy się tylko jego pochodną względem t , to widzimy że przy liczeniu wyznacznika $I + t \frac{\partial F}{\partial x} + O(t^2)$ musimy wziąć tylko te wyrazy które zawierają t w pierwszej potęgę. Po zsumowaniu-mamy

$$\frac{d}{dt} \text{Jac} \varphi^t(x)|_{t=0} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m} = \text{div} F(x) \quad (11.2)$$

Zauważamy dalej, że

$$\frac{d}{dt}D(t)|_{t=t_0} = \frac{d}{ds}D(t_0 + s)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \text{vol} \varphi^{t_0+s}(D)|_{s=0} = \frac{d}{ds}|_{s=0} \text{vol} \varphi^s(\varphi^{t_0}(D))$$

Zatem, z udowodnionej już części, zastosowanej dla $\varphi^{t_0}(D)$ wynika teza.

Latwo widzieć że warunek $\operatorname{div} F = 0$ jest też konieczny (szczegóły zostawiamy jako ćwiczenie) $\square$

Uwaga 11.1. W podobny sposób można sprawdzić że jeśli $\rho > 0$ jest funkcją klasy C^1 i $\operatorname{div}(\rho \cdot F) = 0$ to potok pola wyznaczonego przez F zachowuje miarę z gęstością ρ względem miary Lebesgue'a.

Wniosek 11.1. *Rozważmy pole hamiltonowskie w $\mathbb{R}^{2m}$; H jest funkcją klasy C^2 , układ równań ma postać*

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{11.3}$$

Zatem $F = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_m}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)$.

Ponieważ $\operatorname{div} F = 0$, otrzymujemy ważny wniosek: Potok pola hamiltonowskiego zachowuje objętość w przestrzeni fazowej.

Potok hamiltonowski ma całkę pierwszą: jest nią funkcja Hamiltona H . Zatem przestrzeń fazowa rozpada się na niezmiennicze powierzchnie stałej energii. Mamy

Twierdzenie 11.2. *Jeśli dla układu hamiltonowskiego powierzchnia stałej energii $\Sigma = \{H = c\}$ spełnia $\operatorname{grad} H \neq 0$ w każdym punkcie tej powierzchni, to miara na Σ określona wzorem*

$$\mu(A) = \int_A \frac{d\sigma}{\|\operatorname{grad} H\|}$$

jest niezmiennicza względem potoku pola z hamiltonianem H . σ oznacza tutaj standardową miarę powierzchniową na powierzchni Σ .

Dowód. Skoro $\operatorname{grad} H \neq 0$ na powierzchni Σ , możemy założyć (ograniczając się do pewnego otwartego podzbioru Σ) że $\frac{\partial H}{\partial p_m} \neq 0$ na Σ . W takim razie, p_m daje się (lokalnie) wyznaczyć jako funkcja pozostałych zmiennych; $p_m = F(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_{m-1}) = F(q, p')$. Miara powierzchniowa σ na Σ może być więc wyliczona według formuły:

$$\sigma(A) = \int_{\tilde{A}} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} F\|^2}$$

$\tilde{A}$ jest mierzalnym zbiorem $\mathbb{R}^{2m-1}$, $A = \{(x, F(x)), x \in \tilde{A}\}$ jest odpowiadającym mu zbiorem na wykresie. Bezpośrednim rachunkiem wyliczamy że

$$1 + \|\operatorname{grad} F\|^2 = \frac{\|\operatorname{grad} H\|^2}{\left\|\frac{\partial H}{\partial p_m}\right\|^2}$$

(pominęliśmy w tym napisie argumenty funkcji) Zatem

$$\sigma(A) = \int_{\tilde{A}} \frac{\|\operatorname{grad} H\|}{\left\|\frac{\partial H}{\partial p_m}\right\|} dq dp'$$

zaś

$$\int_A \frac{1}{\|\operatorname{grad} H\|} d\sigma = \int_{\tilde{A}} \frac{1}{\left\|\frac{\partial H}{\partial p_m}\right\|} dp dq'$$

Przekształcenie

$$\mathbb{R}^{2m-1} \ni (q, p') = (q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_{m-1}) \mapsto (q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_{m-1}, F(q, p')) \in \mathbb{R}^{2m}$$

jest parametryzacją rozmaitości Σ , zaś miara $\frac{1}{\|\text{grad}H\|}d\sigma$ na Σ jest- jak sprawdziliśmy- obrazem miary $\|\frac{\partial H}{\partial p_m}\|dpdq'$ w przestrzeni parametrów. Aby sprawdzić że potok wyjściowego pola 11.3 zachowuje miarę $\frac{1}{\|\text{grad}H\|}d\sigma$, możemy więc sprawdzić, równoważnie, że potok pola przeniesionego parametryzacją do $\mathbb{R}^{2m-1}$ zachowuje miarę $\|\frac{\partial H}{\partial p_m}\|dpdq'$. Jest to miara z gęstością $\rho = \|\frac{\partial H}{\partial p_m}\|$ względem miary Lebesgue'a. Aby sprawdzić że jest ona zachowana, skorzystamy z Uwagi 11.1).

Równania we współrzędnych (q, p') wyglądają oczywiście:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, F(q, p')), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, F(q, p')), \quad i = 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (11.4)$$

Oznaczając przez X funkcję wektorową (w $\mathbb{R}^{2m-1}$) po prawej stronie równania mamy więc sprawdzić że $\text{div}(\rho \cdot X) = 0$. Liczymy

$$\text{div} \left(\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_m}} \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_m}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_{m-1}} \right) \right)$$

(znowu pominęliśmy w zapisie argumenty występujących tu funkcji). Poszczególne składniki (występujące we wzorze na dywergencję) wypiszmy z uwzględnieniem argumentów: Pierwszy składnik to:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{\frac{\partial H}{\partial p_1}(q, p', F(q, p'))}{\frac{\partial H}{\partial p_m}(q, p', F(q, p'))} \right] = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(-\frac{\partial F}{\partial p_1} \right)$$

Stąd już łatwo widać że suma składników jest równa zero, co kończy dowód. $\square$

11.2. Równania Lagrange'a i Hamiltona. Potoki geodezyjne

W mechanice klasycznej równania ruchu punktu materialnego w polu sił z potencjałem V są opisywane przez równania Eulera-Lagrange'a: Niech M będzie rozmaitością riemannowską (przestrzenią konfiguracji), TM -wiązką styczną (przestrzenią fazową). Funkcja Lagrange'a

$$L : TM \rightarrow \mathbb{R} : L(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - V(x) = K - V \quad (11.5)$$

jest różniczkowalną funkcją opisującą ruch przez równanie różniczkowe pierwszego rzędu w TM :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$K(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$ jest energią kinetyczną. Rozwiązanie jest to zatem funkcja $t \mapsto (x(t), v(t)) \in TM$. Tutaj iloczyn skalarny $\langle v, v \rangle$ odpowiadający strukturze Riemannowskiej na M (w szczególności, zależy od punktu x , gdzie $v \in T_x M$).

Stwierdzenie 11.1. *Równanie Lagrange'a ma całkę pierwszą; jest nią całkowita energia $H(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle + V(x)$*

Dowód. Użyjemy lokalnych współrzędnych; w tych współrzędnych możemy zapisać iloczyn skalarny w przestrzeni stycznej prz pomocy macierzy symetrycznej g^{ij} . Zatem

$$L = K - V \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} v_i v_j - V(x).$$

Oznaczając przez $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ zwykły iloczyn skalarny w przestrzeni euklidesowej, możemy napisać

$$\left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)_i = \sum_j g^{ij} v_j$$

Zatem:

$$\langle \frac{\partial K}{\partial v}, v \rangle_e = 2K$$

zaś

$$\langle \frac{\partial L}{\partial v}, v \rangle_e - L = \langle \frac{\partial K}{\partial v}, v \rangle_e - L = 2K - K + V = K + V = H$$

Dzięki tej formule możemy łatwo policzyć pochodną funkcji H wzdłuż rozwiązania:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), v(t)) = \frac{d}{dt} \langle \frac{\partial L}{\partial v}, v \rangle_e = \langle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}, v \rangle_e + \langle \frac{\partial L}{\partial v}, \frac{dv}{dt} \rangle_e - \langle \frac{\partial L}{\partial x}, \dot{x} \rangle_e - \langle \frac{\partial L}{\partial v}, \dot{v} \rangle_e$$

Z równania Eulera-Lagrange'a (i z faktu że $\dot{x} = v$) wynika że ta suma jest równa zero. $\square$

Uwaga 11.2. Jeśli rozmaitość M jest zwarta, to każda poziomica funkcji H jest zwartą podrozmaitością TM . Z twierdzenia o przedłużaniu trajektorii wynika że wówczas każde rozwiązanie równania Eulera-Lagrange'a można przedłużyć do nieskończoności, zatem potok pola jest określony dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Szczególnym przypadkiem jest potok geodezyjny, opisujący ruch swobodny na rozmaitości M (w przestrzeni konfiguracji z "więzami"):

Definicja 11.1. Potokiem geodezyjnym na rozmaitości Riemannowskiej M nazywamy potok pola zadanego przez równanie Eulera-Lagrange'a z funkcją Lagrange'a równą

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

Ponieważ potok ten zachowuje długość wektora stycznego $v(t)$, więc potok można rozpatrywać na podrozmaitościach stałej energii; w tym przypadku są to podrozmaitości TM odpowiadające ustalonej długości wektorów stycznych.

Następujące twierdzenie, wynikające z zasady wariacyjnej, uzasadnia nazwę:

Twierdzenie 11.3. *Jeśli $x(t), v(t)$ jest trajektorią (rozwiązaniem) równania Eulera-Lagrange'a dla $V = 0$, to rzut trajektorii na M jest geodezyjną w M .*

Potok geodezyjny ma naturalną gładką miarę niezmienniczą. Wyliczymy ją, przechodząc do odpowiedniego równania Hamiltonowskiego. Opiszemy to przejście (standardowe w mechanice klasycznej).

W przestrzeni stycznej $T_x M$ jest struktura iloczynu skalarnego, która pozwala utożsamiać przestrzeń styczną z przestrzenią kostyczną $T_x^* M$ w oczywisty sposób: wektor v jest utożsamiany

z funkcjonalem liniowym $w \mapsto \langle v, w \rangle$. Używając lokalnych współrzędnych możemy zapisać $v = (v_i)$, wówczas

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} v_j \right) w_i$$

(g^{ij} zależą oczywiście od punktu x). Zatem wektorowi v odpowiada element T_x^*M , który w lokalnej bazie dx_i ma współrzędne $\sum_j g^{ij} v_j$. Ta ostatnia suma jest równa, jak wiemy, $\left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)_i$. W ten sposób określiliśmy *przekształcenie Legendre'a* $\mathcal{L}$ prowadzące z wiązki stycznej TM do wiązki kostycznej T^*M . Możemy więc użyć współrzędnych lokalnych q_i w M i odpowiadającym ich w opisanym sposobie współrzędnych p_i w przestrzeni T_x^*M do utworzenia lokalnych współrzędnych w T^*M .

Załóżmy że trajektoria $(q(t), v(t))$ spełnia równanie Eulera-Lagrange'a. Sprawdźmy jakie równanie spełnia odpowiadająca trajektoria w przestrzeni TM : $(q(t), p(t))$.

Stwierdzenie 11.2. *Jeśli $(q(t), v(t))$ spełnia równanie Eulera-Lagrange'a z funkcją Lagrange'a 11.5, to $(q(t), p(t))$, uzyskane przez zamianę zmiennych transformatą Legendre'a- spełnia równanie Hamiltona 11.3 z funkcją H równą całkowitej energii.*

Dowód. W nowych współrzędnych (q, p) funkcja całkowitej energii H ma postać $H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} p_i p_j + V(q)$ gdzie g_{ij} jest macierzą odwrotną do g^{ij} .

Mamy

$$\dot{q}^i = v^i = \sum_j g_{ij} p_j = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Stąd pierwsze równanie Hamiltonowskie. Pozostaje wyznaczyć $\dot{p}$. Skoro $p = \frac{\partial K}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v}$, to z równania Eulera-Lagrange'a wynika że $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$. Funkcję energii H możemy zapisać inaczej jako $\frac{1}{2} \langle v, v \rangle + V = \langle v, p \rangle_e - L$. Stąd $\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$. **uzupełnic** $\square$

Potok pola hamiltonowskiego otrzymanego z pola Lagrange'a przez opisaną zamianę zmiennych zachowuje- jak już sprawdziliśmy- naturalną miarę, którą w lokalnych współrzędnych (p, q) można zapisać $dpdq$. Wracając do współrzędnych na rozmałości TM otrzymujemy miarę niezmienniczą na TM ; jej postać wyliczamy poniżej.

Macierz iloczynu skalarnego (g^{ij}) możemy zdiagnozować, znajdując macierz $C = C_q$ (zależną oczywiście od położenia) taką że $C^T G C = I$ Jeśli zmienimy współrzędne w T^*M kładąc $p' = C_q(p), q' = q$, to otrzymamy

$$dqdp = dq'dp'(\det C)^{-1} = dq'dp'\sqrt{\det G(q)}$$

Ostatnia równość bierze się stąd że $C^T G C = I$, zatem $(\det C)^2 \det G = 1$. Jest to więc produkt kanonicznej miary objętości na M ($dq\sqrt{\det G(q)}$) oraz miary objętości na $T_q M$ zadanej przez macierz G (nowa baza p' jest bazą ortonormalną w przestrzeni $T_q M$).

Na powierzchniach stałej energii H otrzymujemy indukowaną gładką miarę niezmienniczą. W szczególnym i najważniejszym dla nas przypadku potoku geodezyjnego powierzchnie stałej energii odpowiadają wiązkom sfer $\sum p_i^2 = C$.

Możemy zmienić zmienne jeszcze raz, na sferyczne: (r, θ) , $r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ Mamy wtedy:

$$dqdp = dq'dp'\sqrt{\det G(q)} = \sqrt{\det G(q)} r^{m-1} dr d\theta$$

Ponieważ $r^2 = \sum p_i'^2 = 2H$, to

$$r^{m-1} = 2^{\frac{m-1}{2}} H^{\frac{1}{2}(m-1)}$$

Ostatecznie, w zmiennych (q, H, θ) miara niezmiennicza ma postać

$$H^{\frac{1}{2}m-1}2^{\frac{1}{2}m-1}\sqrt{\det G(q)}dHd\theta dq$$

Zaś na powierzchni stałej energii (czyli na wiązce sfer) jest to miara z gęstością proporcjonalną do

$$\sqrt{\det G(q)}dq d\theta$$

$\sqrt{\det G(q)}dq$ jest kanoniczną miarą objętości na M , zaś $d\theta$ jest miarą o rozkładzie jednostajnym na sferze.

12. Potok geodezyjny na rozmaitości o stałej ujemniej krzywiznie- ważny przykład potoku Anosowa

12.1. Metryka hiperboliczna

Wprowadzimy bardzo ważne w analizie zespolonej pojęcie płaszczyzny hiperbolicznej

Definicja 12.1. Niech

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C} : \text{im}(z) > 0\}$$

(czyli - górna półpłaszczyzna) W $\mathbb{H}^2$ wprowadzamy metrykę (Riemannowską):

$$|dz| \cdot \frac{1}{y}$$

Inaczej mówiąc: w nowej metryce, długość $\|v\|_h$ wektora v należącego do przestrzeni stycznej $T_z\mathbb{H}^2$ jest równa $\frac{1}{y}\|v\|_e$ (przez $\|v\|_e$ oznaczyliśmy normę euklidesową, a przez $\|v\|_h$ - hiperboliczną). Jeszcze inaczej: w metryce euklidesowej iloczyn skalarny wektorów v, w stycznych w punkcie $z = x + iy$ jest równy $\langle v, w \rangle_e = u\bar{w}$. Iloczyn skalarny w nowej metryce jest równy

$$\langle v, w \rangle_h = u\bar{w} \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Ćwiczenie 12.1. Sprawdzić że wszystkie homografie (przekształcenia Möbiusa) zachowujące $\mathbb{H}^2$ są postaci:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R})$$

Stwierdzenie 12.1. Wszystkie homografie zachowujące $\mathbb{H}^2$ są izometriami w metryce hiperbolicznej w $\mathbb{H}^2$.

Dowód. Każde takie przekształcenie można zapisać jako złożenie trzech, postaci $z \rightarrow z + A$, $z \rightarrow Bz$, $z \rightarrow -\frac{1}{z}$, $A, B > 0$. Wystarczy sprawdzić że te trzy przekształcenia są izometriami. Sprawdzimy trzecie: mamy

$$|T'(z)| = \left| \left(-\frac{1}{z} \right)' \right| = \frac{1}{|z|^2}$$

Należy sprawdzić że

$$|T'(z)| \cdot \frac{1}{\text{im}T(z)} \cdot \text{im}z = 1$$

Równość zachodzi, ponieważ $\text{im}T(z) = \frac{y}{|z|^2}$, $\text{im}z = y$

□

Ćwiczenie 12.2. Niech $z \in \mathbb{H}^2$, $v \in T_z \mathbb{H}^2$, $z' \in \mathbb{H}^2$, $v' \in T_{z'} \mathbb{H}^2$. Wówczas istnieje izometria $T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ taka że $T(z) = z'$, $DT_z(v) = v'$.

Stwierdzenie 12.2. Geodezyjne w $\mathbb{H}^2$ są to łuki (pół)okręgów prostopadłych do prostej $y = 0$. Geodezyjną jest też okrąg przechodzący przez punkt w nieskończoności, czyli - każda (pół)prosta prostopadła do prostej $y = 0$.

Definicja 12.2. Wprowadzamy metrykę w $S\mathbb{H}^2$ (czyli w wiązce wektorów stycznych o długości hiperbolicznej 1). **tu rysunek**

Niech $x = (p, v)$, $y = (q, w)$. Jeśli $p = q$ to miarą odległości między x, y jest $d(v, w)$ - miara kąta między wektorami w, v . Jeśli $p \neq q$ to istnieje dokładnie jedna geodezyjna γ przechodząca przez punkty p, q . Niech $w' \in T_p \mathbb{H}^2$ będzie obrazem w przy przesunięciu równoległym wzdłuż tej geodezyjnej. Inaczej- można powiedzieć tak: Rozpatrujemy izometrie (przekształcenia Möbiusa) dla których geodezyjna γ jest niezmiennicza (jak je znaleźć?) i wybieramy przekształcenie T - taką spośród tych izometrii, która punkt q przekształca na p . Wektor w' jest równy $DT_q(w)$.

Odległość między x, y definiujemy:

$$d(x, y) = \sqrt{d(v, w')^2 + d_h(p, q)^2}$$

12.2. Potok geodezyjny w $\mathbb{H}^2$

Niech $x = (p, v) \in S\mathbb{H}^2$. Potok geodezyjny $\varphi^t(x)$ można, jak wiemy opisać następująco: znajdujemy jedyną geodezyjną $\gamma(t)$ taką że $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Po czasie t mamy $\varphi^t(x) = (y, w)$ gdzie $y = \gamma(t)$, $w = \dot{\gamma}(t)$. **tu rysunek**

Rozpatrzmy zatem $x = (i, v = (0, 1))$. Geodezyjna zawierająca punkt i , wypuszczona w kierunku v to oczywiście półprosta pionowa $\gamma(t) = (0, e^t) = i \cdot e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Użyliśmy parametryzacji e^t ponieważ ma to być parametryzacja odpowiadająca ruchowi ze stałą prędkością: $\|\dot{\gamma}(t)\|_h = 1$. Mamy:

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_h = |\dot{\gamma}(t)| \cdot \frac{1}{\text{im}\gamma(t)} = \frac{e^t}{e^t} = 1$$

Zatem: $\varphi^t(x) = (e^t i, v_t)$, gdzie wektor v_t jest to wektor $(0, 1)$ zaczepiony w punkcie $e^t i$

Niech teraz $y = ((a + i), w) \in S\mathbb{H}^2$, $a \in \mathbb{R}$. Oczywiście mamy $\varphi^t(y) = (e^t(a + i), w_t)$ gdzie wektor w_t jest to wektor $(0, 1)$ zaczepiony w punkcie $e^t(a + i)$

Zobaczmy jak zmienia się z czasem odległość:

$$d(\varphi^t(x), \varphi^t(y))$$

. Mamy:

$$d_h(e^t i, e^t(a + i)) \asymp e^{-t}$$

(dlaczego?)

Podobnie

$$d(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) \asymp e^{-t}.$$

Ta obserwacja prowadzi do definicji:

Definicja 12.3. Horocykl to każda linia pozioma $\mathbb{R} + ir$ i każdy obraz tej linii przy przekształceniu Möbiusa zachowującym $\mathbb{H}^2$.

tu rysunek Widzimy że dla każdego $x = (p, v) \in S\mathbb{H}^2$ istnieje dokładnie jedna geodezyjna wyznaczona przez ten punkt i wektor i dokładnie dwa horocykle takie że punkt p należy do

horocyklu, zaś wektor v jest normalny do horocyklu. Nazwijmy je odpowiednio *horocyklem wchodzącym* i *horocyklem wychodzącym* wyznaczonymi przez $x = (p, v)$

tu dwa rysunki: geodezyjna, horocykl wchodzący i wychodzący- dla geodezyjnej pionowej i dla geodezyjnej "typowej"

Niech $x = (p, v)$. Rozpatrzmy horocykl wchodzący wyznaczony przez x . W każdym punkcie horocyklu wybieramy wektor normalny do horocyklu, w ten sposób aby wybór był ciągły i aby wektor v był wybrany. Otrzymujemy jednowymiarową podrozmaitość $S\mathbb{H}^2$. Oznaczmy ją przez $W^{ss}((p, v))$. Podobnie, rozważmy horocykl wychodzący wyznaczony przez x i wybierzmy ciągłą rodzinę wektorów normalnych do niego, tak aby wektor v należał do tej rodziny. Tę podrozmaitość oznaczamy $W^{uu}((p, v))$.

Wyliczenie (powyżej) zmiany odległości przy φ^t dla punktów (i odpowiednich wektorów) zachowuje się przy zastosowaniu izometrii; powyższy racunek prowadzi do Stwierdzenia (szczegóły pomijamy)

Stwierdzenie 12.3. *Zbiór $W^{ss}((p, v))$ stanowi silną rozmaitość stabilną punktu $x = (p, v)$; dla każdego $y \in W^{ss}((p, v))$ $d(\varphi^t(y), \varphi^t(x)) \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow \infty$.*

Zbiór $W^{uu}((p, v))$ jest silną rozmaitością niestabilną punktu $x = (p, v)$; dla każdego $y \in W^{uu}((p, v))$ $d(\varphi^t(y), \varphi^t(x)) \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow -\infty$.

Ćwiczenie 12.3. Uzupełnić brakujące szczegóły; w szczególności wykazać że wskazany zbiór wyczerpuje całą rozmaitość stabilną (niestabilną); tzn jeżeli $y \notin W^{ss}((p, v))$, to $d(\varphi^t(y), \varphi^t(x)) \rightarrow 0$

Oprócz silnej rozmaitości (nie)stabilnej mamy jeszcze *słabą rozmaitość (nie)stabilną*. Zauważmy że jeśli (p', v') jest punktem (w $S\mathbb{H}^2$ należącym do geodezyjnej wyznaczonej przez (p, v)), to $(p', v') = \varphi^s(p, v)$ dla pewnego s , zatem $d((p, v), (p', v')) = d(\varphi^t(p, v), \varphi^t(p', v'))$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Mamy więc

Stwierdzenie 12.4. *Słaba rozmaitość stabilna $W^s(x)$ punktu $x = (p, v)$ jest sumą wszystkich silnych rozmaitości stabilnych punktów $x' = (p', v')$ należących do geodezyjnej wyznaczonej przez $x = (p, v)$.*

$$W^s(x) = \{y \in S\mathbb{H}^2 : \sup_{t \geq 0} d(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) < \infty\}.$$

Oczywiście- symetryczne stwierdzenie mamy dla rozmaitości niestabilnej. Silne rozmaitości są jednowymiarowe, słabe - są dwuwymiarowe.

Przecięciem słabej rozmaitości stabilnej i niestabilnej przechodzącej przez (p, v) jest geodezyjna wyznaczona przez (p, v) , a precyzyjniej- jej podniesienie do $S\mathbb{H}^2$.

Wniosek 12.1. *Otrzymaliśmy w ten sposób globalną foliację stabilną i niestabilną dla potoku geodezyjnego na $S\mathbb{H}^2$.*

Każdą zwartą orientowalną powierzchnię M można (topologicznie) utożsamiać z przestrzenią ilorazową $\mathbb{H}^2/\Gamma$ dla pewnej dyskretnej podgrupy grupy zachowujących orientację izometrii $\mathbb{H}^2$ (Γ jest wówczas grupą podstawową tej powierzchni). Na rysunku (**rysunek: osmiokąt hiperboliczny i dwuprecel i utożsamienia**) przedstawiona jest realizacja "dwuprecela" (czyli sfery z dwiema rączkami) jako hiperbolicznego osmiokąta O z odpowiednimi sklejeniami. Po dokonaniu wskazanych utożsamień boków osmiokąta otrzymujemy (topologicznie) dwuprecel. W szczególności wszystkie wierzchołki osmiokąta skleja się w jeden punkt. wszystkie kąty tego osmiokąta są równe $\frac{\pi}{4}$. (zatem suma jest równa 2π).

Rozpatrzmy izometrie odpowiadające tym utożsamieniom: bok a jest utożsamiany z a' (i odpowiednio pozostałe kroki) przy pomocy hiperbolicznej homografii (przesunięcia wzdłuż geodezyjnej). Grupa Γ generowana przez te homografie jest dyskretną podgrupą pełnej grupy izome-

trii. Działając elementami tej grupy na ośmiokąt O otrzymujemy "parkietaż" dysku Poincare'go D . Ośmiokąt O (i każda z jego kopii jest dziedziną fundamentalną dla działania grupy Γ).

Ćwiczenie 12.4. Jakie znaczenie mają w tej konstrukcji miary kątów ośmiokąta O ?

Zatem powierzchnia M jest homeomorficzna z przestrzenią ilorazową $\mathbb{D}/\Gamma$. Ponieważ grupa Γ działa przez izometrie, metryka hiperboliczna rzutuje się na metrykę riemannowską na M ; mazywamy ją też metryką hiperboliczną.

Uwaga 12.1. Na jednej powierzchni istnieje wiele, nieizometrycznych metryk hiperbolicznych.

Ponieważ rzutowanie jest lokalną izometrią, obrazami (przeciwobrazami) geodezyjnych przy rzutowaniu są geodezyjne. Potok geodezyjny na rozmaitości $M = \mathbb{D}/\Gamma$ jest więc obrazem potoku na $\mathbb{D}$, czyli (izometrycznie) na $\mathbb{H}^2$.

Wykorzystując wykazane wcześniej istnienie globalnej foliacji stabilnej i niestabilnej dla potoku geodezyjnego i powyższą uwagę otrzymujemy

Twierdzenie 12.1. *Niech M będzie zwartą rozmaitością otrzymaną jako przestrzeń ilorazowa $\mathbb{D}/\Gamma$ (gdzie Γ jest dyskretną podgrupą grupy zachowujących orientację izometrii $\mathbb{D}$, z dziedziczoną z $\mathbb{D}$ metryką hiperboliczną. Wówczas potok geodezyjny na SM jest potokiem Anosowa.*

Wykażemy jeszcze

Twierdzenie 12.2. *Jeśli Γ jest dyskretną podgrupą izometrii $\mathbb{D}$ zachowujących orientację, taką że $M = \mathbb{D}/\Gamma$ jest zwarta, to orbity okresowe (czyli podniesienia zamkniętych geodezyjnych) są gęste w SM .*

Dowód. Wybierzmy punkt $(x, v) \in SM$ i wyznaczoną przez (x, v) geodezyjną $C(t)$. Zatem $C(0) = x, \dot{C}(0) = v$. Wówczas krzywa $c(t)$ - przeciwobraz C przy rzutowaniu π jest geodezyjną w $\mathbb{D}$; niech $c(0) \in O$. Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$ będą końcami tej geodezyjnej (**rysunek**); rozważmy otoczenia U i V tych punktów otrzymane przez łuki geodezyjnych, prostopadłych do c . Geodezyjną c możemy pokryć kopiami dziedziny fundamentalnej O (czyli obrazami O przy działaniu elementami grupy Γ). Ponieważ wszystkie takie kopie O_i mają tę samą średnicę hiperboliczną; te kopie które są blisko brzegu $\mathbb{D}$, mają małą średnicę euklidesową. Można więc znaleźć jakieś $O_i \subset U$ i $O_j \subset V$. Mamy więc wyróżnione trzy obszary z naszego parkietażu, przecinające geodezyjną c : O_i, O, O_j , położone w tej kolejności "wzdłuż" geodezyjnej c . Niech $\gamma \in \Gamma$ będzie taką izometrią należącą do Γ , że $\gamma(O_i) = O_j$. Wówczas γ jest izometrią hiperboliczną; jeden jej punkt stały jest w U , drugi w V . Niech $\tilde{c}$ będzie "osią" tej izometrii. Wówczas $\tilde{c}$ rzutuje się na zamkniętą geodezyjną na M . Ponieważ otoczenia U, V mogą być dowolnie małe, można w ten sposób znaleźć punkt $(\tilde{x}, \tilde{v}) \in \tilde{c}$ blisko (x, v) . Punkt $(\tilde{x}, \tilde{v})$ pod działaniem potoku geodezyjnego ma okresową trajektorię. $\square$

13. Zbiory hiperboliczne i ergodyczność

13.1. Geometryczny dowód ergodyczności dla prostego układu hiperbolicznego

Twierdzenie 13.1. *Niech T będzie hiperbolicznym automorfizmem torusa T^m . Jak wiemy, T zachowuje miarę Lebesgue’a. Posługując się strukturą hiperboliczną (cały torus jest dla tego układu zbiorem hiperbolicznym) wykażemy że miara Lebesgue’a jest ergodyczna.*

Dowód. Niech g będzie funkcją próbną; na początek zakładamy że g jest ciągła.

Rozpatrzmy funkcje

$$g^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g \circ T^i(x)$$

oraz

$$g^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g \circ T^{-i}(x)$$

Z twierdzenia Birkhoffa wynika że

$$G = \{x : g^+(x), g^-(x) \text{ istnieją i są równe} \}$$

ma pełną miarę.

Ponieważ T jest hiperboliczne, mamy niezmiennicze globalne foliacje stabilną i niestabilną. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{T}^2$ i kawałek rozmaitości stabilnej $I^s = W_r^s(x_0)$, a następnie- zbiór

$$R = \bigcup_{y \in I^s} W_r^u(y).$$

Dla małego r ten zbiór jest równoległościanem.

Punkt początkowy x_0 musimy wybrać tak, żeby

$G \cap W_r^s(x_0)$ było podzbiorem pełnej miary w $W_r^s(x_0)$. Istnienie wielu takich x_0 wynika z tw Fubinięgo.

Wówczas zbiór

$$H = \bigcup_{y \in G \cap I^s} W_r^u(y)$$

jest pełnej miary w R .

Weźmy $z_1, z_2 \in H$. Istnieją więc $y_1 \in I^s \cap W_r^u(z_1)$ oraz $y_2 \in I^s \cap W_r^u(z_2)$. Mamy wówczas

1. $g^-(z_1) = g^-(y_1)$ bo z_1, y_1 leżą w tym samym włóknie niestabilnym więc zbliżają się przy działaniu T^{-n} .
2. $g^-(y_1) = g^+(y_1)$
3. $g^+(y_1) = g^+(y_2)$ bo y_1, y_2 leżą w tym samym włóknie stabilnym.

$$4. g^+(y_2) = g^-(y_2)$$

$$5. g^-(z_2) = g^-(y_2) \text{ bo } z_2, y_2 \text{ leżą w tym samym włóknie niestabilnym}$$

Ponieważ całą naszą rozmaitość możemy pokryć przez skończenie wiele takich "prostokątów" R , otrzymujemy wniosek: g^- i g^+ są stałe prawie wszędzie, i równe $\int g d\text{leb}$.

W następnym kroku dowodu pokażemy że to samo jest prawdą jeśli g zastąpimy dowolną funkcją $h \in L^1$. Niech $h \in L^1$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja g ciągła taka że $\|g - h\|_{L^1} < \varepsilon$.

Z twierdzenia ergodycznego wynika że prawie wszędzie istnieje, niekoniecznie stała granica

$$h_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n h \circ T^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum (h - g) \circ T^i + \frac{1}{n} \sum g \circ T^i$$

Wiemy już że druga granica jest równa stałej $\int g$. Otrzymujemy stąd wniosek- funkcja graniczna h_+ nie może różnić się bardzo od stałej. Dokładniej- mamy:

$$h_+ - \int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum (h - g) \circ T^i$$

Oznaczmy funkcję $k_n = \frac{1}{n} \sum (h - g) \circ T^i$. Z twierdzenia ergodycznego wynika że $k_n \rightarrow k = h_+ - \int g$ prawie wszędzie i w L^1 . Zatem

$$\int (|h_+ - \int g|) = \int |\lim k_n| = \|k\|_{L^1}$$

Normę $\|k\|_{L^1}$ można zaś oszacować:

$$\|k_n\|_{L^1} = \int \left| \frac{1}{n} \sum (h - g) \circ T^i \right| \leq \frac{1}{n} \sum \int |(h - g)| \circ T^i = \int |h - g|$$

Zatem

$$\|k\|_{L^1} = \lim \|k_n\|_{L^1} \leq \|h - g\|_{L^1}.$$

Wynika stąd więc że

$$\|h_+ - \int g\|_{L^1} \leq \|h - g\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Zatem h_+ różni się od stałej $\int h$ o mniej niż 2ε . Wobec dowolności ε , dowodzi to że h_+ jest stałe prawie wszędzie. Dowód ergodyczności przekształcenia T względem niezmienniczej miary Lebesgue'a jest więc zakończony. $\square$

Uwaga 13.1. Ergodyczność tego konkretnego przekształcenia można wykazać również inaczej (**zadanie**). Na tym prostym przykładzie prześledziliśmy jednak dość ogólną metodę dowodzenia ergodyczności.

Uwaga 13.2. Widzimy że dowód nie wykorzystywał szczególnych własności przekształcenia T ; wykorzystywał natomiast- strukturę hiperboliczną, czyli istnienie regularnych foliacji stabilnej i niestabilnej i zbudowanie z nich "prostokątów". Ten ogólny schemat dowodzenia ergodyczności przy istniejącej strukturze hiperbolicznej pochodzi od Hopfa. Poniżej sprawdzimy w tej sposób ergodyczność potoku geodezyjnego (oczywiście- nie każdego!).

13.2. Potok geodezyjny na rozmaitości o stałej ujemnej krzywiznie- ergodyczność

. W wykładzie 11 wykazaliśmy że potok geodezyjny na wiązce sfer $SM \subset TM$ zachowuje naturalną gładką miarę- miarę Liouville'a. W wykładzie 12 wykazaliśmy że potok geodezyjny na powierzchni o stałej ujemnej krzywiznie jest potokiem Anosowa. Wykorzystamy teraz te fakty i, stosując argument Hopfa wykażemy ważne

Twierdzenie 13.2. *Niech Γ będzie dyskretną grupą zachowującą orientację izometrii $\mathbb{H}^2$, działającą bez punktów stałych. Załóżmy też że rozmaitość $M = \mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$ jest zwarta. Wówczas potok geodezyjny na M jest ergodyczny względem miary Liouville'a (oznaczymy ją μ) na SM .*

Dowód. Podobnie jak w przypadku opisanym w poprzednim rozdziale, wystarczy wykazać że jeśli g jest funkcją ciągłą w SM to średnia ergodyczna

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T g(\varphi^t(x)) \quad (13.1)$$

jest stała prawie wszędzie. Ponadto, wystarczy wykazać że dla istnieje pokrycie SM zbiorami otwartymi (tak jak poprzednio- prostokątami), na których ta granica jest stała prawie wszędzie.

Widzimy więc że jest to ten sam dowód co poprzednio; należy tylko wskazać pokrycie SM zbiorami otwartymi (odpowiednikami wcześniejszych "prostokątów"), dla których będziemy umieli udowodnić że odpowiednia granica jest stała prawie wszędzie. Weźmy więc punkt $x = (p, v) \in S\mathbb{H}^2$. Załóżmy że w punkcie x istnieje granica 13.1 Z poprzedniego wykładu wiemy jak wygląda rozmaitość stabilna punktu (p, v) ; jest to rzut na M odpowiedniego horocyklu ("wchodzącego") - razem z jego wektorami normalnymi. Punkt $x = (p, v)$ należy oczywiście do tego horocyklu (a raczej: jego podniesienia w SM). Dla wszystkich punktów y z rozmaitości stabilnej x granica 13.1 istnieje i jest równa granicy policzonej w punkcie x . Słaba rozmaitość stabilna to suma wchodzących horocykli, wypuszczonych z wszystkich punktów (p', v') leżących na geodezyjnej wyznaczonej przez x .

Zauważmy że granica 13.1 jest varphi^t - niezmiennicza, więc istnieje i jest równa granicy policzonej w x , również we wszystkich punktach y należących do słabej rozmaitości stabilnej x .

Podobnie jak poprzednio, wykazujemy że jeśli $z_1 = (q_1, w_1), z_2 = (q_2, w_2)$ są blisko $x = (p, v)$ to można je połączyć "łańcuszkiem" rozmaitości stabilnych i niestabilnych i wykazać istnienie i równość granic 13.1 w punktach z_1 i z_2 .

rysunek

□

13.3. Potoki geodezyjne na wybranych powierzchniach; przykłady całkowalnych potoków geodezyjnych

W tym rozdziale opiszemy potoki na kilku naturalnych (dobrze znanych, i zanurzalnych izometrycznie w $\mathbb{R}^3$) powierzchniach. Ich własności są zupełnie inne niż opisane w poprzednim rozdziale własności potoków na powierzchniach o ujemnej krzywiznie.

13.3.1. Potok geodezyjny na sferze

Stwierdzenie 13.1. *Geodezyjne na sferze $\mathbb{S}^2$ są kołami wielkimi. Potok geodezyjny na wiązce sfer stycznych do $\mathbb{S}^2$ to ruch ze stałą (co do długości wektora) prędkością po kole wielkim. Zatem każda trajektoria jest okresowa. Potok geodezyjny nie jest więc oczywiście ergodyczny.*

Dowód. Niech γ będzie dowolną geodezyjną. Ustalmy punkt $p \in \gamma$ i koło wielkie c , które zawiera punkt p i dla którego jednostkowy wektor styczny w punkcie p pokrywa się z $\dot{\gamma}(p)$. Rozważmy symetrię względem płaszczyzny wyznaczonej przez koło wielkie c . Jest to oczywiście, po obcięciu do sfery, izometria w metryce sferycznej. Symetria ta zachowuje koło wielkie c , a geodezyjną $\gamma(t)$ przekształca na geodezyjną, przechodzącą przez ten sam punkt p i styczną w punkcie p

do tego samego co γ wektora. Stąd wynika (z jednoznacznego wyznaczenia geodezyjnej przez punkt i wektor styczny) że obrazem $\gamma(t)$ przy symetrii jest $\gamma(t)$, z zachowaniem parametryzacji, więc krzywa $\gamma(t)$ jest zawarta w zbiorze punktów stałych naszej symetrii. Zatem- jest to koło wielkie, po którym ruch odbywa się ze stałą prędkością. $\square$

13.3.2. Potok geodezyjny na torusie $\mathbb{T}^2$

Torus utożsamiamy z przestrzenią ilorazową:

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

$\mathbb{Z}^2$ działa na $\mathbb{T}^2$ jako grupa izometrii przestrzeni euklidesowej $(x, y) \mapsto (x + n, y + m)$, gdzie $n, m \in \mathbb{Z}$. Możemy zatem wprowadzić indukowaną metrykę na torusie; jest to jedyna metryka przy której rzutowanie $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ jest lokalną izometrią.

Ćwiczenie 13.1. Torus jest "lepiej znany" jako obiekt (powierzchnia opony) zanurzony w $\mathbb{R}^3$. Na takim zanurzonej torusie mamy metrykę Riemannowską dziedziczoną z $\mathbb{R}^3$ (długość wektora stycznego to długość zmierzona w $\mathbb{R}^3$, długość drogi na torusie też mierzymy licząc po prostu długość w $\mathbb{R}^3$. Wyjaśnić w jaki sposób torus-przestrzeń ilorazową utożsamiamy z torusem- "oponą" i jak mają się do siebie te dwie, różnie wprowadzone, metryki.

Stwierdzenie 13.2. *Geodezyjne na torusie pokrywają się z rzutami (przy kanonicznym rzutowaniu $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$) prostych w $\mathbb{R}^2$.*

Dowód. Najpierw sprawdzamy że geodezyjnymi na płaszczyźnie są wszystkie proste. Na przykład- tak samo jak dla geodezyjnych na sferze (należy użyć symetrii osiowej zamiast symetrii względem płaszczyzny). Ponieważ rzutowanie jest lokalną izometrią, obrazami (i przeciwobrazami) geodezyjnych są geodezyjne. $\square$

Wniosek 13.1. *Potok geodezyjny na wiązce sfer $S\mathbb{T}^2$ nie jest ergodyczny. Istotnie, możemy podzielić wiązkę $S\mathbb{T}^2$ na dwa niezmiennicze podzbiory dodatniej miary: Rozatrżmy w $S\mathbb{R}^2$ zbiór $A = \{(x, v) : x \in \mathbb{R}^2, \text{rev} \geq 0\}$ i $A' = \{(x, v) : x \in \mathbb{R}^2, \text{rev} < 0\}$. Zbiory A i A' są niezmiennicze przy potoku geodezyjnym w $\mathbb{R}^2$, zatem $\pi(A)$ i $\pi(A')$ są niezmiennicze przy potoku geodezyjnym na $\mathbb{T}^2$.*

13.3.3. Potok geodezyjny na elipsoidzie

14. O entropii metrycznej

14.1. Entropia rozbicia

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną.

Definicja 14.1. Rozbicie mierzalne $\xi = \{A_1, \dots, A_k\}$ - wszystkie A_i są mierzalne, parami rozłączne i $\bigcup A_i = X$.

Definicja 14.2. Niech ξ, η będą rozbiciami. Określamy rozbicie (drobniejsze od obu)

$$\xi \vee \eta$$

Jest to rozbicie składające się ze wszystkich zbiorów postaci:

$$A_i \cap B_j, A_i \in \xi, B_j \in \eta.$$

Definicja 14.3 (Entropia rozbicia). Niech ξ będzie rozbiciem mierzalnym, skończonym lub przeliczalnym.

$$H(\xi) = \sum_{a \in \xi} -\mu(a) \log \mu(a)$$

Ćwiczenie 14.1. Sprawdzić że, jeśli rozbicie ξ ma n elementów, to $H(\xi) \leq \log n$ i równość zachodzi dla rozbicia na n zbiorów o mierze $\frac{1}{n}$ każdy.

Definicja 14.4 (Entropia warunkowa). Niech ξ, η będą rozbiciami mierzalnymi, co najwyżej przeliczalnymi. Entropia ξ pod warunkiem η to

$$H(\xi|\eta) = - \sum_j \mu(B_j) \left(\sum_i \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)} \log \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)} \right)$$

Twierdzenie 14.1. Niech ξ, η, ζ będą rozbiciami. Wówczas:

1. $H(\xi \vee \eta|\zeta) = H(\xi|\zeta) + H(\eta|\xi \vee \zeta)$
2. $H(\xi \vee \eta) = H(\xi) + H(\eta|\xi)$
3. $\xi \leq \eta \Rightarrow H(\xi|\zeta) \leq H(\eta|\zeta)$
4. $\eta \leq \zeta \Rightarrow H(\xi|\eta) \geq H(\xi|\zeta)$
5. $H(\xi \vee \eta|\zeta) \leq H(\xi|\zeta) + H(\eta|\zeta)$
6. $H(\xi|\zeta) \leq H(\xi|\eta) + H(\eta|\zeta)$

Dowód. Dowód jest rachunkowy, zostawiony jako ćwiczenie

□

14.2. Entropia przekształcenia

Niech $T : X \rightarrow X$ będzie przekształceniem zachowującym miarę μ .

Stwierdzenie 14.1 (Stwierdzenie i definicja entropii przekształcenia na rozbiciu). *Niech ξ będzie rozbiciem co najwyżej przeliczalnym. Oznaczamy*

$$\xi_0^n = \xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{(n-1)}\xi.$$

Wówczas istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_0^n)$$

nazywamy ją entropią T względem rozbicia ξ i oznaczamy $h(T, \xi)$

Dowód. Wystarczy zauważyć że ciąg $H(\xi_0^n)$ jest podaddytywny. Mamy

$$H(\xi_0^{n+m}) + H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{(n+m-1)}\xi) = H((\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{(n-1)}\xi) \vee (T^{-n}(\xi \vee \dots \vee T^{-m}\xi)))$$

Z własności (5) w poprzednim twierdzeniu i z niezmienniczości miary, możemy prawą stronę oszacować z góry przez

$$H(\xi_0^n) + H(\xi_0^m)$$

□

Definicja 14.5 (Entropia przekształcenia). Niech T będzie przekształceniem zachowującym miarę. Entropia $h_\mu(T)$ to

$$h_\mu(T) = \sup_{\xi} h(T, \xi)$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich skończonych mierzalnych rozbiciach X .

Następujące ważne twierdzenie podajemy bez dowodu:

Twierdzenie 14.2 (Twierdzenie Shannona- Breimana- Mcmillana). *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ - przestrzeń z miarą probabilistyczną, T - ergodyczne przekształcenie zachowujące miarę μ , ξ - mierzalne rozbicie (skończone, albo przeliczalne, o skończonej entropii). Oznaczmy*

$$I(\xi_0^{n-1})(x) = -\log \mu(A_n(x))$$

(gdzie $A_n(x)$ jest elementem rozbicia ξ_0^{n-1} do którego należy punkt x). Wówczas:

$$\frac{1}{n} I(\xi_0^{n-1})(x) \rightarrow H(T, \xi)$$

prawie wszędzie i w $L^1(\mu)$.

Bezpośrednio z definicji entropii wynika:

Twierdzenie 14.3. *Entropia metryczna jest niezmiennikiem izomorfizmu miarowego przekształceń: jeśli T zachowuje miarę μ na przestrzeni X , zaś S zachowuje miarę ν na przestrzeni Y , i istnieje mierzalna bijekcja $h : X \rightarrow Y$ przekształcająca miarę μ na miarę ν taka że $S \circ h = h \circ T$, to $h_\mu(T) = h_\nu(S)$.*

14.3. Jak liczyć entropię metryczną

Widać że wyznaczenie entropii wymaga - według definicji- policzenia supremum po wszystkich skończonych rozbiciach. W wielu przypadkach można jednak wyliczyć entropię powołując się na twierdzenie poniżej:

Definicja 14.6. Niech T będzie automorfizmem przestrzeni z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Rozbicie ξ nazywamy dwustronnym generatorem, jeśli najmniejsze σ -ciało zawierające wszystkie zbiory należące do rozbić $\bigvee_{-N}^N T^n \xi$ jest równe $\mathcal{F}$.

Twierdzenie 14.4. Niech T będzie automorfizmem przestrzeni z miarą $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Załóżmy że ξ jest dwustronnym generatorem. Wówczas

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi).$$

Przykład 14.1. Niech T będzie obrotem na okręgu. Policzmy entropię względem miary Lebesgue'a.

Jeśli kąt obrotu jest współmierny z π , to $T^k = \text{Id}$ dla pewnego k , a to oznacza że dla każdego skończonego rozbięcia ξ liczność rozbięcia $\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n}\xi$ jest ograniczona przez stałą niezależną od n . Zatem $H(\bigvee_{i=1}^n T^{-i}\xi)$ jest ograniczone, a stąd $h(t) = 0$.

Jeśli kąt obrotu nie jest współmierny z π to rozbicie ξ na dwa półokręgi jest dwustronnym generatorem (dlaczego); zatem- entropię można policzyć na tym rozbięciu.

Rozbicie $\bigvee_0^{n-1} T^{-i}\xi$ ma co najwyżej $2n$ elementów (dlaczego?) Stąd wynika że $\frac{1}{n}H(\bigvee_0^{n-1} T^{-i}\xi) \rightarrow 0$.

Wykazaliśmy więc że entropia obrotu na okręgu, względem miary Lebesgue'a, jest równa zero.

Przykład 14.2 (Przesunięcie Bernoulliego). Niech $Y = \{0, 2, \dots, k-1\}$. Niech $X = \prod_{-\infty}^{\infty} Y$. Elementami X są więc nieskończone ciągi dwustronne, o wyrazach należących do zbioru Y . W Y wprowadzamy miarę, która każdemu elementowi i przyporządkowuje wagę p_i ; w X wprowadzamy miarę produktową, a σ -ciele generowanym przez wszystkie zbiory cylindryczne, postaci $x_{-n} = a_{-n}, \dots, x_0 = a_0, \dots, x_n = a_n$. Przekształceniem T jest przesunięcie ciągu w lewo o jedno miejsce. Oczywiście rozbicie ξ na cylindry pierwszej generacji:

$$x_0 = a_0$$

jest dwustronnym generatorem i można policzyć entropię na tym rozbięciu:

$$\begin{aligned} h_\mu(T) &= \lim \frac{1}{n} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\xi) = - \lim \frac{1}{n} \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_{n-1}} \log p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_{n-1}} \\ &= - \lim \frac{1}{n} \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}=0}^{k-1} p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_{n-1}} (\log p_{i_0} + \log p_{i_1} + \dots + \log p_{i_{n-1}}) \\ &= - \lim \frac{1}{n} \left[p_0 \log p_0 \left(\sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} p_{i_1} \dots p_{i_{n-1}} \right) + p_1 \log p_1 \left(\sum_{i_0, i_2, \dots, i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_2} \dots p_{i_{n-1}} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (14.1)$$

Ponieważ każda z sum w nawiasach jest równa 1 (dlaczego?), otrzymujemy

$$h_\mu(T) = - \sum p_i \log p_i.$$

Zatem- na przykład: przesunięcie Bernoulliego z wagami $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ i z wagami $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ nie są izomorficzne, bo mają różne entropie.

Przesunięcia z wagami $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ mają tę samą entropię, równą $2 \log 2$. W latach sześćdziesiątych Mieszałkin wykazał że te dwa ostatnie układy są izomorficzne (choć mają różne liczby stanów). Późniejsze, słynne twierdzenie Ornsteina mówi, że dwa przesunięcia Bernoulliego są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe entropie metryczne.

15. O entropii topologicznej

15.1. Definicja entropii

Ograniczymy się do zdefiniowania entropii topologicznej dla ciągłego przekształcenia zwartej przestrzeni metrycznej. Zatem X jest przestrzenią zwartą metryczną z metryką d , $T : X \rightarrow X$ - ciągłym przekształceniem.

Definicja 15.1. Odległość d_n między punktami $x, y \in X$ to

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i < n} (d(T^i x, T^i y))$$

Definicja 15.2. Mówimy że punkty x, y , są (n, ε) -rozdzielone, jeśli $d_n(x, y) > \varepsilon$. Zbiór punktów (n, ε) -rozdzielonych to zbiór w którym każde dwa różne elementy są (n, ε) -rozdzielone.

Definicja 15.3. Mówimy że punkty $x_1, \dots, x_k$ stanowią (n, ε) -sieć jeśli dla każdego $y \in X$ istnieje x_i takie że $D_n(y, x_i) < \varepsilon$.

Oznaczmy przez $s(n, \varepsilon)$ maksymalną liczebność zbioru (n, ε) -rozdzielonego, a przez $r(n, \varepsilon)$ minimalną liczebność (n, ε) -sieci.

Definicja 15.4 (Definicja entropii topologicznej). Entropia topologiczna $h(T)$ jest to

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \varepsilon)$$

Ta definicja wymaga uzasadnienia: po pierwsze- w każdej z tych dwóch formuł trzeba sprawdzić czy istnieje granica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$, po drugie- że obie formuły prowadzą do tego samego wyniku. Sprawdzenie jest zawarte w Stwierdzeniu - poniżej. Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Stwierdzenie 15.1. Mamy:

$$r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon)$$

$$s(n, 2\varepsilon) \leq r(n, \varepsilon)$$

Ponadto, dla $\varepsilon > \varepsilon'$ mamy $s(n, \varepsilon') > s(n, \varepsilon)$, $r(n, \varepsilon') > r(n, \varepsilon)$

Przykład 15.1 (Izometria). Niech $T : X \rightarrow X$ będzie izometrią, na przykład- obrotem na okręgu. Wówczas $h(T) = 0$. Istotnie, ustalmy ε i jakąś ε sieć (w naszej notacji jest to $(1, \varepsilon)$ -sieć S o liczebności $N = N(\varepsilon)$). Ponieważ T jest izometrią, ten sam zbiór S jest też $(n\varepsilon)$ -siecią. Zatem liczebność minimalnej (n, ε) sieci nie rośnie z n . Stąd $h(T) = 0$.

Ćwiczenie 15.1 (Przekształcenie $z \mapsto z^d$). Sprawdzić że entropia tego przekształcenia jest równa $\log d$. Wskazówka: dla ustalonego n możemy podzielić okrąg na d^n łuków, z których każdy jest przekształcany (rozciągany) przez T^n na cały okrąg. W każdym takim łuku wybieramy $\frac{1}{\varepsilon}$ równo odległych punktów. Te wszystkie punkty (jest ich razem $\frac{1}{\varepsilon} 2^n$) stanowią zbiór (n, ε) -rozdzielony.

Ćwiczenie 15.2 (Trudniejsza wersja). Niech M będzie Riemannowską zwartą rozmaitością, a $T : M \rightarrow M$ - rozszerzającym przekształceniem, tzn istnieje $\lambda > 1$ takie że $\|DT_x(v)\| \geq \lambda \|v\|$. Uzasadnić że wówczas T jest nakryciem; niech d będzie stopniem tego nakrycia. Wykazać że $h(T) = \log d$.

Ćwiczenie 15.3. Niech T będzie hiperbolicznym automorfizmem torusa $\mathbb{T}^2$. Wówczas macierz A reprezentująca T ma dwie rzeczywiste wartości własne $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$. Wykazać że $h(T) = \log \lambda_1$.

Stwierdzenie 15.2. *Jeśli $(X, d_1), (Y, d_2)$ są przestrzeniami metrycznymi zwartymi, $T : X \rightarrow X$, $S : Y \rightarrow Y$ są sprzężone topologicznie, to $h(T) = h(S)$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ takie że $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(h(x), h(y)) < \varepsilon$. Wynika stąd że jeśli G jest zbiorem (n, ε) rozdzielonym dla S , to $h^{-1}(G)$ jest zbiorem (n, δ) -rozdzielonym dla T . Zatem

$$s_T(n, \delta) \geq s_S(n, \varepsilon)$$

Stąd już łatwo wynika że $h(T) \geq h(S)$. □

15.2. Związki z entropią metryczną

Następujące dwa twierdzenia podajemy bez dowodu:

Twierdzenie 15.1 (Twierdzenie Goodwyna). *Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, $T : X \rightarrow X$ -ciągłym przekształceniem, μ -miarą borelowską probabilistyczną na X , niezmienniczą dla T . Wówczas:*

$$h_\mu(T) \leq h(T)$$

Wzmocnieniem jest silniejsze twierdzenie

Twierdzenie 15.2 (Twierdzenie Goodmana). *Przy poprzednich założeniach, mamy*

$$h(T) = \sum_{\mu} h_\mu(T)$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich niezmienniczych borelowskich miarach probabilistycznych.

15.3. Związki ze stopniem przekształcenia

Definicja 15.5. Niech M będzie zwartą, zorientowaną rozmaitością gładką, $T : M \rightarrow M$ -gładkim przekształceniem. Na M mamy więc naturalną miarę Lebesgue'a. Niech x będzie wartością regularną (tw Sarda gwarantuje że jest to zbiór pełnej miary). Stopniem przekształcenia t w x nazywamy

$$\deg_x T = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \varepsilon_y$$

gdzie ε_y jest równe 1 lub -1 w zależności od tego czy $DT(y)$ zmienia czy zachowuje orientację.

Uwaga 15.1. Można sprawdzić że w istocie, stopień $\deg_x T$ nie zależy od wyboru punktu x - wartości regularnej. Zatem- możemy zdefiniować $\deg T$ - jako wspólną wartość $\deg_x T$ dla wszystkich wartości regularnych x .

Twierdzenie 15.3 (Misiurewicz, Przytycki). *Jeśli M jest gładką orientowalną rozmaitością, a $T : M \rightarrow M$ - przekształceniem klasy C^1 to $h(T) \geq \log |\deg T|$.*

Literatura